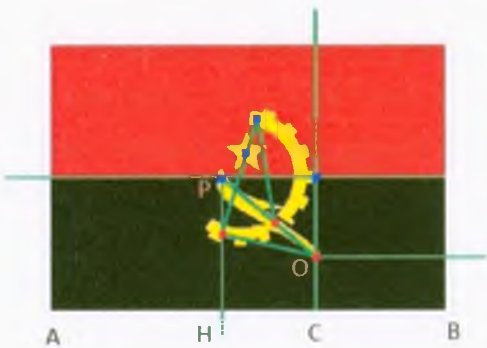
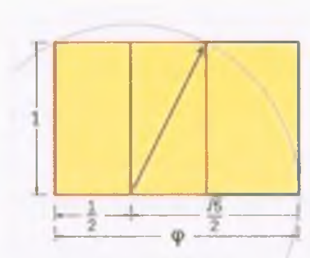
VIII. PROPORÇÃO DE OURO E DE PRATA

8.1. Proporção de ouro

"*As duas grandes descobertas na geometria, uma é o famoso teorema de Pitágoras, e a segunda é precisamente a proporção de ouro ou proporção média ou ainda proporção áurea - uma coisa, nós podemos comparar como ouro, e outras coisas, como pedra preciosa*" I. Kepler





Será que um dia nos questionamos: porquê que a nossa bandeira possui proporção entre a largura e o comprimento igual $\frac{2}{3}$ e não $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$? E porquê que o símbolo da estrela, a catana e a roda dentada estão precisamente naquela posição?

8.2. Noção de proporção de ouro

Muitos anos atrás, os cientistas consideravam como o melhor retângulo, o retângulo que possui a largura ***a*** e comprimento ***b*** que sastisfazem a condição:

$$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \tag{6}$$

A partir daí, teremos o seguinte:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{b}{a} - 1$$

Vamos substituir $\frac{a}{b} = x$, onde $0 < x \leq 1$, neste caso, obteremos o seguinte:

$$x = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 + 4 \times 1 \times 1 = 5$$

A equação possui duas raizes:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Conforme a condição: $0 < x \leq 1$, logo x_1, é a solução desejada.

Desta maneira:

$$\frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$$

Esta constante é chamada de **proporção de ouro**.

Agora vamos analisar os valores das fracções $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Teremos o seguinte:

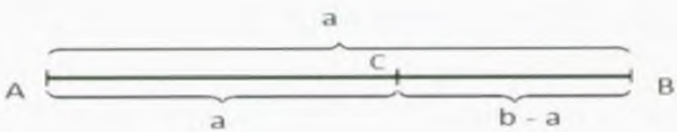
$$\frac{2}{3} \approx 0{,}667 \; ; \; \frac{1}{2} = 0{,}5 \; ; \; \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Notaremos que, o número $0{,}667$ está mais próximo do número $0{,}618$ com um desvio inferior à 5%, isto é, se desenharmos um rectângulo do tamanho de 2, 3 obtemos um retângulo quase perfeito.

Às vezes, proporção de ouro é chamada de proporção áurea e este conceito começa desde a pintura.

Nas pinturas dos artistas plásticos, notamos que, quando desenham um homem na natureza, não obterão um quadro bonito se o homem estiver no centro do quadro, e onde é que ele tem que ser desenhado, em qual posição concretamente?

Se mostramos o fundamento do quadro na recta AB, a projeção do homem na AB é o ponto C, que deve satisfazer a igualdade (6):



Se observarmos atentamente na nossa bandeira, veremos que, os pontos das projeções P e O são os pontos H e C, e as proporções serão:

$$\frac{AH}{AC}, \frac{AC}{AB}, \frac{HP}{HB}, \frac{HC}{BC}$$

Aproximadamente ao número da proporção de ouro.

Se designarmos os pontos da interseção entre a catana e a roda dentada com Q, então este ponto divide o comprimento da catana e a roda dentada da proporção também aproximada ao número da proporção de ouro.

Ainda notaremos que, a estrela divide a distância da roda dentada da proporção também aproximada ao número da proporção de ouro. Neste caso, o retângulo da nossa bandeira é quase perfeito, assim como a posição do símbolo da estrela, catana e da roda dentada, estão numa posição quase perfeita.

Vamos ainda encontrar a proporção de ouro em *Sequência de Fibonacci.*

8.3. Proporção de prata

Nestes os últimos anos, alguns artistas plásticos e arquitetos acham esta proporção "bonita".

Matemáticos investigaram a proporção de prata desde antiga ciência grega, embora o termo *proporção de pratia* pode ter aparecido apenas recentemente. Esta proporção tem aplicações bastantes notáveis na nossa vida social.

A proporção de prata pode ser designada de seguinte maneira: $\boldsymbol{\delta_{AG}}$. Podemos sim mostrar uma relação, que pode ser escrita algebricamente de seguinte maneira:

$$\frac{b+2a}{a} = \frac{a}{b} = \delta_{AG} \tag{7}$$

A equação (7) possui uma única raiz positiva.

Prova:

$$\frac{b+2a}{a}=\frac{a}{b}\rightarrow b*b+2*a*b=a^2\rightarrow (a+b)(a+b)=2a^2$$

$$(a+b)=a*\sqrt{2}\rightarrow b=\left(\sqrt{2}-1\right)*a$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{\left(\sqrt{2}-1\right)*a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=\delta_{AG}$$

$$\delta_{AG}=1+\sqrt{2}\approx 2{,}4142135623\ldots$$

Assim, proporção de prata é um número irracional definido pela soma de 1 e raiz quadrada de 2.

Podemos ainda encontrar a proporção prateada, segundo a sua definição, com ajuda da seguinte expressão:

$$(\delta_{AG}-1)^2=2 \qquad (8)$$

Obteremos duas soluções. A positiva é o valor da proporção de prata.

Com ajuda de uma figura geométrica podemos facilmente também determinar as proporções que por sua vez correspondem ao valor da proporção prateada. A figura pode parecer pela primeira vista complicada. Para rápida compreensão, dos leitores, vamos dar uma olhadinha no teorema de **Tales** - *em um feixe de rectas paralelas, os segmentos formados por rectas transversais são proporcionais*.

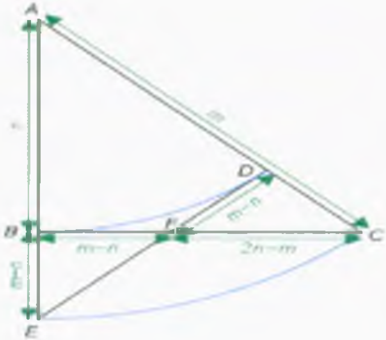


Fig. 16 - Demonstração da prova geométrica da proporção de prata

Nesta esta a prova geométrica que, raiz quadrada de 2 – é irracional, com as proporções:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{FC} = \delta_{AG}$$

O número de prata ou proporção prateada é uma constante matemática. Sua nomenclatura tem como referência a proporção áurea ou proporção de ouro. Mas é sempre bom lembrar que - a proporção de ouro surge da sequência do famoso matemático **Fibonacci**, e proporção de prata surge da sequência de **Pell-Lucas** é chamado assim em honra do matemático francês **Édouard Lucas** (o criador do jogo matemático – Torre de Hanói) que também estudou esta sequência, e os números acompanhantes de **Pell** são casos particulares da sequência de **Lucas**.

Uma das aplicações notáveis da proporção de prata está relacionada com um rectângulo cuja proporção entre os seus lados é igual à proporção prateada, e o rectângulo neste caso é chamado de **rectângulo prateado**. A figura abaixo mostra claramente como a folha de tamanho A4 é obtida com ajuda do conceito de proporção de prata:

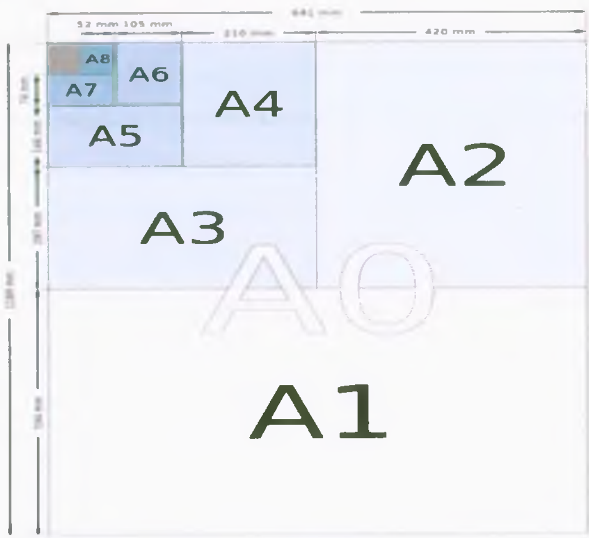


Fig. 17 - Rectângulo prateado

Os papéis de formato A4 são chamados também de ISO[5] 216 - são rectângulos na proporção 1: $\sqrt{2}$ (aproximadamente 1: 1,4142135 decimais), às vezes chamados de "rectângulos A4". A remoção de um quadrado maior possível a partir de uma folha de papel resultará um rectângulo com as proporções 1: $\sqrt{2}-1$, e também como $1+\sqrt{2}$: 1, que é proporção de prata. A remoção de um maior quadrado a partir dessas folhas resultará novamente um rectângulo com proporção 1: $\sqrt{2}$. Um rectângulo cuja proporção é a proporção de prata é às vezes chamado de um **rectângulo de prata**.

• **Proporção de prata em fracção contínua**

Sobre as fracções contínuas veremos nos próximos capítulos de uma forma bastante detalhada, para melhor compreensão.

A Proporção de prata possui as seguintes partes inteiras:

$$[2; 2; 2; \dots]$$

e apresenta a seguinte fracção contínua:

$$\delta_{AG} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

• **Potências da proporção de prata**

As potências inferiores da proporção de prata são as seguintes:

$$\delta_{AG}^0 = 1$$

$$\delta_{AG}^1 = \delta_{AG} + 0$$

$$\delta_{AG}^2 = 2\delta_{AG} + 1$$

$$\delta_{AG}^3 = 5\delta_{AG} + 2$$

$$\delta_{AG}^4 = 12\delta_{AG} + 5$$

[5] O padrão internacional ISO 216, de 1975, define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção de EUA e Canadá. Em particular, são definidas as séries A, B e C, das quais faz parte o formato A4, de uso comum.

Vimos que, as potências obedecem a seguinte fórmula como norma:

$$\delta_{AG}^{n} = kn\delta_{AG} + k_{(n-1)}$$

Onde:

$$K_n = 2k_{(n-1)} + k_{(n-2)}$$

Por exemplo, quando $n = 5$. Teremos:

$$\delta_{AG}^{5} = 29\delta_{AG} + 12$$

Fazendo $k_0 = 1$ e $k_1 = 2$, como condição inicial, teremos uma solução em forma recorrente:

$$K_n = 2k_{(n-1)} + k_{(n-2)}$$

Logo, terá a seguinte forma:

$$K_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta_{AG}^{n+1} - (2 - \delta_{AG})^{n+1}$$

• **Expressões prateadas**

Pode-se determinar expressões prateadas com ajuda da fórmula geral (9):

$$[n; n; n; \dots] = \frac{1}{2}(n + \sqrt{n^2 + 4}) \tag{9}$$

Quando $n = 2$, teremos o valor igual a proporção de prata.

As primeiras 10 expressões prateadas:

1) Quando $n = 0 \rightarrow 1$

2) Quando $n = 1 \rightarrow 1.618033989$

3) Quando $n = 2 \rightarrow 2.414213562$

4) Quando $n = 3 \rightarrow 3.302775638$

5) Quando $n = 4 \rightarrow 4.236067978$

6) Quando $n = 5 \rightarrow 5.192582404$

7) Quando $n = 6 \rightarrow 6.162277660$

8) Quando $n = 7 \rightarrow 7.140054945$

9) Quando $n = 8 \rightarrow 8.123105626$

10) Quando $n = 9 \rightarrow 9.109772229$

≫ **Propriedades da proporção de prata**

Estas propriedades são válidas apenas para números inteiros m; as propriedades são semelhantes, mas diferentes ligeiramente. Para as expressões da proporção de prata S de m, a propriedade pode ser generalizada como:

$$S_m^n = k_n S_m + k_{(n-1)}$$

Onde:

$$k_n = mk_{(n-1)} + k_{(n-2)}$$

Utilizando as condições iniciais $k_0 = 1$ e $k_1 = m$, esta relação recorrente se torna:

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{m^2+4}}\left(S_m^{n+1} - (m - S_m)^{n+1}\right)$$

As potências da proporção de prata possuem ainda outras propriedades bastante interessantes.

Se n for um número inteiro positivo e par, teremos o seguinte:

$$\frac{s_m^n - [s_m^n]}{s_m^{-n}} = s_m^n - 1$$

Mais em frente, quando $n = 4$ e 6, teremos:

$$\frac{1}{s_m^4 - [s_m^4]} + [s_m^4 - 1] = s(m^4 + 4m^2 + 1)$$

$$\frac{1}{s_m^6 - [s_m^6]} + [s_m^6 - 1] = s(m^6 + 6m^4 + 9m^2 + 1)$$

Como também:

$$s_m^3 = s(m^3 + 3m)$$

$$s_m^5 = s(m^5 + 5m^3 + 5m)$$

$$s_m^7 = s(m^7 + 7m^5 + 14m^3 + 7m)$$

$$s_m^9 = s(m^9 + 9m^7 + 27m^5 + 30m^3 + 9m)$$

$$s_m^{11} = s(m^{11} + 11m^9 + 44m^7 + 77m^5 + 55m^3 + 11m)$$

A meia da proporção prateada S de m também possui a seguinte propriedade:

$$\frac{1}{s_m} = s_m - m$$

Isso significa dizer que, a média da expressão prateada tem a mesma parte decimal que corresponde a expressão prateada. Usando essa propriedade, a proporção prateada definida para todos os números deve satisfazer:

$$x \equiv x^{-1} \pmod 1$$

Caso expandirmos a expressão da proporção de ouro S de m, tal que:

$$s_m = a + b$$

Onde $\boldsymbol{a}$ é neste caso a parte inteira de S e b, podemos afirmar que a seguinte propriedade é verdadeira:

$$s_m^2 = a^2 + mb + 1$$

O facto de que, para todos os m maiores que zero, a parte de $s_m = m$, $a = m$. Para $m > 1$, teremos o seguinte:

$$s_m^2 = ma + mb + 1 = m(a + b) + 1 = m(s_m) + 1$$

Assim, a expressão da proporção de prata de m é uma das soluções da equação:

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

Podemos ainda determinar a proporção de prata em outras figuras geométricas. Vamos mostrar algumas, que aparecem com mais frequência quando se trata de proporção prateada e rectângulos prateados. Por exemplo:

1) Proporção de prata no interior de um Octógono regular;

2) Espirais de prata no interior do rectângulo de prata.