ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Манаенкова Т.А., канд. физ.-мат. наук,
Резниченко О.С., ст. преподаватель
Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

Необходимость обобщения понятия дифференцирования целого порядка от функции на дифференциал дробного порядка очень часто возникает при изучении термодинамических процессов. Например, известно, что дифференциальные уравнения порядка $\frac{1}{2}$ описывают некоторые физические процессы, в частности, изменение температуры в объектах управления климатических систем, диффузионные процессы при заряде суперконденсаторов [2].

Сложность обобщения заключается в отсутствии физической интерпретации понятия дробной производной и дробных интегралов. Например, все мы знаем, что производные первого порядка по времени – это «средняя скорость» точечного объекта на некотором конечном интервале времени. Соответственно производные второго порядка задают «среднее ускорение» на некотором временном интервале. Дробные производные не дают аналогичных интерпретаций, которые можно приписать точечным свойствам объекта или малого интервала, – скорее это свойства всего пути-траектории в целом. Поэтому смысловые интерпретации дробных производных (вернее дифференциальных уравнений с дробными производными) отображаются в описаниях диффузионных процессов, в которых объект моделирования принципиально считается распределенным, и рассматриваются всевозможные распределения плотности.

Математическая модель задачи о прогреве полубесконечной области $x > 0$, с нулевой начальной температурой при определенных предположениях сводится к исследованию уравнения диффузии Фурье:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a = \text{const} > 0 \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$ - функция двух независимых переменных x и t, которая задает температуру области в точке x в момент времени t, a – коэффициент диффузии.

С учетом начального условия

$$u(x,0)=0, \qquad 0\le x<\infty, \tag{2}$$

при выполнении условия А.Н. Тихонова

$$\lim_{x\to\infty}\max_{[0;T]}|u|\exp(-\varepsilon x^2)=0, \qquad \varepsilon>0, \tag{3}$$

уравнение (1) сводится к уравнению вида

$$u_x(x,t)=-\frac{1}{a}D_{0,t}^{1/2}u(x,t) \tag{4}$$

Здесь $D_{0,t}^{1/2}u(x_0,t)$ является дробной производной порядка $\frac{1}{2}$, которая для произвольного порядка α определяется следующим образом:

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=\frac{d^n}{dt^n}(I_{0+}^{n-\alpha}u)(t)$$

– левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля, а

$$I_{0+}^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}u(s)\,ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha>0$, [1], а, $\Gamma(p)$ – гамма-функция.

Подействуем оператором $D_{0,t}^{-1/2}$ на уравнение (4). Учитывая свойство дробных интегралов и производных как взаимнообратных операторов:

$$I_{0,t}^{\alpha}D_{0,t}^{\alpha}f=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{I_{0,t}^{\alpha-1}f(0)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \text{ где } n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$$

и дополнительное начальное условие $D_{0,t}^{1/2}u(x,0)=0$.

В итоге получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}D_{0,t}^{-1/2}u(x,t)=-\frac{1}{a}u(x,t) \tag{5}$$

При решении многих дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные часто применяют преобразование Лапласа функции. Приведем основные определения и свойства этого преобразования для примера их применения.

Преобразование Лапласа:

$$L(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad (6)$$

Свойства:

$$L\{f'(t)\}=pF(p)-f(0) \qquad (7)$$

$$L(D_{0,t}^{-\alpha} f(t),p)=p^{-\alpha}F(p), \text{ при } \alpha>0 \qquad (8)$$

Обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1}g(t)==L^{-1}(g(p),t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}g(p)dp,\ \gamma=\operatorname{Re}p. \qquad (9)$$

Действуем преобразрванием Лапласа на уравнение (5) с учетом условия (2) и свойства (8) по переменной t, получим:

$$p^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}U(x,p)=-\frac{1}{a}U(x,p). \qquad (10)$$

Разделяем переменные и решаем уравнение по переменной x, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,p)/U(x,p)=-\frac{p^{1/2}}{a}.$$

$$\ln(U(x,p))=-\frac{p^{1/2}}{a}x+C.$$

$$U(x,p)=C_1\exp\left(-\frac{p^{1/2}}{a}x\right). \qquad (11)$$

После применения обратного преобразования Лапласа (9) на уравнение (1), получаем решение задачи (4), (2) вида:

$$u(x,t)=\frac{C_1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt+\frac{\sqrt{p}}{a}x}dp$$

Таким образом был приведен пример обобщения уравнения с производными целого порядка на уравнение, содержащего производную дробного порядка, и представлен метод решения этой задачи с применением преобразования Лаплса.

Аналоги начально-краевых задач, содержащих дробные интегралы и производные были решены в работах [4], [5], применение таких задач можно дополнительно посмотреть в работах [1] – [3].

Список литературы:

1. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И.Маричев // Минск. Наука и техника, 1987.
2. Мишунин В.В. Особенности цифрового моделирования систем дробно-иррационального класса [Текст] / В.В. Мишунин А.И., Дементьев В.Г., Рубанов // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. Белгород, 2003. № 6. Ч. III. С. 142-144.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
4. Глушак А.В. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А.В. Глушак // Математические заметки, 2005. Т.77, вып.1. С. 28 – 41.
5. Глушак А.В. О разрешимости задач типа Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля / А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика, 2012. №17 (136), вып.28. С. 28 – 45.