MSC 70H05

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Вещественную $2n \times 2n$-матрицу $\mathcal{G}$, $n \in \mathbb{N}$ вида

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с блоками в виде $n \times n$-матриц $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ таких, что $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$, $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}$ назовем *канонической гамильтоновой матрицей с n степенями свободы.*

Важность изучения таких матриц связана с тем, что они являются генераторами сдвига по времени $t \in \mathbb{R}$ вдоль траекторий $\langle P(t), Q(t)\rangle$, $P(t) = \langle p_1(t), ..., p_n(t)\rangle$ и $Q(t) = \langle q_1(t), ..., q_n(t)\rangle$ в $\mathbb{R}^{2n}$ для линейных механических гамильтоновых систем

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial q_i}\,, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1 \div n\,,$$

каждая из которых определяется квадратичной формой

$$\mathsf{H} = \frac{1}{2}(P, \mathcal{A}P) + (P, \mathcal{B}Q) + \frac{1}{2}(Q, \mathcal{C}Q)\,.$$

В работе устанавливается характеристическое свойство для матриц $\mathcal{F}$ четной размерности $2n$, которые приводятся посредством линейного преобразования $\mathcal{U}\mathcal{G}\mathcal{U}^T = \mathcal{F}$ к канонической гамильтоновой матрице $\mathcal{G}$ на основе ортогональной $2n \times 2n$-матрицы $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathbf{1}$. Эта характеризация основана на следующем наблюдении

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица $\mathcal{G}$ имела вид (1) необходимо и достаточно чтобы она удовлетворяла соотношению*

$$\mathcal{J}\mathcal{G}\mathcal{J}^T = -\mathcal{G}^T\,, \tag{2}$$

где $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{J}$ имеет блочный вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Основой для характеризации является

Теорема 2. *Множество вещественных $2n \times 2n$-матриц $\mathcal{I}$, удовлетворяющих условиям $\mathcal{I}^T = -\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^2 = -\mathbf{1}$, состоит из матриц, ортогонально эквивалентных матрице $\mathcal{J}$, то есть*

$$\mathcal{I} = \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^T\,, \qquad \mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathbf{1}\,.$$

Следствием этого утверждения является

Теорема 3. *Для того, чтобы $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{F}$ приводилась посредством линейного преобразования к матрице $\mathcal{G}$ на основе ортогональной матрицы $\mathcal{U}$ необходимо и достаточно чтобы существовала матрица $\mathcal{J}$ такая, что $\mathcal{J}^T = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -\mathbf{1}$, для которой имеет место $\mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{J}^T = -\mathcal{F}^T$.*

Таким образом, это свойство является характеристическим для матриц ортогонально эквивалентных некоторой канонической гамильтоновой матрице.