

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА, ВСТРЕЧАЮЩАЯСЯ ПРИ АНАЛИЗЕ НАЗЕМНЫХ И МОРСКИХ ЭКОГЕОСИСТЕМ

Доктор географических наук, профессор В. М. МОСКОВКИН
Харьковский государственный университет

В [1] была предложена динамическая автономная система второго порядка, описывающая взаимодействующие процессы эрозии почв и изменения биомассы наземного яруса. Следует отметить, что в этой работе не был проделан строгий математический анализ предложенной динамической системы. Впоследствии аналогичная динамическая система была получена при изучении процесса взаимодействия донной абразии с биомассой бентоса (донного биоценоза) [2]. Автор [2] проделал достаточно строгий анализ устойчивости особых точек и бифуркаций, возникающих в данной системе (которая, на наш взгляд, может рассматриваться в одном ряду с такими классическими динамическими системами в экологии, как вольтерровские — модели тина “хищник—жертва”), и продолжает его в настоящей работе.

Согласно [2], динамика морской береговой системы “донная абразия—бентос” описывается следующей динамической системой второго порядка, представленной в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y(1-y) - a_1 x \\ \frac{dx}{dt} &= -a_2 y + a_3(1-x)x \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ — безразмерные величины биомассы бентоса (зоо- и фитобентоса) и интенсивности донной абразии, t — безразмерное время, a_1, a_2, a_3 — положительные безразмерные параметры.

Особые точки системы (1) находятся из решения кубического уравнения [2]

$$x^3 - 2x^2 + \left(1 + \frac{a_2}{a_3}\right)x + \frac{a_1 a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_2}{a_3} = 0, \quad (2)$$

причем начало координат также является особой точкой.

Для анализа бифуркаций динамической системы (1) используем параметрический метод построения бифуркационных (граничных) кривых [3], который не использовался нами в работе [2]. Для этого обозначим произвольную особую точку системы (1) через (x_*, y_*) , тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} y_*(1-y_*) - a_1 x_* &= 0 \\ -a_2 y_* + a_3 x_*(1-x_*) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Выразив a_2 через y_* , получим:

$$a_2 = \frac{a_3}{a_1} (1-y_*) [a_1 - y_*(1-y_*)]. \quad (4)$$

Граничная кривая области параметров, при которых существуют три различных состояния равновесия, исключая нулевое, определяется из условия $da_2(y_*)/dy_* = 0$, откуда искомая кривая приобретает следующий параметрический вид:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{a_3}{a_1} (1-y_*) [a_1 - y_*(1-y_*)] \\ a_1 = (1-y_*)(3y_* - 1) \end{cases} \quad (5)$$

Исключая параметр a_1 , приходим к окончательному выражению

$$\begin{cases} a_2 = \frac{a_3(2y_* - 1)}{(3y_* - 1)^2} \\ a_1 = (1-y_*)(3y_* - 1) \end{cases} \quad (6)$$

Покажем, что эта кривая совпадает с параметрическим представлением границы седел. Действительно, матрица линеаризованной системы (1) имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} a_3(1-2x_*) & -a_2 \\ -a_1 & 1-2y_* \end{vmatrix}, \quad (7)$$

откуда граница седел определяется уравнением

$$\det \tilde{A} = a_3(1-2x_*)(1-2y_*) - a_1 a_2 = 0, \quad (8)$$

которое с учетом выражений (3, 4) приводится ко второму выражению параметрического представления (6), что и подтверждает наше предположение.

Граница устойчивости узлов и фокусов определится из уравнения

$$\text{tr} \tilde{A} = a_3(1-2x_*) + 1 - 2y_* = 0. \quad (9)$$

и после ряда несложных алгебраических преобразований ее можно выразить с помощью следующего параметрического представления:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2a_3 y_*(1-y_*)}{a_3 - (2y_* - 1)} \\ a_2 = \frac{a_3^2 - (2y_* - 1)^2}{4a_3 y_*} \end{cases} \quad (10)$$

Согласно (8), граница седел при $a_1, a_2, a_3 > 0$ существует в областях

$$\begin{cases} x_* < \frac{1}{2}, y_* < \frac{1}{2} \\ z_* > \frac{1}{2}, y_* > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (11)$$

В то же время, согласно (9), граница устойчивости узлов и фокусов существует в двух других непересекающихся областях единичного квадрата ($a_3 > 0$)

$$\begin{cases} x_* < \frac{1}{2}, y_* > \frac{1}{2} \\ x_* > \frac{1}{2}, y_* < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (12)$$

При $\text{tr} \tilde{A} = 0$ из выражения (8) получим

$$\det \tilde{A} = -(1 - 2y_*)^2 - a_1 a_2 < 0, \quad (13)$$

что указывает на невозможность возникновения бифуркации рождения цикла в рассматриваемой системе.

Таким образом, в данной системе возникают только бифуркации типа “узел–седло” на кривой (6). Исключая параметр y_* из выражений (6), придем к непараметрическому заданию этой кривой:

$$a_1 = \frac{18a_2 a_3 - 4a_3^2}{54a_2^2} \pm \frac{\sqrt{(18a_2 a_3 - 4a_3^2)^2 - 108(4a_2 a_3 - a_3^2)a_2^2}}{54a_2^2}. \quad (14)$$

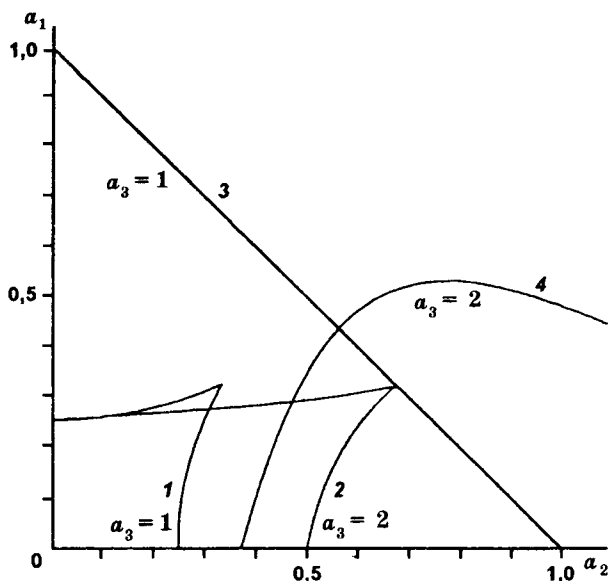
В [2] показано, что выражение (14) получается, если приравнять нулю дискриминант кубического уравнения (2), что эквивалентно совпадению двух его действительных корней (для трех действительных корней возможны два варианта попарного их совпадения (вырождения), в зависимости от знака).

Уравнение кривой (10) в непараметрическом виде примет вид:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{a_3^2 - (a_1/2a_3 \pm 2z)^2}{2a_3 + a_1 \pm 4a_3 z} \\ z = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{4a_3}\right)^2} - \frac{a_1}{2} \end{cases} \quad (15)$$

Кривые (6(14)) и (10(15)) при $a_3 = 1, 2$ в области $a_1, a_2 \geq 0$ показаны на рисунке. Отметим, что при $a_3 = 2$ ветвь $\text{tr} \tilde{A} = 0$ в положительной области параметров a_1, a_2 соответствует крутовосходящей ветви $\det \tilde{A}$, с которой она пересечений не имеет. Точка пересечений вышеуказанных кривых соответствует двум разным парам особых точек (x_*, y_*) . Все это дополнительно иллюстрирует отсутствие бифуркации рождения цикла (бифуркации Хопфа) в системе (1).

Нулевая особая точка является неустойчивым узлом (фокусом), а при наличии трех ненулевых особых точек одна из них является устойчивым узлом, а две — седловыми точками. Таким образом, реальная экосистема, в некоторой области начальных условий



Бифуркационные кривые (14) (1, 2) и (15) (3, 4) при разных значениях a_3 .

(x, y) , в своем развитии стремится к динамическому равновесию, определяемому координатами устойчивой особой точки.

При изменении параметров исходной системы может происходить вырождение особой устойчивой точки (на кривой (14)), что приводит к внезапному скачку из устойчивой точки в бесконечность (бифуркация типа “седло–узел”). Отметим, что при сближении устойчивой и неустойчивой особых точек область притяжения (аттрактор) постепенно уменьшается и полностью исчезает при вырождении устойчивой точки. В неустойчивой области в окрестности седловых точек отмечается быстрый (через 5–6 временных шагов) выход фазовых кривых на границы единичного квадрата.

При достижении траекторией стороны квадрата $x = 0$ поведение экосистемы определяется первым уравнением системы (1), которое в этом случае имеет устойчивую точку $y = 1$. Эта ситуация соответствует нулевой биомассе бенгоса при максимально выраженном процессе донной абразии.

Когда траектория достигает стороны квадрата $y = 0$, поведение экосистемы определяет второе уравнение системы (1), имеющее устойчивую точку $x = 1$. Такая ситуация отвечает максимальной биомассе при отсутствии донной абразии.

При достижении траекторией квадрата $y = 1$ поведение экосистемы определяется вторым уравнением системы (1), которое в интервале $0 \leq x \leq 1$ имеет отрицательную производную $dx/dt < 0$, т.е. x убывает до нуля. Таким образом, экосистема переходит в устойчивое состояние, характеризуемое максимально выраженным уровнем абразионного сноса и нулевой биомассой.

На сторону квадрата $x = 1$ фазовые траектории не выходят. Попадание системы в точку $(x, y) = (1, 1)$ вообще невозможно, что согласуется с природной обстановкой (ситуация с максимально возможными уровнями биомассы и абразионного сноса нереальна).

Во всех случаях при достижении траекторией какой-либо стороны квадрата дальнейшее движение происходит по этой стороне в одну из его точек.

Численные эксперименты по модели (1) показали, что выход в устойчивую узловую точку происходит через 10–15 временных шагов. Если в окрестности узловых точек движение достаточно медленное, то для седловых точек происходит кратковременное замедление скорости движения в их окрестности и дальнейшее быстрое удаление от них (за 5–10 временных шагов траектории уходит практически на бесконечность, если в системе не ставить ограничения на фазовые переменные).

Представляет интерес исследование динамической системы (1) в окрестности граничной кривой (14) при малых периодических флуктуациях параметров системы [4, 5]. В нашем случае, ввиду отсутствия в системе негрубых периодических движений (линии петли сепаратрис седла и др.), не отмечается появления притягивающих гомоклинических структур и соответствующих им стохастических режимов при малых неавтономных периодических возмущениях автономной системы. При численном исследовании динамических неустойчивостей системы (1) принимались следующие значения параметров a_1, a_3 :

$$a_1 = \frac{8}{27}, \quad a_3 = 1$$

и выражение для осциллирующего параметра a_2

$$a_2(t) = \frac{5}{16} \left(1 + A \sin \frac{2\pi}{T} t \right). \quad (16)$$

При этом a_1, a_3 и усредненный по периоду колебаний T параметр $\overline{a_2(t)} = 5/16$ лежат на бифуркационной кривой (рис.), описываемой уравнением (14). В случае $x_* = 7/12, y_* = 7/9$ (особая точка невозмущенной системы типа “седло–узел”) и $T = 2\pi$ была получена следующая зависимость времен резкого срыва (появления неустойчивости) траекторий от амплитуды колебаний (см. таблицу).

В общем случае функция $t_{\text{ср}} = f(A, T)$ является монотонно-убывающей по обоим переменным. В результате численных экспериментов было показано, что если $t_{\text{ср}}^{(1)} = f(A_1, T_1)$, тогда это же значение $t_{\text{ср}}^{(1)}$ будет наблюдаться при такой паре (A_2, T_2) , для которой $A_1 \cdot T_1 = A_2 \cdot T_2$. Например, для функции

Зависимость времени срыва траекторий возмущенной системы (1) от амплитуды возмущений при $x_* = 7/12, y_* = 7/9$ и $T = 2\pi$

A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$t_{\text{ср}}$	691	341	225	167	132	109	93	80	71	63

$t_{\text{ср}} = f(A, 2\pi)$ (таблица) время $t_{\text{ср}} = 80$ было отмечено при следующих парах (A, T) : $(0,04, 4\pi)$, $(0,02, 8\pi)$ и др., удовлетворяющих соотношению $0,08 \cdot 2\pi = A_2 T_2$.

Если начальная точка лежит в устойчивой области сложного узла (не лежит на бифуркационной кривой (14)), то соответствующие времена срыва траекторий возникают при больших амплитудах возмущения. Например, при $x(0) = 7/9, y(0) = 7/12$ (точка, симметричная особой относительно диагонали единичного квадрата в фазовой плоскости) те же самые времена срыва происходят при амплитудах, в 5 раз больших. Чем дальше удалена начальная точка от особой точки (в области ее аттрактора), соответствующей бифуркационному невозмущенному параметру, тем она более устойчива к возмущению этого параметра (в смысле более позднего возникновения срывов траекторий). Для таких точек, естественно, существует и область параметров (A, T) , в которой отсутствуют динамические неустойчивости. Полученные эмпирическим путем закономерности поведения функции $t_{\text{ср}} = f(A, T)$ требуют дальнейшего теоретического обоснования.

В перспективе, при умении количественно оценивать параметры системы (1), ее можно использовать при прогнозных оценках развития реальных экогеосистем, а также при решении задач устойчивости оптимального управления такими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thornes J. B.* The ecology of erosion // *J. Geography.*– 1985.– 70, № 3.– P. 222–235.
2. *Московкин В. М.* Динамика и устойчивость береговых экосистем // Сб. тр. ВНИИ системных исследований.– М.: ВНИИСИ, 1990.– № 2.– С. 62–68.
3. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний.– М.: Наука, 1987.– 384 с.
4. *Белюстина Л. И.* Малые периодические возмущения грубой автономной системы // *ДАН СССР.*– 1962.– 148, № 2.– С. 251–253.
5. *Буриев Т. И.* Динамика системы хищник–жертва с учетом периодических изменений внешней среды // *Динамика биологических популяций.*– Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1987.– С. 37–43.