Современная математика. Фундаментальные направления. Том 29 (2008). С. 49–61

УДК 517.983

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2008 г. **А. В. ГЛУШАК**

Аннотация. В банаховом пространстве рассматривается задача определения решения и входящего в дифференциальное уравнение первого порядка слагаемого по начальному условию и избыточному условию, содержащему дробный интеграл Римана-Лиувилля. Показано, что разрешимость рассматриваемой задачи зависит от распределения нулей функции Миттаг-Леффлера.

1. Постановка задачи

Пусть E — банахово пространство, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в E с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. Рассмотрим задачу определения функции $u(t) \in C^1((0,1], E)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0,1]$ и параметра $p \in E$ из соотношений

$$u'(t) = Au(t) + t^{k-1}p, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}u(t) = u_1, \tag{1.3}$$

где $k > 0$, $I^{\beta}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1}u(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Следуя сложившейся терминологии, назовем задачу (1.1) – (1.3) обратной задачей в противоположность прямой задаче Коши (1.1), (1.2) с известным элементом $p \in E$.

Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как восстановление в уравнении (1.1) нестационарного слагаемого $t^{k-1}p$ с помощью дополнительного нелокального граничного условия (1.3), содержащего дробный интеграл Римана-Лиувилля.

В отличие от обратных задач для уравнения

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)p, \tag{1.4}$$

с непрерывной функцией $\varphi(t)$, уравнение (1.1) при $0 < k < 1$ содержит сингулярное слагаемое, а степенной вид зависимости функции $\varphi(t) = t^{k-1}$ приводит к появлению операции дробного интегродифференцирования в формуле для решения задачи (1.1), (1.2) (см. теорему 2.1). Это обстоятельство позволяет задавать дополнительное условие (1.3) с помощью интеграла дробного порядка, который можно рассматривать как среднее Чезаро по промежутку $[0,1]$. В дальнейшем будет показано, что с точки зрения разрешимости обратной задачи, задание среднего Чезаро по промежутку $[0,1]$ лучше чем задание финального значения $u(1)$.

Обзор публикаций по обратным задачам для уравнения (1.4) при различных ограничениях на оператор A можно найти в монографии [15], а также в работах [6, 7, 9, 10].

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда оператор A является генератором k раз проинтегрированной полугруппы (ПП) $T_k(t)$, где $k > 0$ — параметр, входящий в уравнение (1.1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00131.

К понятию проинтегрированной полугруппы привело (см. [11, 13, 4]) желание ослабить требования на разрешающий оператор задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка, а, следовательно, и на резольвенту оператора A. При этом ослабление условий на резольвенту оператора A требует дополнительной гладкости от начальных данных задачи. Напомним далее определение ПП.

Определение. Пусть $k > 0$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_k(t), t \geqslant 0$, называется k раз ПП, если:

1. $\Gamma(k)T_k(t)T_k(s) = \int\limits_s^{s+t} (t+s-r)^{k-1}T_k(r)\,dr - \int\limits_0^t (t+s-r)^{k-1}T_k(r)\,dr, \quad t,s \geqslant 0.$
2. $T_k(0) = 0$.
3. Для любого $x \in E$ функция $T_k(t)x$ непрерывна по $t \geqslant 0$.
4. Существуют постоянные $M_0 > 0,\ \omega \in \mathbf{R}$ такие, что

$$\|T_k(t)\| \leqslant M_0\ \exp(\omega t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

5. Генератор A ПП $T_k(t)$ определяется следующим образом: $D(A)$ — множество элементов $x \in E$ таких, что существует элемент $y \in E$, удовлетворяющий равенству

$$T_k(t) - \frac{t^k}{\Gamma(k+1)}x = \int\limits_0^t T_k(s)y\,ds, \quad t \geqslant 0, \tag{1.6}$$

в этом случае полагаем $Ax = y$. $\square$

Приведем примеры проинтегрированных полугрупп (см. [4]).

Пример 1.1. Пусть линейный оператор $B : D(B) \to E$ является генератором косинус-оператор-функции $C(t)$,

$$C_1(t) = \int\limits_0^t C(s)\,ds, \qquad T_1(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & \int\limits_0^t C_1(s)\,ds \\ C(t) - I & C_1(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Семейство $T_1(t)$ является один раз ПП в пространстве $E \times E$ с генератором A. $\square$

Этот пример является отражением известного факта, что равномерная корректность задачи Коши для уравнения второго порядка

$$v''(t) = Bv(t)$$

в общем случае не эквивалентна равномерной корректности в пространстве $E \times E$ задаче Коши для уравнения первого порядка

$$u'(t) = Au(t),$$

к которой она сводится.

Всюду в дальнейшем $\{k\},\ [k]$ — дробная и целая часть k.

Пример 1.2. Еще одним примером генератора $[n/2+2]$ раз ПП в пространствах $C_0(\mathbf{R}^n)$, $C_b(\mathbf{R}^n)$, $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ служит эллиптический дифференциальный оператор

$$A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha,\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},\ p(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha i^{|\alpha|} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

порядка большего $n/2$ и такой что $\sup\limits_{x \in R^n} \operatorname{Re}\, p(x) < \infty$. $\square$

2. Обратная задача с нестационарным неоднородным слагаемым

Для исследования обратной задачи (1.1) – (1.3) нам понадобится выражение решения задачи (1.1), (1.2) через известные u_0 и p. Обозначим $D^k = \left(\frac{d}{dt}\right)^k$, если $k \in \mathbf{N}$ и $D^k = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[k]+1} I^{1-\{k\}}$, если $k > 0$, $k \notin \mathbf{N}$. В дальнейшем нам понадобится выражение $2 - [1-k]$, равное $k+1$, если $\{k\} = 0$, и равное $[k]+2$, если $\{k\} \neq 0$.

Теорема 2.1. *Пусть $k > 0$, A — генератор k раз ПП $T_k(t)$, $p \in D(A)$, $u_0 \in D\left(A^{2-[1-k]}\right)$. Тогда функция*

$$u(t) = \Gamma(k) T_k(t) p + D^k T_k(t) u_0 \tag{2.1}$$

является единственным решением задачи (1.1), (1.2) *и при этом*

$$\|u(t)\| \leqslant M \exp(\omega t) \left(t^k \|p\| + t^{[k]+1} \|A^{[k]+1} u_0\|\right) + \sum_{j=0}^{[k]} \frac{t^j}{j!} \|A^j u_0\|, \quad k \notin \boldsymbol{N}, \tag{2.2}$$

$$\|u(t)\| \leqslant M t^k \exp(\omega t) \left(\|p\| + \|A^k u_0\|\right) + \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} \|A^j u_0\|, \quad k \in \boldsymbol{N}.$$

Доказательство. Задача (1.1), (1.2) заменой $u(t) = t^k v(t)$ сводится к задаче

$$v'(t) + \frac{k}{t} v(t) = A v(t) + \frac{p}{t},$$
$$\lim_{t \to 0} t^k v(t) = u_0,$$

однозначная разрешимость которой, а также формула для решения и оценка при $k \in \mathbf{N}$ доказаны в [1].

Для доказательства теоремы в случае $k \notin \mathbf{N}$ вычислим вначале $D^k T_k(t) u_0$. Учитывая равенство (1.6), получим

$$D^k T_k(t) u_0 - u_0 = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[k]+1} \frac{1}{\Gamma(1-\{k\})} \int_0^t (t-\tau)^{-\{k\}} \int_0^\tau T_k(s) A u_0 \, ds \, d\tau =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{[k]+1} \frac{1}{\Gamma(2-\{k\})} \int_0^t (t-s)^{1-\{k\}} T_k(s) A u_0 \, ds =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{[k]} I^{1-\{k\}} T_k(t) A u_0 = D^{k-1} T_k(t) A u_0. \tag{2.3}$$

Если $k > 1$, то аналогично (2.3) получим

$$D^{k-1} T_k(t) A u_0 - t A u_0 = D^{k-2} T_k(t) A^2 u_0,$$

и т.д. В результате мы придем к формуле

$$D^k T_k(t) u_0 = \sum_{j=0}^{[k]} \frac{t^j}{j!} A^j u_0 + I^{1-\{k\}} T_k(t) A^{[k]+1} u_0. \tag{2.4}$$

Теперь проверим, что определяемая равенством (2.1) функция $u(t)$ является решением задачи (1.1), (1.2). Из (2.1), (1.6), (2.3) имеем

$$u'(t) = t^{k-1} p + \Gamma(k) T_k(t) A p + D^k T_k(t) A u_0 = A u(t) + t^{k-1} p,$$

следовательно, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Из равенств (1.6), (2.4) вытекает справедливость начального условия (1.2), поскольку

$$\lim_{t\to 0} u(t) = \Gamma(k) \lim_{t\to 0} T_k(t)p + \lim_{t\to 0} D^k T_k(t)u_0 = u_0.$$

Оценка (2.2) является следствием представления (2.1), неравенства (1.5) из определения ПП и равенств (1.6), (2.4). Действительно,

$$\|u(t)\| \leqslant M_0\Gamma(k)t^k \exp(\omega t)\|p\| + \sum_{j=0}^{[k]} \frac{t^j}{j!}\|A^j u_0\| +$$

$$+\frac{M_0}{\Gamma\left(1-\{k\}\right)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\{k\}}\tau^k \exp(\omega\tau)\; d\tau\; \|A^{[k]+1}u_0\| \leqslant$$

$$\leqslant M\exp(\omega t)\left(t^k\|p\| + t^{[k]+1}\|A^{[k]+1}u_0\|\right) + \sum_{j=0}^{[k]} \frac{t^j}{j!}\|A^j u_0\|.$$

Наконец, для доказательства единственности решения рассматриваемой задачи заметим, что заменой $u(t) = w(t) + \Gamma(k)T_k(t)p$ задача (1.1), (1.2) сводится к задаче

$$w'(t) = Aw(t), \qquad w(0) = u_0,$$

которая в силу теоремы 1.2 [4] имеет единственное решение. □

Замечание 2.1. Если оператор A является генератором γ раз ПП $T_\gamma(t)$, $0 < \gamma < k$, то в условии теоремы 2.1 можно уменьшить гладкость начального элемента до $u_0 \in D\left(A^{2-[1-\gamma]}\right)$.

Возвращаясь к обратной задаче (1.1) – (1.3), отметим, что, как следует из доказанной теоремы 2.1, задача (1.1), (1.2) сводится к задаче нахождения функции $u(t)$ и элемента $p \in D(A)$ таких, что справедливо соотношение

$$u(t) = \Gamma(k)T_k(t)p + D^k T_k(t)u_0, \qquad u_0 \in D\left(A^{2-[1-k]}\right). \tag{2.5}$$

Из равенства (2.5) и граничного условия (1.3) для нахождения неизвестного элемента p получаем уравнение

$$\lim_{t\to 1} I^\beta T_k(t)p = \frac{1}{\Gamma(k)}\left(u_1 - \lim_{t\to 1} I^\beta D^k T_k(t)u_0\right), \quad u_1 \in D(A),$$

или в операторном виде

$$Bp = q, \tag{2.6}$$

где

$$q = \frac{1}{\Gamma(k)}\left(u_1 - \lim_{t\to 1} I^\beta D^k T_k(t)u_0\right), \quad q \in D(A), \tag{2.7}$$

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta-1} T_k(s)p\; ds, \quad B : D(A) \to D(A). \tag{2.8}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1.1) – (1.3) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора B, заданного соотношением (2.8), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства E. Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора с помощью резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора B до плотного в E множества $D\left(A^{[k]+1}\right)$.

Теорема 2.2. *Пусть $k, \beta > 0$, A — генератор k раз ПП $T_k(t)$. Тогда для любого $p \in D\left(A^{[k]+1}\right)$ справедливо представление*

$$Bp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)^{[k]}} R(z)(\lambda I - A)^{[k]} p \; dz, \tag{2.9}$$

где $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \mu)}$ — функция Миттаг-Леффлера, $\lambda \in \rho(A)$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, Re $\lambda > \sigma > \omega$.

Доказательство. В работе [12] установлено, что если оператор A является генератором ПП $T_k(t)$, то в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ оператор A имеет резольвенту $R(\lambda)$, для которой справедлива оценка

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^k} \right) \right\| \leqslant \frac{M \; n!}{(\mathrm{Re}\;\lambda - \omega)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.10}$$

и при этом

$$R(\lambda) = \lambda^k \int\limits_0^{\infty} \exp(-\lambda t) T_k(t) \; dt. \tag{2.11}$$

Пусть вначале $p \in D\left(A^l\right)$, где $l = [k] + 2$. Тогда $p = R^l(\lambda) p_0$, $p_0 \in E$ и из (2.8), (2.11), используя тождество Гильберта, получим

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta - 1} \; ds \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp(zs)}{z^k} R(z) R^l(\lambda) p_0 \; dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta - 1} \; ds \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp(zs)}{z^k} \left(\frac{R(z) p_0}{(\lambda - z)^l} - \frac{R^l(\lambda) p_0}{\lambda - z} - \cdots - \frac{R(\lambda) p_0}{(\lambda - z)^l} \right) \; dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta - 1} \; ds \; \frac{1}{2\pi i} I^k \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp(zs) R(z) p_0}{(\lambda - z)^l} \; dz, \tag{2.12}$$

при этом интегралы по прямой Re $z = \sigma$ от функций вида $\dfrac{\exp(zs) \; R^j(\lambda) p_0}{(\lambda - z)^{l+1-j}}$, $j = 1, 2, ..., l$ обратились в нуль в силу леммы Жордана.

Учитывая в (2.12) полугрупповое свойство дробного интегрирования, будем иметь

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k + \beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{k+\beta - 1} \; ds \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp(zs) R(z) p_0}{(\lambda - z)^l} \; dz. \tag{2.13}$$

Последний интеграл абсолютно сходится, поэтому, изменив порядок интегрирования и воспользовавшись равенством 1.17 [3]

$$z^{\mu} E_{1,\mu+1}(\lambda z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^z e^{\lambda z} (z - s)^{\mu - 1} \; ds, \quad \mu > 0, \tag{2.14}$$

из (2.13) выводим представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z) R(z) p_0}{(\lambda - z)^l} \; dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)R(z)\left((\lambda-z)I+(zI-A)\right)(\lambda I-A)^{l-1}p}{(\lambda-z)^l}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda-z)^{l-1}} R(z)(\lambda I-A)^{l-1}p\,dz, \quad p \in D\left(A^l\right). \tag{2.15}$$

Если обозначить $p_1 = (\lambda I - A)^{l-1}p$, то $p_1 \in D(A)$ и $p = R^{l-1}(\lambda)p_1$. Поэтому равенство (2.15) примет вид

$$BR^{l-1}(\lambda)p_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda-z)^{l-1}} R(z)p_1\,dz, \quad p_1 \in D(A). \tag{2.16}$$

Левая и правая части равенства (2.16) представляют собою ограниченные операторы, которые совпадают на $D(A)$. В силу плотности $D(A)$ в E равенство (2.16) справедливо при всех $p_1 \in E$. Но тогда $p = R^{l-1}(\lambda)p_1 \in D\left(A^{l-1}\right) = D\left(A^{[k]+1}\right)$ и для таких p справедливо представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda-z)^{l-1}} R(z)(\lambda I-A)^{l-1}p\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda-z)^{l-1}} R(z)\left((\lambda-z)I+(zI-A)\right)(\lambda I-A)^{l-2}p\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda-z)^{[k]}} R(z)(\lambda I-A)^{[k]}p\,dz.$$

□

Прежде чем переходить к установлению разрешимости обратной задачи (1.1) – (1.3) в общем случае, укажем критерий разрешимости этой задачи с ограниченным оператором A.

Теорема 2.3. *Пусть $k, \beta > 0$ и A — ограниченный оператор. Для того, чтобы задача* (1.1) – (1.3) *при любых $u_0, u_1 \in E$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора A выполнялось условие*

$$E_{1,k+\beta+1}(z) \neq 0, \quad z \in \sigma(A). \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть U — открытое множество комплексной плоскости, такое что $\sigma(A) \subset U$ и граница Ξ которого состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда для оператора e^{sA} справедливо представление (см. [2], с. 608, 609)

$$e^{sA} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} e^{sz} R(z)\,dz,$$

и оператор B из равенства (2.8) можно записать в виде

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} e^{sz} R(z)p\,dz\,ds. \tag{2.18}$$

Меняя в (2.18) порядок интегрирования и учитывая равенство (2.14), получим представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i\,\Gamma(k+\beta)} \int\limits_{\Xi} \int\limits_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} e^{sz}\,ds R(z)p\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} E_{1,k+\beta+1}(z)R(z)p.$$

Это означает, что оператор B является аналитической функцией оператора A, т.е. $B = E_{1,k+\beta+1}(A)$. По теореме об отображении спектра оператора ([2], с. 608, 609) $\sigma(B) = E_{1,k+\beta+1}(\sigma(A))$. Таким образом, нуль не является точкой спектра оператора B только тогда, когда на спектре оператора A не обращается в нуль функция $E_{1,k+\beta+1}(z)$. □

Из доказанной теоремы 2.3 следует, что расположение нулей функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (1.1) – (1.3) с ограниченным оператором A. Как показывает следующий пример, заимствованный из ([8], с. 485), этот критерий уже, вообще говоря, не справедлив даже для генератора C_0-полугруппы.

Пример 2.1. В банаховом пространстве l_2 числовых последовательностей

$$\{u_m\}: \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m|^2 < +\infty$$

определим линейный неограниченный оператор A на множестве

$$D(A) = \left\{ \{u_m\} \in l_2 : \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m\ u_m|^2 < +\infty \right\}$$

равенством $A\{u_m\} = \{im\ u_m\}$, $m \in \mathbf{Z}$. Для $m \in \mathbf{Z}$ введем обозначения $U(t) = \{u_m(t)\}$, $U_0 = \{(u_0)_m\}$, $U_1 = \{(u_1)_m\}$, $P = \{p_m\}$ и при $k + \beta = 1$ рассмотрим задачу

$$U'(t) = AU(t) + t^{k-1}P, \quad t \in (0, 1], \tag{2.19}$$

$$U(0) = U_0, \quad \lim_{t\to 1} I^{\beta} U(t) = U_1. \tag{2.20}$$

Спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит из чисел $\{im\}$, $m \in \mathbf{Z}$, а нули функции

$$E_{1,k+\beta+1}(z) = E_{1,2}(z) = \frac{\exp(z) - 1}{z}$$

явно вычисляются и имеют вид $\mu_n = 2n\pi i$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Равенство $im = 2n\pi i$ при рассматриваемых m и n невозможно в силу иррациональности числа π. Следовательно, все нули $\mu_n = 2n\pi i$ являются регулярными точками нашего оператора A.

Однозначная разрешимость рассматриваемой задачи (2.19), (2.20) равносильна существованию на $D(A)$ обратного у определяемого равенством (2.8) оператора B. В данном случае

$$BP = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} T_k(s) P\ ds = \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} E_{1,k+1}(ims)\ ds\ p_m \right\} =$$

$$= \{E_{1,k+\beta+1}(im)\ p_m\} = \{E_{1,2}(im)\ p_m\} = \left\{ \frac{\exp(im) - 1}{im}\ p_m \right\}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Для того, чтобы оператор B^{-1} был определен на $D(A)$, необходимо выполнение условия $|\exp(im) - 1| \geqslant \delta > 0$, $\quad m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, но это невозможно в силу плотности множества $\{\exp(im)\}$, $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ на единичной окружности (см. [8], с. 485). □

Как следует из приведенного примера, чтобы получить достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3), необходимо наложить дополнительные ограничения на оператор A и значения u_0 и u_1.

В дальнейшем нули функции Миттаг-Леффлера также будут играть важную роль. Поэтому мы приведем нужные нам результаты работы [5] об их расположении. В теореме 1 [5] установлено, что при $k+\beta > 0$ и подходящей нумерации, все достаточно большие по модулю нули μ_n, $n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ просты и при $n \to \pm\infty$ справедлива асимптотика

$$\mu_n = 2\pi n i + (k + \beta - 1)\left(\ln 2\pi|n| + \frac{\pi i}{2}\ \mathrm{sign}\ n\right) - \ln\Gamma(k+\beta) + O\left(\frac{\ln|n|}{|n|}\right), \quad n \to \pm\infty. \tag{2.21}$$

Кроме того, из теоремы 3 [5] следует, что при $0 < k+\beta < 1$ все нули μ_n лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z < k+\beta-1$, при $k+\beta = 1$ — на мнимой оси, при $k+\beta > 1$ — в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > k+\beta-1$.

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1.1) – (1.3).

Теорема 2.4. *Пусть $k,\beta > 0$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача* (1.1) – (1.3) *имеет решение* $(u(t),p)$. *Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ не являлся собственным значением оператора A.*

Доказательство. Предположим противное, пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $h_n \neq 0$.

Введем в рассмотрение функцию $w(t) = \psi(t)h_n$ и подберем скалярную функцию $\psi(t)$ так, чтобы функция $w(t)$ удовлетворяла уравнению (1.1) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (1.2). Легко проверить, что функция $\psi(t)$ должна быть решением следующей задаче Коши

$$\psi'(t) = \mu_n\psi(t) + t^{k-1}, \tag{2.22}$$

$$\lim_{t\to 0}\psi(t) = 0. \tag{2.23}$$

В силу теоремы 2.1 задача (2.22), (2.23) имеет единственное решение, которое, с учетом равенства (2.14), представимо в виде $\psi(t) = \Gamma(k)I^k \exp(\mu_n t) = \Gamma(k)t^k E_{1,k+1}(\mu_n t)$.

Поскольку μ_n — нуль функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$, то

$$\lim_{t\to 1} I^\beta w(t) = \Gamma(k)\lim_{t\to 1} I^\beta\left(t^k E_{1,k+1}(\mu_n t)\right) = \Gamma(k)E_{1,k+\beta+1}(\mu_n) = 0.$$

Таким образом, функция $w(t) = \psi(t)h_n$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $p = h_n$ и нулевым условиям (1.2) и (1.3), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t)+w(t), p+h_n)$ также является решением задачи (1.1) – (1.3). □

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3). Как следует из теоремы 2.4, нам придется потребовать, чтобы все нули μ_n функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ не являлись собственными значениями оператора A. Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы они принадлежали резольвентному множеству $\rho(A)$. В случае $k+\beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей, лежащих слева от прямой $\mathrm{Re}\, z = \sigma > \omega$, поскольку остальные, в силу асимптотики (2.21), автоматически принадлежат $\rho(A)$.

Теорема 2.5. *Пусть $k,\beta > 0$, $k+\beta \leqslant 1$, $\sigma > \omega$, A — генератор k раз ПП $T_k(t)$ и $u_0 \in D\left(A^{5+[k]-[1-k]}\right)$, $u_1 \in D\left(A^{[k]+4}\right)$. Если каждый нуль μ_n, $n \in \boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$ функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ с Re $\mu_n < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$ и существует $d > 0$ такое, что*

$$\sup_{Re\ \mu_n<\sigma}\left\|\frac{R(\mu_n)}{\mu_n^k}\right\| \leqslant d, \tag{2.24}$$

то задача (1.1) – (1.3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что существование единственного решения задачи (1.1) – (1.3) (или операторного уравнения (2.6)) сводится к доказательству существования обратного у ограниченного оператора, определяемого равенством (2.8) (или (2.9)). В силу инвариантности $D(A)$ относительно $T_k(t)$ (см. [4], предложение 1.2) при $u_0 \in D\left(A^{5+[k]-[1-k]}\right)$, $u_1 \in D\left(A^{[k]+4}\right)$ правая часть уравнения (2.6) q принадлежит $D\left(A^{[k]+4}\right)$. Покажем, что из условия (2.24) вытекает, что оператор B имеет обратный оператор $B^{-1} : D\left(A^{[k]+4}\right) \to D(A)$.

Поскольку каждый нуль μ_n функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ с $\mathrm{Re}\ \mu_n < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n. Пусть Γ — контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\mathrm{Re}\, z = \sigma > \omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n, т.е. $\Gamma = \{\mathrm{Re}\, z = \sigma\}\bigcup \gamma_n$. Контур Γ является границей области, внутри которой расположен спектр $\sigma(A)$.

Возьмем $\lambda \in \rho(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \sigma > \omega$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon q = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{R(z)q\;dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda - z)^{[k]+3}}, \quad \Upsilon : E \to E. \tag{2.25}$$

Отметим, что интеграл в (2.25) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ, оценок (2.10), (2.24), асимптотики (2.21) и известного ([3], с. 134) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера при $|z| \to \infty$

$$E_{1,\mu}(z) = z^{1-\mu}e^{z} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu - j)\;z^{j}} + O\left(|z|^{-n-1}\right), \quad |\arg z| \leqslant \nu\pi, \quad \nu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{2.26}$$

$$E_{1,\mu}(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu - j)\;z^{j}} + O\left(|z|^{-n-1}\right), \quad \nu\pi \leqslant |\arg z| \leqslant \pi. \tag{2.27}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bigcup \gamma_n} \frac{R(z)q\;dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda - z)^{[k]+3}} = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{R\left(\mu_n\right)q}{E'_{1,k+\beta+1}\left(\mu_n\right)\left(\lambda - \mu_n\right)^{[k]+3}}, \tag{2.28}$$

при этом, поскольку (см. [3], формула (1.5) на с. 118)

$$E'_{1,k+\beta+1}\left(\mu_n\right) = \mu_n^{-1}\left(E_{1,k+\beta}\left(\mu_n\right) - (k+\beta)E_{1,k+\beta+1}\left(\mu_n\right)\right),$$

то, учитывая асимптотику (2.26) функции Миттаг-Леффлера и асимптотику (2.21), получим

$$E'_{1,k+\beta+1}\left(\mu_n\right) = \frac{1}{\mu_n}\left(\frac{\mu_n^{1-k-\beta}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}e^{i\;Im\;\mu_n}}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)\mu_n} - \right.$$

$$\left. - \frac{(k+\beta)\mu_n^{-k-\beta}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}e^{i\;Im\;\mu_n}}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{k+\beta}{\Gamma(k+\beta)\mu_n} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\left|E'_{1,k+\beta+1}\left(\mu_n\right)\right| = \frac{1}{|\mu_n|}\left(\frac{1}{\Gamma(k+\beta)} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|}\right)\right). \tag{2.29}$$

В силу равенства (2.29), условия (2.24) и асимптотики (2.21) ряд (2.28), а, следовательно и интеграл по $\bigcup \gamma_n$, абсолютно сходятся.

Сходимость же интеграла (2.25) по прямой $\mathrm{Re} z = \sigma$ очевидно следует из (2.24), (2.27).

Пусть $q \in D\left(A^{[k]+1}\right)$, $\sigma < \sigma_1 < \mathrm{Re}\,\lambda$. Тогда, подставляя (2.9) в (2.25) и применяя тождество Гильберта, получим

$$\Upsilon Bq = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{R(z)\;dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda - z)^{[k]+3}}\;\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)R(\xi)(\lambda I - A)^{[k]}q\;d\xi}{(\lambda - \xi)^{[k]}} =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda - z)^{[k]+3}(\lambda - \xi)^{[k]}}\,\frac{R(z) - R(\xi)}{\xi - z}(\lambda I - A)^{[k]}q\;d\xi dz. \tag{2.30}$$

Интеграл в (2.30) абсолютно сходится, поэтому меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Upsilon Bq = \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{R(z)(\lambda I - A)^{[k]}q\;dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda - z)^{[k]+3}} \int\limits_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)\;d\xi}{(\lambda - \xi)^{[k]}(\xi - z)} -$$

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)R(\xi)(\lambda I - A)^{[k]}q\;d\xi}{(\lambda - \xi)^{[k]}} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda - z)^{[k]+3}(\xi - z)}. \tag{2.31}$$

Внутренний интеграл во втором слагаемом (2.31) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана, а для вычисления интегралов в первом слагаемом, используем интегральную теорему Коши. Таким образом, для $q \in D\left(A^{[k]+1}\right)$ справедливо равенство

$$\Upsilon Bq = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{R(z)(\lambda I - A)^{[k]}q\, dz}{(z-\lambda)^{2[k]+3}} = \frac{R^{(2[k]+2)}(\lambda)(\lambda I - A)^{[k]}q}{(2[k]+2)!} =$$

$$= R^{2[k]+3}(\lambda)(\lambda I - A)^{[k]}q = R^{[k]+3}(\lambda)q.$$

Коммутирующие операторы Υ, B, $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D\left(A^{[k]+1}\right)$ плотна в E, поэтому равенство $\Upsilon Bq = R^{[k]+3}(\lambda)q$ справедливо и для $q \in E$, $\Upsilon B : E \to D\left(A^{[k]+3}\right)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}q = (\lambda I - A)^{[k]+3}\Upsilon q$ при $q \in D\left(A^{[k]+3}\right)$ является обратным по отношению к B. Действительно,

$$BB^{-1}q = B(\lambda I - A)^{[k]+3}\Upsilon q = R^{[k]+3}(\lambda)(\lambda I - A)^{[k]+3}q = q, \qquad q \in D\left(A^{[k]+3}\right),$$

$$B^{-1}Bq = (\lambda I - A)^{[k]+3}\Upsilon Bq = q, \qquad q \in E.$$

Что касается решения задачи (1.1) – (1.3), то принадлежащий $D(A)$ элемент p имеет вид $p = (\lambda I - A)^{[k]+3}\Upsilon q$, где элемент $q \in D\left(A^{[k]+4}\right)$ определяется равенством (2.7), оператор Υ — равенством (2.25), $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda > \sigma > \omega$, а функция $u(t)$ может быть определена из соотношения (2.5). □

В случае $k + \beta > 1$ условие (2.24) автоматически выполнено, т.к. число нулей с $\operatorname{Re}\mu_n < \sigma$ конечно, поэтому в формулировке следующей теоремы условие (2.24) может быть опущено. С учетом этого замечания, доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 2.5.

Теорема 2.6. *Пусть* $k, \beta > 0$, $k + \beta > 1$, $\sigma > \omega$, A *— генератор* k *раз ПП* $T_k(t)$ *и* $u_0 \in D\left(A^{5+[k]-[1-k]}\right)$, $u_1 \in D\left(A^{[k]+4}\right)$. *Если каждый нуль* μ_n, $n = 1, 2..., n_0$ *функции* $E_{1,k+\beta+1}(z)$ *с* Re $\mu_n < \sigma$ *принадлежит* $\rho(A)$, *то задача* (1.1) – (1.3) *имеет единственное решение.*

Замечание 2.2. Если оператор A является генератором сильно дифференцируемой при $t > 0$ полугруппы $T(t)$, то его резольвентное множество содержит (см. [14]) полуплоскость $\{\lambda :\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega\}$ и множество вида $\{\lambda :\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant a - b\ln|\operatorname{Im}\lambda|\}$. В этом случае утверждение теоремы 2.6 справедливо для $k + \beta \geqslant 1$, а если $1 - k - \beta < b$, то и для $k + \beta < 1$, поскольку в спектр оператора A может попасть лишь конечное число нулей μ_n. Если A — генератор аналитической полугруппы, то теорема 2.6 справедлива уже для любых $k, \beta > 0$. При этом, учитывая замечание 2.1, гладкость элементов u_0 и u_1 может быть уменьшена.

Замечание 2.3. Легко убедиться, что теоремы 2.5 и 2.6 об однозначной разрешимости справедливы также и в случае, когда в условии (1.3) $\beta = 0$, при этом $I^{\beta}u(t) = u(t)$ и дополнительное условие состоит в задании финального значения $u(1) = u_1$.

Замечание 2.4. Поскольку уравнение вида

$$u'(t) + \frac{l}{t}\, u(t) = Au(t) + t^m p, \qquad l + m + 1 > 0$$

заменой $u(t) = t^{-l}v(t)$ сводится к уравнению

$$v'(t) = Av(t) + t^{l+m}p,$$

то для него аналогично можно сформулировать обратную задачу и установить условия ее однозначной разрешимости. При этом следует предполагать, то оператор A является генератором $l + m + 1$ раз ПП.

3. Обратная задача со стационарным неоднородным слагаемым

В упомянутых ранее работах [15, 9, 10, 6, 7], посвященных обратной задаче для уравнения (1.4), случай, когда A — генератор ПП, не рассматривался. Поэтому мы сформулируем соответствующую обратную задачу и результаты о ее разрешимости.

Рассмотрим обратную задачу вида

$$u'(t) = Au(t) + p, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{t \to 1} I^\beta u(t) = u_1, \tag{3.3}$$

где $\beta \geqslant 0$ (при $\beta = 0$ I^β — единичный оператор), A — генератор ПП $T_\gamma(t)$, $\gamma \geqslant 0$.

Случай $\gamma = \beta = 0$, A — генератор C_0-полугруппы хорошо известен из [15, 9, 10, 6, 7] и является "предельным"для задачи (3.1) – (3.3). В теореме 2.6 содержится случай $\gamma = 1$, $\beta > 0$. Мы рассмотрим обратную задачу (3.1) – (3.3) при дальнейшем ослаблении требований на оператор A.

В силу теоремы 3 [12] задача (3.1), (3.2) сводится к задаче о нахождении функции $u(t)$ и элемента $p \in D\left(A^{1-[1-\gamma]}\right)$ таких, что справедливо соотношение

$$u(t) = D^\gamma \left(T_\gamma(t)u_0 + \int\limits_0^t T_\gamma(\tau)p \, d\tau \right), \quad u_0 \in D\left(A^{2-[1-\gamma]}\right). \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) и граничного условия (3.3) для нахождения неизвестного элемента p получаем уравнение

$$\lim_{t \to 1} I^\beta D^\gamma \int\limits_0^t T_\gamma(\tau)p \, d\tau = u_1 - \lim_{t \to 1} I^\beta D^\gamma T_\gamma(t)u_0, \quad u_1 \in D(A),$$

или в операторном виде

$$B_0 p = q_0,$$

где

$$q_0 = u_1 - \lim_{t \to 1} I^\beta D^\gamma T_\gamma(t)u_0, \quad q_0 \in D(A),$$

$$B_0 p = \lim_{t \to 1} I^\beta D^\gamma \int\limits_0^t T_\gamma(\tau)p \, d\tau, \quad B_0 : D\left(A^{1-[1-\gamma]}\right) \to D(A). \tag{3.5}$$

Однозначную разрешимость задачи (3.1) – (3.3) сведем к задаче о существовании у оператора B_0 обратного оператора, заданного на $D\left(A^{4+[\gamma]-[1-\gamma]}\right)$.

Теорема 3.1. *Пусть $\gamma, \beta \geqslant 0$, A — генератор γ раз ПП $T_\gamma(t)$. Тогда для любого $p \in D\left(A^{[\gamma]+1}\right)$ справедливо представление*

$$B_0 p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,\beta+2}(z)}{(\lambda - z)^{[\gamma]}} R(z)(\lambda I - A)^{[\gamma]} p \, dz, \tag{3.6}$$

где $\lambda \in \rho(A)$, $Re\ \lambda > \sigma > \omega$.

Доказательство. Пусть вначале $p \in D\left(A^l\right)$, где $l = [\gamma] + 2$. Тогда $p = R^l(\lambda)p_0$, $p_0 \in E$ и из (3.5), (2.11), аналогично выводу формул (2.12), (2.13), (2.15), будем иметь

$$B_0 p = \lim_{t \to 1} I^\beta D^\gamma \int\limits_0^t \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp(zs)}{z^\gamma} R(z) R^l(\lambda) p_0 \, dz ds =$$

$$= \lim_{t\to 1} I^{\beta} D^{\gamma} \int\limits_0^t \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(zs)}{z^{\gamma}(\lambda - z)^l} R(z) p_0 \, dz ds =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1}{2\pi i} I^{\beta+1} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(zt)}{(\lambda - z)^l} R(z) p_0 \, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,\beta+2}(z)}{(\lambda - z)^{l-1}} R(z) (\lambda I - A)^{l-1} p \, dz. \tag{3.7}$$

Из равенства (3.7), также как и при доказательстве теоремы 2.2, для $p \in D\left(A^{[\gamma]+1}\right)$ вытекает представление (3.6). □

Теорема 3.2. *Пусть $\beta \geqslant 0$, A — линейный замкнутый оператор в E и задача* (3.1) – (3.3) *имеет решение. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль ν_n целой функции $E_{1,\beta+2}(z)$ не являлся собственным значением оператора A.*

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 2.4.

Теорема 3.3. *Пусть $\beta = 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\sigma > \omega$, A — генератор γ раз ПП $T_{\gamma}(t)$ и $u_0 \in D\left(A^{5+[\gamma]-2[1-\gamma]}\right)$, $u_1 \in D\left(A^{4+[\gamma]-[1-\gamma]}\right)$. Если каждый нуль $\nu_n = 2\pi n i$, $n \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$ функции $E_{1,2}(z) = (\exp(z) - 1)/z$ принадлежит $\rho(A)$ и существует $d > 0$ такое, что*

$$\sup_{Re\ \nu_n < \sigma} \left\| \frac{R(\nu_n)}{\nu_n^{\gamma}} \right\| \leqslant d, \tag{3.8}$$

то задача (3.1) – (3.3) *имеет единственное решение.*

Теорема 3.4. *Пусть $\beta > 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\sigma > \omega$, A — генератор γ раз ПП $T_k(t)$ и $u_0 \in D\left(A^{5+[\gamma]-2[1-\gamma]}\right)$, $u_1 \in D\left(A^{4+[\gamma]-[1-\gamma]}\right)$. Если каждый нуль ν_n, $n = 1, 2..., n_0$ с $Re\,\nu_n < \sigma$ функции $E_{1,\beta+2}(z)$ принадлежит $\rho(A)$, то задача* (3.1) – (3.3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Доказательство теорем 3.3, 3.4 аналогично доказательству теорем 2.5, 2.6, при этом соответствующие равенства имеют вид:

$$\Upsilon_0 q_0 = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{R(z) q_0 \, dz}{E_{1,\beta+2}(z)(\lambda - z)^{[\gamma]+3}}, \quad \Upsilon_0 : E \to E,$$

где Γ_0 — контур, аналогичный контуру Γ, охватывающий нули ν_n функции Миттаг-Леффлера $E_{1,\beta+1}(z)$;

$$\Upsilon_0 B_0 q_0 = R^{[\gamma]+3}(\lambda) q_0, \quad q_0 \in D\left(A^{1-[1-\gamma]}\right), \quad \Upsilon_0 B_0 : D\left(A^{1-[1-\gamma]}\right) \to D\left(A^{[\gamma]+3}\right);$$

$$B_0^{-1} q_0 = (\lambda I - A)^{[\gamma]+3} \Upsilon_0 q_0, \quad q_0 \in D\left(A^{[\gamma]+3}\right);$$

$$B_0 B_0^{-1} q_0 = B_0 (\lambda I - A)^{[\gamma]+3} \Upsilon_0 q_0 = q_0, \quad q_0 \in D\left(A^{[\gamma]+3}\right);$$

$$B_0^{-1} B_0 q_0 = (\lambda I - A)^{[\gamma]+3} \Upsilon_0 B_0 q_0 = q_0, \quad q_0 \in D\left(A^{1-[1-\gamma]}\right);$$

$$p = (\lambda I - A)^{[\gamma]+3} \Upsilon_0 q_0, \quad q_0 \in D\left(A^{4+[\gamma]-[1-\gamma]}\right), \quad p \in D\left(A^{1-[1-\gamma]}\right);$$

наконец, функция $u(t)$ определена равенством (3.4). □

В заключение отметим, что теорема 3.3 при $\gamma = 0$ превращается в теорему 4 работы [9]. В работе [9] указано, что только принадлежность точек $\nu_n = 2\pi n i$ резольвентному множеству не является достаточным условием разрешимости. В теореме 1 работы [10] условие (3.8) при $\gamma = 0$ заменено условием суммируемости в среднем при любых $p \in E$ ряда

$$\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} R(\nu_n)\, p.$$

В результате сформулированные в [10] условия при $\beta = \gamma = 0$, $u_0, u_1 \in D(A)$ стали необходимыми и достаточными условиями однозначной разрешимости задачи (3.1) – (3.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А.В.* О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 583 – 589.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М. 1962.
3. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.
4. *Мельникова И.В., Филинков А.И.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 6(300). С. 111 – 150.
5. *Седлецкий А.М.* О нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Математ. заметки. 2000. Т. 68. № 5. С. 710 – 724.
6. *Тихонов И.В, Эйдельман Ю.С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 637 – 644.
7. *Тихонов И.В, Эйдельман Ю.С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Математ. заметки. 2005. Т. 77. № 2. С. 273 – 290.
8. *Хилле Э., Филлипс З.С.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Мир. 1962.
9. *Эйдельман Ю.С.* Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Докл. АН УССР. Сер А. — 1983. № 4. С. 15 – 18.
10. *Эйдельман Ю.С.* Одна обратная задача для эволюционного уравнения // Математ. заметки. 1991. Т. 99. № 5. С. 135 – 141.
11. *Arendt W.* Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems // Israel J. Matem. 1987. V. 59. P. 327 – 352.
12. *Mijatović M., Pilipović, S., Vejzović F.* α-times integrated semigroups $\left(\alpha \in \mathbf{R}^+\right)$ // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 210. P. 790 – 803.
13. *Neubrander F.* Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem // Pacific. J. Math. 1988. V. 135. P. 111 – 155.
14. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag. 1983.
15. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York. Basel: Marcel Dekker, 2000.

Александр Васильевич Глушак
Белгородский госуниверситет
Кафедра математического анализа
E-mail: `aleglu@mail.ru`