XV. BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL

A bastante tempo que já é do nosso conhecimento, a partir da escola as seguintes fórmulas:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Com ajuda delas é muito fácil encontrar algumas expressões. Como por exemplo:

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2.(2x).3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2.3 + 3.2x.3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

Mas se nós sermos obrigados a encontrar a expressão $2x + 3$ não elavada a 2 ou 3, mas sim elevada a 10 ou ainda elevada a 20, 30, ... O que fazer?

Com certeza nós podemos fazer da mesma maneira como as formulas acima, multiplicar, ordenar os termos semelhantes e obter o resultado. Mas este processo será bastante longo e com grandes facilidades de errar.

15.1. Binômio de Newton

O problema acima, pode ser resolvido completamente com ajuda do binômio de **Newton**, que possui a forma:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} b + A_2 a^{n-2} b^2 + \dots + A_n b^n$$

Onde: $A_k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; k – número de série (expoente) do termo no polinômio.

Lembrem-se que, o factorial é o produto dos números naturais de 1 até n, isto é $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ – denomina-se por $n!$.

Exemplo, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Memorizar a fórmula não é fácil realmente. Mas vamos tentar analisá-la. É visível que o expoente do elemento a decresce, mas expoente do elemento b cresce e em qualquer polinômio contém a^n e b^n com coeficientes 1, porque:

$$A_0 = C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \text{ e } A_n = C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

É também evidente que, cada termo do polinómio parece como o produto de determinados expoentes dos termos do binómio $(a + b)$. Além disso a soma dos expoentes é sempre igual a n. Por exemplo, na expressão $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ soma dos expoentes dos factores em todos os membros (monómios) é igual a três $(3, 2 + 1, 1 + 2, 3)$.

O mesmo aplica-se para qualquer outro expoente. A única questão é a seguinte - quais coeficientes devem ser colocados nos termos.

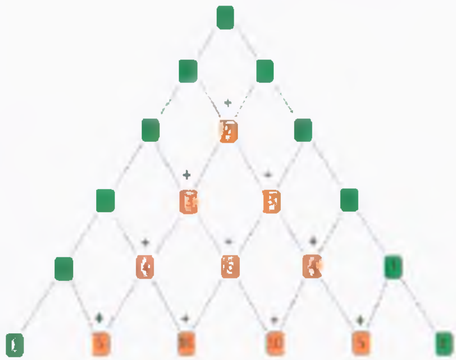
Agora, voltaremos para o nosso problema. Suponhamos que, é preciso realizar operação com a seguinte expressão $(2x + 3)^{10}$, vamos escreve-lo em forma do binómio de **Newton**, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}(2x+3)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k a^{10-k} b^k \\ &= A_0(2x)^{10} + A_1(2x)^9.3 + A_2(2x)^8.3^2 + \dots + A_{10}.3^{10}\end{aligned}$$

Como podemos notar que, A_0 e A_{10} são iguais a 1, isto é, coeficiente quando x^{10} é igual a $2^{10} = 1024$ e o termo livre (termo sem variável) é igual a $3^{10} = 59049$, mas os outros coeficientes vamos procurar na fórmula acima indicada. Por exemplo: encontrar o coeficiente quando x^9 na expressão $(2x + 3)^{10}$, temos que, por e simplesmente simplificar o processo em que $A_1.(2x)^9.3$ onde $A_1 = C_{10}^1 = \frac{10!}{1!9!} = 10$, logo $A_1.(2x)^9.3 = 10.(2x)^9.3 = 15360x^9$, isto é, coeficiente quando x^9 é igual a 15360. Da mesma forma, podemos encontrar todos os outros restantes coeficientes A_k.

15.2. Triângulo de Pascal

Aparentemente, a fim de facilitar o trabalho dos pesquisadores e estudantes, o grande matemático e físico francês **Blaise Pascal** 350 anos atrás, inventou uma ferramenta especial para determinar estes coeficientes - "*triângulo de Pascal*".



O determinado triângulo constrói-se de seguinte maneira. No tope do triângulo escrevemos 1. O número 1 corresponde à expressão $(a+b)^0$, uma vez que qualquer número com o expoente zero é sempre igual à 1. Construindo o triângulo, abaixo escrevemos mais uma vez 1. Estes são coeficientes da decomposição do mesmo binómio, com expoente 1: $(a+b)^1 = a+b$. Vamos em diante. Nos lados do triângulo formam unidades, quer dizer números 1, mas a soma de duas unidades, que se encontram no topo é 2. Estes são os coeficientes do polinómio com três termos "*soma quadrado*": $a^2 + 2ab + b^2$.

A próxima sequência, como anterior começa e termina com as unidades, mas entre elas - a soma dos dígitos que estão no topo: $1, 3, 3, 1$. Obtemos os coeficientes da decomposição da "*soma de cubos*": $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

A sequência dos coeficientes do binómio de expoente 4, está constituído por: $1, 4, 6, 4, 1$; e em diante.

Exemplos:

Vamos decompor $(2x+3)^5$, aqui $a = 2x, b = 3$ e $n = 4$. Conforme o triângulo de Pascal, teremos o seguinte:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Isto é:

$$(2x+3)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4.3 + 10(2x)^3 3^2 + 10(2x)^2 3^3 + 5(2x)3^4 + 3^5$$

Logo: $(2x+3)^5 = 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.$