МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ НА РЫНКЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

Московкин В.М., Билаль Н.Е. Сулейман

Белгородский государственный университет, г. Белглрод, Россия

email. moskovkin@bsu.edu.ru., http://www.wiw-rf.ru/memberPerson/46275

Проделан качественный анализ динамической системы третьего порядка, описывающей взаимодействие спроса и предложения на рынке образовательных услуг, и предложенный Л А Серковым. Качественное исследование подтвердило ранее полученные теоретические результаты Л.А. Серкова по редуцированным моделям и его численным экспериментам по исходной трехмерной модели Данная модель была усложнена с помощью замены простейшего релаксационного члена в третьем уравнении динамической системы (отвечающий за процесс качества подготовки специалистов) на логистический член. Это привело к увеличению числа особых точек с 2 до 3 и позволило получить некоторые новые качественные результаты, касающиеся устойчивости особых точек.

Ключевые слова: математическое моделирование спрос и предложение на рынке образовательных услуг, динамические системы третьего порядка, устойчивость особых точек

В работах В. А. Буланичева и Л.А. Серкова [1, 2] на основе модели Лоренца [3] построена модель самоорганизующейся образовательной системы, описывающей взаимодействие спроса и предложения на рынке образовательных услуг. Для пространственно однородной образовательной системы уравнения имели вид

$$\begin{cases} \dfrac{dD}{dt} = -a_1 D + a_2 S \\ \dfrac{dS}{dt} = -b_1 S + b_2 DU \\ \dfrac{dU}{dt} = -c_1 (U - U_e) - c_2 SD. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь D – функция спроса на выпускников вуза, S – объем продукта предложения образовательной системы, U – управляющий параметр, связанный с качеством подготовки выпускников вуза (например, отношение числа выпускников вуза, работающих по специальности к среднему значению этого показателя для вузов данной категории).

Первые члены динамической системы являются релаксационными и связаны с затуханиями спроса, предложения и управляющего параметра по мере насыщения рынка труда специалистами соответствующего уровня. Второй член первого уравнения системы (1) связан с взаимодействием рынка труда с образовательной системой и ростом спроса (a_2 – коэффициент спроса). Второй член второго уравнения системы (1) отражает наличие положительной обратной связи между спросом специалистов D и уровнем их качества (b_2 – коэффициент связи). В третьем уравнении управляющий параметр релаксирует к стационарному значению U_e, обусловленному внешним воздействием среды и соответствующему требованиям рынка труда. Такая релаксация происходит, когда S или D (или обе переменные вместе) стремятся к нулю. Наконец, второй член третьего уравнения системы (1) отражает наличие отрицательной обратной связи (c_2 – коэффициент связи), обусловленной тем, что на изменение управляющего параметра отрицательно влияют S и D (ориентация на массовое предложение отрицательно влияет на качество и спрос выпускников)

Все величины, входящие в модель (1), характеризуют поведение системы как целого, то есть представляют значения, усредненные по объему системы (ансамблю всех подсистем и процессов)

Здесь основой синергетического подхода является то обстоятельство, что положительная обратная связь переменных $D(t)$, $U(t)$ с переменной $S(t)$, зависящими от времени, приводит к самоорганизации системы

Вид динамической системы (1) совпадает с уравнениями Лоренца [1-3], записанными в перенормированных переменных Запись уравнений Лоренца в форме (1) обусловлена выделением в явном виде параметра U_e, отражающего связь системы с внешней средой и влияющего на самоорганизацию Этот параметр задает образовательной системе определенные критерии качества учебного процесса

В дальнейшем с помощью введения в систему (1) времен релаксации и с помощью принципа подчинения быстрых мод медленным [4], в зависимости от соотношения этих времен, были получены различные картины самоорганизации образовательных систем [1, 2]

Так как в работах [1, 2] теоретически рассматривались только редуцированные системы уравнений (динамические системы второго порядка), следующие из трехмерной динамической системы (1), то рассмотрим подробно эту динамическую систему Ее особые точки получим в виде

Характеристическое уравнение для динамической системы (1) запишется в виде

Для первой особой точки это уравнение примет вид

1 $$\left(D^*,S^*,U^*\right)=\left(0,\ 0,\ U_e\right),$$

2 $$\left(D^*,S^*,U^*\right)=\left(\sqrt{\frac{c_1a_2}{c_2a_1}\left(U_e-U_c\right)},\ \frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{c_1a_2}{c_2a_1}\left(U_e-U_c\right)},\ U_c\right),$$

где $U_e > U_c = \dfrac{a_1b_1}{a_2b_2} > 0.$

Из кубического характеристического уравнения (3) получим

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-a_1-\lambda & a_2 & 0\\ b_2U^* & -b_1-\lambda & b_2D^*\\ -c_2S^* & -c_2D^* & -c_1-\lambda\end{vmatrix}=0. \quad \mathbf{(2)}$$

Если $U_e > U_c$, $\dfrac{\left(a_1+b_1\right)^2}{4}\geq a_2b_2\left(U_c-U_e\right)$,

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-a_1-\lambda & a_2 & 0\\ b_2U_e & -b_1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -c_1-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=\left(-c_1-\lambda\right)\left[\left(-b_1-\lambda\right)\left(-a_1-\lambda\right)-a_2b_2U_e\right]=$$
$$=\left(-c_1-\lambda\right)\left[\lambda^2+\left(a_1+b_1\right)\lambda+\left(U_c-U_e\right)a_2b_2\right]=0. \quad \mathbf{(3)}$$

то $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, и приходим к устойчивому узлу (при $U_c = U_e$ имеем $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 = -c_1 < 0; \qquad \lambda_{2,3} = -\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{(a_1 + b_1)^2}{4} - a_2 b_2 (U_c - U_e)}.$$

Если $U_c > U_e$, $\frac{(a_1 + b_1)^2}{4} < a_2 b_2 (U_c - U_e)$, то $\lambda_{1,2}$ имеют комплексно-сопряженный вид с отрицательной действительной частью, и приходим к устойчивому фокусу.

Если $U_c < U_e$, то $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, и приходим к седлу.

Для второй особой точки характеристическое уравнение (2) примет вид

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a_1 - \lambda & a_2 & 0 \\ b_2 U_e & -b_1 - \lambda & b_2 \bar{A} \\ -\frac{a_1 c_2}{a_2} \bar{A} & -c_2 \bar{A} & -c_1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-a_1 - \lambda) \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & b_2 \bar{A} \\ -c_2 \bar{A} & -c_1 - \lambda \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_2 U_e & b_2 \bar{A} \\ -\frac{a_1 c_2}{a_2} \bar{A} & -c_1 - \lambda \end{vmatrix} = \tag{4}$$

$$= -\lambda^3 - (a_1 + b_1 + c_1)\lambda^2 - \left(a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1 - b_2 c_2 \bar{A}^2 + a_2 b_2 U_c\right)\lambda -$$
$$-2 a_1 b_2 c_2 \bar{A}^2 - a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_1 U_c = 0,$$

где $$\bar{A} = \sqrt{\frac{c_1 a_2}{c_2 a_1}(U_e - U_c)}.$$

В окончательном виде уравнение (4) запишем следующим образом

$$\lambda^3 + (a_1 + b_1 + c_1)\lambda^2 +$$
$$+\left[2 a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1 - \frac{c_1 c_2 b_2}{a_1}(U_e - U_c)\right]\lambda + \tag{5}$$
$$+2 b_2 a_2 c_1 (U_e - U_c) = 0.$$

В этом уравнении свободный член больше нуля ($U_e > U_c$) и изменять знак может только коэффициент при λ.

Применим к уравнению (5) условия Рауса-Гурвица.

Согласно этих условий, для того, чтобы все корни произвольного кубического уравнения

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \tag{6}$$

с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица для уравнения (6)

$$G=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(7)}$$

были положительны:

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}=a_2a_3>0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_3>0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0. \qquad (8)$$

В нашем случае, эти условия для второй особой точки примут вид

$$\begin{cases} 2a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1-\dfrac{c_1c_2b_2}{a_1}(U_e-U_c)>0 \\ (a_1+b_1+c_1)(2a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1)-\dfrac{c_1b_2}{a_1}(U_e-U_c)(a_1c_2+b_1c_2+c_1c_2-2a_1a_2)>0. \end{cases} \qquad \mathbf{(9)}$$

Рассмотрим два частных случая.

1. $a_1=b_1=c_1=a_2=b_2=c_2=1,$ откуда следует, что $U_c=1$

В этом случае система неравенств (9) приводится к виду

$$1<U_e<\frac{17}{5}.$$

2. $a_1=b_1=a_2=b_2=1, \quad c_1=c_2=c$

В этом случае система неравенств (9) приводится к виду

$$\begin{cases} c^3(U_e-1)-2c^2(2-U_e)+2c(U_e-4)-4<0 \\ 0<c<\dfrac{1+\sqrt{1+2(U_e-1)}}{U_e-1}. \end{cases} \qquad (10)$$

Посмотрим в какие неравенства перейдет первое неравенство этой системы на границах второго неравенства этой же системы Легко видеть, что при $c = 0$ оно удовлетворяется Подставляя первую границу второго неравенства системы (10) в первое неравенство этой системы, получим

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+2(U_e-1)}}{U_e-1}\right)^3 (U_e-1)-2\left(\frac{1+\sqrt{1+2(U_e-1)}}{U_e-1}\right)^2 (2-U_e)+ \\ +2\left(\frac{1+\sqrt{1+2(U_e-1)}}{U_e-1}\right)(U_c-4)-4<0. \qquad (11)$$

В случае, когда U_c стремится к единицы левая часть неравенства (11) стремится к минус бесконечности, а при возрастании U_c она быстро возрастает Например, при $U_c = 2$ оно уже не выполняется Таким образом, в интервале $1 < U_c < 2$ существует некоторое пороговое значение параметра U_c, разделяющее области устойчивости и неустойчивости второй особой точки во втором частном случае Например, если взять значение $U_c = \frac{3}{2}$, которое использовалось в численных экспериментах с моделью (1) в работах [1, 2], то неравенство (11) примет заведомо выполняющейся вид $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-10-4\sqrt{2}\right)-4<0$ Таким образом, в этом случае вторая особая точка является устойчивым узлом, что было показано в результате численных экспериментов в работах [1, 2]

Если вместо релаксационного члена в третьем уравнении динамической системы (1) взять логистический член, то эту систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dD}{dt} = -a_1 D + a_2 S \\ \dfrac{dS}{dt} = -b_1 S + b_2 DU \\ \dfrac{dU}{dt} = \alpha U - \beta U^2 - c_2 SD. \end{cases} \qquad (12)$$

Ее особые точки запишем в виде:

1 $\left(D^*, S^*, U^*\right) = (0,\ 0,\ 0)$,

2 $\left(D^*, S^*, U^*\right) = \left(0,\ 0,\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$;

3 $\left(D^*, S^*, U^*\right) = \left(\sqrt{\dfrac{b_1\beta}{b_2 c_2}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-U_c\right)},\ \dfrac{a_1}{a_2}\sqrt{\dfrac{b_1\beta}{b_2 c_2}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-U_c\right)},\ U_c\right)$,

где $U_c = \dfrac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$, $\dfrac{\alpha}{\beta} > U_c$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ – аналог U_e предыдущей задачи

Характеристическое уравнение для динамической системы (12) запишется в виде

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -a_1-\lambda & a_2 & 0 \\ b_2U^* & -b_1-\lambda & b_2D^* \\ -c_2S^* & -c_2D^* & \alpha-2\beta U^*-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Для первой тривиальной особой точки характеристическое уравнение (13) приводится к виду

$$|A-\lambda I| = (\alpha-\lambda)(-a_1-\lambda)(-b_1-\lambda) = 0,$$

и следовательно, приходим к неустойчивому узлу.

Для второй особой точки получим следующее характеристическое уравнение

$$|A-\lambda I| = (-\alpha-\lambda)\left[\lambda^2+(a_1+b_1)\lambda+a_2b_2\left(U_c-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = 0, \qquad (14)$$

которое имеет тот же вид, что и уравнение (3), если в нем положить $c_1=\alpha$, $U_c=\frac{\alpha}{\beta}$. Тогда, если $U_c>\frac{\alpha}{\beta}$, то приходим к устойчивой особой точке, которая в зависимости от знака неравенства $\frac{(a_1+b_1)^2}{4} \gtrless a_2b_2\left(U_c-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ будет устойчивым узлом или фокусом. В случае, если $U_c<\frac{\alpha}{\beta}$, то приходим к седловой неустойчивой точке.

Таким образом, для второй особой точки результаты качественного анализа ее устойчивости те же, что и для первой особой точки предыдущей задачи.

Характеристическое уравнение для третьей особой точки примет вид

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -a_1-\lambda & a_2 & 0 \\ b_2U_c & -b_1-\lambda & b_2\tilde{A} \\ -\frac{a_1c_2}{a_2}\tilde{A} & -c_2\tilde{A} & \alpha_2-2\beta U_c-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

где $$\tilde{A} = \sqrt{\frac{b_1\beta}{b_2c_2}\left(\frac{\alpha}{\beta}-U_c\right)}$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая:

1. $\alpha-2\beta U_c<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\beta}<U_c<\frac{\alpha}{\beta}$ – совпадает с предыдущим анализом $(\alpha-2\beta U_c=-c_1<0)$.

2. $\alpha-2\beta U_c>0 \Leftrightarrow 0<U_c<\frac{\alpha}{2\beta}$.

Во втором случае след матрицы A ( ) может равняться нулю, в отличие от первого случая, когда он отрицательный. Характеристическое уравнение (15) приводится к виду

$$\lambda^3 + (a_1 + b_1 - \alpha + 2\beta U_c)\lambda^2 + \\ +\left[2a_1b_1 + \beta U_c(2a_1 + 3b_1) - \alpha(a_1 + 2b_1)\right]\lambda + \\ +2a_1b_1(\alpha - \beta U_c) = 0. \qquad (16)$$

Применяя к уравнению (16) условия Рауса-Гурвица (6–8), придем к следующим условиям на устойчивость третьей особой точки.

$$\begin{cases} 2a_1b_1 + \beta U_c(2a_1 + 3b_1) - \alpha(a_1 + 2b_1) > 0 \\ a_1 + b_1 - \alpha + 2\beta U_c > 0 \\ (a_1 + b_1 - \alpha + 2\beta U_c)\left[2a_1b_1 + \beta U_c(2a_1 + 3b_1) - \alpha(a_1 + 2b_1)\right] - 2a_1b_1(\alpha - \beta U_c) > 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Отметим, что в эту систему неравенств, в отличие от системы неравенств (9), не входит параметр c_2 (он входит в координаты особой точки).

Рассмотрим частный случай, когда $a_1 = b_1 = 1$ $\left(U_c = \dfrac{1}{a_2b_2}\right)$. В этом случае система неравенств (17) запишется в виде

$$\begin{cases} 5\beta U_c - 3\alpha + 2 > 0 \\ 2\beta U_c - \alpha + 2 > 0 \\ (2\beta U_c - \alpha + 2)(5\beta U_c - 3\alpha + 2) - 2(\alpha - \beta U_c) > 0. \end{cases} \qquad (18)$$

К этой системе неравенств необходимо добавить еще неравенство $0 < U_c < \dfrac{\alpha}{2\beta}$ (второй случай при рассмотрении характеристического уравнения (15)), которое эквивалентно неравенству

$$0 < \beta U_c < \frac{\alpha}{2}. \qquad (19)$$

Делая замену $\beta U_c = z$, рассмотрим систему неравенств (18, 19). Третье неравенство системы неравенств (18) приведем к виду

$$10z^2 + (16 - 11\alpha)z + 3\alpha^2 - 10\alpha + 4 > 0. \qquad (20)$$

и рассмотрим его на границах интервала (19), который с учетом вышеуказанной замены, преобразуется к интервалу $0 < z < \dfrac{\alpha}{2}$.

При $z = 0$ неравенство (20) переходит в неравенство $\alpha^2 - \dfrac{10}{3}\alpha + \dfrac{4}{3} > 0$, которое имеет решения $0 < \alpha < \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$, $\alpha > \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$, из которых только первое решение удовлетворяет двум остальным неравенствам системы неравенств (18): $-3\alpha + 2 > 0$, $-\alpha + 2 > 0$. Этот случай справедлив при предельном переходе $z \to 0 \Leftrightarrow \beta \to 0$, когда

$$\left(D^*,\, S^*,\, U^*\right)=\left(\sqrt{\frac{b_1\alpha}{b_2c_2}},\ \frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{b_1\alpha}{b_2c_2}},\ U_{\tilde{n}}\right).$$

При $z=\frac{\alpha}{2}$ неравенство (20) переходит в неравенство $\alpha < 2$, при этом второе неравенство системы неравенств (18) переходит в тождественное неравенство ($2 > 0$), а первое – в $\alpha < 4$. Таким образом, на правой границе неравенства 19) система неравенств (18) удовлетворяется при $\alpha < 2$, и следовательно, в этом случае третья особая точка динамической системы (12) при $a_1 = b_1 = 1$ является устойчивым узлом.

Таким образом, в развитие работ [1, 2] мы проделали качественное исследование исходной трёхмерной модели, что подтвердило раннее полученные теоретические результаты В.А. Буланичева и Л.А. Серкова по редуцированным моделям и их численные эксперименты по исходной трехмерной модели. Данная модель была усложнена с помощью замены простейшего релаксационного члена в третьем уравнении динамической системы (отвечающий за процесс качества подготовки специалистов) на логистический член. Это привело к увеличению числа особых точек с 2 до 3 и позволило получить некоторые новые качественные результаты, касающиеся устойчивости второй и третьей особой точки (первая тривиальная особая точка являлась неустойчивым узлом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланичев В.А., Серков Л.А. Модельный подход к функционированию вузов как самоорганизующихся систем // Информационные технологии. – 2006. – № 3. – С. 68 – 73.

2. Серков Л.А. Синергетические аспекты моделирования социально-экономических процессов. – Екатеринбург: ИЭУрО РАН; Изд-во АМБ, 2008. – 216 с.

3. Lorenz E.N. Deterministic Non-periodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1963. – Vol. 20. – P. 130.

4. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 404 с.

MATHEMATICAL MODELING OF DEMAND AND SUPPLY IN THE MARKET OF EDUCATIONAL SERVICES

Moskovkin V.M., Bilal N.E. Sulejman

The qualitative analysis of dynamic system of the third order is made. It describes the interaction of demand and supply in the market of educational services, and it offered by L.A. Serkov. Qualitative research has confirmed the theoretical results, received earlier on the reduced models and its numerical experiments on initial three-dimensional model. The given model has been complicated by means of replacement of the elementary relaxational term in the third equation of dynamic system (responsible for process of quality of experts' preparation) on a logistical term. It has led to increase in number of critical points from 2 to 3 and has allowed to receive some new qualitative results, concerning stability of critical points.

Keywords: Mathematical modeling, demand and supply in the market of educational services, dynamic system of the third order, stability of critical points