1) $(A^T)^T = A$;

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

3) $(n \cdot A^T) = n \cdot A^T \rightarrow n \in N$;

4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

2.5. Matriz inversa

Para cada número $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, existe um número inverso $\boldsymbol{a}^{-1}$, que a multiplicação $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{-1} = \mathbf{1}$. Para as matrizes quadradas também se introduz o mesmo tipo de compreensão analítica.

DEFINIÇÃO: matriz A^{-1} chama-se inversa em correspondência com a matriz quadrada A, se depois da multiplicação das mesmas, tanto a direita como a esquerda, obtém-se a matriz única:

$$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E} \qquad (4)$$

Uma matriz inversa apresenta as seguintes condições de existência:

1) A matriz A tem que ser quadrada e nestas condições a matriz inversa será também da mesma ordem;

2) Se o determinante da matriz $A \rightarrow |A| \neq 0$, então a matriz possui a inversa e a matriz quadrada considera-se **não especial** (invertível);

3) Se o determinante da matriz $A \rightarrow |A| = 0$, então a matriz não possui a inversa e a matriz quadrada considera-se **especial** (singular)

Caso $|A| \neq 0$, analisa-se uma matriz quadrada de ordem n, que se chama **matriz associada**, que está constituída por complemento algébrico dos elementos da matriz $\boldsymbol{A}$ e a sua matriz transposta. Assim a matriz inversa apresenta a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{T}_{complemento\ algébrico}} \qquad (5)$$

Exemplo. Determine a matriz inversa das seguintes matrizes:

a)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos, temos os seguintes passos:

1) Calcular o determinante da matriz;

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$|A| = -2 \neq 0$, então existe a inversa.

2) Calcular os menores da matriz, juntamente com o complemento algébrico;

$$A=\begin{vmatrix} \underline{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4\,;\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3 \\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2\,; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1 \end{matrix}$$

3) Formar uma matriz com os valores dos menores obtidos;

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Escrever a matriz transposta com os valores dos menores obtidos;

$$A^T=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Escrever os valores encontrados na fórmula da matriz inversa (5);

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{T}_{c.a}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: A solução é sempre bom manter dessa forma.

Para verificarmos esta solução, temos que multiplicar a primeira matriz com a sua matriz inversa. Caso encontrarmos matriz unitária, então a matriz inversa foi bem calculada.

$$-\frac{1}{2}(A \cdot A^{-1}) = -\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4-6 & -2+2 \\ 12-12 & -6+4 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Verificando, teremos:

$$\frac{1}{16}(A\cdot A^{-1}) = \frac{1}{16}\left[\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Visto que: $A\cdot A^{-1} = E$, então a matriz inversa foi calculada corretamente.

Na prática, podemos ainda localizar a matriz inversa de uma determinada matriz A, de seguinte maneira:

1) Com ajuda da matriz unitária – E;

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{21} \end{array}\right) \rightarrow (E|A)$$

Agora é só transformar a matriz A em matriz unitária. A matriz que se encontrará a esquerda - é a chamada *matriz inversa de A*.

$$(A^{-1}|E)$$

Exemplo: determine a matriz inversa da seguinte matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \neq 0, \text{então existe a inversa}$$

Fazendo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Podemos notar que o elemento $a_{11} = 1$ (que se encontra a direita depois da barra vertical), então não há necessidades de toca-lo. Temos que ter no lugar do elemento a_{21} zero. Vamos multiplicar o oposto de 3, isto é, -3 com os elementos da primeira linha e adicionaremos com os elementos da segunda linha.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3l_1 + l_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento -2, temos que ter 1. Neste caso vamos somente multiplicar os elementos da segunda linha com $-\frac{1}{2}$, isto é, o inverso de -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[l_2(-1/2)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento 2, temos que ter zero. Neste caso vamos multiplicar o oposto de 2 (-2) com os elementos da segunda linha e adicionar com os elementos da primeira linha.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2l_2 + l_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Logo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ou ainda:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

2) Com ajuda da expressão caraterística da matriz A.

$$(A - \lambda E) \to A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

$$\downarrow$$

$$\Delta = \lambda^2 - a_{11} \cdot a_{22}\lambda - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Suponhamos que a multiplicação dos elementos $a_{11} \cdot a_{22}$, será igual a um certo $\boldsymbol{n} \in R$, e a multiplicação dos elementos $a_{12} \cdot a_{21}$, $\boldsymbol{m} \in R$, neste caso teremos:

$$\Delta = \lambda^2 - n\lambda - m$$

Igualando a determinada expressão a zero, teremos:

$$\lambda^2 - n\lambda - m = 0$$

Passando os elementos λ a direita, obteremos:

$$-m = -\lambda^2 + n\lambda$$

Multiplicando a determinada expressão obtida com $-\frac{1}{m\lambda}$, teremos:

$$(-m = -\lambda^2 + n\lambda) \cdot (-\frac{1}{m\lambda})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - nE}{m}.$$

Escrevendo $\frac{1}{\lambda}$, pela propriedade $\frac{1}{a} = a^{-1}$, teremos:

$$\lambda^{-1} = \frac{\lambda - nE}{m}$$

Substituindo λ com A, teremos:

$$A^{-1} = \frac{A - nE}{m}$$

$$\downarrow$$

Esta é a matriz inversa de A.

Onde: m é o determinante do sistema.

Pelo que:

$$A^2 - nA - mE = A0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - n\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: determine a matriz inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \neq 0, \text{então existe a inversa}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - (2\cdot 3)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 6$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$(-2 = -\lambda^2 + 5\lambda)\cdot(-\tfrac{1}{2\lambda})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 5E}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^{-1} = \frac{\lambda - 5E}{2}$$

Substituindo λ com A, teremos:

$$A^{-1} = \frac{A - 5E}{2}$$

$$\downarrow$$

Esta é a matriz inversa de A

Onde: 2 é o determinante do sistema, logo existe a matriz inversa.

Continuando a operação, teremos:

$$A^{-1} = \frac{A - 5E}{2}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/2 & 2/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ou ainda:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: determine a matriz inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -5 \neq 0, \text{então existe a inversa}$$

1) Com ajuda da matriz inversa;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Como o elemento $a_{11} = 1$, então não há necessidades de toca-lo. Temos que ter no lugar do elemento $a_{31} = 3$ zero. Vamos multiplicar o oposto de 3 (-3) com os elementos da primeira linha e adicionaremos nos os elementos da terceira linha.

$$-3l_1 + l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento$a_{22} = 2$, temos que ter 1. Neste caso vamos somente dividir os elementos da segunda linha por 2, isto é, multiplicar a linha com: $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento a_{32}, temos que ter zero. Vamos multiplicar os elementos da segunda linha com oposto de -5 e adicionaremos na terceira linha.

$$5l_2 + l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -3 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -5/2 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento $a_{12} = 3$, temos que ter zero. Vamos multiplicar os elementos da segunda linha com oposto de 3 e adicionaremos na primeira linha.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -3 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -5/2 \end{array}\right) \xrightarrow{-3l_2 + l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -3 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -5/2 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento $-5/2$, temos que ter 1. Neste caso vamos somente multiplicar os elementos da terceira linha com $-2/5$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -3 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -5/2 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3(-5/2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 6/5 & -1 & -2/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento $a_{13} = 1/2$, temos que ter zero. Neste caso vamos somente multiplicar os elementos da terceira com oposto de $1/2$, e adicionar na primeira linha.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 6/5 & -1 & -2/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/2l_3 + l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2/5 & -1 & 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 6/5 & -1 & -2/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No lugar do elemento $a_{23} = 1/2$, temos que ter zero. Neste caso vamos somente multiplicar os elementos da terceira com oposto de $1/2$, e adicionar na segunda linha.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2/5 & -1 & 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 6/5 & -1 & -2/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/2l_3 + l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2/5 & -1 & 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 6/5 & -1 & -2/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Logo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1 & 1/5 \\ -3/5 & 1 & 1/5 \\ 6/5 & -1 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Ou ainda:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Com ajuda da expressão caraterística da matriz A.

Exemplo: determine a matriz inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -5 \neq 0, \text{então existe a inversa}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 9 - \big(6(2-\lambda) + 4(1-\lambda)\big)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda - 5$$

$$\downarrow$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0$$

$$\downarrow$$

$$-5 = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda \cdot \left(-\frac{1}{5\lambda}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda - 5E}{-5}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^{-1} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda - 5E}{-5}$$

Substituindo λ com A, teremos:

$$A^{-1} = \frac{A^2 - 4A - 5E}{-5}$$

$$\downarrow$$

Esta é a matriz inversa de A.

Continuando a operação, teremos:

$$A^{-1} = \frac{A^2 - 4A - 5E}{-5}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{-5}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 17 & 7 \\ 3 & 8 & 3 \\ 6 & 21 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \\ 12 & 16 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{-5}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & -1 \\ -6 & 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{-5}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}}{-5}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1 & 1/5 \\ -3/5 & 1 & 1/5 \\ -6 & -1 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Ou ainda:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6. Graduação de uma Matriz

Para resolução e investigação de uma série de problemas aplicativos de matemática, a *graduação de matrizes* possui um grande significado [16].

Na matriz A de tamanho $m \times n$, a eliminação de quaisquer linhas e colunas, pode-se obter submatrizes quadradas de ordem k, onde $k \leq \min(m; n)$. Os determinantes destas submatrizes são chamados de menores de ordem k da matriz A.

Exemplo, a partir da matriz $A_{3\times4}$ pode-se obter submatrizes da primeira, segunda e terceira ordem.

DEFINIÇÃO: chama-se graduação de uma matriz, a mais elevada ordem dos menores diferentes de zero desta matriz.

Graduação de uma matriz designa-se por $rang\ A$, ou $r(A)$, ou ainda podemos por e simplesmente designar por $grad(A)$.

A partir da definição, analisa-se que:

a) Graduação da matriz $A_{m\times n}$ não ultrapassa o menor dos seus tamanhos, isto é, $grad(A) \leq \min(m; n)$;