Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Международная конференция

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

г. Белгород, 26 — 31 мая 2013 года

МАТЕРИАЛЫ

Белгород 2013

УДК 51

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Белгородского государственного национального
исследовательского университета

Дифференциальные уравнения и их приложения : сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26-31 мая 2013 г.). – Белгород : ИПК НИУ «БелГУ», 2013. — 264 с.

Сборник включает материалы докладов ведущих российских и зарубежных учёных на международной конференции, проведенной с 26 по 31 мая в БелГУ и посвященной актуальным проблема теории дифференциальных уравнений и их приложениям в математической физике и теории чисел.

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №13-01-06012 г)

УДК 51

Организационный комитет конференции:

Председатель организационного комитета конференции:

ректор НИУ «БелГУ» **Полухин О.Н.**

Заместители председателя:

Солдатов А.П., **Глушак А.В.**

Члены организационного комитета:

С.А. Гриценко	(ответственный секретарь, НИУ БелГУ),
В.А. Полунин	(исполнительный секретарь, НИУ БелГУ),
О.В. Гальцев	(исполнительный секретарь, НИУ БелГУ),
В.И. Власов	(Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына, Москва),
Л.Н. Ляхов	(Воронежский государственный университет, Воронеж),
О.М. Пенкин	(НИУ БелГУ),
Ю.П. Вирченко	(НИУ БелГУ),
А.М. Мейрманов	(НИУ БелГУ),
Е.Ю. Панов	(Новгородский государственный университет, Великий Новгород),
А.И. Комеч	(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН),
В.П. Радченко	(Самарский государственный технический университет, Самара),
А.А. Андреев	(Самарский государственный технический университет, Самара),
А.Н. Кожанов	(Институт математики им. С.Л. Соболева СОРАН, Новосибирск),
К.Б. Сабитов	(филиал АН Башкортостана, Стерлитамак),
А.Н. Зарубин	(Орловский государственный университет, Орел),
В.Б. Васильев	(Липецкий государственный политехнический университет, Липецк),
М.Н. Бекназаров	(НИУ БелГУ),
В.Л. Прядиев	(НИУ БелГУ),
А.В. Псху	(НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик)

Международный программный комитет конференции:

Х. Бегер	(Свободный университет, Берлин, Германия)
Б. Боярский	(Институт математики ПАН, Польша)
В.В. Козлов	(Математический институт им. В.А.Стеклова, РАН, Москва)
В.А. Ильин	(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)
Е.И. Моисеев	(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)
А.М. Нахушев	(Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик)
Т.Ш. Кальменов	(Физико-математический институт, Алма-Ата, Казахстан)
Н. Попиванов	(Софийский государственный университет, София, Болгария)
Н.Х. Розов	(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)
Е.В. Радкевич	(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)
А.П. Солдатов	(Белгородский национальный исследовательский университет, Белгород)
В.В. Жиков	(Владимирский государственный университет, Владимир)
С.Ю. Доброхотов	(Институт Проблем Механики РАН, Москва)
В.Н. Чубариков	(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)
А.В. Фурсиков	(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)
А.С. Шамаев	(Институт Проблем Механики РАН, Москва)

MSC 35J70

ЗАВИСИМОСТЬ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ БИЦАДЗЕ ОТ СТЕПЕНИ ВЫРОЖДЕНИЯ

А.М. Абдрахманов

Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, e-mail: abdrai@mail.ru

Будем рассматривать систему

$$L(W) = z^{\nu}\overline{W_{\bar{z}\bar{z}}} + \lambda W_{\bar{z}} = 0 \tag{1}$$

и исследовать вопрос о разрешимости задачи Дирихле в зависимости от ν и λ, где $\nu \geq 0$ – целое число, $\lambda \neq 0$ – произвольное комплексное число. Задача Дирихле рассматривается в следующей постановке:

найти регулярное в области $D = \{z : |z| < 1, z \neq 0\}$ решение системы (1), ограниченное в точке $z = 0$ и удовлетворяющее условию

$$W\big|_{\Gamma} = f(t), \tag{2}$$

где $f(t)$ – заданная на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ функция, ограничения на которую будут даны ниже.

В случае $\nu = 0$, $\lambda = 0$ задача (1)-(2) была изучена А.В.Бицадзе, который показал, что однородная задача Дирихле в круге имеет бесконечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи Дирихле требуется бесконечное число условий разрешимости. Далее Р.С. Сакс и Н.Е. Товмасян в случае $\nu = 0$, $\lambda = const \neq 0$ изучили эффект влияния коэффициентов при младшей производной на разрешимость задачи Дирихле. Оказалось, что задача (1)-(2) разрешима единственным образом для $f(t) \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ и удовлетворяющей некоторому условию ортогональности. Они сводили задачу (1)-(2) к системе сингулярных интегральных уравнений на границе Γ области D. В случае $\nu \geq 1$ их методы не проходят. Ниже будет приведен новый метод исследования влияния младших производных на разрешимость задачи Дирихле, который позволяет ответить на вопрос о разрешимости задачи Дирихле и для вырождающейся в точке системы.

1. Пусть $\nu = 1$, тогда система (1) принимает вид:

$$L(W) = z\overline{W_{\bar{z}\bar{z}}} + \lambda W_{\bar{z}} = 0 \tag{3}$$

Подействуем на оператор L оператором

$$\Lambda = z\overline{\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}} - \overline{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}$$

Тогда система (3) перейдет в систему

$$L\Lambda(W^1) = z\bar{z}\frac{\partial^4 W^1}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} - |\lambda|^2 \frac{\partial^2 W^1}{\partial z \partial \overline{z}} = 0. \tag{4}$$

Система (4) распадается на две системы

$$z\bar{z}\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\bar{z}} - |\lambda|^2 V = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 W^1}{\partial z\partial\bar{z}} = V \tag{6}$$

Из (6) находим W^1:

$$W^1 = \int\int V dz d\bar{z} + \varphi_0(z) + \psi(\bar{z}).$$

Тогда функция $W = \Lambda(W^1)$ будет общим решением системы (3).

Доказаны теоремы о разрешимости задачи (3)-(2).

Теорема 1. *Пусть* $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{2}$, $f \in C^{3,\alpha}(\Gamma)$, *тогда задача Дирихле (3)-(2) однозначно и безусловно разрешима. Ее решение* $W \in C^\infty(D) \bigcap C(\overline{D})$.

Теорема 2. *Пусть* $|\lambda| = \dfrac{1}{2}$, $f \in C^{3,\alpha}(\Gamma)$, *тогда задача Дирихле (3)-(2) однозначно и безусловно разрешима. Если же искать решение, непрерывное в точке* $z = 0$, *то задача (3)-(2) однозначно разрешима для* $f(t)$, *удовлетворяющих условию:*

$$\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(t)}}{t^2}dt - \frac{\lambda}{4\pi i|\lambda|}\overline{\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(t)}}{t^2}dt} = 0\,. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $|\lambda| > \dfrac{1}{2}$, $f \in C^{3,\alpha}(\Gamma)$, *решение задачи (3)-(2) разрешимо с точностью до произвольной постоянной тогда и только тогда, когда* $f(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(t)}}{t^2}dt = 0\,. \tag{8}$$

textbf2. Пусть $\nu \geq 2$, тогда система (1) принимает вид:

$$L(W) = z^\nu \overline{W_{\bar{z}\bar{z}}} + \lambda W_{\bar{z}} = 0 \tag{9}$$

Подействуем на оператор L оператором

$$\Lambda = z^\nu \frac{\overline{\partial^2}}{\partial z^2} - \overline{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}$$

Тогда система (9) перейдет в систему

$$L\Lambda(W^1) = (z\bar{z})^\nu \frac{\partial^4 W^1}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} - |\lambda|^2 \frac{\partial^2 W^1}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

а функция $W = \Lambda(W^1)$ будет общим решением системы (9). Доказана теорема 4.

Теорема 4. *Однородная задача Дирихле (9)-(2) имеет* $(\nu - 2)$ *линейно-независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.*

MSC 51E14

ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАНИЦ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ BR-МНОЖЕСТВ

А.А. Абросимова

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,
пр-т Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: Pincet88@mail.ru

Рассматриваются двумерные множества ограниченного остатка или BR-множества, построенные на основе шестиугольных разверток $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Для них получены точные оценки остаточного члена, а также проведена оптимизация этих оценок.

Шестиугольная развертка $T^2(c)$ задается параметром $c = (c_1, c_2) \in C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; \min(|c_1|, |c_2|) \leq 1\}$, где $|\,|$ — обозначает абсолютную величину. Отложив вектор $-c$ от точек $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, получим шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны. Причем, если $c_1, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 \leq 1$, то $T^2(c)$ — выпуклый и невыпуклый в остальных случаях. Разбиение развертки $T^2(c)$ на области $T^2_k, k = 0,1,2$ задается с помощью вектора $\alpha = tc$ для $c_1, c_2 \geq 0$ или вектора $\tilde{\alpha} = t\tilde{c}, \tilde{c} \equiv c \bmod \mathbb{Z}^2$ для $c_1 < 0, c_2 \geq 0$ и $c_1 \geq 0, c_2 < 0$.

Рассмотрим оптимизацию границ отклонений на примере выпуклого шестиугольника. В этом случае границы отклонений $\delta_k(i), k = 0,1,2$ считающих функций от ожидаемой величины определяются доказанными в [1] неравенствами

$$\begin{gathered} -\sigma(c) \leq \delta_0(i) \leq 2, \\ -1 \leq \delta_1(i) \leq c_1,\ -1 \leq \delta_2(i) \leq c_2, \end{gathered} \tag{1}$$

Для оптимизации границ отклонений (1) будем рассматривать δ_k в качестве координат трехмерного вектора $x = (x_1, x_2, x_3) = (\delta_1(i), \delta_2(i), \delta_0(i))$. Выберем теперь трехмерную метрику

$$d(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть отклонения $\delta_k, k = 0,1,2$ задают трехмерный вектор x, и пусть его длина $d(x)$ определена в (2). Тогда выполняется равенство*

$$\inf_c \Big(\sup_{x \in T^2(c)} d(x) \Big) = 2.$$

Аналогичные результаты получены и в случае невыпуклых шестиугольников.

Литература

1. Абросимова А.А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2011. – Т.12.,Вып.4(40). – С.15-23.

MSC 51E14

ГРАНИЦЫ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ BR-МНОЖЕСТВ

А.А. Абросимова, Д.А. Блинов

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: mr.DmBlinov@mail.ru

В работе [1] были построены множества ограниченного остатка или BR-множества на двумерном торе, а также получены точные границы отклонений для этих множеств.

Разбиение тора $\mathbb{T}^2$ на три области

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2_0 \sqcup \mathbb{T}^2_1 \sqcup \mathbb{T}^2_2, \tag{1}$$

являющиеся множествами ограниченного остатка, задается двумя параметрами c и t, где $c = (c_1, c_2)$ принадлежит области

$$C_{con} = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \geq 0, c_1 + c_2 \leq 1\} \qquad (2),$$

и $0 < t < 1$. Тогда точные оценки остаточных членов $\delta_k(i), k = 0, 1, 2$ для множеств (1) определяются неравенствами

$$\begin{array}{rcl} -c_1 - c_2 & \leq \delta_0(i) \leq & 2, \\ -1 & \leq \delta_1(i) \leq & c_1, \\ -1 & \leq \delta_2(i) \leq & c_2 \end{array} \tag{3}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Из неравенств (3) видно, что границы отклонений или остаточных членов $\delta_k(i)$ зависят только от выбора параметра c. Возникает естественный вопрос: как подобрать c_1 и c_2 так, чтобы минимизировать границы отклонений.

Для минимизации границ отклонений будем рассматривать отклонения $\delta_k(i)$ как координаты трехмерного вектора

$$x = (x_0, x_1, x_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2), \tag{4}$$

а также выберем метрику $d_\theta(x)$, в которой будет проводиться оптимизация вектора (4). Будем рассматривать метрики

$$d_\theta(x) = (|x_0|^\theta + |x_1|^\theta + |x_2|^\theta)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5}$$

где $1 \leq \theta \leq \infty$, а $|\,|$ — обозначает абсолютную величину.

Назовем

$$\Delta_\theta(c) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_2(\delta(i))$$

верхней границей векторного отклонения $\delta(i)$ в метрике $d_\theta(x)$ при фиксированном c. Тогда

$$\Delta_\theta = \inf_{c \in C_{con}} \Delta_\theta(c)$$

нижняя граница $\Delta_\theta(c)$ по всем c из области C_{con}, определенной в (2).

Если выбрать $\theta = 2$, то получим естественную евклидову метрику

$$d_2(x) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}. \tag{6}$$

Относительно величины нижней границы $\Delta_2(c)$ в метрике $d_2(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ задают трехмерный вектор x, и пусть его длина $d_2(x)$ определена в (6). Тогда выполняется равенство*

$$\Delta_2 = \sqrt{2}.$$

Полученное в теореме равенство достигается при $c = (1, 0)$ и $c = (0, 1)$.
Аналогичные оценки получены для $\theta = 1$ и $\theta = \infty$, формула (5) в этих случаях примет вид $d_1(x) = |x_0| + |x_1| + |x_2|$ и $d_\infty(x) = \max(|x_0|, |x_1|, |x_2|)$ соответственно.

Литература

1. Абросимова А.А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №.5(124). – Вып.26. –С.5-11.

MSC 60K20

ЗАДАЧА ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ ДИХОТОМИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

М.И. Абрамова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: abramova_m@bsu.edu.ru, virch@bsu.edu.ru

Рассматривается задача о распределении вероятностей $Q(t,E)$ для времени достижения $\tilde{\tau}(E)$ заданного уровня E энергетическим функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})$ в случае, когда интенсивность $\alpha\tilde{\zeta}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})/dt$, $\alpha > 0$ представляется дихотомическим марковским случайным процессом $\langle\tilde{\zeta}(t); t \geq 0\rangle$ с кусочно постоянными траекториями, принимающими значения $\{0,1\}$. Точки изменения траекторий таких случайных процессов образуют пуассоновский поток.

Математическая модель процесса накопления энергии для этого случая описывается формулой

$$\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta}) = \alpha \int\limits_0^t \tilde{\zeta}(s)\, ds\,. \tag{1}$$

Решение задачи о вычислении распределения вероятностей $Q(x,t)$ для единственного с вероятностью единица случайного момента времени $\tilde{\tau}(E)$ достижения заданного уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})$, определяемого интегралом

$$\tilde{\tau}(E) = \int\limits_0^\infty \theta\left(E - \alpha\int\limits_0^t \tilde{\zeta}(s)ds\right)\, dt\,, \tag{2}$$

$\theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$ основано на методе Каца-Фейнмана-Дынкина вычисления математических ожиданий, связанных с аддитивными функционалами от траекторий марковских процессов. В основе метода лежит вспомогательное дифференциальное уравнение для совместных вероятностей двух процессов ζ и ε, $Q_i(x,t) \equiv \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = i\}$, определенных на $x \in \mathbb{R}_+$ так, что $Q(t,x) = Q_0(x,t) + Q_1(x,t)$. Для переходных вероятностей расширенного марковского процесса имеет место эволюционное уравнение

$$\dot{Q}_j(x,t) \;=\; -\alpha j Q'_j(x,t) \;+\; \nu\left[Q_{1-j}(x,t) \;-\; Q_j(x,t)\right]\,,\; j \in \{0,1\}, \tag{3}$$

где точка – производная по t, штрих – производная по x. Для вычисления вероятности $Q_j(x,t)$ ищется решение задачи Коши с начальными условиями $Q_i(x,0) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(0;\tilde{\xi}) \geq x,\ \tilde{\zeta}(0) = i\} = 0,\ i = 0,1,\ x > 0$. При этом, естественно, должно удовлетворяться граничное условие $Q_i(0,t) = 1/2$, $i = 0,1$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Решение задачи Коши позволяет найти интегральное представление для плотности $q(t,E) = dQ(x,t)/dt$.

Теорема 1. *Плотность распределения $q(t,E)$ случайного времени достижения уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})$ от траекторий дихотомического процесса определяется формулой*

$$q(t,E) = \alpha \frac{e^{-\nu t}}{4\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} e^{k(E-t\alpha/2)} \left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu - \alpha k/2) \frac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)} \right] \frac{dk}{k}\,, \tag{4}$$

где $\omega(k) = (\nu^2 + (\alpha k/2)^2)^{1/2}$ и

$$q(t,E) \; = \; \frac{d}{dt} Q(t,E) = \frac{d}{dt} \sum_j Q_j(t,E)\,.$$

Это интегральное представление выражается в терминах в терминах специальных функций.

Теорема 2. *Плотность распределения $q(t,E)$ определяется формулой*

$$q(t + E/\alpha, E) = \frac{1}{2} e^{-\nu E/\alpha} \Big[\delta(t) + $$
$$+ e^{-\nu t}\theta(t) \left(\mathrm{I}_0 \left(2\nu\sqrt{Et/\alpha} \right) + \sqrt{E/\alpha t}\; \mathrm{I}_1 \left(2\nu\sqrt{Et/\alpha} \right) \right) \Big]\,,$$

где δ – функция Дирака,

$$\mathrm{I}_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \mathrm{I}_1(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}$$

– модифицированные функции Бесселя, ν – плотность пуассоновского потока случайных точек изменения траекторий процесса $\tilde{\zeta}(t)$.

Литература

1. Дынкин Е.Б. Функционалы от траекторий марковских случайных процессов // Докл.АН СССР. – 1955. – Вып.104., №5. – С.691-694.

2. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике / М.: Мир, 1965.

3. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / М.: Наука, 1980.

MSC 34M50

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В СМЫСЛЕ СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ

Г.М. Айрапетян

Ереванский государственный университет,
Алег Манукян, 01, Ереван 022, Армения, e-mail: hhayrapet@gmail.com

Хорошо известно, что при исследовании граничной задачи Римана в классе непрерывных в смысле Гельдера функций, а также в пространствах функций $L^p(1 < p < \infty)$, важную роль играет тот факт, что интеграл типа Коши является ограниченным оператором в этих пространствах. Изучение граничной задачи Римана в пространствах, где интеграл типа Коши не является ограниченным оператором, сталкивается с серьезными трудностями. Например, когда граничные функции принадлежат классу L^1, то граничные условия в случае единичного круга следует задать в следующем виде [1]: определить аналитическую в $D^+ \cup D^-$, $D^- = \{z; |z| > 1\}$ функцию Φ, $\Phi(\infty) = 0$ так, чтобы имело место равенство

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_1 = 0\,, \tag{1}$$

где $a(t)$ кусочно непрерывная в смысле Гельдера функция на единичной окружности. В работе [1] установлено, что эта задача нормально разрешима и нетерова в пространстве L^1. В настоящем докладе исследуется задача Римана, когда граничные условия принадлежат пространствам L^∞ и W (пространство мер). Оказывается, что в этих случаях задачу Римана нельзя формулировать аналогично (1). Задача Римана в этом случае L^∞ (см. [2]) ставится следующим образом: определить аналитическую в $D^+ \cup D^-$ функцию Φ, $\Phi(\infty) = 0$ так, чтобы имело место

$$\lim_{r \to 1-0} (\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t)) = f(t)\,,$$

где сходимость является слабой сходимостью пространства L^∞. В работе найдены необходимые и достаточные условия нормальной разрешимости этой задачи. В аналогичной постановке задача Римана исследуется в пространстве W и устанавливается, что она нормально разрешима для любой функции $a(t)$ из рассматриваемого класса.

Литература

1. Айрапетян Г.М. Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 // Изв. АН Арм. ССР мат. – 1990. – XXV, №1. –С.3-20.

2. Айрапетян Г.М., Асатрян А.С. О граничной задаче Римана в L^∞ // Известия НАН Армении. Математика – 1998. – 33, №5. – С.4-11.

MSC 35R30

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

***Ш.А. Алимов, *Н.Н. Очилов, **В.В. Тихомиров**

*Ташкентский филиал Московского государственного университета,
Ташкент, Узбекистан, e-mail: max074777@mail.ru
**Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

Рассмотрим для $T>0$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обратную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \Delta u, \quad x \in \Omega,\ -T \le t < 0, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{v_k(x)\}$ – собственные значения и собственные функции краевой задачи:

$$-\ \Delta v_k(x) \;=\; \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad v_k\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда решение задачи (1)-(2) можно записать в виде

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (\phi, v_k) e^{-\lambda_k t} v_k(x). \tag{3}$$

Определим для любого $\alpha > 0$ регуляризированное решение:

$$u_\alpha(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (\phi, v_k) e^{-\lambda_k t + \alpha\lambda_k^2 t} v_k(x). \tag{4}$$

В предположении, что точное решение в момент $t=-T$:

$$f(x) \;= u(x,-T) \tag{5}$$

существует и принадлежит классу Соболева $W_2^{l,0}(\Omega)$ функций, обращающихся в нуль на границе, мы оцениваем при $\alpha \to 0$ разность между точным (3) и регуляризированным (4) решениями.

Теорема 1. *Пусть $0 \le \tau \le 1$. Если функция f, определенная равенством (5), принадлежит классу $W_2^{4\tau,0}(\Omega)$, то при $-T \le t \le 0$ выполняется оценка*

$$\|u(x,t) - u_\alpha(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \;\le\; C\alpha^\tau\ \|f\|_{W_2^{4\tau}(\Omega)}. \tag{6}$$

Отметим, что показатель τ в теореме 1 является точным, так как при $\tau > 1$ имеет место *насыщение* [3]. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если оценка (6) выполняется при некотором* $\tau > 1$, *то* $u(x,t) \equiv 0$ *для* $x \in \Omega$ *и* $-T \leq t \leq 0$.

Если функция
$$f(x) \ = u(x, -T) \tag{7}$$
принадлежит классу Соболева с более высоким показателем гладкости, то можно получить равномерную оценку разности между точным решением и регуляризированным. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \tau < 1$. *Если функция* f, *определенная равенством (7), принадлежит пространству* $W_2^{l,0}(\Omega)$, *где*
$$l \ \geq \ \frac{n}{2} \ + \ 4\tau, \tag{8}$$
то при $-T \leq t \leq 0$ *выполняется равномерная на каждом компакте* $K \subset \Omega$ *оценка*:
$$u_\alpha(x,t) \ = \ u(x,t) \ + \ O(\alpha^\tau)\,. \tag{9}$$

Литература

1. Tychonoff A.N. On the stability of inverse problems // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1943. – 39 (5), P.195–198.

2. Lavrentyev M.M. On Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl. Akad. Nauk. – 1955. – 102. – 2. – P.205-206.

3. Il'in V.A. Spektralnaya Teoriya Diff. Oper. / 2008.

4. Tychonoff A.N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1963. – 151. – P.501–504. trans. in Soviet Mathematics 4. – P.1035–1038.

5. Faddeev L.D. Increasing solutions of Schrödinger equation // Sov. Phys. Dokl. – 1966. – 10. – P.1033-1035.

6. Tychonoff A.N., Arsenin V.Y. 1977. Solution of Ill-posed Problems / Winston & Sons: Washington, 1977. ISBN 0-470-99124-0.

7. Calderon A.P. 1980. On an inverse boundary value problem // Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics ed W. H. Meyer and M. A. Raupp / Rio de Janeiro: Brazilian Mathematical Society, 1980. – P.65-73.

8. Ikehata M. Inverse conductivity problem in the infinite slab // Inverse Problems. – 2001. – 17. – P.437-454.

MSC 35S15

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПЕРЕМЕННОГО-РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

А.А. Алиханов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

В работе [1] получены априорные оценки решения краевых задач для диффузионно-волнового уравнения. В работе [2] получены априорные оценки для решения краевых задач уравнения диффузии переменного порядка в дифференциальной и разностной формах. Существование и единственность решения для краевых задач уравнения диффузии распределенного порядка получены в работе [3].

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения первой краевой задачи уравнения диффузии переменного-распределенного порядка.

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассматривается первая краевая задача

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \omega(x,\gamma)\partial_{0t}^{\theta(x,\gamma)}u(x,t)d\gamma = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

$$0 < x < 1\,, \qquad 0 < t \le T\,,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\,, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \tag{3}$$

где $\omega(x,\gamma) \ge 0$, $\int_\alpha^\beta \omega(x,\gamma)d\gamma > 0$, $0 < \theta(x,\gamma) < 1$, при всех $(x,\gamma) \in (0,l) \times (\alpha,\beta)$, $\theta(x,\gamma) \in C(0,l) \times (\alpha,\beta)$, $0 < c_1 \le k(x,t) \le c_2$, $q(x,t) \ge 0$, $\partial_{0t}^{\theta(x,\gamma)}u(x,t) = \int_0^t u_\tau(x,\tau)(t-\tau)^{\theta(x,\gamma)}d\tau/\Gamma(1-\theta(x,\gamma))$ – дробная производная Капуто порядка $\theta(x,\gamma)$.

В работе доказана следующая

Теорема. *Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $q(x,t)$, $f(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $k(x,t) \ge c_1 > 0$, $q(x,t) \ge 0$ всюду на $\bar{Q}_T$, то для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка*

$$\int\limits_0^l \int\limits_\alpha^\beta \omega(x,\alpha) D_{0t}^{\theta(x,\gamma)-1} u^2(x,t)d\gamma dx + c_1 \int\limits_0^t \|u_x(x,s)\|_0^2 ds \le$$

$$\le \frac{l^2}{2c_1}\int\limits_0^t \|f(x,s)\|_0^2 ds + \int\limits_0^l u_0^2(x)dx \int\limits_\alpha^\beta \frac{\omega(x,\alpha)t^{1-\theta(x,\gamma)}}{\Gamma(1-\theta(x,\gamma))}d\gamma. \tag{4}$$

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)-(3) от входных данных.

Литература

1. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 2010. – 46. – №5. – С.658-664.

2. Alikhanov A.A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – 219. – P.3938–3946.

3. Luchko Y. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – 12. – P.409-422.

MSC 37N25

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗРЫВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.А. Аматов, Г.М. Аматова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: amamtovm@bsu.edu.ru, amatova@bsu.edu.ru

Исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1),(1.2) описывающие динамику численностей трёх взаимодействующих популяций и представляющие основные (неполные) трофические структуры [1, стр. 170].

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-by), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-e+hx-gz), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-c+dy). \end{cases} \qquad (1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-bz), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c-dz), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-e+hx-gz). \end{cases} \qquad (1.2)$$

Система (1.1) типа «продуцент, консумент, хищник» в ней x – численность продуцента, y – численность консумента, а z – численность хищника. Система (1.2) типа «хищник две жертвы» x и y – численности жертв, а z – численность хищника; a,b,c,d,e,h,g – положительные константы. Исследуется устойчивость таких систем, понимаемая, как «экологическая стабильность» [1, стр. 15].

Из множества работ, посвящённых данной проблеме, упомянем лишь недавно вышедшую монографию А.Д. Базыкина [1]. В этой и многих других работах самым тщательным образом исследована динамика единичной популяции и динамика системы двух взаимодействующих популяций. Что же качается системы трёх популяций, связанных трофическими отношениями, то вопрос об устойчивости таких систем весьма далек от окончательного решения.

Фазовый портрет расположения траекторий систем (1.1), (1.2) в первом октанте полностью зависит от величины определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. При $\Delta \neq 0$ либо одна из популяций в системах уравнений (1.1),(1.2) исчезает при $t \to 0$ – либо численности всех популяций неограниченно растут. Обе ситуации означают экологическую нестабильность систем (1.1),(1.2).

Как известно, в реально существующих экологических системах все три популяции существуют продолжительное время, и ни одна из них не исчезает и не имеет неограниченно растущей численности [1]. Значит системы (1.1),(1.2) с постоянными коэффициентами не достаточно точно описывают динамику реальных экологических процессов. Поэтому естественно считать некоторые коэффициенты систем (1.1),(1.2) зависящими от фазовых переменных.

При этом следует учитывать следующие обстоятельства: 1) вид зависимости коэффициентов уравнений от фазовых переменных может быть определен только экспериментально; 2) для различных сообществ эта зависимость будет различной, а значит, динамику каждого такого сообщества придётся исследовать отдельно, что значительно затруднит процесс получения общих закономерностей.

Избежать указанных осложнений позволяет применение дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Заменяем непрерывные системы (1.1),(1.2) системами с кусочно-непрерывными правыми частями. Последние определяем следующим образом. Первый октант делим на две части G^- и G^+ гладкой поверхностью S, на которой система имеет разрыв.

Систему (1.1) заменяем системой (2.1.1) в области G^- и системой (1.1.2) в области G^+. Аналогично уравнения (1.2) заменяем системой (2.2.1) в области G^- и системой (2.2.2) в области G^+.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - b_k y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-e + h_k x - g_k z), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-c + d_k y). \end{cases} \quad (2.1.k) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - b_k z), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c - d_k z), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-e + h_k x - g_k z). \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (2.2.k)$$

Движения разрывных систем $(2.i.j)$ определяются по А.Ф. Филиппову. Для системы $(2.1.k)$ поверхностью разрыва служит поверхность $z = z_0$, $z_0 = const$, $z_0 > 0$, а для системы $(2.2.k)$ плоскость $y = x$. Коэффициенты b_i, d_i таковы, что определители $\Delta_1 = ad_1 - b_1 c$ и $\Delta_2 = ad_2 - b_2 c$ имеют противоположные знаки.

Доказывается, что при выполнении указанных неравенств на поверхностях разрыва существуют области скользящих движений, в которых возможно появление устойчивых особых точек, предельных циклов и других стационарных режимов.

Интегрировании полученных таким образом кусочно-непрерывных систем осуществлялось с помощью компьютерных программ, разработанных авторами [2]. Рисунки с изображением траекторий систем $(2.i.j)$ опубликованы в работе [3].

Литература

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / Москва-Ижевск: РХД, 2003. – 357 с.

2. Аматов М.А., Аматова Г.М. и др. Применение математического пакета MAPLE 8 к интегрированию систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями // Вестник Херсонского Нац. техн. ун-та. – Херсон: ХНТУ, 2009. – Вып. 2(35). – С.19-24.

3. Аматов М.А. Аматова Г.М., Кунгурцев С.А. Исследование модели взаимодействия трёх популяций, связанных трофическими отношениями // Экологические системы и приборы. - 2011. – №12. – С.41-54.

MSC 35L35

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА ВЫШЕ ВТОРОГО

[*]А.А. Андреев, [**]Ю.О. Яковлева

[*]Самарский государственный технический университет,
Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: andre01071948@yandex.ru
[**]Самарский государственный технический университет,
Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В докладе рассматриваются задачи Коши и Гурса для системы уравнений третьего порядка общего вида, не содержащей производные порядка ниже третьего, с двумя независимыми переменными $x, y \in \mathbb{R}$, каждое уравнение которой имеет различные некратные характеристики, отличные от нуля:

$$AU_{xxx} + BU_{xxy} + CU_{xyy} + U_{yyy} = 0\,,$$

где $U(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))$ – искомая двухмерная вектор-функция, A, B, C — коммутативные постоянные квадратные матрицы второго порядка с различными собственными значениями.

Исследуются вопросы существования и единственности решений указанных задач.

Для систем гиперболических уравнений третьего и четвертого порядка с кратными характеристиками вида:

$$U_{xxy} + AU = 0\,,$$
$$U_{xxxy} + AU = 0\,,$$

поставлены и решены методом Римана задачи Коши и Гурса.

Литература

1. Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестник СамГТУ. Серия физмат. наук. – 2013. – №1 (30). – С.99-106.

2. Яковлева Ю.О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Вестник СамГТУ. Серия физмат. наук. – 2012. – №1 (26). – С.247-250.

3. Жегалов В.И., Миронов А.Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Известия высших учебных заведений. – 2002. – №5. – С.23-30.

MSC 82B43

НЕСПРЯМЛЯЕМЫЕ ПУТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e@bsu.edu.ru, virch@bsu.edu.ru

Связный граф $\langle V, \Phi\rangle$ со счетным множеством вершин V и отношением смежности $\Phi \subset V^{(2)}$ ($V^{(2)}$ – множество всех пар вершин из V), у которого каждая вершина имеет конечный индекс, называется периодическим, если он допускает такое вложение $\mathfrak{J}$ в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, при котором существует базис $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\rangle$ в $\mathbb{R}^d$, что имеет место

$$\mathfrak{J}V + n\mathbf{e}_i = \mathfrak{J}V\,, \qquad \mathfrak{J}\Phi + n\mathbf{e}_i = \mathfrak{J}\Phi\,, \qquad n \in \mathbb{Z}, i = 1 \div d\,,$$

называется *периодическим.* При этом число d называется его размерностью [1].

Периодические графы являются топологическими моделями кристаллических решеток.

Всякая последовательность $\langle x \equiv x_0, x_1, ..., x_n\rangle$, $x_i \in V$, в которой $\{x_{i-1}, x_i\} \in \Phi$ $i = 1\div n$ является путем длины n на графе $\langle V, \Phi\rangle$. Путь на графе называется *неспрямляемым* [2], если для любой пары его компонент $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ имеет место $\{x_i, x_j\} \notin \Phi$, $|i-j| > 1$.

Пусть $\mathsf{N}(n, x)$ – функция, значения которой при каждом $n \in \mathbb{N}$ равно числу неспрямляемых путей длины n с начальной вершиной $x \in V$. Очевидно, что при фиксированном базисе $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\rangle$ образа вложения $\mathfrak{J}$ периодического графа имеет место $\mathsf{N}(n, x + l\mathbf{e}_i) = \mathsf{N}(n, x)$, $l \in \mathbb{Z}$, $i = 1 \div d$.

Изучение функции $\mathsf{N}(\cdot, x)$ представляет интерес в теории перколяции при $d = 2$ и в статистической теории систем полимерных цепей $d = 2, 3$. В последнем случае, на ее основе оценивается энтропия основного состояния таких систем статистической механики. Для этой функции справедлива элементарная асимптотическая оценка

$$\ln \mathsf{N}(n, x) = n(a + O(1))\,, \quad n \to \infty\,,$$

в которой число $a > 0$ является характеристикой графа и не зависит от x. Наоборот, остаточный член в этой формуле зависит от вершины (если граф не является однородным), однако, на сегодняшний день относительно него не существует никаких строгих оценок, равно как и не имеется регулярной процедуры вычисления с гарантированной оценкой точности вычислений константы в представленной формуле.

В работе функция $\mathsf{N}(n, x)$ вычисляется на основе компьютерной программы для простейших периодических графов для простейших периодических графов при $d = 2, 3$, представляющих прикладной интерес, для возможно больших значений n. Представленные в нижележащих таблицах названия периодических графов соответствуют тем кристаллическим решеткам, моделями которых они являются. Во всех этих примерах число путей не зависит от вершины x.

Основная трудность при реализации программы вычисления значений функции $\mathsf{N}(\cdot, x)$ состоит в том, что она основана на переборе всех возможных путей и при этом для вычисления каждого последующего значения $\mathsf{N}(n+1, x)$ необходима организация хранения информации о всех путях длины n. Это связано с тем, что функция $\mathbb{N}(\cdot, x)$ для периодических графов при $d > 1$ не подчинена никакому разностному уравнению конечного порядка, как это имеет место, например, для бесконечных графов типа деревьев.

Ниже приводятся значения функции $\mathsf{N}(n, x)$, полученные посредством компьютерного расчета только для максимально допустимого для используемого авторами компьютера значения n. В правой колонке таблиц даны значения функции $(\mathsf{N}(n), x)^{1/n}$, которая, согласно полученным результатам расчета, довольно быстро выходит на предельное значение $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathsf{N}(n), x)^{1/n}$, являющееся одной из характеристик топологии бесконечного периодического графа.

$d = 2$

Тип решётки	N(15, x)	$(\mathsf{N}(n))^{1/n}$
Треугольная решетка	20110806	3,0682
Квадратная решетка	932628	2,5002
Квадратная сопряженная решетка	1384181952	4,0683
Шестиугольная решетка	17760	1,9199

$d = 3$

Тип решётки	N(10, x)	$(\mathsf{N}(n))^{1/n}$
Простая кубическая решетка	2675022	4,3927
Гексагональная решетка	364214	3,5986
Гранецентрированная кубическая решетка	93125370	6,2647
Объемоцентрированная кубическая решетка	315891902	7,0787

Литература

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians/ H.Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.

2. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 3. Теорема о внешней границе // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 23(118);25. – С.112-126.

MSC 35J15

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ГИПЕРПЛОСКОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ

В.П. Архипов

Старооскольский технологический институт НИТУ МИСиС, г. Старый Оскол, Россия

В полосе $\Omega = [0,1] \times R^n \subset R^{n+1},\ x \in [0,1],\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ рассматривается модельное вырождающееся эллиптическое уравнение

$$(a(x)u'_x(x,y))' + bu'_x(x,y) + Lu(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $a(x_0) = 0,\ a(x) > 0$ для $x \neq x_0$, $Lu(x,y) = r\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y_i^2},\ r > 0$ и гиперплоскость $x = x_0$ — гиперплоскость вырождения уравнения (1). В зависимости от знака коэффициента b (см. [1]) постановка граничных задач изменяется, что обусловлено поведением решений уравнения вблизи гиперплоскости вырождения $x = x_0$.

Настоящая работа посвящена выяснению точной асимптотики решений уравнения (1) вблизи гиперплоскости $x = x_0$. Для этого проводится анализ (в образах Фурье) решений обыкновенных вырождающихся дифференциальных уравнений с параметром

$$(a(x)v'_x(x,\xi))' + bv'_x(x,\xi) - r\xi^2 v(x,\xi) = g(x,\xi), \tag{2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n,\ \xi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, и устанавливаются их равномерные двусторонние асимптотики при $x \to x_0 \pm 0$ и $\xi \in R^n$. Исследования в значительной степени основываются на результатах работы [2].

Определим решения $v_{1,2}(x,\xi)$ однородного уравнения (2), допускающие при некотором $\delta > 0$ и $x \to x_0 + 0$ при $b < 0$ асимптотические представления

$$v_1(x,\xi) = w_1(x,\xi)\Phi(x,\xi) = w_1(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x,\xi),$$

$$w_1(x,\xi) = \frac{1}{C_1(\xi)\sqrt{\alpha(x,\xi)}} \exp\left(\int\limits_x^{x_0+\delta} \frac{b + \alpha(\tau,\xi)}{2 \cdot a(\tau)}\, d\tau \right), \quad \alpha(\tau,\xi) = b^2 + 4a(\tau)r\xi^2, \tag{3}$$

$$v_2(x,\xi) = w_2(x,\xi)\Psi(x,\xi) = w_2(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x,\xi),$$

$$w_2(x,\xi) = \frac{1}{C_2(\xi)\sqrt{\alpha(x,\xi)}} \exp\left(\int\limits_x^{x_0+\delta} \frac{b - \alpha(\tau,\xi)}{2 \cdot a(\tau)}\, d\tau \right), \tag{4}$$

где последовательности $\varphi_k(x,\xi)$, $\psi_k(x,\xi)$ задаются рекуррентными соотношениями $\varphi_{k+1}(x,\xi) = K_1\varphi_k(x,\xi)$, $\psi_{k+1}(x,\xi) = K_1\psi_k(x,\xi)$ с интегральными операторами

$$K_1\varphi(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} K_1(x,x_1,\xi)\varphi(x_1,\xi)\,dx_1, \quad K_2\psi(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x} K_2^+(x,x_1,\xi)\psi(x_1,\xi)\,dx_1,$$

$$K_1^+(x,x_1,\xi) = \begin{cases} h(x_1,\xi), & x_0 \le x_1 \le x \le x_0+\delta, \\ h(x_1,\xi)\exp\left(-\int\limits_{x}^{x_1} \dfrac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}\,d\tau\right), & x \le x_1 \le x_0+\delta, \end{cases}$$

$$K_2^+(x,x_1,\xi) = -h(x_1,\xi) + h(x_1,\xi)\exp\left(-\int\limits_{x_1}^{x} \frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}\,d\tau\right), \quad x_0 \le x_1 \le x \le x_0+\delta,$$

$$h(x,\xi) = \frac{(a_1(x)\xi^2 + a_2(x))r\xi^2}{2(b^2+4a(x)r\xi^2)^{5/2}}, a_1(x) = (5(a^2(x))'a'(x) - 4a(x)(a^2(x))'')r.a_2(x) = -b^2(a^2(x))'',$$

Аналогичные формулы выписываются и слева от гиперплоскости.

Отметим один результат для неоднородного уравнения. При $b<0$ и некотором $\delta>0$ установлено существование единственного решения $v_0(x,\xi)$ уравнения (2), удовлетворяющего условиям $v_0(x_0-\delta,\xi) = v_0(x_0+\delta,\xi) = 0$ и допускающего в частности равномерную по $x\in[0,1]$ оценку $|v_0(x,\xi)|^2 \le \dfrac{M_g}{1+|\xi|^2}$.

Формальное применение обратного преобразования Фурье к формулам (3), (4) дает асимптотическое представление решений однородного уравнения (1)

$$u_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1,k}(x,y), \quad u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2,k}(x,y), \tag{5}$$

$$u_{1,k}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_1(x,\xi)\varphi_k(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi, \quad u_{2,k}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_2(x,\xi)\psi_k(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi.$$

Главные (первые) члены асимптотик в (5) при этом имеют вид

$$u_{1,0}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_1(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi, \quad u_{2,0}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_2(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi.$$

Построенные представления решений позволяют получать асимптотические формулы решений неоднородного уравнения и соответствующих ему граничных задач.

Литература

1. Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Труды Московского математического общества. – 1970. – 23. – С.113-178.

2. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, № 10. – С.1383-1393.

MSC 45P05

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е.А. Аршава

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
ул. Сумская, 40, Харьков, 61002, Украина, e-mail: elarshava@mail.ru

Изучается задача обращения векторных интегральных операторов в пространстве $L_m^2(0,\omega)$ вектор-функций методом операторных тождеств, что является продолжением исследований, представленных в работах [1-3].

Введем пространство $L_m^2(0,\omega)$, которое состоит из вектор - функций

$$\vec{f}(x)=[f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x)], \qquad \|\,\vec{f}\,\|_m=\left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\omega}|f_k(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},m=2.$$

Пусть задан оператор S, который ограничен в $L_m^2(0,\omega)$,

$$S\vec{f}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_0^{\omega}S(x,t)\vec{f}(t)dt, \qquad \alpha=\overline{\alpha}\neq 0 \tag{1}$$

и матричный оператор A_0 вида:

$$A_0\vec{f}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\left(1-e^{\alpha(\xi-t)}\right)f_1(\xi)d\xi\\ \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\left(1-e^{\alpha(\xi-t)}\right)f_2(\xi)d\xi\end{pmatrix},$$

$S(x,t)$-матрица, элементы которой принадлежат $L^2_{m\times m}(0,\omega)$ и удовлетворяют уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]S_{ij}(x,t)=0.$$

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора вида (1), который действует в $L_m^2(0,\omega)$, верно представление*

$$(A_0S-SA_0^*)\vec{f}=\int_0^{\omega}\left(M_1(x)+\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x)+N_1(t)+\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}N_2(t)\right)\vec{f}(t)dt,$$

где

$$M_1(x)=\begin{pmatrix}s_{11}(x,0)&s_{12}(x,0)\\ s_{21}(x,0)&s_{22}(x,0)\end{pmatrix},\qquad M_2(x)=\begin{pmatrix}s'_{11}(x,0)&s'_{12}(x,0)\\ s'_{21}(x,0)&s'_{22}(x,0)\end{pmatrix},$$
$$N_1(t)=-\begin{pmatrix}s_{11}(0,t)&s_{12}(0,t)\\ s_{21}(0,t)&s_{22}(0,t)\end{pmatrix},\qquad N_2(t)=-\begin{pmatrix}s'_{11}(0,t)&s'_{12}(0,t)\\ s'_{21}(0,t)&s'_{22}(0,t)\end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Если оператор S имеет ограниченный обратный T, то*

$$(TA_0 - A_0^*T)\vec{f} = \int\limits_0^\omega R(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } \quad R(x,t) = \sum_{i=1}^4 P_i(t)Q_i(x), \tag{2}$$

P_i, Q_i *- матрицы* $(2 \times 2)(i = \overline{1,4})$*, которые удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{array}{llll} S^*P_1 = E_m, & S^*P_2 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E_m, & S^*P_3 = N_1^*, & S^*P_4 = N_2^*, \\ SQ_1 = M_1, & SQ_2 = M_2, & SQ_3 = E_m, & SQ_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}E_m. \end{array} \tag{3}$$

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Теорема 2. *Если оператор S ограничен вместе со своим обратным T и существуют матрицы $P_i, Q_i(i = \overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (3), то для оператора $T = S^{-1}$ верно представление*

$$T\vec{f} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^\omega \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } \vec{f} \in L_m^2(0,\omega),$$

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)}\int\limits_{x+t}^{2\omega+x-t}\int\limits_{x-t}^{\tau-2\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau}R\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right)d\xi d\tau + B(x+t), & x-t \le 0 \\ -\frac{1}{4}e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)}\int\limits_{x+t}^{2\omega-x+t}\int\limits_{x-t}^{2\omega-\tau} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau}R\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right)d\xi d\tau + B(x+t), & x-t > 0, \end{cases}$$

а матрица - функция $R(x,t)$ определяется формулой (2).

Литература

1. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи математических наук. – 1980. – 35, Вып. 4 (214). – С.69-129.

2. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений // Дифференциальные уравнения. – 1996. – 32, №10. – С.1427-1428.

3. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах, Т. 1. Математический анализ / Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С.25-29.

MSC 45E10

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ В $L_p(0,1)$

***С.Н. Асхабов, **А.Л. Джабраилов**

*Чеченский государственный университет,
Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: askhabov@yandex.ru
**Чеченский государственный университет,
Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: ahmed0065@mail.ru

Методом потенциальных монотонных операторов (см., например, [1]) для различных классов интегральных уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в вещественных пространствах Лебега. При этом существенно используются свойства потециальности и строгой положительности в пространствах $L_p(0,1)$, $1<p\le 2$, оператора типа свертки $(P_{01}^{\varphi}u)(x)=\int_0^1 \varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt$, изученного в [2] при $p=2$ и менее общих предположениях относительно ядра $\varphi(x)$. В случае пространства $L_2(0,1)$, комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, показано, что решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и доказаны оценки скорости их сходимости. Полученные результаты охватывают некоторые монотонные (не степенные) нелинейности, а также линейные интегральные уравнения типа свертки. В случае нечетностепенной нелинейности установлено, что решения могут быть найдены градиентным методом (методом наискорейшего спуска) как в пространствах $L_p(0,1)$, так и в пространствах Лебега с общим (не обязательно степенным) весом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки / Москва: Физматлит, 2009.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / Москва: Физматлит, 2003.

MSC 35Q05

ВОЗМУЩЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ПЕРЕМЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Пусть A — неограниченный замкнутый оператор и $k>0$, а $B(t)$ — переменный, ограниченный сильно непрерывный оператор. В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=(A+B(t))u(t). \tag{1}$$

$$u(0)=u_0,\;\; u'(0)=0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $A\in G_k,\;k\ge 0$, а $G(t,s)$ — сильно непрерывный при $t\ge s>0$ оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}-\frac{k^2-2k}{4t^2}G(t,s)-B(t)G(t,s)=\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial s^2}-\frac{k^2-2k}{4s^2}G(t,s) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\frac{dG(t,t)}{dt}=\frac{1}{2}B(t),\quad \lim_{s\to 0}G(t,s)s^{(k-3)/4}=0. \tag{4}$$

Тогда функция

$$u(t)=Y_k(t)u_0+t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0ds \tag{5}$$

является решением задачи Коши (1), (2).

Класс G_k, операторная функция Бесселя $Y_k(t)$ и операторная функция $Z_1(t)$ были введены и рассмотрены в работах [1], [2].

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (3) *с условиями* (4) *эквивалентно интегральному уравнению*

$$H(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi} v(y,\eta)B(\sqrt{y})y^p\,dy+\int\int_{OBPA} v(z,y)B(\sqrt{y}+\sqrt{z})H(y,z)\,dydz, \tag{6}$$

где

$$y=\frac{1}{4}(t+s)^2,\quad z=\frac{1}{4}(t-s)^2,\;\; G(t,s)=(y-z)^{-p+\frac{1}{2}}H(y,z),\;\; p=\frac{k-1}{4},$$

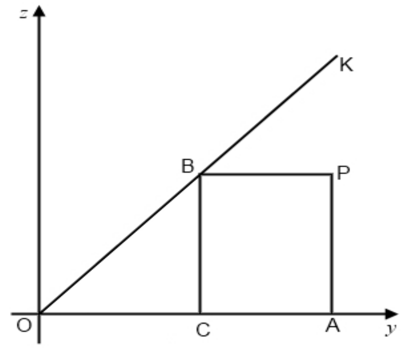


Рис. 1: Области интегрирования.

а функция $v(z,s)$ непрерывна внутри областей OBC и $CAPB$ (см. рис. 1) и задаётся формулами ($_2F_1$ — гипергеометрическая функция)

$$v(y,z) = (\eta - y)^{-\alpha}(z-\xi)^{-\alpha}(z-y)^{2\alpha}{}_2F_1\left(\alpha, \alpha, 1, \frac{(y-\xi)(z-\eta)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right) \text{ в области } CAPB,$$

$$v(y,z) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{(\Gamma(1-\alpha))^2}{\Gamma(2-2\alpha)}(\eta-\xi)^{1-2\alpha}(y-s)(z-\xi)^{\alpha-1}(\eta-y)^{\alpha-1} \times$$
$$\times \ {}_2F_1\left(1-\alpha, 1-\alpha, 2-2\alpha, \frac{(y-s)(\eta-\xi)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right) \text{ в области } OBC.$$

Теорема 3. *Интегральное уравнение* (6) *имеет решение внутри области* $0<\eta<\xi$.

При доказательстве теорем 2 и 3 использовались результаты работ [3], [4].

Обозначим далее

$$J(t,s)u_0 = \begin{cases} (1-k)^{-1}\left(t^{1-k}s^kY_{2-k}(t)Y_k(s) - sY_k(t)Y_{2-k}(s)\right)u_0, \text{ для } k>0,\ k\neq 1; \\ s\left(Z_1(t)Y_1(s) - Y_1(t)Z_1(s)\right)u_0, \text{ для } k=1. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть для* $s<t$ *справедлива оценка*

$$\|J(t,s)\| \le M(t-s)e^{\omega(t-s)}. \tag{8}$$

Тогда определяемая равенством (5) *функция* $u(t)$ *является единственным решением задачи Коши* (1), (2) *для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.*

Литература

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352. – № 5. – С.587-589.

2. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Матем. заметки. – 1996. – 60, №3. – С.363-369.

3. Волк В.Я. Научные сообщения и задачи о формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи математических наук. – 1953. – VIII, №4 (56) №6. – С.141-151.

4. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – №6. – С.55–56.

5. Глушак А.В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математические заметки. – 1999. – 66, №3. – С.364–371.

MSC 35J30

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНЫХ КОРНЕЙ

А.О. Бабаян

Государственный инженерный университет Армении,
ул. Терьян, 105, Ереван, 0009, Армения, e-mail: barmenak@gmail. com

Пусть $D=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x,y)=0, \quad (x,y)\in D, \tag{9}$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что λ_j $(j=1,2,3,4)$ – корни характеристического уравнения $\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k}=0$, удовлетворяют условиям $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3=\lambda_4$, $\lambda_j\neq\pm i$, $\Im\lambda_j\neq 0$. Решение уравнения (9) ищется в классе $C^4(D)\bigcap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u\big|_\Gamma=f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial N}\big|_\Gamma=g(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma. \tag{10}$$

Здесь f и g – заданные на Γ функции, $\frac{\partial}{\partial N}$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ. Отметим, что если $\Im\lambda_j>0$ $(\Im\lambda_j<0)$ при $j=1,\dots,4$, то есть, если уравнение (9) неправильно эллиптическое, то задача (9), (10) в классической постановке (когда $f\in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$) не является корректной ([1]). Для неправильно эллиптического уравнения (9) второго порядка в [2] был указан класс граничных функций, обеспечивающий корректность задачи Дирихле (исключая случай бесконечномерного ядра). Случай правильно эллиптического уравнения (9) был рассмотрен в [3], [4]. Неправильно эллиптическое уравнение (9) четвертого порядка при некотором расположении корней характеристического уравнения было рассмотрено в [5]. В предлагаемом докладе рассматривается случай двукратных корней (который не был рассмотрен в [5]), причем следует отметить связь полученных результатов для случая правильно и неправильно эллиптического уравнения. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $\Im\lambda_1>0>\Im\lambda_3$ (правильно эллиптическое уравнение (9)). Обозначим $\mu=\frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu=\frac{i+\lambda_3}{i-\lambda_3}$, $z=\mu\nu$ (заметим, что при этих условиях $|z|<1$),

$$P_{2k-4}(z)=\sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^{3} z^j + C_{k+1}^{3} z^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^{3} z^{2k-j-4}, \quad k=3,4,\dots. \tag{11}$$

Теорема 1. *Однородная задача (9), (10) имеет конечное число K линейно независимых решений. Это число равно количеству номеров $k_j>2$, для которых $P_{2k_j-4}(z)=0$.*

Пусть $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$, тогда неоднородная задача (9), (10)имеет решение тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют K линейно независимым условиям.

Пусть $\Im\lambda_1 \geq \Im\lambda_3 > 0$ (неправильно эллиптическое уравнение (9)). Обозначим $\mu = \dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu = \dfrac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3}$, предположим, что $|\mu| \leq |\nu|$. Пусть $\zeta = \mu\nu^{-1}$ и $B^{(m,\alpha)}(r)$ – множество функций, аналитических в области $r < |z| < 1$, которые вместе с производными до порядка m включительно удовлетворяют условию Гельдера в замкнутом кольце $r \leq |z| \leq 1$.

Теорема 2. *Однородная задача (9), (10) имеет конечное число K линейно независимых решений. Это число равно количеству номеров $k_j > 2$, для которых $P_{2k_j-4}(\zeta) = 0$ (P_{2k-4} определяется в (11)). Пусть $f \in B^{(2,\alpha)}(|\nu|)$ и $g \in B^{(1,\alpha)}(|\nu|)$, тогда неоднородная задача (9), (10)имеет решение тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют K линейно независимым условиям.*

Замечание. При $k = 3$ многочлен (11) P_2 имеет вид $P_2(z) = z^2 + 4z + 1$ и, следовательно, имеет корень $z = \sqrt{3} - 2$, который по модулю меньше единицы. Поэтому при $\mu = (\sqrt{3}-2)\nu^{-1}$ (правильно эллиптическое уравнение) или $\mu = (\sqrt{3}-2)\nu$ (неправильно эллиптическое уравнение) однородная задача (9), (10) имеет нетривиальное решение (в данном случае это функция $(1-z\bar{z})^2$). Таким образом, дефектное число K может быть отлично от нуля. Численные эксперименты показывают, что при различных k многочлены (11) имеют различные нули в единичном круге, поэтому можно предположить, что число K может принимать только два значения: ноль или единица, однако это утверждение нуждается в доказательстве.

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / Москва: Наука, 1966.

2. Товмасян Н.Е. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм.ССР, сер. математика. – 1968. – 3, №6. – С.497-521.

3. Товмасян Н.Е., Закарян В.С. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях // Известия НАН Армении, сер. математика. – 2002. – 37, №6. – С.5-41.

4. Бабаян А.О. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении, сер. математика. – 2003. – 38, №6. – С.39-48.

5. Бабаян А.О. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. – С.56-69.

MSC 45J05

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ [1)]

И.В. Барышева, А.С. Калитвин
Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, РФ, e-mail: barysheva_iv@mail.ru, kalitvinas@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) с частными интегралами

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial x(\varphi,t,s)}{\partial\varphi}=f(\varphi,t,s)+c(\varphi,t,s)x(\varphi,t,s)+\\
+\int\limits_T l(\varphi,t,s,\tau)x(\varphi,\tau,s)d\tau+\int\limits_S m(\varphi,t,s,\sigma)x(\varphi,t,\sigma)d\sigma+\\
+\iint\limits_D n(\varphi,t,s,\tau,\sigma)x(\varphi,\tau,\sigma)d\sigma d\tau\equiv(Kx)(\varphi,t,s)+f(\varphi,t,s)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

с начальным условием $x(\varphi_0,t,s)=x_0(t,s)$, где $\varphi\in[a,b]$, $(t,s)\in D=T\times S$, $T\subset R^n$ и $S\subset R^m$ — множества конечной или σ- конечной лебеговой меры, заданные функции $l(\varphi,t,s,\tau)$, $m(\varphi,t,s,\sigma)$ и $n(\varphi,t,s,\tau,\sigma)$ измеримы по τ, σ и (τ,σ) на T, S и D соответственно, а интегралы понимаются в смысле Лебега. С ИДУ (1) связаны уравнения Колмогорова-Феллера и другие ИДУ, моделирующие различные прикладные задачи [1–4].

Пусть T и S — компактные множества. Через $U=C(C^{(1)}(\varphi))$ обозначим множество функций $x(\varphi,t,s)$, непрерывных на $G=[a,b]\times D$ вместе с частной производной по переменной φ. U — банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_U=\sup_{\varphi,s,t}\bigl(|x(\varphi,t,s)|+|x'_\varphi(\varphi,t,s)|\bigr).$$

Пусть $C(L^1(\Omega))$, где $\Omega\in\{T,S,D\}$, — множество измеримых на $G\times\Omega$ функций $y(\varphi,t,s,\omega)$, непрерывных по $(\varphi,t,s)\in G$ как функции со значениями в $L^1(\Omega)$. $C(L^1(\Omega))$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|y\|=\sup_G\|y(\varphi,t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Если теперь $c\in C(G)$, $l\in C(L^1(T))$, $m\in C(L^1(S))$, $n\in C(L^1(D))$, $f\in C(G)$ и $x_0\in C(D)$, то интегрируя (1) по отрезку $[\varphi_0,\varphi]\subset[a,b]$ и учитывая заданное начальное

[1]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

условие, получим уравнение

$$
\begin{gathered}
x(\varphi,t,s)=g(\varphi,t,s)+\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} c(\xi,t,s)x(\xi,t,s)d\xi+ \\
+\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\int\limits_{T} l(\xi,t,s,\tau)x(\xi,\tau,s)d\tau d\xi+\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\int\limits_{S} m(\xi,t,s,\sigma)x(\xi,t,\sigma)d\sigma d\xi+ \\
+\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\iint\limits_{D} n(\xi,t,s,\tau,\sigma)x(\xi,\tau,\sigma)d\sigma d\tau d\xi\equiv(K_1x)(\varphi,t,s)+g(\varphi,t,s),
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $g(\varphi,t,s)=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} f(\xi,t,s)d\xi+x_0(t,s)$, которое будет равносильно уравнению (1), если под решением этих уравнений понимается функция $x(\varphi,t,s)$ из пространства U. Уравнение (2) представляет собой частный случай уравнения Вольтерра с частными интегралами. ИДУ (1), операторы K, K_1 и уравнение (2) с частными интегралами в различных функциональных пространствах исследовались в [1].

Теорема. *Если* $c\in C(G)$, $l\in C(L^1(T))$, $m\in C(L^1(S))$, *а* $n\in C(L^1(D))$, *то при любой функции* $f\in C(G)$ *уравнение* (1) *с заданным начальным условием* $x_0\in C(D)$ *и уравнение* (2) *имеют в* U *единственное решение.*

В условии теоремы спектральный радиус оператора K_1 равен нулю. Поэтому в пространстве U уравнение (2) однозначно разрешимо при любой функции $g\in U$, т.е. обратим рассматриваемый в U оператор $I-K_1$, а решение уравнения может быть получено методом последовательных приближений.

Аналогичные результаты имеют место в случае пространства U_1 функций $x(\varphi,t,s)$, непрерывных на G вместе с частными производными по переменным φ,t,s, а также в случае пространств U_2 и U_3 функций $x(\varphi,t,s)$, непрерывных на G вместе с частными производными по переменным φ,t и φ,s соответственно.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Агекян Т.А. Теория вероятностей для астрономов и физиков / М.: Наука, 1974. – 264 с.

3. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи / М.: Мир, 1987. – 479 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / М.: Наука, 1988. – 444 с.

MSC 30B40

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ

С.И. Безродных

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия,
Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга МГУ
Университетский пр., 13, Москва, 119992, Россия,
e-mail: sergeyib@pochta.ru

Функция Лауричеллы $F_D^{(N)}(\vec{a};b;c;\vec{z})$ является обобщением гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$ на случай N комплексных переменных $\vec{z}:=(z_1,\,\ldots,\,z_N)$, см. [1], которое определяется интегральным представлением, аналогичным представлению Эйлера для $F(a,b;c;z)$:

$$F_D^{(N)}\,(\vec{a};b;\,c;\,\vec{z}) \,=\, \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1} \prod\nolimits_{k=1}^{N} (1-t\,z_k)^{-a_k}\;dt; \tag{1}$$

здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция, b и c — скалярные комплексные параметры, $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_N)$ — векторный комплексный параметр. Функция (1) представима при $\vec{z}\in\mathbb{U}^N$, т.е. в единичном поликруге, в виде обобщенного гипергеометрического ряда

$$F_D^{(N)}\big(\vec{a};\,b;\,c;\,\vec{z}\,\big) \,=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1}\,\ldots\,(a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|}\,k_1!\,\ldots\,k_N!}\,z_1^{k_1}\,\ldots\,z_N^{k_N},$$

где $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_N)$ — мультииндекс, для которого $|\mathbf{k}|:=\sum_{l=1}^{N}k_l$. Если же $\vec{z}$ не принадлежит $\mathbb{U}^N$, то для вычисления функции (1) необходимы формулы ее аналитического продолжения.

В настоящей работе такие формулы найдены. Частные случаи этих формул, полученные ранее, были применены при решении некоторых задач физики плазмы [2]-[4] и при решении проблемы параметров интеграла Кристоффеля-Шварца [5]. О других формулах аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}$ см. [1].

В качестве примера приведем формулу аналитического продолжения $F_D^{(2)}$, справедливую при $|z_1|>|z_2|>1$, для логарифмического случая ($b=a_1+m$, $m\in\mathbb{Z}^+$):

$$\begin{aligned} &F_D^{(2)}(a_1,\,a_2;\,a_1+m;\,c;\,z_1,\,z_2) \,= \\ &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(m-a_2)}{\Gamma(a_1+m)\Gamma(c-|\vec{a}|)}\,(-z_1)^{-a_1}\,(-z_2)^{-a_2}\sum\nolimits_{n=0}^{m-1}\frac{(a_1)_n(1+|\vec{a}|-c)_n}{n!(1-m+a_2)_n}z_1^{-n}\,G_n(z_2)\,+ \\ &+(-1)^m\,\frac{\Gamma(c)\Gamma(-a_2)}{\Gamma(a_1+m)\Gamma(c-|\vec{a}|)}(-z_1)^{-a_1}\,(-z_2)^{-a_2}\sum\nolimits_{n=m}^{\infty}\frac{(a_1)_n(|\vec{a}|-c+1)_n}{n!(a_2+1)_{n-m}}z_1^{-n}G_n(z_2)+ \\ &+\frac{\Gamma(c)\,(a_1-c+1)_m(m-1)!}{\Gamma(c-a_1)\Gamma(a_1+m)(1-a_2)_m}(-z_1)^{-a_1}\,(-z_2)^{-m}\sum\nolimits_{n=0}^{m-1}\frac{(a_1)_n(a_2-m)_n}{n!(1-m)_n}(z_2/z_1)^n H_n(z_2)\,+ \end{aligned}$$

$$+\frac{\Gamma(c)(a_1-c+1)_m}{\Gamma(a_1+m)\Gamma(c-a_1)}(-z_1)^{-a_1}(-z_2)^{-m}\sum\nolimits_{n=m}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_{n-m}}{n!(n-m)!}(z_2/z_1)^n\times$$
$$\times\Big[\big(h_n+\ln(z_1/z_2)\big)H_n(z_2)+\sum\nolimits_{k=0}^{n-m}\frac{(m-n)_k(1+a_1-c+m)_k}{k!(1-a_2+m-n)_k}h_{n,k}\,z_2^{-k}+$$
$$+(-1)^{n-m}(n-m)!\sum\nolimits_{k=n-m+1}^{\infty}\frac{(m-n+k-1)!(1+a_1-c+m)_k}{k!(1-a_2+m-n)_k}z_2^{-k}\Big].$$

Здесь
$$G_n(z_2):=F\big(a_2,1+|\vec{a}|-c+n;1+a_2+n-m;z_2^{-1}\big),$$
$$H_n(z_2):=F\big(m-n,1+a_1-c+m;1-a_2+m-n;z_2^{-1}\big),$$
$$h_n:=\psi(1+n)+\psi(1+n-m)-\psi(a_2+n-m)-\psi(a_1+n),$$
$$h_{n,k}:=\sum_{p=0}^{k-1}\frac{1}{m-n+p}-\psi(1-a_2+m-n+k)+\psi(1-a_2+m-n);$$
$\psi(s)$ — логарифмическая производная Γ-функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Литература

1. Exton H. Multiple hypergeometric functions and application / N.-Y.: Chichester, 1976.

2. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей / Докторская дисс., М.: ВЦ АН СССР, 1990.

3. Безродных С.И., Власов В.И. Задача Римана-Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – 42, №3. – С.277-312.

3. Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I., Somov B.V. Analytical models of generalized Syrovatskii's current layer with MHD shock waves // Astronomic and Space Science Proceedings. – V.30. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. – P.133-144.

4. Безродных С.И., Власов В.И. Сингулярная задача Римана-Гильберта в сложных областях // Spectral and Evalution Problems. – 2006. – 16. – P.112-118.

MSC 81V45

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОНА-ШЕМА ДЛЯ МОЛЕКУЛЫ УГЛЕРОДА МЕТОДОМ ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ

А.В. Береговой, А.Г. Шкловский

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Shklovsky@bsu.edu.ru

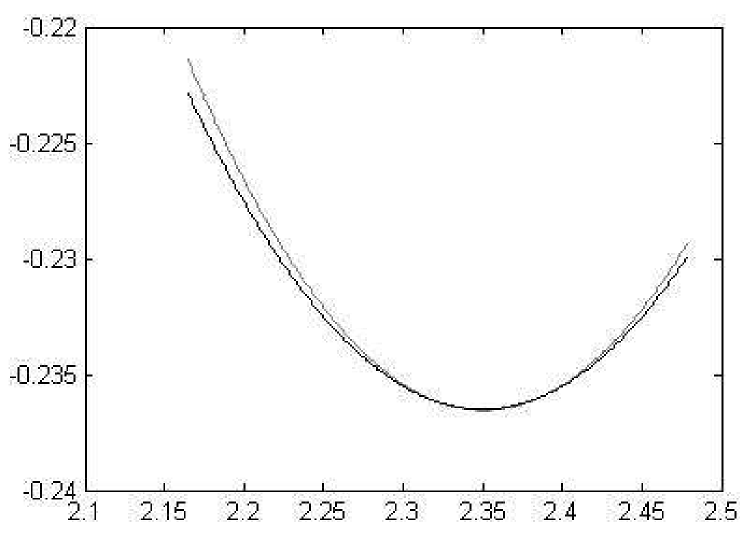
Энергия связи E_{CB} молекулы углерода вычисляется по формуле:

$$E_{\text{CB}} = E_{cc}(|\vec{a}|) + \frac{\omega_0}{2} - 2E_c \,. \tag{1}$$

где E_c – полная энергия электронов в атоме углерода, а $E_{cc}(|\vec{a}|)$ – полная энергия электронов в молекуле углерода для различных расстояний между ядрами:

$$E_{cc}(|\vec{a}|) = \sum_{j=1}^{N_{em}} E_j - \int (V(\vec{r}) - V_c(\vec{r}))n(\vec{r})d\vec{r} + E_{har}[n] + E_{xc}[n] + \frac{Z_c^2}{|\vec{a}|} \,. \tag{2}$$

Здесь E_j – энергия j-го электронного уровня, полученная в результате решения уравнения Кона-Шема, $V(\vec{r})$ – модифицированный локальный потенциал Кона-Шема для молекулы углерода [1], $V_c(\vec{r})$ – потенциал притяжения электрона к ядрам, $E_{har}[n]$ – энергия Хартри, $E_{xc}[n]$ – обменно-корреляционная энергия в приближении МЛП [1], Z_c - заряд ядра, N_{em} - количество электронов в молекуле, $n(\vec{r})$ – плотность электронов в молекуле.



На графике зависимости $E_{cc}(|\vec{a}|)-2E_c$ есть минимум. Вблизи от этого минимума график можно аппроксимировать параболой: $E_{\text{ccap}}(|\,\vec{a}\,|) = -0,2365 + 0,39888 \cdot (|\,\vec{a}\,| - 2,35)^2$

Хотя мы и описывали ядра атомов углерода в молекуле в адиабатическом приближении, как покоящиеся классические частицы, на самом деле они участвуют в нулевых колебаниях. В качестве эффективной массы выступает $M_{ef} = 0,5M_c$, где $M_c = 11107,4$ - масса атома углерода. Энергия нулевых колебаний в атомной системе единиц ω_0 будет иметь вид:$\omega_0 = \sqrt{k_1/M_{ef}} \cdot 27,211396 = 0,2306$эВ.

Этот результат находится в хорошем согласии с экспериментом. Видно, что минимум энергии достигается при $|\vec{a}| = 2,35$ радиуса Бора, что хорошо совпадает с экспериментом. Экспериментальное значение энергии связи примерно 6.3 эВ. Это же значение, вычисленное по формуле (1) - 6.32 эВ, расчет проводился методом опорной функции с точностью до сотых долей эВ.

Литература

1. Береговой А.В., Шкловский А.Г. Решение уравнения Кона-Шема для цилиндрических атомов методом опорной функции // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2013

MSC 35K35

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б.Х. Бештоков

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка. Методом функции Римана доказывается существование и единственность решения нелокальной краевой задачи.

В замкнутой области $\overline{D} = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$L(u) \equiv (\eta(x,t)u_{xt})_x + (k(x,t)u_x)_x + a(x,t)u_x + d(x,t)u_t - q(x,t)u = f(x,t)$$

$$0 < x < l,\ 0 < t < T, \qquad (1)$$

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^t \rho_1(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(0,t) + \int_0^t \rho_2(t,\tau)u(0,\tau)d\tau + \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (4)$$

где коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2)-(4) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$\eta_{xt}(x,t),\ k_x(x,t),\ a_x(x,t),\ q(x,t),\ d_t(x,t) \in C\left(\overline{D}\right),\ u_0(x) \in C^2[0,l], \qquad (5)$$

$\Pi(x,t) = \eta(x,t)u_{xt} + k(x,t)u_x,\ \beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \rho_1(t,\tau),\ \rho_2(t,\tau)-$ функций, непрерывные на $[0,T],\ 0 \le \tau \le t,\ d(x,t) < 0,\ \eta(x,t) \ge c > 0$ для любого $(x,t) \in D$, где c – положительная постоянная.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2)-(4) удовлетворяют условиям гладкости (5). Тогда, если $d(x,t) < 0,\ \eta(x,t) \ge c > 0$ для любого $(x,t) \in D$, то задача (1)-(4) имеет единственное регулярное в D решение.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Регистрационный номер НИР: 1.6197.2011.

Литература

1. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // ДУ. – 2004. – 40, №6. – С.763-774.

2. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // ДУ. – 1982. – 18. №4. – С.689-699.

MSC 35G10

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДЗЕКЦЕРА

Л.В. Борель

Челябинский Государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: lidiya904@mail.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$z(x,t) = \Delta z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

для модифицированного уравнения Дзекцера, возникающего в теории фильтрации [1],

$$(\lambda - \Delta) z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta \Delta^2 z(x,t) + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega k(t,s,x,y) z(y,s) dy d\mu(s), \tag{3}$$

$$(x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим через λ_m, $m \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\}$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Кроме того, пусть $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций этого оператора. Предполагается, что $\lambda_m = \lambda$ при некоторых m, т. е. уравнение (3) не разрешимо относительно z_t.

Обозначим

$$F(T) = \frac{C(\Omega)}{1 + C(\Omega)} V_0^T(\mu) \left(\sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|} \max\left\{ 1, \sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|}, \right\} \times \right.$$

$$\times \max\left\{ 1, \exp\left(T \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m} \right) \right\} \times$$

$$\times \left(\max_{t,s \in [0,T]} s \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s \in [0,T]} s \|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \right) +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda - \beta\lambda^2|} \left(\max_{t,s \in [0,T]} \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s \in [0,T]} \|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \right) \right),$$

где $C(\Omega)$ – константа из неравенства Пуанкаре–Стеклова, $V_0^T(\mu)$ — вариация функции μ на отрезке $[0,T]$.

Используя методы теории вырожденных полугрупп операторов [2] и теорему о неподвижной точке сжимающего отображения, получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $z_0 \in H^4(\Omega)$ *удовлетворяет условиям* (2), $\langle z_0, \varphi_m \rangle = 0$ *при* $m \in \mathbb{N}$, *для которых* $\lambda_m = \lambda$, $k(t,s,x,y) \in C([0,T] \times [0,T]; L_2(\Omega \times \Omega))$, $k(0,s,x,y) \equiv 0$, $k_t(t,s,x,y) \in C([0,T] \times [0,T]; L_2(\Omega \times \Omega))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации,* $F(T) < 1$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^1([0,T]; H_0^2(\Omega))$ *задачи* (1)-(3).

Частным случаем задачи (1)-(3) является начально-краевая задача

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{4}$$

$$z(0,t) = z_{xx}(0,t) = z(\pi,t) = z_{xx}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{5}$$

для нагруженного уравнения Дзекцера

$$-z_t(x,t) - z_{txx}(x,t) = z_{xx}(x,t) - 2z_{xxxx}(x,t) + cz(x,1), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times [0,1], \tag{6}$$

Пусть $z_0 \in H^4(0,\pi)$ удовлетворяет условиям (5), $\int\limits_0^\pi z_0(x) \sin x dx = 0$, $|c| < \frac{18}{17+3\sqrt{2}}$. Тогда можно показать, что в силу теоремы 1 существует единственное решение $u \in C^1([0,1]; H_0^2(0,\pi))$ задачи (4)–(6).

Литература

1. Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С.1031-1033.

2. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, Вып. 3. – С.173-200.

MSC 74A25

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА МЕДЛЕННОЙ ФРАГМЕНТАЦИИ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ ДРОБЛЕНИЯ

***Р.Е. Бродский, **Ю.П. Вирченко**

*Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: r.brodskii@gmail.com

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Изучается математическая модель фрагментации хрупкого твердотельного материала, протекающей в естественных природных условиях. Такой процесс, физически, является очень медленным. Ставится и решается задача об определении финального распределения вероятностей размеров образующихся, в результате такого процесса, фрагментов. В конструкции математической модели заложены следующие принципы: 1) масштабная инвариантность процесса актов дробления фрагментов с различными размерами, 2) среднее время поступления в систему энергии, существенно изменяющей состояние всех фрагментов в целом, намного превосходит все другие времена, характерные для процесса фрагментации, 3) вся поступающая в систему энергия в единицу времени затрачивается на образование новых поверхностей фрагментов и пропорциональна суммарной образующейся за то же время площади поверхности, 4) полный объем всех фрагментов сохраняется с течением времени.

В качестве единой числовой характеристики каждого из фрагментов системы выбирается обобщенный «размер» как исходного образца материала r, так и образующихся из него осколков $\rho_1 ... \rho_n$. В рамках этих предположений выводится эволюционное кинетическое уравнение для плотности $g(r,t)$ числа фрагментов размера r в момент времени t. Оно записывается в виде [1]

$$\dot{g}\left(r,t\right) = \int\limits_{r}^{\infty} K\left(r,\rho;t\right) g\left(\rho,t\right) d\rho - \mu\left(r,t\right) g\left(r,t\right) \ . \tag{1}$$

В условиях медленности фрагментации его решения аппроксимируются решениями диффузионного уравнения типа Фоккера-Планка с переменными коэффициентами.

$$\frac{\partial g\left(r,t\right)}{\partial t} = \gamma\left(r,t\right) g\left(r,t\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(a\left(r,t\right) g\left(r,t\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(b^2\left(r,t\right) g\left(r,t\right)\right) \ . \tag{2}$$

Функции $a(r,t), b(r,t), \gamma(r,t)$ определяются из условий сохранения полных объёма и энергии системы. Кроме того, предполагается, что асимптотически при большой длительности протекания процесса имеет место $\gamma(r,t) \sim \gamma(t)c(r)$ и существенно поведение функции $c(r)$ только при малых значениях r, которое, по предположению, имеет вид $c(r) = c_0 r^\beta$ $\beta > 0$.. В результате, приходим к следующему уравнению

$$\frac{\partial g\left(r,s\right)}{\partial s} = r^\beta g\left(r,s\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\beta+1} g\left(r,s\right)\right) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{2+\beta} g\left(r,s\right)\right)\,, \tag{4}$$

описывающему процесс медленной фрагментации, в котором введена новая шкала времени s на основе дифференциального соотношения $ds = \gamma(t)dt$ и введена безразмерная размер $rc_0^{1/\beta} \Rightarrow r$. В работе вычислена финальная плотность распределения – асимптотика $g(r,s)$ при $s \to \infty$ для частного случая, соответствующего квадратичному закону дробления $\beta = 2$. Заметим, что изучаемый нами случай существенно отличается от классического случая, рассмотренного Колмогоровым, который в рамках описанного подхода проявляется при $c(r) \to c > 0$, если $r \to 0$ [2], когда финальная плотность распределения имеет логарифмически-нормальный вид.

Вычисление асимптотики функции $g(r,s)$ осуществляется на основе явного решения задачи Коши на полуоси для уравнения (4) посредством преобразования Лапласа по времени s

$$h\left(r,\sigma\right) = r^{11/2}\int\limits_0^\infty e^{-\sigma s} g\left(r,s\right) ds\,.$$

Уравнение (4) сводится к уравнению Бесселя

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 h\left(x^{-1},\sigma\right)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial h\left(x^{-1},\sigma\right)}{\partial x} - \left(\frac{1}{4x^2}+\sigma\right) h\left(x^{-1},\sigma\right)\right) = -x^{-11/2} g\left(x^{-1},0\right)\,,$$

где $x = r^{-1}$. Его решение явно выписывается на основе функций Бесселя полуцелого индекса. Это позволяет получить явный вид решения задачи Коши для уравнения (4), которое в том случае, когда эволюция начинается с единственного исходного фрагмента размера r_0, то есть $g(r,0) = \delta(r - r_0)$ приводит к следующей формуле для финальной плотности распределения

$$g\left(r,s\right) = C\left(s\right) r^{-6} \exp\left[-\frac{3r_*^2}{2sr^2}\right]\,, \qquad C\left(s\right) = 6\sqrt{\frac{3}{2\pi s^3}}\; r_0^2 r_*^3 \theta\left(r_0 - r\right)\,,$$

где произведен переход $r \Rightarrow r/r_*$, $r_* = c_0^{-1/2}$ от безразмерной переменной к исходной переменной размера. В заключение заметим, что плотность $g(r,s)$ не является плотностью распределения вероятностей, так как она, по своему смыслу, нормирована на полное число фрагментов $N(t)$ в момент времени t.

Литература

1. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Absract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID 36215. – P.1-10.

2. Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. -– 1941. -– 31, 2. -– С.99-101.

MSC 26A33

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

А.Г. Брусенцев, О.В. Осипов

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия, e-mail: brusentsev@mail.ru, ov.osipov@gmail.com

В работах [1-4] рассматривалась задача нахождения плотности источников тепла минимальной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в некоторой области в условиях ее стационарного теплового баланса с окружающей средой. В этих работах предполагалось, что среда, заполняющая область, не движется. В настоящем докладе делается попытка отказаться от этого предположения. Полный учет конвекции приводит к очень сложной задаче, которую даже трудно точно сформулировать. Здесь мы предполагаем поле скоростей среды в области фиксированным и потенциальным. Тем самым учитывается лишь искусственно создаваемая конвекция. Свободной конвекцией, возникающей в гравитационном поле, мы пренебрегаем.

Для постановки оптимизационной задачи краевая задача, описывающая установившийся процесс теплообмена, преобразуется к более удобному виду с помощью преобразования, аналогичного калибровочному преобразованию в квантовой механике. При этом дифференциальный оператор преобразованной задачи является положительно определенным, что позволяет сформулировать оптимизационную задачу, подобно тому, как это сделано в работе [3]. Оставляя открытым вопрос о существовании точного решения оптимизационной задачи, мы вводим понятие квазирешения, нахождение которого вполне достаточно в приложениях. Далее строится конечномерная аппроксимация в виде задачи линейного программирования, и доказываются достаточные условия ее регулярности по функционалу. Свойство регулярности по функционалу позволяет придать точный смысл приближенному нахождению квазирешения. В настоящем докладе также обсуждаются вычислительные алгоритмы приближенного решения задачи, а также вопросы их программной реализации. Приводятся результаты численных экспериментов.

Некоторые прдварительные результаты авторов по теме настоящего доклада опубликованы в [5].

Литература

1. Брусенцев А.Г., Брусенцева В.С. Задача об оптимальном выборе источников тепла // Сб. трудов XXIII международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ–23). Т.2 / Саратов, 2010. – С.43-46.

2. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Численное исследование задачи об оптимальном выборе источников тепла // Сборник трудов XXIV международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-24). Т.2 / Киев: Национ. техн. ун-т Украины «КПИ», 2011. – С.33-34.

3. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Приближенное решение задачи об оптимальном выборе источников тепла // Научные ведомости БелГУ. – 2012. – №5 (124), Вып.26. – С.60-69.

4. Осипов О.В. Оптимальное расположение источников тепла в неоднородной среде // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. – 2013. – №1. – С.154-158.

5. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Задача об оптимальном выборе источников тепла при наличии конвекции // Сборник трудов XXV международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ–25).Т.1 / Саратов, 2012.– С.84-87.

MSC 35D05

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П. Бурский

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р.Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина, e-mail: v30@dn.farlep.net

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha|\le l} a_\alpha(x)D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\bar\Omega)$, $D^\alpha = \dfrac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ – дифференциальная операция общего вида с $j\times k$-матрицами a_α, элементами которых являются гладкие комплекснозначные функции. Операция $\mathcal{L}$ порождает формально сопряженную операцию $\mathcal{L}^+\cdot = \sum\limits_{|\alpha|\le l} D^\alpha(a^*_\alpha(x)\ \cdot)$, где $a^*_\alpha(x)$ – сопряженная матрица.

Будут рассмотрены граничные задачи в обобщенной постановке для уравнений вида:

$$\sum_{m=1}^{M} \mathcal{L}^+_m \circ \mathcal{L}_m\ u = f, \tag{0}$$

где $\mathcal{L}_m$ – операции того же вида, что и $\mathcal{L}$.

Рассмотрим сначала граничные задачи в обобщенной постановке для уравнений вида:

$$\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}\ u = f \tag{1}$$

и их связь с теорией расширений операторов.

Минимальный оператор L_0, определяемый как замыкание оператора $\mathcal{L}$, первоначально заданного на $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика $\|u\|^2_L = \|u\|^2_{L^j_2(\Omega)} + \|\mathcal{L}u\|^2_{L^k_2(\Omega)}$ и аналогичный минимальный оператор L_0^+ порождают максимальные операторы $L = (L_0^+)^*, L^+ = L_0^*$ с помощью сопряжения в гильбертовых пространствах. Области определения $D(L_0), D(L_0^+), D(L), D(L^+)$ этих операторов являются гильбертовыми пространствами в соответствующей норме графика.

Введем граничное пространство $C(L) = D(L)/D(L_0)$, а также фактор-отображение $\Gamma : D(L) \to C(L)$ и аналогично $C(L^+)$ и Γ^+.

Рассмотрим следующие условия:

$$\text{оператор } L_0 : D(L_0) \to L^k_2(\Omega) \text{ имеет непрерывный левый обратный;} \tag{2}$$

$$\text{оператор } L_0^+ : D(L_0^+) \to L^j_2(\Omega) \text{ имеет непрерывный левый обратный;} \tag{3}$$

Отметим, что условие (2) эквивалентно неравенству $\|\mathcal{L}\varphi\|_{L^j_2(\Omega)} \ge C\|\varphi\|_{L^k_2(\Omega)}$, доказанном Л. Хермандером для скалярной операции с постоянными коэффициентами.

Однородной граничной задачей называется задача нахождения решения соотношений

$$Lu = f, \quad \Gamma u \in B, \tag{4}$$

где B – линейное подпространство в пространстве Коши, определяющее граничную задачу. Задача (4) называется корректной, если оператор $L_B = L|_{D(L_B)}, D(L_B) = \Gamma^{-1}B$ является разрешимым расширением оператора L_0, т.е. если оператор $L_B : D(L_B) \to L_2^k(\Omega)$ имеет непрерывный обратный (который является правым обратным к L). Хорошо известно (М.Й.Вишик, Л.Хермандер), что у оператора L_0 существует разрешимое расширение (и для оператора L существует корректная граничная задача (4)) тогда и только тогда, когда выполнены условия (2) и (3). Сопряженной к (4) называется граничная задача: $L^+v = g,\ \Gamma^+v \in B^+$, где пространство $B^+ = \Gamma^+D_B^+, D_B^+ = \{v \in D(L^+)|\forall u \in \Gamma^{-1}(B), [u,v] = 0\}$, порождено формой Грина: $[u,v] = \int_\Omega (Lu \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{L^+v})\,dx = \langle \mathcal{L}_{\partial\Omega}\Gamma u, \Gamma^+v\rangle = -\langle \Gamma u, \mathcal{L}_{\partial\Omega}^+\Gamma^+v\rangle$.

Рассмотрим теперь обобщенные постановки граничных задач.

Задача (4) порождает следующую граничную задачу для уравнения (1): найти функцию $u \in D(L_B)$, называемую обобщенным решением, такую что для любой $v \in D(L_B)$ выполнено интегральное тождество

$$\langle L_B u,\, L_B v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad f \in D'(L_B), \tag{5}$$

которое можно понимать как задачу решения уравнения (1), записанного в виде $Qu := L'_B \circ L_B\, u = f$, где $L'_B : L_2^k(\Omega) \to D'(L_B)-$ дуальный оператор. Если функция u такова, что $Lu \in D(L^+)$, то граничное условие здесь можно записать в виде: $\Gamma u \in B;\ \Gamma^+\,\mathcal{L}u \in B^+$. Задачу (5) назовем задачей Дирихле, если $B = \{0\}$, и задачей Неймана, если $B = C(L)$. Задачу (5) назовем нормально корректно разрешимой, если пространство $\mathrm{Im}Q \subset D'(L_B)$ совпадает с ортогональным пространством K к ядру $\ker L_B$ и существует непрерывный оператор $R : K \to D(L_B)$, правый обратный к оператору $Q : D(L_B) \to K$. Задачу (5) назовем корректно разрешимой, если оператор $Q : D(L_B) \to D'(L_B)$ имеет непрерывный двусторонний обратный Q^{-1}.

Утверждение 1. *Задача (5) нормально корректно разрешима тогда и только тогда, когда оператор L_B нормально разрешим.Задача (5) корректно разрешима тогда и только тогда, когда она нормально корректно разрешима и ядро $\ker L_B$ тривиально.*

Из утверждения 1 вытекают полезные следствия.

Утверждение 2. *Задача Дирихле (5) (т.е. $D(L_B) = D(L_0)$) корректно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие Вишика (2).*

Утверждение 3. *Задача Неймана (5) (с $D(L_B) = D(L)$) нормально корректно разрешима тогда и только тогда, когда оператор L нормально разрешим, в частности, если выполнено условие Вишика (3)(в этом случае $\mathrm{Im}\, L = L_2^k(\Omega)$).*

Пример 1. Рассмотрим обобщенную задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = f : \mathcal{L} = \mathrm{grad}, \mathcal{L}^+ = \mathrm{div}, D(L) = W_2^1(\Omega), D(L_0) = \overset{\circ}{\to} W_2^1(\Omega), f \in [\overset{\circ}{\to} W_2^1(\Omega)]'$. Утверждение 2 говорит здесь, что обобщенная задача Дирихле корректно разрешима, если и только если в области Ω справедливо неравенство Фридрихса: $\|\nabla u\| \geq C\|u\|, \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, которое равносильно условию (2) для оператора ∇ и которое выполнено в любой ограниченной области.

Пример 2. Рассмотрим обобщенную задачу Неймана для уравнения Лапласа. Из утверждения 3 вытекает, в частности, что эта задача нормально корректно разрешима в области Ω с конечномерным пространством первых вещественных когомологий (например, в области с гладкой границей). Действительно, в этом случае по теореме де Рама замкнутое в $L_2^k(\Omega)$ ядро непрерывного оператора rot (= внешний дифференциал) шире образа оператора grad на конечномерное пространство, поэтому пространство потенциальных векторных полей $\nabla W_2^1(\Omega)$ замкнуто в $L_2^k(\Omega)$.

Рассмотрим теперь уравнение (0) с операциями $\mathcal{L}_m = \sum_{|\alpha| \le l_m} a_{m,\alpha}(x) D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$ общего вида с $j \times k_m$-матрицами $a_{m,\alpha}$, элементами которых являются гладкие комплекснозначные функции $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Введем операцию $\mathcal{L} = \mathrm{column}(\mathcal{L}_m)|_M^{m=1}$. Тогда $\mathcal{L}^+ = \mathrm{line}(\mathcal{L}_m)|_M^{m=1}$ и мы имеем, что $\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}\ u = \sum_{m=1}^M \mathcal{L}_m^+ \circ \mathcal{L}_m\ u$. Для такой операции мы можем тем же путем ввести минимальный и максимальный операторы, а затем понятия граничной задачи, задачи Дирихле и задачи Неймана. Тогда из утверждений 1-3 получаем

Утверждение 4. *Задача Дирихле (5) (т.е. с $D(L_B) = D(L_0)$) корректно разрешима, если хотя бы для одного m выполнено условие Вишика (2) $\|\mathcal{L}_m \varphi\|_{L_2^j(\Omega)} \ge C\|\varphi\|_{L_2^{k_m}(\Omega)}$. Задача Неймана (5) (с $D(L_B) = D(L)$) нормально корректно разрешима, если хотя бы для одного m выполнено условие Вишика (3) $\|\mathcal{L}_m^+ \varphi\|_{L_2^{k_m}(\Omega)} \ge C\|\varphi\|_{L_2^j(\Omega)}$.*

MSC 35M20

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ТИПА ЧАПЛЫГИНА

И.А. Бурханова (Хаджи)

Институт прикладных исследований РБ,
Одесская, 68, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: irishka_135@mail.ru

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с оператором типа Чаплыгина в прямоугольной области установлен критерий единственности решения обратной задачи.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2K(y)u = f(x),$$

где $K(y) = \mathrm{sign} y \cdot |y|^n$, $n = const > 0$, $b = const > 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа, и следующую краевую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{1}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1]; \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x), \;\; x \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \;\; u(x,-\alpha) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где φ, ψ и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В работах [1-4] изучены обратные задачи для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе с локальными и нелокальными граничными условиями, связанные с поиском правой части.

Теорема. *Если существует решение задачи* (1)-(6), *то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия*

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}-q}}{p_k q}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_k^{-\prime}(-\alpha)\Big[I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\Big] +$$

$$+\alpha^{-\frac{1}{2}}\omega_k^-(-\alpha)\Big[K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)+I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\overline{\overline{Y}}_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)\Big]-\frac{\beta^{-\frac{1}{2}}\omega_k^+(\beta)}{p_k\alpha^q}\neq 0,$$

где

$$\omega_k^+(\beta)=\frac{1}{q}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\sqrt{\beta}\int\limits_0^\beta K_{\frac{1}{2q}}(p_kt^q)\sqrt{t}dt-\frac{1}{q}K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\sqrt{\beta}\int\limits_0^\beta I_{\frac{1}{2q}}(p_kt^q)\sqrt{t}dt,$$

$$\omega_k^-(-\alpha)=\frac{\pi}{2q}J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}\int\limits_0^{-\alpha} Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\sqrt{-t}dt-\frac{\pi}{2q}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}\int\limits_0^{-\alpha} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\sqrt{-t}dt,$$

$$\omega_k^{-\prime}(-\alpha)=-\frac{\pi}{2}p_k\alpha^{q-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)\int\limits_0^{-\alpha} Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\sqrt{-t}dt+$$

$$+\frac{\pi}{2}p_k\alpha^{q-\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)\int\limits_0^{-\alpha} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\sqrt{-t}dt,$$

и $p_k=\sqrt{b^2+(\pi k)^2}/q$, $q=\frac{n+2}{2}$, $J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)$, $J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)$, $Y_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)$ и $Y_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)$ – *функции Бесселя I и II* рода, $I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)$, $K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)$ – *модифицированные функции Бесселя.*

Литература

1. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Математика. – 2011. – №2. – С.71-85.

2. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия вузов. Математика. – 2011. – №5. – С.44-52.

3. Хаджи И.А. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Матем. заметки. – 2012. – №6. – С.908-919.

4. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сибирский математический журнал. – 2012. – №3. – С.633-647.

MSC 35S15

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В МНОГОМЕРНОМ КОНУСЕ

В.Б. Васильев

Липецкий государственный технический университет,
ул. Московская, 30, Липецк, 398600, Россия, e-mail: vbv57@inbox.ru

При изучении разрешимости псевдодифференциальных уравнений в областях с негладкой границей одним из ключевых моментов является описание условий обратимости модельного оператора в канонической негладкой области. Если граница содержит коническую точку x_0, то речь идет об обратимости оператора

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{C_+^a} \int\limits_{\mathbf{R}^m} A(x_0,\xi) e^{ix\xi} \tilde{u}(\xi) d\xi, \tag{1}$$

где $A(x,\xi)$ – символ оператора A, $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x_1,...,x_m), x_m > a|x'|, a > 0, x' = (x_1,...,x_{m-1})$, другими словами, требуется обратимость оператора (1) с замороженным полюсом x, т.е. с символом $A(\cdot,\xi)$, не зависящим от x.

Для решения этой задачи автор [1] ввел понятие волновой факторизации символа эллиптического оператора относительно конуса C_+^a, и в двумерном случае описал условия обратимости оператора (1) при наличии такой факторизации. Здесь рассматривается существенно многомерная ситуация и специальные типы граничных условий в пространствах Соболева-Слободецкого $H^s(C_+^a)$ [2].

Литература

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / Москва: УРСС, 2010.

2. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Москва: Наука, 1973.

MSC 32A55

ДИСКРЕТНЫЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А.В. Васильев

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14/1, Белгород, 308007, Россия, e-mail: alexvassel@gmail.com

Дискретным сингулярным интегралом в полупространстве $\mathbf{Z}^m_{h,+} = \{\tilde{x} \in \mathbf{Z}^m_h \,|\, \tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m), \tilde{x}_m > 0\}, \mathbf{Z}^m_h$ – целочисленная $(mod\ h, h > 0)$ решетка в $\mathbf{R}^m$, мы называем оператор

$$K_h:\ u_h(\tilde{x}) \longmapsto \sum_{\tilde{y}\in\mathbf{Z}^m_{h,+}} K(\tilde{x}-\tilde{y})u_h(\tilde{y})h^m\,, \quad \tilde{x}\in\mathbf{Z}^m_{h,+}, \tag{1}$$

определенный на функциях дискретного аргумента $u_h(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbf{Z}^m_{h,+}$, который порождается интегралом

$$K:\ u \longmapsto \text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}^m_+} K(\tilde{x}-\tilde{y})u(y)dy, \tag{2}$$

где $K(x)$, $K(0) = 0$, – ядро Кальдерона – Зигмунда [1] в m-мерном пространстве, $\mathbf{R}^m_+ = \{x \in \mathbf{R}^m:\ x = (x_1, ..., x_m), x_m > 0\}$.

Введем функцию $r(x) = (\frac{x_m}{1+x_m})^\alpha(1 + |x|)^\beta$, и будем предполагать, что функция $u\cdot r$ удовлетворяет условию Гельдера

$$|(u\cdot r)(x) - (u\cdot r)(y)| \le C|x-y|^\gamma\,, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^m_+\,,$$

$0 < \gamma < 1,\ \gamma < \alpha < \gamma + 1,\ 0 < \beta + \gamma < m$, C – постоянная, не зависящая от x, y. Если обозначить l_h оператор сужения на решетку $\mathbf{Z}^m_{h,+}$, $l_h : \mathbf{R}^m_+ \to \mathbf{Z}^m_{h,+}$, то имеет место

Теорема. *Справедлива оценка*

$$|(K_h u_h - l_h K u)(\tilde{x})| \le \mathrm{c}h^\gamma \ln(1/h).$$

В случае пространств $\mathbf{Z}^m_h$ и $\mathbf{R}^m$ некоторые численные результаты, иллюстрирующие близость операторов (1) и (2), представлены в [2].

Литература

1. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / Москва: ГИФМЛ, 1962.

2. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Numerical analysis for some singular integral equations // Neural, Parallel and Scientific Computations. – 2012. – 20, No. 3-4. – P.313-326.

MSC 41A05

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ОБОБЩЁННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОШИ

Т.А. Виноградова

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: grapes1@yandex.ru

В различных разделах математики имеется широкий круг задач, приводящих к неортогональным системам. Неортогональные системы весьма характерны для задач анализа различных сигналов и спектров. В общем виде эти задачи можно сформулировать как выделение отдельных компонент в исследуемой зависимости. В настоящее время широкую применимость получили методы теории всплесков, которые изначально строятся ортогональными. Однако, зачастую и конкретный тип всплеска, и его параметры выбираются чисто эвристически, на основе большого числа вычислительных экспериментов. Кроме того, прямой физический смысл имеют, как правило, не коэффициенты разложения при отдельных всплесках, а лишь некоторые их комбинации. Также, вопреки распространенному мнению, оказывается, что при правильной организации вычислений, многие стандартные методы ничуть не уступают всплесковым.

В последнее время среди получивших широкое распространение методов разложения функций часто используются аппроксимации мультипликативными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; w(a_k z)\,,$$

где f_k – коэффициенты разложения, а a_k – набор параметров мультипликативных сдвигов, а также аппроксимации аддитивными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; w(z-k).$$

Наиболее распространённые и известные разложения по мультипликативным сдвигам – это ряды Фурье, ряды Бесселя-Каптейна. Ещё более распространены разложения по аддитивным сдвигам с использованием всплесков, сплайнов, функций Рвачёвых, квадратичных экспонент (функций Гаусса).

В настоящей работе при анализе спектров предлагается использовать разложение исследуемого сигнала по компонентам заданного вида, полученным из каких-либо теоретических соображений. И если для работы с гауссовыми функциями существуют разработанные методы [1-4], то в случае функции Лоренца или распределений Коши такие методы только находятся в стадии разработки.

В работе изучаются интерполяционные разложения произвольной функции по целочисленным сдвигам обобщённого распределения Коши (Лоренца) вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{a}{b+(x-k)^c}\ ,$$

где a, b, c – некоторые положительные постоянные.

Для решения интерполяционной задачи в явном виде нужно найти коэффициенты разложения f_k, а эти коэффициенты выражаются через значения узловой функции $G_{a,b,c}(x)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$G_{a,b,c}(0)=1, \quad G_{a,b,c}(m)=0, \quad m\in\mathbb{Z}, \quad m\neq 0.$$

Для указанного метода интерполяции при значениях параметра $c \geq 2$ выведена явная формула для узловой функции, проведено подробное численное исследование задачи.

Отметим, что случай $c=2$ был исследован Л.А. Мининым и Е.А. Киселёвым. Ими было получено разложение

$$G_{s,s^2,2}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(ikx)\,,$$

и найдена явная интегральная формула для коэффициентов

$$g_k=\frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\pi s)}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(kx)\,dx}{\operatorname{ch}(sx)}.$$

В нашей работе получено в том числе обобщение этой формулы для случая $c>2$.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / University of Linköping, Sweden, 2007.

2. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences. Springer. – 2011. – 173, №2. – P.231-241.

3. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. – 2010. – Т.67. – С.107-116.

4. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2009. – №13 (68), Вып.17/2. – С.89-99.

MSC 28C20

АДДИТИВНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Н.Н. Витохина, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Vitohina@bsu.edu.ru

Вычисляется производящая функция $Q_T[\lambda;\tilde{w}] = \mathsf{E}\exp(-\lambda \mathsf{J}_T[\tilde{w}])$ распределения вероятностей значений квадратичного функционала

$$J_n[\tilde{w}] = \sum_{k=0}^{n} \tilde{w}^2(t_k)\,, \tag{1}$$

$t_k = k\Delta$, $k = 1, 2, ..., m$, $\Delta = T/n$, $T > 0$ на траекториях $\tilde{w}(t)$ винеровского процесса $\langle \tilde{w}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ с дисперсией σ. Эта функция

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda J_n[\tilde{w}]) \equiv Q_n(\lambda\Delta|\tilde{\mathbf{x}})$$

определяется на основе производящей функции $Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{z}})$ для случайного комплексного вектора $\tilde{\mathbf{z}} = \langle \tilde{z}_k; k = 1, ..., n\rangle$, состоящего из компонент $\tilde{z}_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k$, $k = 1, 2, ..., n$ со стохастически эквивалентными и независимыми парами $\langle \tilde{x}_k, \tilde{y}_k \rangle$ при каждом $k = 1, ..., n$. Тогда

$$Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{x}}) = Q_n^{1/2}(\lambda|\tilde{\mathbf{z}})\,.$$

Вычисление функции $Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{z}})$ сводится к вычислению определителя

$$S(\lambda) \;\equiv\; Q_n^{-1}(\lambda|\tilde{\mathbf{z}}) = \det(\mathcal{I} + 2\lambda\mathcal{K})\,,$$

который является полиномом степени n относительно λ, где $\mathcal{K}_{jk}$ – ковариационная матрица случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathcal{K}_{jk} \equiv \mathsf{E}(\tilde{x}_j\tilde{x}_k) = \sigma\min\{t_j, t_k\}$ так, что $\mathsf{E}(\tilde{z}_j\tilde{z}_k^*) = 2\mathcal{K}_{jk} = 2\sigma\Delta\min\{j, k\}$.

Справедливо утверждение о том, что матрица $\mathcal{K}$ не имеет собственного числа, равного нулю. Таким образом, неотрицательная эрмитова матрица $\mathcal{K}$ является строго положительной. Пусть $\{\omega_k^{-1}; k = 1, ..., n\}$ – набор её n строго положительных собственных чисел, соответствующих собственным векторам $\mathbf{c}^{(k)}, k = 1, 2, .., n$, $\omega_k\mathcal{K}\mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k)}\,,\quad k = 1, ..., n$. Тогда полином $S(\lambda)$ представим в виде

$$S(\lambda) \;=\; \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{2\lambda}{\omega_k}\right)\,. \tag{2}$$

Если корни полинома $S(\lambda)$ простые, то он полностью определяется совокупностью условий $S(-\omega_k/2) = 0\,,\quad k = 1, ..., n\,,\quad S(0) = 1$.

Построим полином $S(\lambda)$, удовлетворяющий этим условиям. Пусть $\mathbf{c} = \langle c_m; m = 1, ..., n\rangle$ – фиксированный собственный вектор из совокупности собственных векторов $\{\mathbf{c}^{(k)}; k = 1, ..., n\}$ матрицы $\mathcal{K}$, соответствующий собственному числу ω^{-1}. Для каждого такого ω имеет место $S(-\omega/2) = 0$. Для этого вектора введем последовательности

$$\langle a_k; k = 0, 1, ..., n\rangle\,, \quad \langle b_k; k = 0, 1, ..., n\rangle, \quad d_k = a_k + (k+1)b_k\,, k = 1, ..., n-1, ;$$

по следующим формулам $a_0 = 0, b_n = 0, d_0 = b_0, d_n = a_n$,

$$a_k = \sum_{m=1}^{k} m c_m\,, \quad b_k = \sum_{m=k+1}^{n} c_m\, d_k = a_k + (k+1)b_k, \quad k = 1, ..., n-1\,. \tag{3}$$

В результате, получается система рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_k - \eta\omega d_k, \\ d_{k+1} = b_k + d_k(1-\eta\omega), \end{cases}$$

для определения компонент вектора $\mathbf{c}$. Рассмотрим 2×2-матрицу

$$\mathcal{T}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & -\eta\omega \\ 1 & 1-\eta\omega \end{pmatrix}$$

Ее собственные числа $s_\pm$ и соответствующие им собственные векторы $\mathsf{u}^\pm = \langle u_1^\pm, u_2^\pm\rangle$ вычисляются явно на основе характеристического уравнения $\det(\mathcal{T}(\omega) - s) = 0$,

$$s^2 \; - 2\xi s + 1 \; = \; 0\,, \quad s_\pm = \xi \pm (\xi^2 - 1)^{1/2}\,, \quad \xi = 1 - \eta\omega/2\,, \tag{4}$$

$\mathsf{u}^\pm = \langle 1, (\eta\omega)^{-1}(1 - s_\pm)\rangle$.

Таким образом, получается следующее выражение

$$S(-\omega/2) = (s_+ - s_-)^{-1}\left[s_+^n(s_+ - 1) - s_-^n(s_- - 1)\right]\,, \tag{5}$$

где величины $s_\pm$ определяются формулами (4).

Убедившись, что все нули полинома $S(-\omega/2)$ простые, получаем следующее утверждение: *Производящая функция $Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{x}})$ случайной величины $J_n[\tilde{\mathbf{x}}] = \sum_{k=1}^{n} |\tilde{x}_k|^2$, $\tilde{x}_k = \tilde{w}(t_k)$, $t_k = k\Delta$, $\Delta = T/n$, равна*

$$Q_n(\lambda|\tilde{\mathbf{x}}) \; = \; [S(\lambda)]^{-1/2}\,,$$

где $S(-\omega/2)$ определяется формулой (5).

Литература

1. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965. – 408 с.

2. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. – Киев: Наукова думка, 1987. – 224 с.

MSC 34B05

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ СИНГУЛЯРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ОБЛАСТИ

В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: vlasov@ccas.ru

1. Область $g \in \overline{\mathbb{C}}$ принадлежит классу $(\mathcal{A})$, если она односвязна, и конформное отображение $\mathbb{U} \xrightarrow{conf} g$ круга $\mathbb{U}$ на нее непрерывно в $\overline{\mathbb{U}}$ в смысле метрики римановой сферы. Будем говорить, что $g \in (\gamma, \Gamma)$, если $g \in (\mathcal{A})$ и $\partial g = \gamma \cup \Gamma$, где Γ — кусочно–гладкая дуга без внешних и внутренних заострений, а дуга γ в некоторых g–окрестностях ее концевых точек является ляпуновской и соединяется с Γ в этих точках также без заострений. Если существует область $G \in (\mathcal{A})$, являющаяся расширением g через Γ, то будем писать $G \overset{\Gamma}{\supset} g$. (Уточнение этих и используемых ниже определений см. в [1], [2]).

Пусть выполняются условия: 1) границы областей G_0, $G_L \in (\mathcal{A})$ имеют общую дугу σ_L°, а G_L° — компонента пересечения $G_0 \cap G_L$, примыкающая к σ_L°; 2) для отображения $\mathcal{F}_0 : G_0 \xrightarrow{conf} \mathbb{H}$ введем точки M и N по формулам $M := \mathcal{F}_0^{-1}(\infty) \in \sigma_L^\circ$, $N_0 := \mathcal{F}_0^{-1}(0) \notin \operatorname{int} \sigma_L^\circ$; 3) L определим равенством $L := \sup_{z \in \mathcal{F}_0(\sigma_L)} |z|$, $\sigma_L := \partial G_L^\circ \setminus \operatorname{int} \sigma_L^\circ$. Тогда будем говорить, что G_L получена путем деформирования области G_0 вблизи точки N с параметром деформации L, соответствующим отображению $\mathcal{F}_0$, и писать $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$. Основанием для такого определения является

Предложение 1. *Если $\{G_L\}_{L=0}^{L_0}$, $L_0 > 0$, — семейство областей $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$, то при $L \to 0$:*

1) семейства $\{G_L\}$ и $\{G_L^\circ\}$ сходятся к G_0 как к ядру (в смысле Каратеодори [3]);
2) семейство дуг $\{\sigma_L^\circ\}$ сходится к ∂G_0 в смысле следующего равенства:

$$\sigma_L^\circ \setminus \mathcal{F}_0^{-1}(\mathbb{D}_+(L)) = \partial G_0 \setminus \mathcal{F}_0^{-1}(\mathbb{D}_+(L))$$

при достаточно малых L, где $\mathbb{D}_+(L) := \{z : |z| < L, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Теорема 1. *Если $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$, то для отображения $\mathcal{F}_L : G_L \xrightarrow{conf} \mathbb{H}$, подчиненного условию*

$$\mathcal{F}_L(w) \sim \mathcal{F}_0(w), \qquad w \to M, \tag{1}$$

справедливо разложение

$$\mathcal{F}_L(w) \,=\, \mathcal{F}_0(w) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \, L^{k+1} \left[\mathcal{F}_0(w)\right]^{-k}, \tag{2}$$

сходящееся на $\mathcal{F}_0^{-1}\big(\mathbb{K}_+(L)\big)$, *где* $\mathbb{K}_+ := \{z : |z| > L, \mathrm{Im} z \geq 0\}$. *Коэффициенты* $B_k = B_k(L)$ *вещественны, и при* $k > 0$ *справедлива оценка* $|B_k(L)| \leq 1/\sqrt{k}$, *а при условии* $N_L := \mathcal{F}_L^{-1}(0) \notin \mathrm{int}\, \sigma_L^o$ — *следующая оценка:* $|B_0(L)| \leq 2$.

2. Пусть выполняются условия: области семейств $\{g_L\}$ и $\{G_L\}$, $L \in (0, L_0)$, принадлежат классу $(\mathcal{A})$,

$$G_0 \overset{\Gamma}{\supset} g_0 \in (\gamma_0, \Gamma), \qquad G_L \overset{\Gamma}{\supset} g_L \in (\gamma_L, \Gamma),$$

и для каждой из G_L отображение $\mathcal{F}_L : G_L \overset{conf}{\longrightarrow} \mathbb{H}$ удовлетворяет условию (1). В каждой из областей семейства $\{g_L\}$, $L \in (0, L_0)$, рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta\psi_L(w) = 0, \quad w \in g_L; \qquad \psi_L(w) = 0, \quad w \in \mathrm{int}\, \gamma_L; \qquad \psi_L(w) = h(w) \in L_2(\Gamma), \qquad (3)$$

решение которой в классе типа Харди $e_2(g_L, \Gamma)$ существует и единственно [2].

Теорема 2. *Справедливо асимптотическое разложение*

$$\psi_L(w) = \psi_0(w) + \sum_{k=2}^{\infty} L_k\, \psi_{(k)}(w), \qquad L \to 0,$$

равномерное по w *внутри* $\overline{g} \setminus N_0$, *где* $\psi_{(k)}(w)$ *является линейной комбинацией функций* $\mathrm{Im}\left[\mathcal{F}_0(w)\right]^{-n}$, $n = \overline{1, k-1}$, *с явно выписываемыми вещественными коэффициентами.*

Аналогичная теорема может быть сформулирована и для асимптотики величины $\mathrm{grad}\, \psi_L(N_L)$ при $L \to 0$.

С помощью этих теорем была получена асимптотика решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях со скругленными углами и асимптотика его градиента на закругляющей кривой при стремлении радиуса закругления к нулю [2], а также асимптотики решения аналогичной задачи в областях с узкой щелью, имеющей дно произвольной формы, и асимптотика его градиента на дне щели при стремлении ширины щели к нулю [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Литература

1. Власов В.И. О вариации отображающей функции при деформировании области // Доклады АН СССР. – 1984. – 275, №6. – С.1299-1302.

2. Власов В. И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей / Москва: ВЦ АН СССР, 1987.

3. Caratheodory C. Gesammelte mathemetische Schriften / München: Dritter Band., 1955; München: Vierter Band., 1956.

4. Власов В. И., Пальцев А. Б. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. – 2003. – 43, №12. – С.1768-1805.

MSC 76T10

КОРРЕКТНОСТЬ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АКУСТИКИ В СОСТАВНЫХ СРЕДАХ

А. Герус

Работа посвящена задаче акустики в составной среде. Наша область Q состоит из некоторого упругого тела $\Omega^{(s)}$ и пороупругого пространства Ω. Мы ограничимся простой ситуацией, когда область Q - единичный куб: $Q=(0,1)\times(0,1)\times(0,1)$, пороупругое пространство занимает область $\Omega=(0,1)\times(0,1)\times(0,a)$, $0<a<1$ и область $\Omega^{(s)}$ открытое дополнение к Ω :

$$Q=\Omega\cup\Omega^{(s)}\cup S^{(0)},\quad S^{(0)}=\partial\Omega\cap\partial\Omega^{(s)},$$

Движение смеси в области Ω при $t>0$ описывается системой

$$\Big(\frac{\chi}{c_f^2}+\frac{1-\chi}{c_s^2}\Big)\,p+\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0, \tag{1}$$

$$\big(\varrho_f\chi+(1-\chi)\varrho_s\big)\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\mathbb{P}+\varrho\boldsymbol{F}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P}=\chi\alpha_\mu\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\big)+(1-\chi)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})-p\,\mathbb{I}, \tag{3}$$

Перемещение упругого тела в области $\Omega^{(s)}$ при $t>0$ описывается системой уравнений Ламэ

$$\frac{1}{\big(c_s^{(0)}\big)^2}\,p+\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0, \tag{4}$$

$$\varrho_s^{(0)}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\,\mathbb{P}^{(s)}+\varrho_s^{(0)}\boldsymbol{F}, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}^{(s)}=\alpha_\lambda^{(0)}\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})-p\,\mathbb{I}, \tag{6}$$

где $\alpha_\lambda^{(0)}$ и $c_s^{(0)}$ безразмерные константы Ламэ для упругого тела в $\Omega^{(s)}$.

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности для перемещений и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{(s)}}}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t), \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{(s)}}}\mathbb{P}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{8}$$

Рассматриваемая система замыкается граничными и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in S_T=S\times(0,T),\ S=\partial Q \tag{9}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0,\ \boldsymbol{x}\in Q. \tag{10}$$

Далее, мы положим, что

$$\int_{Q_T}\Big(\Big|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+\Big|\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2\Big)dxdt=F^2<\infty\,,$$

Определение. *Пара функций $(\boldsymbol{w},p)$ таких, что*

$$\boldsymbol{w}\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T),\ p\in L_2(Q_T)\,,$$

является слабым решением системы (1)-(6), (7), (8), (9), (10), если они удовлетворяют следующим интегральным тождествам

$$\Big(\frac{1-\zeta}{\big(c_s^{(0)}\big)^2}+\zeta\Big(\frac{\chi}{c_f^2}+\frac{1-\chi}{c_s^2}\Big)\Big)\,p+\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0\,, \tag{11}$$

$$\int_{Q_T}\varrho_{(s)}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt=$$
$$\int_{Q_T}\Big(\zeta\mathbb{P}+(1-\zeta)\mathbb{P}^{(s)}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt \tag{12}$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}\in W_2^{1,1}(Q)_T$, таких что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0$ на границе S_T, и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T)=0$ для $\boldsymbol{x}\in Q$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема. *Для всех $\varepsilon>0$ и для произвольного временного интервала $[0,T]$ существует обобщенное решение $\{\boldsymbol{w},\,p\}$ системы (1) – (6), (7), (8), (9), (10) и*

$$\begin{aligned}&\max_{0<t<T}\int_{\Omega}\Big(\Big|p(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+(1-\chi)\alpha_\lambda\Big|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})\Big|^2\Big)dx+\\ &\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(s)}}\Big(\Big|p(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+(1-\chi)\alpha_\lambda^{(0)}\Big|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})\Big|^2\Big)dx+\\ &\max_{0<t<T}\int_{\Omega}\Big(\Big|\frac{\partial p}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+\Big|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+(1-\chi)\alpha_\lambda\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t})\Big|^2\Big)dx+\\ &\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(s)}}\Big(\Big|\frac{\partial p}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+\Big|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2+(1-\chi)\alpha_\lambda^{(0)}\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t})\Big|^2\Big)dx+\\ &\int_{\Omega_T}\chi\alpha_\mu\Big(\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t})\Big|^2+\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2})\Big|^2\Big)dxdt\leqslant C_0F^2\,,\end{aligned} \tag{13}$$

где константа C_0 не зависит от малого параметра ε и α_λ, $\alpha_\lambda^{(0)}$.

MSC 35M10

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Гималтдинова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: $g\_alfira@mail.ru$

Для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y)| -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию* $u(x,y)$ *с условиями*:

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(\bigcup_{i=1}^{4} D_i), \qquad Lu(x,y) \equiv 0, \;\; (x,y) \in \bigcup_{i=1}^{4} D_i,$$

$$u(x,y)\big|_{x=1} = u(x,y)\big|_{x=-1} = 0, \;\; y \in [-\alpha, \beta],$$

$$u(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \;\; x \in [-1,1], \quad u(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \;\; x \in [-1,1],$$

где $D_{1,2} = D \cap \{x > 0, \pm y > 0\}$, $D_{3,4} = D \cap \{x < 0, \pm y < 0\}$, φ *и* ψ *– заданные функции.*

Задача Дирихле для смешанного уравнения с одной линией изменения типа в прямоугольной области изучалась в работах [1, 2].

В данной работе впервые для уравнения (1) с двумя перпендикулярными линиями изменения типа изучается задача Дирихле в прямоугольной области и спектральным методом [3] доказаны теоремы единственности и существования решения.

Разделив переменные $u(x,y) = X(x)Y(y)$, относительно x получим спектральную задачу:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + dX = 0, \quad X(0+) = X(0-), \quad X'(0+) = X'(0-), \quad X(1) = X(-1) = 0,$$

собственные функции которой имеют вид:

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x < 0; \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0, \end{cases}$$

где $d = \pm\mu_k^2$ – собственные значения, μ_k являются корнями уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{th}\mu$, для них справедлива асимптотическая формула: $\mu_k = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$.

Система $\{X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна на $[-1,1]$. Соответствующая биортогональная система имеет вид:

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x>0, \\ \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x+1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x<0; \end{cases} \qquad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x-1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x>0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x<0. \end{cases}$$

Полнота системы $\{Z_k^{(1)}(x),\ Z_k^{(2)}(x)\}$ в $L_2[-1,1]$ доказывается аналогично [4].

Теорема 1. *Если существует решение задачи Дирихле, то оно единственно только тогда, когда для всех* $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = \cos(\mu_k\alpha)\,\mathrm{sh}(\mu_k\beta) + \sin(\mu_k\alpha)\,\mathrm{ch}(\mu_k\beta) \neq 0, \tag{2}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta) = \mathrm{ch}(\mu_k\alpha)\sin(\mu_k\beta) + \mathrm{sh}(\mu_k\alpha)\cos(\mu_k\beta) \neq 0. \tag{3}$$

Лемма. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{N}$ *не равное числам* $4p-3$, $p \in \mathbb{N}$, *или* $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, *НОД*$(p,q)=1$, *число* $q-p$ *не кратно* 4. *Тогда существуют постоянные* $C_0>0$ *и* $k_0 \in \mathbb{N}$ *такие, что для всех* $k>k_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)| \geq C_0 e^{\pi k\beta}.$$

При аналогичных α *и условиях на* β *справедлива оценка* $|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)| \geq \tilde{C}_0 e^{\pi k\alpha}$.

Если выполнены оценки леммы и при $k \leq k_0$ условия (2), (3), то решение задачи Дирихле определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)}(y)\cdot X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y)\cdot X_k^{(2)}(x),\ u_k^{(j)}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y) Z_k^{(j)}(x)dx. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^1[-1,1]\cap C^4[-1,0]\cap C^4[0,1]$, $\varphi(-1)=\varphi(1)=\varphi''(-1)=\varphi''(1)=0$, $\psi(-1)=\psi(1)=\psi''(-1)=\psi''(1)=0$, $\varphi''(0+0)=-\varphi''(0-0)$, $\varphi'''(0+0)=-\varphi'''(0-0)$, *и выполнены оценки леммы. Тогда если при указанных в лемме* α *и* β *при всех* $k=\overline{1,k_0}$ *выполнены условия* (2) *и* (3), *то существует единственное решение задачи Дирихле и оно определяется рядом* (4).

Литература

1. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinious coefficient // Ann. math. pure and appl. – 1963. – 62. – P.371-377.

2. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области –// Дифференц. уравнения. – 1978. – 14,№1. – С.136-139.

3. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.

4. Ломов И.С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, №3. – С.358-365.

MSC 35Q05

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. Глушак, О. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул.Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru,
pokru4in.oleg@yandex.ru

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k>0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \quad t>0, \tag{14}$$

$$u(0)=u_0, \quad u'(0)=0. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть задача (14), (15) равномерно корректна, $A\in G_k$, и $u_0\in D(A)$. Тогда эта задача равномерно корректна и для $m>k$, то есть $A\in G_m$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид*

$$Y_m(t)u_0=\frac{2}{B(k/2+1/2,m/2-k/2)}\int_0^1(1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^kY_k(ts)u_0\,ds, \tag{16}$$

где $B(a,b)$ — бета-функция Эйлера.

Теорема 2. *Если задача (14), (15) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\lambda>\omega$, то $\lambda^2\in\rho(A)$ и для любого $x\in E$ справедливо представление*

$$\lambda^{(1-k)/2}R(\lambda^2)x=\frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma((k+1)/2)}\int_0^\infty K_\nu(\lambda t)t^{(k+1)/2}Y_k(t)x\,dt. \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть задача (14), (15) равномерно корректна и пусть $Y_k(t)$ — ОФБ для этой задачи. Тогда оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$ и для этой полугруппы справедливо представление*

$$T(t)x=\frac{1}{2^k\Gamma((k+1)/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k\exp(-s^2/(4t))Y_k(s)x\,ds, \quad x\in E. \tag{18}$$

Теорема 4. *Если задача (14), (15) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\lambda>\omega$, то λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для дробной степени резольвенты справедливо представление*

$$R^{1+k/2}(\lambda^2)=\frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)\lambda}\int_0^\infty t^k\exp(-\lambda t)Y_k(t)\,dt \tag{19}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\|\le\frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}\;M\;\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k/2+1)\;\Gamma(k/2+1/2)\;(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k+n+1}}, \quad n=0,\;1,\;2,... \tag{20}$$

MSC 81V99

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЫСОКОСПИНОВЫХ МАГНЕТИКОВ

***А.В. Глущенко, *,**М.Ю. Ковалевский**

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,

ул. Академическая, 1, Харьков, 61108, Украина, e-mail: glushenko.anton@yahoo.com

**Белгородский государственный университет,

ул. Победы, 85, ,Белгород, 308015, Россия, e-mail: mikov51@mail.ru

В последние два десятилетия проводятся интенсивные исследования по механике высокоспиновых магнитных систем. Интерес к ним вызван обнаружением квадрупольных магнитных состояний, синтезом устойчивых высокоспиновых молекул, созданием кристаллов с помощью технологии оптических решеток при низких температурах [1,2]. Состояния таких магнетиков могут иметь достаточно высокую SU(2s+1) симметрию, где s- спин частиц. Поэтому актуальна задача уточнения идеологии макроскопического описания динамики таких систем, которая должна учитывать наличие такой высокой симметрии. Разнообразие свойств симметрии обменного магнитного взаимодействия при , ведет к более сложной структуре равновесного состояния и неравновесных динамических процессов. Для таких магнетиков возможен различный характер нарушения симметрии состояния равновесия, обусловленный трансформационными свойствами параметра порядка, который теперь имеет тензорный характер.

В докладе представлен гамильтонов подход [3], который позволяет ввести необходимый набор магнитных величин, установить для них скобки Пуассона и получить нелинейные уравнения динамики нормальных и вырожденных состояний. В качестве приложения детально рассмотрены магнетики со спином частиц s=1. Прослежена связь полученных уравнений с уравнениями Клебша и Ландау-Лифшица [4]. Кроме того, изучены магнетики, частицы которых имеют спин s= 3/2. Для таких физических систем также получены нелинейные уравнения динамические уравнения. Обсуждаются свойства SU(4), SU(2)xSU(2), SU(3), SO(4) и SO(5) симметрии гамильтониана. Установлена связь этих свойств симметрии с подалгебрами скобок Пуассона и возможными физическими состояниями изучаемых магнетиков.

Литература

1. Sadler L.E., Higbie J.M., Leslie S.R. et.al. // Nature letters. – 2006. – V.443. – P.312.

2. Kawaguchi Y., Ueda M. // Phys. Reports. – 2012. – V.520. – P.253.

3. Ковалевский М.Ю. // Теор. Матем. Физика. – 2011. – 168, №2. – С.245.

4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела / НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

MSC 81V99

МОДЕЛИ ОБМЕННОЙ ЭНЕРГИИ И СОСТОЯНИЯ МАГНЕТИКОВ СО СПИНОМ s=1

[*]А.В. Глущенко, [*,]М.Ю. Ковалевский**

[*]Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,

ул. Академическая, 1, Харьков, 61108, Украина, e-mail: glushenko.anton@yahoo.com

[**] Белгородский государственный университет,

ул. Победы, 85, ,Белгород, 308015, Россия, e-mail: mikov51@mail.ru

В докладе представлены результаты исследования магнетиков, частицы которых имеют спин s=1. На основе концепции квазисредних [1,2] сформулированы свойства симметрии нормальных и вырожденных состояний равновесия. В работе детально рассмотрены три случая со спонтанно нарушенной симметрией. Случай 1: гамильтониан обладает SO(3) симметрией, симметрия состояния равновесия полностью нарушена. Параметр порядка – комплексный спиновый вектор. Случай 2: состояние со спонтанно нарушенной SO(3) симметрией. Параметр порядка – симметричный бесследный тензор, интегралами движения являются компоненты спина. Случай 3: полное спонтанное нарушение SU(3) симметрии состояния равновесия, гамильтониан обладает SU(3) симметрией, параметр порядка – эрмитова матрица. Для каждого случая построены модели обменной магнитной энергии в терминах инвариантов Казимира. Получены значения магнитных величин в состоянии равновесия и выписаны условия их устойчивости. Для указанных физических состояний установлены соответствующие подалгебры скобок Пуассона магнитных величин и получены нелинейные динамические уравнения. Проведена линеаризация этих уравнений около состояний равновесия и вычислены спектры коллективных магнитных возбуждений.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), Введение в квантовую статистическую механику // Физматлит, М.: 1984. 384 с.

2. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский. Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов // М.: Физматлит 2006. 368 с.

3. Kovalevsky M.Y., Tran Quang Vuong Nonlinear dynamics and collective excitations of spin-1 magnets // Phys. Lett. A. – 2010. - V. 374. - P. 3676-3680.

MSC 35G10

РАЗРЕШАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Д.М. Гордиевских

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: dmitriy_g90@mail.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — линейный и непрерывный оператор, $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — линейный и замкнутый оператор с плотной в $\mathfrak{U}$ областью определения D_M. Рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t)\,, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется такая вектор-функция $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_M)$ для которой существует производная Капуто [1] $D_t^\alpha Lu$ и для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ выполняется равенство (1).

Семейство операторов $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *дробной полугруппой операторов* уравнения (1), если при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U(t)u_0$ есть решение уравнения (1).

Оператор M называется (L, σ)-ограниченным [2], если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))\,.$$

Обозначим функцию Миттаг-Лёфлера

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Теорема 1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}$. Тогда семейство операторов*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu L - M)^{-1} L E_\alpha(\mu t^\alpha) d\mu, \ t \in \overline{\mathbb{R}}_+\,. \tag{2}$$

образует дробную полугруппу уравнения (1).

□ Пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$. Тогда

$$MU(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma MR_\mu^L(M) u_0 E_\alpha(\mu t^\alpha) d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu L R^L_\mu(M) u_0 E_\alpha(\mu t^\alpha) d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu L u_0 E_\alpha(\mu t^\alpha) d\mu \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{F}).$$

Далее,

$$D^\alpha_t L U(t) u_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L R^L_\mu(M) u_0 J^{m-\alpha}_t D^m_t \sum_{n=0}^\infty \frac{\mu^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L R^L_\mu(M) u_0 J^{m-\alpha}_t \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu^n t^{\alpha n - m}}{\Gamma(\alpha n - m + 1)} d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L R^L_\mu(M) u_0 \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu^n s^{\alpha n - m}}{\Gamma(\alpha n - m + 1)} ds d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L R^L_\mu(M) u_0 \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu^n t^{\alpha(n-1)} B(m-\alpha, \alpha n - m + 1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha n - m + 1)} d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L R^L_\mu(M) u_0 \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu^n t^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(\alpha(n-1)+1)} d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu L R^L_\mu(M) u_0 E(\mu t^\alpha) d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L u_0 E(\mu t^\alpha) d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma M R^L_\mu(M) u_0 E(\mu t^\alpha) d\mu = 0 + M U(t) u_0$$

в силу теоремы Коши и замкнутости оператора M. ■

Литература

1. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / PhD thesis / Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Utrecht; Boston: VSP, 2003.

MSC 35K15

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ И РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И.О. Григорьев

МГУ им. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, 119234, Россия, e-mail: grigoriev_igor@mail.ru

В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, рассматривается равномерно-параболический оператор

$$\mathcal{L}u := \frac{\partial u}{\partial t} - a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u.$$

Коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ определены и ограничены в $\bar{Q}$ и удовлетворяют условиям:

$$|\Delta_{x,t}a_{ij}(x,t)|, |\Delta_{x,t}b_i(x,t)|, |\Delta_{x,t}c(x,t)| \leqslant A\omega_0\left(|\Delta x| + |\Delta t|^{\frac{1}{2}}\right), \ \ \forall (x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \overline{D_T}\,,$$

где $\omega_0 : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ – модуль непрерывности, причем

$$\tilde{\omega_0}(x) := \int\limits_0^x \frac{\omega_0(t)}{t} dt < +\infty\,, \quad x > 0 \quad (\text{условие Дини})$$

и

$$\tilde{\tilde{\omega_0}}(x) := \int\limits_0^x \frac{\tilde{\omega_0}(t)}{t} dt < +\infty\,, \quad x > 0 \quad (\text{«дважды» условие Дини}).$$

Предполагается также, что $\partial\Omega \in C^{1,\omega_1}$, где ω_1 удовлетворяет условию Дини.

Исследуются свойства параболического потенциала простого слоя с плотностью φ, непрерывной и ограниченной на $\partial\Omega \times (0, T]$. С помощью этого потенциала вторая краевая задача: найти $u \in {}^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$ такую, что

$$\mathcal{L}u = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \overline{\Omega},$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \in \partial\Omega \\ x \in \Omega}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} n_i(x) = g(x_0, t), \text{ для любых } (x_0, t) \in \partial\Omega \times (0, T],$$

(где $x \to x_0$ так, что $\omega_1\left(|x_0 - \bar{x}|\right)\ln|x - \bar{x}| \to 0$, $\overline{x}$ — ближайшая к x точка на $\partial\Omega$, $\vec{n}$ - вектор внешней нормали), для любой функции g, непрерывной и ограниченой на

$\partial\Omega \times (0, T]$, сводится к решению интегрального уравнения второго рода, однозначная разрешимость которого устанавливается методом из [1].

Устанавливается характер гладкости полученного решения (в виде потенциала простого слоя) краевой задачи.

Заметим, что в частном случае $\omega_0(x) = \omega_1(x) = x^\alpha, \alpha \in (0, 1], g \in C\left(\partial\Omega \times [0, T]\right)$ разрешимость второй краевой задачи хорошо известна (см., например, [2]).

Литература

1. Baderko E. Generalized solution of the Cauchy problem for non-divergence parabolic equations // Annales Univ. Sci. Budapest. – 2010. – №53. – P.7-15.

2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / М.: Наука, 1967.

MSC 11S40

О ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Гриценко С.А., Нгуен Тхи Ча

Белгородский государственный университет,

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия,

e-mail:s.gritsenko@gmail.com, nguyentra.bsu@gmail.com

В докладе представлены формулировки ряда теорем, в которых рассматриваются вопросы разрешимости некоторых диофантовых неравенств с простыми числами.

Доказательства всех теорем основано на плотностной технике и следующей плотностной теореме:

Теорема. *Пусть $N(\sigma, T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \mathrm{Re}s < 1$, $0 < \mathrm{Im}s \leq T$.*

Справедливо следующая оценка

$$N(\sigma, T) \leq C_1 T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^{C_2} T\,,$$

где $\lambda \geq 1$ и C_1, C_2 — положительные константы.

Наилучшим современным значением λ является $\lambda = 6/5$ (Хаксли,1972).

Плотностной гипотезой называется плотностная теорема, отвечающая $\lambda = 1$. В настоящее время плотностная гипотеза не доказана.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [2] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники.

Теорема 1. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p - N| \leq H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p.

Для числа решений $J(N, H)$ неравенства (1) справедлива оценка $J(N, H) \gg \dfrac{H}{\ln N}$.

В 2006 году в работе [6] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H \tag{2}$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Для числа решений $I(N,H)$ неравенства (2) справедлива оценка $I(N,H) \gg \dfrac{H}{\ln^2 N}$.

Сформулируем основные результаты настоящего сообщения.

Теорема 3. *Если $H > \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема 4. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2}\exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3.

Теорема 5. *Пусть λ — константа из плотностной теоремы. Если $H > N^{(1-\lambda^{-1})(1-(2\lambda)^{-1})}\exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство*

$$|p_1 + p_2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Литература

1. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. – 1972. – V.15. – P.164-170.

2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция / М.: Invent. Физматлит, 1994.

3. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Invent. Чебышевский сборник. – Т.7,Вып.4. – С.26-30.

4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Invent. Наука, 1983.

MSC 11L03

ОЦЕНКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММУ ПО ПРОСТЫМ ЧИСЛАМ, ЛЕЖАЩИМ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

С.А. Гриценко, Н.А. Зинченко

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Разработанный И.М. Виноградовым метод тригонометрических сумм ([1], [2]) позволяет успешно решать многие задачи теории чисел, в частности, задачи, связанные с распределением простых чисел. С помощью метода Виноградова нами получена оценка тригонометрической суммы по простым числам, лежащим арифметической прогрессии с «предельно большой» разностью.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $c \in (1,2]$ — константа. Пусть $A > 1$ — произвольная константа, $f(n) = 0.5mn^{1/c}$, где $1 \le m \le (\ln N)^{2A}$. Пусть $0 < \varepsilon \le 0.001$ — сколь угодно малое число, q — натуральное число, $q \le N^{1/3-\varepsilon}$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv r (\mod q)}} \Lambda(n) e^{2\pi i f(n)} = O(Nq^{-1}N^{-\varkappa}),$$

где $\varkappa = \varkappa(\varepsilon) > 0$.

С помощью полученной оценки удалось уточнить в частном случае теорему Д. Толева [4], которая является аналогом теоремы Бомбьери-Виноградова.

Теорема 2. *Пусть $c \in (1,2]$ — константа. Пусть $\pi_c(x,q,l)$ — число таких простых чисел p, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю q, что $\{0.5p^{1/c}\} \le 0.5$. Тогда для любого $A > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\sum_{q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\mathrm{Li}(x)}{2\varphi(q)} \right| \le c\, x(\ln x)^{-A},$$

где $c = c(A) > 0$.

Литература

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М: Наука, 1980.

2. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / М: Наука, 1976.

3. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М: Наука, 1975.

4. Tolev D. On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set // Acta Arithmetic. – 1997. – 81, 1. – P.57-68.

MSC 76T10

УСРЕДНЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ [2)]

Св.А. Гриценко, Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru,erygina@bsu.edu.ru

Исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый грунт. Доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи. Выполняется усреднение системы уравнений. Пусть – $Q \subset \mathbb{R}^3$ – вся рассматриваемая область, которая включает в себя верхнюю часть, Ω^0 – водоем, нижнюю часть Ω – пористый скелет и их общую границу S_0: $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$.

Движение жидкости в Ω^0 при $t > 0$ описывается нестационарной системой уравнений Стокса

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e} = 0, \quad \mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I}, \tag{2}$$

а совместное движение упругого скелета и жидкости в Ω при $t > 0$ описывается уравнением неразрывности (1), уравнением сохранения моментов

$$\operatorname{div} \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \boldsymbol{e} = 0, \tag{3}$$

и уравнением состояния

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1 - \chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}, \tag{4}$$

где $\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s(1 - \chi^\varepsilon)$.

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t), \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}} \mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0). \tag{6}$$

На верхней грани области Ω_0 при $t > 0$ задается условие Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}, \tag{7}$$

а на остальной части внешней границы S при $t > 0$ — условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{8}$$

[2]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0357.

Задача замыкается начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\bigcup\Omega_f^\varepsilon. \tag{9}$$

В (1)-(9) характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ области Ω_f^ε определяется выражением

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})=(1-\zeta)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big),$$

где $\zeta=\zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0 в Q, $\chi(\boldsymbol{y})$ — характеристическая функция Y_f (жидкой части элементарной ячейки).

Теорема *Пусть функции $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(9). Тогда при $\varepsilon\to 0$ последовательность $\{p^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T);L_2(Q)\big)$ к функции p, а последовательность $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T);W_2^1(Q)\big)$ к функции $\boldsymbol{w}$. Указанные предельные функции являются решением усредненной системы:*

$$\operatorname{div}\,\boldsymbol{w}=0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\,\Big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\Big)+\varrho_f\,\boldsymbol{e}=0 \tag{11}$$

$$\operatorname{div}\,\widehat{\mathbb{P}}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}=0, \tag{12}$$

$$\widehat{\mathbb{P}}=-p\,\mathbb{I}+\mathfrak{N}_1:\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\mathfrak{N}_2:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\int_0^t\mathfrak{N}_3(t-\tau):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau \tag{13}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}}\Big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)-p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{14}$$

$$\Big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)-p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}, \tag{15}$$

$\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3(t)$ — *вычисляемые по определенным формулам тензоры 4 ранга.*

Литература

1. Meirmanov A.M. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163, №.2. – P111-172.

MSC 35G10

О РАЗРЕШИМОСТИ НАГРУЖЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

П.Н. Давыдов

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: davydov@csu.ru

Пусть J — некоторый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку t_0, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n \leq 4$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_0} \in \Omega$, . В цилиндре $\Omega \times J$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J, \tag{1}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

для системы уравнений

$$(1-\chi\nabla^2)v_t = \left(\nu + \nu_1 \int\limits_\Omega \sum_{j,m=1}^n \left|v^j_{x_m}(x)\right|^2 dx\right) \nabla^2 v + (v\cdot\nabla)v - r+$$

$$+g\left(t, v(\xi_1), \ldots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right) v + \sum_{i=1}^n g^i\left(t, v(\xi_1), \ldots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right) v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left(t, v(\xi_1), \ldots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right) v_{x_i x_j}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \tag{4}$$

которая при $\nu_1 = 0$, $g = g^i = g^{jk} = 0$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, описывает динамику жидкости Кельвина–Фойгта и называется системой уравнений Осколкова [1, 2]. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Заданы функции g, g^i, g^{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$.

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ — соответствующий ортопроектор. В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A = \Sigma\nabla^2$. Продолжим его до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$ (см. [3]).

Методами теории вырожденных полугрупп операторов [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu, \nu_1 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_0} \in \Omega$, $g \in C^1(J \times \mathbb{R}^{nk_0}; \mathbb{R})$, $g^i \in C^1(J \times \mathbb{R}^{nk_0}; \mathbb{R})$, $g^{ij} \in C^1(J \times \mathbb{R}^{nk_0}; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (1)-(4).*

Литература

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126-164.

2. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3-144.

3. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.

4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht–Boston: VSP, 2003.

MSC 11S40

О НУЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С L-ФУНКЦИЯМИ ГЕККЕ МНИМЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ, КОТОРЫЕ ЛЕЖАТ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: demidovnext@yandex.ru

Получена новая нижняя оценка числа нулей на коротких промежутках для линейных комбинаций L–функциям Гекке мнимых квадратичных полей.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ на промежутке $(0,T\,]$.

В 1921 году Харди и Литтлвуд [1] доказали, что

$$N_0(T) \geq c_1\,T, \quad c_1 > 0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

В 1942 году А. Сельберг [2] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq c_2\,T\log T, \quad c_2 > 0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

Для арифметических рядов Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению риманова типа, но не имеющих эйлерова произведения, правильных по порядку нижних оценок для числа их нулей на отрезках критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ пока не получено.

В 1980 году С.М. Воронин [3] доказал, что

$$N_0(T,f) > c_3 T \exp\left\{\frac{\sqrt{\log\log\log\log T}}{20}\right\},$$

где $N_0(T,f)$ — число нулей ρ функции Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ таких, что $\Re\rho = \frac{1}{2}$, $0 < \Im\rho \leq T$, $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1989 году А.А. Карацуба [4] с помощью нового метода оценок снизу числа нулей некоторых рядов Дирихле на отрезках критической прямой показал, что

$$N_0(T,f) \geq T\sqrt{\log T}\,(\log T)^{-\varepsilon},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $T > T_0(\varepsilon) > 1$.

В 1991 году А.А. Карацуба [5] поставил и решил своим методом 1989 года задачу о нижней оценке числа нулей линейных комбинаций L–функций Дирихле на отрезке критической прямой.

В 1996 году С.А. Гриценко рассмотрел вопрос о числе $N_0(T,f)$ нулей на отрезке $[0,T]$ функции

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j Z(t,F_j), \tag{1}$$

где a_j — произвольные вещественные числа, а $Z(t, F_j)$ — аналоги функции Харди, соответствующие функциям $F_j(s)$ из класса Сельберга степени 2 ($j = 1, \ldots, N$).

В [6] доказано, что при условии справедливости некоторых гипотез, являющихся гипотезами Сельберга и их слегка усиленными вариантами, справедлива оценка

$$N_0(T, f) \gg T \exp\{\sqrt{\log\log\log T}\}. \tag{2}$$

В 1997 году С.А. Гриценко [7] доказал неравенство (2) безусловно в случае, когда $F_1(s), \ldots, F_N(s)$ — L–функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля.

В 2010 году И.С. Резвякова [8] применила к последней задаче метод А.А. Карацубы [3] и получила оценку

$$N_0(T, f) \gg T(\log T)^{2/h(-D)} \exp\{-c\sqrt{\log\log T}\},$$

где $h(-D)$ — порядок группы классов идеалов, $c > 0$.

Мы рассмотрели задачу о нулях функции $f(t)$, определяемой равенством (1), лежащих на коротких промежутках. Основной результат изложен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $T^{15/16+5\varepsilon} \leq H \leq T$. Пусть $F_1(s), \ldots, F_N(s)$ — L–функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля вида $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$, где p_0 — простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, а функция $f(t)$ определена равенством (1), в котором $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — произвольные вещественные числа. Пусть $N_0(T, f)$ — число нулей функции $f(t)$ на отрезке $[0, T]$.*

Тогда существует $c > 0$ такое, что

$$N_0(T + H, f) - N_0(T, f) \gg H(\log T)^{2/h(p_0)} \exp\{-c\sqrt{\log\log T}\},$$

где $h(p_0)$ — число классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeroes of Riemann's zeta–function on the critical line // Math. Z. – 1921. – 10. – P.283-317.

2. Selberg A. On the zeroes of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. – 1942. – V.10.

3. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – 44, №1. – С.63-91.

4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – 54, №2. – С.303-315.

5. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – 55, №.3. – С.483-514.

6. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Изв. РАН.Сер. матем. – 1996. – 60, №4. – С.3-42.

7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с L-функций Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН.Сер. матем. – 1997. – 61, №1. – С.45-69.

8. Резвякова И.С. О нулях линейных комбинаций L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН.Сер. матем. – 2010. – 74, №6. – С.183-222.

MSC 74B20

КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЛОЙ ИЗ МЕНЕЕ ПРОЧНОГО МАТЕРИАЛА

В.Л. Дильман, А.И. Носачева

Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, e-mail: dilman49@mail.ru

При математическом моделировании напряженного состояния пластически деформируемых слоев из менее прочного материала возникает недоопределенная краевая задача для системы уравнений пластического равновесия, решение которой можно разбить на два шага.

1. Находится решение в окрестности свободной границы в зоне, где оно однозначно определяется граничными условиями, для чего вычисляются, точно или приближенно, инварианты Римана, с помощью которых решается задача сопряжения для напряжений на контактной границе. Найденные в этой области напряжения используются при вычислении критической нагрузки, а также для дооопределения задачи из следующего пункта.

2. Находится решение в некоторой окрестности поперечной оси симметрии слоя, с использованием краевых условий на контактной поверхности, полученных на первом шаге, и некоторых априорных ограничений на класс решений.

К таким ограничениям относятся предположения о характере деформирования координатных сеток, наносимых на образец (гипотезы сечений); гипотезы о виде характеристик системы уравнений пластического равновесия (имеющей в случае плоской деформации гиперболический тип), предположения о виде функций, определяющих напряжения. Некоторые из таких допущений имеют понятную физическую основу и удовлетворительное экспериментальное подтверждение; другие вводились исключительно для упрощения задачи и получения обозримых аналитических зависимостей.

Рассмотрим растяжение листового образца (полосы) с поперечным менее прочным слоем при плоской деформации. Напряженно-деформированное состояние пластической среды при плоской деформации в критический момент нагружения определяется системой уравнений

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0,$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4,$$

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\partial \upsilon_x/\partial x - \partial \upsilon_y/\partial y}{\partial \upsilon_x/\partial y + \partial \upsilon_y/\partial x}.$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – безразмерные компоненты тензора напряжений, υ_x и υ_y – (условные) скорости перемещения точек среды в направлениях OX и OY Уравнения определены в области плоскости, симметричной относительно обеих осей координат, и интерпретируемой как сечение слоя из МП материала. Имеются очевидные из симметрии краевые условия

$$\upsilon_x(0, y) = 0, \qquad \upsilon_y(x, 0) = 0.$$

Выполняя второй шаг предложенной выше схемы, предположим, что

$$\upsilon_x(x, y) = a(x) \cos \lambda y.$$

Параметр λ характеризует степень прогиба линий $x =$const в критический момент нагружения и зависит от относительной толщины слоя и коэффициента механической неоднородности. Это предположение позволяет приближенно свести задачу к решению граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: в менее точном варианте к уравнению

$$S'' + 2SS' = 0,$$

а в более точном – к уравнению

$$S'' + 2SS' + \frac{3}{4}S^3 = 0,$$

где

$$S(x) = -\frac{a''(x) + \lambda^2 a(x)}{a'(x)}.$$

MSC 11E25

О СУММИРОВАНИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ХАРАКТЕРА ГРУППЫ КЛАССОВ ИДЕАЛОВ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ НА ДВОЙНЫЕ СУММЫ ГАУССА

Р.А. Дохов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: urusbi@rambler.ru

Известно, что каждому классу A идеалов мнимого квадратичного поля $F = Q(\sqrt{d})$ взаимно однозначно соответствует положительная примитивная бинарная квадратичная форма

$$Q_A(m_1, m_2) = am_1^2 + bm_1m_2 + cm_2^2$$

с дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, равным дискриминанту δ_F поля F (см. [1])

Пусть Ψ – комплексный характер группы классов идеалов Cl_F

Определим двойную сумму Гаусса по модулю q

$$G_A(q,l) = \sum_{m_1=1}^{q} \sum_{m_2=1}^{q} e^{2\pi i \frac{lQ_A(m_1,m_2)}{q}} \ ,$$

где q, l – целые числа, НОД$(q, l) = 1$; $Q_A(m_1, m_2)$ – примитивная бинарная квадратичная форма, соответствующая классу идеалов A мнимого квадратичного поля F.

Тогда, применяя композицию бинарных квадратичных форм (см. [2]), введенную Гауссом, получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть НОД$(l, q) = 1$, $q \geq 1$. Тогда для группы классов идеалов Cl_F мнимого квадратичного поля $F = Q(\sqrt{d})$ справедливо соотношение*

$$\sum_{A \in Cl_F} \Psi(A) G_A(q,l) = 0 \, ,$$

где Ψ - любой комплексный характер группы Cl_F

Замечание. Если НОД $(q, \delta_F) = 1$, то указанный результат сводится к известному свойству для суммы значений характера на всех элементах группы Cl_F, поскольку в этом случае двойная сумма Гаусса $G_A(q, l)$ не зависит от класса идеала A и нет необходимости в использовании композиции бинарных квадратичных форм.

Литература

1. Боревич З.И., Шифаревич И.Р. Теория чисел / М.:Наука, 1985.
2. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы / М.:Мир, 1982. – 440 с.

MSC 81Q20

НОВОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАСЛОВА В ОКРЕСТНОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С.Ю. Доброхотов

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва,
Московский физико-технический институт, e-mail: dobr@ipmnet.ru

Мы обсуждаем новое представление канонического оператора Маслова в окрестности каустик и фокальных точек, имеющее приложения в широком классе важных физических задач. В качестве приложения мы рассматриваем задачи о Бесселевых волновых пучках в оптики, асимптотики задачи рассеяния и функции Грина для 2-мерного оператора Дирака, описывающего квантовые состояния графена. Эта работа выполнена совместно с Г.Макракисом, В.Е.Назайкинским и Т.Я.Тудоровским.

MSC 60G60

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

***А.Я. Дульфан, **Ю.П. Вирченко**

Харьковский политехнический университет,
ул. Фрунзе, Харьков, Украина

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Сепарабельное случайное поле $\tilde{a}(\boldsymbol{x})$ на $\mathbb{R}^d$ называется *самоподобным* (*автомодельным*), если если при любом $\lambda > 0$ оно стохастически эквивалентно, случайному полю $\mu(\lambda)\tilde{a}(\lambda\boldsymbol{x})$. В этом случае маргинальные плотности распределения f_n случайного поля $\tilde{a}(\boldsymbol{x})$ обладают свойством

$$(\mu(\lambda))^n f_n(\mu(\lambda)a_1, \lambda\boldsymbol{x}_1\,; \mu(\lambda)a_2, \lambda\boldsymbol{x}_2\,; \ldots; \mu(\lambda)a_n, \lambda\boldsymbol{x}_n) = \\ = f_n(a_1, \boldsymbol{x}_1\,; a_2, \boldsymbol{x}_2\,; \ldots; a_n, \boldsymbol{x}_n)\,. \tag{1}$$

Очевидно, что функция $\mu(\lambda)$ в этом случае должна обладать групповым свойством

$$\mu(\lambda_1\lambda_2) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2)\,,$$

что приводит к ее явному виду $\mu(\lambda) = \lambda^c$, где показатель c является характеристикой, самоподобных случайных полей.

На явление самоподобия некоторых случайных процессов было обращено внимание в [1], а термин *автомодельное случайное поле* был предложен в [2]. Эти поля являются естественным обобщением на бесконечномерный случай довольно хорошо исследованных в теории вероятностей случайных величин с устойчивыми законами распределения. Их особое положение и важность их исследования и классификации связана с тем, что они возникают при описании критического поведения в статистической механике и их автомодельность проявляется в виде так называемой ренорм-группы. При этом, однако, важным является то, что помимо автомодельности такие поля должны обладать стохастической трансляционной инвариантностью. В этом случае они не могут быть сепарабельными полями и оказываются с необходимостью обобщенными [3].

Если не требовать наличия стохастической трансляционной инвариантности, то самоподобные поля образуют довольно обширный класс. В частности, в одномерном случае $d = 1$, когда требование самоподобия (1) проявляется в наиболее жестком виде, чем при размерностях $d > 1$, они могут быть поставлены во взаимнооднозначное соответствие со стационарными случайными процессами.

В одномерном случае положим $\ln\lambda = \tau$ и $\ln x = t$ при $x > 0$ так, что индуцированный случайный процесс $\tilde{a}\left(e^t\right)$ имеет маргинальные плотности распределения

$$g_n(a_1, t_1\,; \ldots; a_n, t_n) = f_n\left(a_1, e^{t_1}\,; \ldots; a_n, e^{t_n}\right)\,,$$

которые, согласно (1), обладают свойством

$$e^{c\tau n} g_n\left(e^{c\tau} a_1, t_1+\tau\,; \ldots\,; e^{c\tau} a_n, t_n+\tau\right) \;=\; g_n(a_1, t_1\,; \ldots\,; a_n, t_n)\,. \tag{2}$$

Отсюда следует, что процесс $\tilde{b}(t) = e^{-ct}\tilde{a}\left(e^t\right)$ обладает маргинальными плотностями $h_n(b_1, t_1\,; \ldots\,; b_n, t_n)$, которые следующим образом связаны с плотностями g_n:

$$\begin{gathered} h_n(b_1, t_1\,; \ldots\,; b_n, t_n) \;=\; \langle \delta(b(t_1)-b_1) \ldots \delta(b(t_n)-b_n)\rangle \;= \\ =\; \left\langle \delta\left(e^{-ct_1} a\left(e^{t_1}\right)-b_1\right) \ldots \delta\left(e^{-ct_n} a\left(e^{t_n}\right)-b_n\right)\right\rangle = \\ =\; \exp\left(c(t_1+\ldots+t_n)\right) g_n\left(b_1 e^{ct_1}, t_1\,; \ldots\,; b_n e^{ct_n}, t_n\right) \end{gathered}$$

и, следовательно, подчинены соотношению

$$\begin{gathered} h_n(b_1, t_1+\tau\,; \ldots\,; b_n, t_n+\tau) \;= \\ =\; e^{c\tau n} \exp\left(c(t_1+\ldots+t_n)\right) g_n\left(b_1 e^{c(t_1+\tau)}, t_1+\tau\,; \ldots\,; b_n e^{c(t_n+\tau)}, t_n+\tau\right) \;= \\ =\; \exp\left(c(t_1+\ldots+t_n)\right) g_n\left(b_1 e^{ct_1}, t_1\,; \ldots\,; b_n e^{ct_n}, t_n\right) \;=\; h_n(b_1, t_1\,; \ldots\,; b_n, t_n) \end{gathered}$$

с произвольным значением параметра τ. Следовательно, процесс $\tilde{b}(t)$ является стационарным.

Проведенные рассуждения, очевидным образом, справедливы и в обратном направлении. Взяв произвольный сепарабельный стационарный процесс $\tilde{b}(t)$, который определяется многоточечными плотностями h_n и построив по нему процесс $\tilde{a}(t)$, преобразуя его траектории по формуле $\tilde{a}(e^t) = e^{ct}\tilde{b}(t)$, получим, что этот процесс является самоподобным с показателем c. Очевидно, что согласно приведенному построению процесс $\tilde{b}(t)$ должен быть марковским в том случае, если процесс $\tilde{a}(t)$ – марковский и указанные формулы связи распространяются на их плотности условных вероятностей перехода. В частности, типичным представителем самоподобного марковского случайного процесса является *винеровский процесс*, у которого $c = 1/2$ и плотность условных вероятностей перехода

$$f(a, t; a', t') \;=\; \left(2\pi\sigma(t-t')\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(a-a')^2}{2\sigma(t-t')}\right)\,, \quad t > t', \sigma > 0\,.$$

Соответствующим ему согласно предложенной конструкции стационарный марковским процессом является процесс Орнштейна-Уленбека (с декрементом $1/2$), обладающий плотностью условных вероятностей перехода

$$h(b, t; b', t') \;=\; \left(2\pi\sigma\left(1-e^{(t'-t)}\right)\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(b-b'e^{(t'-t)/2})^2}{2\sigma\left(1-e^{(t'-t)}\right)}\right)\,.$$

Литература

1. Колмогоров А.Н., Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1940/ – 26, №2. – С.115-118.

2. Синай Я.Г. Автомодельные распределения вероятностей // Теория вероятностей и её применения. – 1976. – 21, №1. – С.63-80.

3. Добрушин Р.Л. Автомодельность и ренорм-группа обобщённых случайных полей // в сб. «Многокомпонентные случайные системы». – М.: Наука. – С.179-213.

MSC 35L15

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СТЕКЛОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.В. Дюжева

Самарский государственный университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара, 443011, Россия, e-mail: aduzheva@rambler.ru

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, где $l, T < \infty$, ищется решение уравнения

$$u_{tt} - a(x,t)u_{xx} + \nu u_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и граничными нелокальными условиями

$$\begin{aligned} a_1(t)u_x(0,t) + a_2(t)u_x(l,t) + a_3(t)u(0,t) + a_4(t)u(l,t) = 0, \\ b_1(t)u_x(0,t) + b_2(t)u_x(l,t) + b_3(t)u(0,t) + b_4(t)u(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В работе [1] рассмотрен случай $a_1(t)b_2(t) - a_2(t)b_1(t) \neq 0$. Пусть теперь $a_1(t)b_2(t) - a_2(t)b_1(t) = 0$, а $a_2(t)b_3(t) - a_3(t)b_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T]$. В этом случае также можно привести условия (3) к виду, удобному для исследования разрешимости поставленной задачи. Так же как в работе [2] показана эквивалентность условий (3) условиям

$$u(0,t) = \alpha_1(t)u(l,t), \quad u_x(l,t) = \alpha_2(t)u(l,t) + \beta_2(t)u_x(0,t), \tag{4}$$

где $\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \beta_2(t)$ выражаются через $a_i(t),\ b_i(t)$, $i = 1,2,3,4$.

Заметим, что теперь в правой части второго из условий (4) содержится след производной, что вносит дополнительные трудности при получении априорных оценок. Эти трудности преодолены и доказана теорема единственности решения поставленной задачи.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:* $a(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $c(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $\nu < 0$. *Тогда существует не более одного обобщенного решения задачи* (1), (2), (3).

Литература

1. Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальные задачи с переменными по времени условиями Стеклова для гиперболических уравнений // Вестник СамГУ. – 2010. – 78:4. – С.56-64.

2. Дюжева А.В. О единственности решения задачи с динамическими нелокальными условиями // Вторая Международная конференция молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик. Декабрь, 2012.

MSC 83C50

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ НА SOL-МНОГООБРАЗИИ И В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С РАЗРЫВНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

А.И. Есина

ИПМех РАН,

пр. Вернадского, 101, кор. 1, Москва, 119526, Россия,

МФТИ,

пер. Институтский, 9, Долгопрудный, Моск. обл., 141700, Россия, e-mail: Esina_anna@list.ru

Магнитное поле в проводящей жидкости (в частности, некоторые магнитные поля галактик и планет) описывается оператором индукции. В работе рассматривается оператор магнитной индукции на sol-многообразии и в трехмерном пространстве с разрывным полем скоростей. Оказывается, что уравнения, из которых вычисляется асимптотика спектра, можно записать в терминах интегралов от голоморфных форм по циклам на римановой поверхности постоянной энергии. Исследуется пространственная структура магнитного поля. Работа выполнена при поддержке гранта молодых ученых «Мой первый грант» 12-01-31235, а также гранта РФФИ 11-01-00937-а.

MSC 76T10

УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ

Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: erygina n@bsu.edu.ru

Исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема Ω^0 в твердый пористый грунт Ω. Пусть $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$, $Q = \Omega^0 \cup\ S \cup \Omega$. Вектор перемещений $w(x,t)$ и давление $p(x,t)$ при $t > 0$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в Q

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{1}$$

$$\tau_0 \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}\big), \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I} \tag{3}$$

в смысле теории распределений, дополненной следующими краевыми и начальными условиями:

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x} \in S^1 \subset \partial Q, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S^2 = S \backslash S^1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in Q. \tag{6}$$

Здесь $\zeta = \zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0, $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(x/\varepsilon)$ — характеристическая функция порового пространства Ω_f^ε и $\chi(\boldsymbol{y})$ — 1-периодическая функция, определяющая структуру порового пространства.

Теорема 1. *Пусть* $\mu_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha_\mu(\varepsilon)$, $\mu_1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha_\mu/\varepsilon^2$, $\lambda_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon)$ *и выполнены следующие предположения:*

$$p_0(x,0) = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad 0 < \lambda_0, \quad \tau_0 < \infty, \quad \mu_1 = \infty$$

и

$$\int_{Q_T} \Big(\Big|\frac{\partial p_0}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\nabla p_0\Big|^2 + \Big|\nabla\big(\frac{\partial p_0}{\partial t}\big)\Big|^2\Big) dxdt = F^2 < \infty. \tag{7}$$

Тогда, для всякого $\varepsilon > 0$ *существует единственное обобщенное решение* w^ε , p^ε *задачи (1)–(6) и предельные функции* $\boldsymbol{w} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{w}^\varepsilon$, $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}/\partial t$, $p = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} p^\varepsilon$ *удовлетворяют следующей начально-краевой задаче*

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \varrho_f \boldsymbol{e},\ \ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,\ \ x \in \Omega_0\,, \tag{8}$$

$$\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho},\, \boldsymbol{e},\;\; x \in \Omega\,, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)} = \lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}\,, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0,\;\; x \in \Omega\,, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{w} = 0,\;\; x \in S^2\,, \tag{12}$$

$$p(x,t) = p_0(t),\;\; x \in S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega_0}\,, \tag{13}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(x,t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0) = -p_0(t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0),\;\; x \in S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}\,, \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\,, \tag{15}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = - \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} p(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)\,, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\; \boldsymbol{x} \in Q\,. \tag{17}$$

В (8)-(13) $\boldsymbol{n}(x^0)$ – единичный вектор нормали к S^1 в точке $x^0 \in S^0$,

$$\hat{\varrho} = m\varrho_f + (1-m)\varrho_s, \quad m = \int_Y \chi(y)dy,$$

$\mathfrak{N}_0^s$ – строго симметричный положительно определенный тензор четвертого ранга, который определяется из решения вспомогательной задачи на элементарной ячейке, заданной функцией $\chi(\boldsymbol{y})$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, пусть $\tau_0 = 1/n$ и $p^{(n)}$, $\boldsymbol{w}^{(n)}$ — обобщенное решение задачи (8)—(13). Тогда предельные функции $\boldsymbol{w} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{w}^{(n)}$, $p = \lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}$ удовлетворяют следующей начально-краевой задаче*

$$p(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) - \varrho_f x_3 \equiv p_0(\boldsymbol{x},t),\;\; x \in \Omega_0, \tag{18}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho}\; \boldsymbol{e} = 0,\;\; x \in \Omega, \tag{19}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p_0(\boldsymbol{x}^0,t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0),\;\; x \in S^0, \tag{20}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(x,t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0) = -p_0(t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0),\;\; x \in S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0,\; \boldsymbol{x} \in S^2, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\; \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{23}$$

MSC 35K99

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Е.С. Ефимова

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677891, Россия, e-mail: OslamE@mail.ru

Краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени изучались во многих работах. Метод Галеркина является универсальным методом. В частности, в работе [2] установлены оценки погрешности для нестационарных уравнений.

В цилиндрической области $Q \subseteq R^n$ рассмотрена краевая задача для полулинейного уравнения параболического типа. Доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи при определенных условиях на коэффициенты уравнения. Для приближенных решений установлена оценка погрешности стационарного метода Галеркина в норме пространства $W_2^{1,0}$ для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени через собственные числа самосопряженной спектральной задачи для эллиптического уравнения второго порядка.

Литература

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / Новосибирск: Наука, 1985.

2. Виноградова П.В., Зарубин А.Г. Оценка погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений // Журнал выч. мат. и мат. физики. – 2009. – 49, №9. – С.1643-1651.

3. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений // Математика. – 1963. – 7, №6. – С.99-121.

MSC 34B24

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ВСЕЙ ОСИ [3)]

Н.А. Жура, *А.П. Солдатов

*Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Обсуждаются вопросы разрешимости обратной задаче Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = k^2 y\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Классические результаты в этом направлении принадлежат Л.Д. Фаддееву, В.А. Марченко, Б.М. Левитану и И.М. Гельфанду [1-3]. В частности, установлено (основная теорема), что при определенных несколько неявных требованиях на коэффициенты отражения эта задача однозначно разрешима. В докладе обсуждаются явные достаточные условия, обеспечивающие справедливость основной теоремы.

Хорошо известен[4] также теоретико функциональный подход к исследовании обратной задачи, тесно связанный с задачей Маркушевича

$$\phi^+ - \phi^- = \rho\overline{\phi^-} + h$$

на действительной оси, где аналитическая вне $\mathbb{R}$ функция ϕ определяется по функциям Йоста. В докладе показано, что при выполнении отмеченных выше достаточных условий эта задача однозначно разрешима.

Литература

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / Киев: Наукова думка, 1977.

2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля / Москва: Наука, 1984.

3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач / Москва: Физматлит, 2007.

4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировка и одномерной самомодуляции волн в нелинейной среде // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С.118-134.

[3]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П19, № П693, № 02.740.11.0613)

MSC 76S05

УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА-ЖЕЛТОВА-КОЧИНОЙ С БЕЛЫМ ШУМОМ НА ГРАФЕ

С.А. Загребина, Е.А. Солдатова

Южно-Уральский государственный университет,

пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Российская Федерация,
e-mail: zagrebina_sophiya@mail.ru, soldatova.katerina@gmail.com

Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной [1]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f \tag{1}$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде. Заметим, что это уравнение имеет универсальный характер – оно также моделирует процесс влагопереноса в почве [2] и процесс теплопроводности с двумя температурами [3]. Здесь параметры $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Рассмотрим одномерные уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$\lambda u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha u_{jxx} + f, \tag{2}$$

возмущенные белым шумом и определенные на конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество дуг. Мы предполагаем,что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ нас будут интересовать задачи с краевыми

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j,\, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_k \in E^{\omega}(V_i); \end{gathered} \tag{3}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0; \tag{4}$$

Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (3) требует, чтобы все решения были непрерывными на вершинах графа; а (4) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю – аналог условия Кирхгоффа. Необходимо отметить, что задача (2) – (4) впервые рассматривается, как *стохастическое уравнение соболевского типа*

$$Ldu = (Mu + f)dt + Ndw. \tag{5}$$

Оговоримся сразу, что в нашем исследовании мы будем опираться на концепцию измерительного устройства Шестакова-Свиридюка [4], [5], в которой под «белым шумом» понимается производная Нельсона-Гликлиха винеровского процесса.

Литература

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, №5. – С.58-73.

2. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – №3. – P.60-72.

3. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – 19. – P.614-627.

4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the measurement of the "white noise-// Bulletin of South Ural State University. Ser. "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software". – 2012. – №27 (286), Issue 13. – P.99-108.

5. Загребина С.А., Солдатова Е.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – 6, №1. – С.20-34.

MSC 60H15

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.А. Замышляева

Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, e-mail: alzama@mail.ru

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Их систематическое изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева, хотя многие представители этого класса были получены и изучены ранее, в частности, знаменитая система уравнений Навье-Стокса (см. прекрасный исторический обзор в [1]). В настоящее время исследования уравнений соболевского типа растут лавинообразно, упомянем здесь лишь несколько монографий, вышедших в последнее время и примыкающих к нашей проблематике [2-5]. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Av^{(n)} = Bv + g \tag{1}$$

в предположении $\ker\mathrm{A} \neq \{0\}$ изучались в [6]. Здесь операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{G})$ (т.е. линейны и непрерывны), $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, свободный член $g = g(t)$ моделирует детерминированную внешнюю нагрузку. Прообразом (1) служит уравнение

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha\Delta v + g, \tag{2}$$

моделирующее возмущение свободной поверхности несжимаемой жидкости при условии потенциальности движения и сохранении массы в слое, продольные колебания упругого стержня, а также возникающее при изучении звуковых волн в смектиках.

Принципиальный недостаток уравнения (2) с детерминированным свободным членом заключается в том, что в натурных экспериментах правая часть подвержена случайным возмущениям, например, в виде белого шума. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с различными аддитивными случайными процессами (т.е. рассматривается не только белый шум, но и более общие марковские и диффузионные процессы) сейчас активно изучаются. Первенствует здесь традиционный подход Ито-Стратоновича-Скорохода, хотя в последнее время возникли многообещающие направления [7]. Появились первые результаты по стохастическим уравнениям соболевского типа [8], базирующиеся на распространении подхода Ито-Стратоновича-Скорохода на уравнения в частных производных. Мы рассмотрим стохастическое уравнение соболевского типа высокого порядка

$$Ad\xi^{(n-1)} = (B\xi + g)dt + Ndw. \tag{3}$$

Здесь в правой части символом dw обозначен *белый шум*, представляющий собой обобщенный дифференциал от винеровского процесса $w(t)$. Требуется определить случайный процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий (в некотором смысле) уравнению (3) при условиях

$$\xi^{(m)}(0) = \xi_m,\ m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

где ξ_m – заданные случайные величины. Поскольку производная $d\xi^{(n-1)}$ и белый шум корректно определены только в терминах обобщенных функций, прямое исследование подобного уравнения весьма сложно. Мы привлекаем к исследованию следующий прием: сначала мы переходим к стохастическому дифференциальному уравнению

$$A(\xi^{(n-1)}(t)-\xi_{n-1})=\int_0^t (B\xi(s)+g(s))ds+\int_0^t Ndw,$$

а затем при нахождении решения данного уравнения исследуем стохастический интеграл от детерминированной функции по белому шуму.

Первая часть доклада посвящена детерминированным линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка с (A,p)-ограниченным оператором B в правой части. Затем рассматриваются стохастические линейные уравнения соболевского типа, и абстрактные результаты иллюстрируются начально-краевой задачей для стохастического уравнения Буссинеска-Лява с аддитивным белым шумом.

Литература

1. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative / N.Y., Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

2. Showalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / London, San Francisco, Melbourne: Pitman, 1977.

3. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces / N.Y., Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.

4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.

5. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / Series in nonlinear analisys and applications, 15, De Gruyter, 2011.

6. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Spaces of a Class of Linear Higher-order Sobolev Type Equations // Differential Equations. – 2006. – 42, №2. – P.269-278.

7. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions In Spaces Of Abstract Stochastic Distributions // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – 116, №5. – P.3620-3656.

8. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On a New Conception of White Noise // Obozrenie Prikladnoy i Promyshlennoy Matematiki, Moscow. – 2012. – 19, Issue 2. – P287-288. (in Russian)

MSC 35H99

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

А.Н. Зарубин

Орловский государственный университет,
ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026, Россия, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru

1. Рассмотрим уравнение

$$U_{xx}(x,y)+\operatorname{sgn} y(2h-y)U_{yy}(x,y)=H(y-h)U(x,y-h)+H(h-y)U(x,y+h)\,, \qquad (1)$$

$0<\ \tau,h\equiv\text{const};\quad H(\xi)$ – функция Хевисайда; в области $D=D^{+}\bigcup D^{-}\bigcup J_0\bigcup J_1$, где $D^{+}=\Big\{(x,y)\,:\,0<x<\tau,\quad 0<y<2h\Big\}=D_0^{+}\bigcup D_1^{+}\bigcup I$ и $D^{-}=D_0^{-}\bigcup D_1^{-}$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^{+}=\Big\{(x,y):0<x<\tau,\quad kh<y<(k+1)h\Big\}\,,$$

$$D_k^{-}=\Big\{(x,y):(-1)^k(2kh-y)<x<(-1)^k(y-2kh)+\tau\,,\ \ -2kh-\tau/2<(-1)^ky<-2kh\Big\}\,,$$

$$J_k=\Big\{(x,y):0<x<\tau,\quad y=2kh\Big\},\quad k=0,1\,;\quad I=\Big\{(x,y):0<x<\tau,\quad y=h\Big\}.$$

Пусть $D_k=D_k^{+}\bigcup D_k^{-}\bigcup J_k$ при $k=0,1$.

Задача T. *Найти в области D функцию*

$$U(x,y)\in C(\bar D)\cap C^1(D\setminus I)\cap C^2(D\setminus(I\cup J_0\cup J_1))\,,$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям $U(0,y)=U(\tau,y)=0$, $0\leqslant y\leqslant 2h$; $U(x,2kh-(-1)^kx)=\psi_k(x)$, где $0\leqslant x\leqslant \tau/2\quad(k=0,1)$; условиям сопряжения $U(x,2kh+)=U(x,2kh-)=\omega_k(x)$, $0\leqslant x\leqslant\tau$; $U_y(x,2kh+)=U_y(x,2kh-)=\nu_k(x)$, $0<x<\tau$, $k=0,1$; условиям согласования $\psi_k(0)=0$, где $\psi_k(x)$, $k=0,1$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если $\psi_k(x)\in C[0,\tau/2]\cap C^2(0,\tau/2)$, абсолютно интегрируемы на $[0,\tau/2]$; $\psi_k'(x)$ при $x\to 0$ допускает интегрируемую особенность, то существует единственное решение $U(x,y)$ задачи T.*

2. Единственность решения задачи T доказана с помощью интегралов энергии при ограничении на величину откланения $h\le 1$.

3. Решения задачи T в областях D_k найдены из общих решений

$$U_k(x,y)=\int\limits_0^{z_k}\phi_1(t)J_0(i\sqrt{\overline{z}_k(z_k-t)})dt+\int\limits_0^{\overline{z}_k}\phi_2(t)J_0(i\sqrt{z_k(\overline{z}_k-t)})dt,\ (x,y)\in D_k\ (k=0,1),$$

где $\phi_1(t),\phi_2(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции; $J_0(\xi)$ – функция Бесселя первого рода порядка ноль; $i=\sqrt{-1}$;

$$z_k=x+(y-kh)\sqrt{-\mathrm{sgn}\ y(2h-y)},\ \overline{z}_k=x-(y-kh)\sqrt{-\mathrm{sgn}\ y(2h-y)}\quad (k=0,1)\,.$$

4. Вопрос существования решения задачи T в областях D_k сведен к разрешимости интегро-разностного уравнения

$$(E-R_x^{ih})(E-iR_x^{ih})\overline{\nu}(x)-(i+1)R_x^{ih}\int\limits_0^x\overline{\nu}(t)K(x,t)dt=g(x),\ 0<x<\tau,$$

где E – тождественный оператор; R_x^θ – оператор сдвига: $R_x^\theta q(x)=q(x-\theta)$;

$$\overline{\nu}(x)=\nu(x)+\int\limits_0^x\nu(t)\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{t(x-t)})dt,$$

$I_0(\xi)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, $g(x),\ K(x,t)$ – известные функции, причем $g(x)$ зависит от $\psi_k(x)$ $(k=0,1)$.

MSC 34H05

КАСКАДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.П. Зубова

Воронежский государственный университет,
ул. 60-й Армии, 25, Воронеж, 394077, Россия, e-mail: spzubova@mail.ru

Каскадный метод решения задач управления, разработанный для конечномерных динамических систем, распространяется на случай некоторой системы в банаховом пространстве.

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t) + f(t), \tag{1}$$

с условиями

$$x(t_i) = x_i,\ i = 0, 1, ...k, \quad t_0 < t_1 < ... < t_k, \tag{2}$$

где $x(t) \in E_1$, $u(t) \in E_2$; E_1, E_2 — банаховы пространства; $B(t) \in L(E_1, E_1)$; $f(t) \in E_1$; $t \in [t_0, t_k]$; $D(t)$ — линейный замкнутый оператор: $E_2 \to E_1$, $\overline{\mathrm{dom} D(t)} = E_2$.

Система является полностью управляемой, если существуют $u(t)$ и $x(t)$, удовлетворяющие (1), (2) с $k = 1$.

Предполагается: $D(t)$ при каждом t псевдонётеров оператор, то есть

$$E_2 = \mathrm{Coim}\ \ D(t) \dot{+}\ \mathrm{Ker}\, D(t), \quad E_1 = \mathrm{Im}\, D(t) \dot{+} \mathrm{Coker}\, D(t) \tag{3}$$

и оператор $\tilde{D}(t) = D(t)|_{\mathrm{Coim} D(t)}$ обратим. Здесь Coker $D(t)$ — дефектное подпространство, Coim $D(t)$ — прямое дополнение к Ker $D(t)$ в E_2. В случае dim Ker $D(t) < \infty$, dim Coker $D(t) < \infty$ оператор нётеров. Псевдонётеров оператор отличается от нётерова отсутствием ограничений на размерности ядра и коядра оператора. Примером псевдонётерова оператора является $D(t) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^t (\cdot) dt \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \bigcap C^0([t_0, t_k]) \to \mathbb{R}^3 \bigcap C^0([t_0, t_k])$, поскольку Ker $D(t) = \{0\}$, проектор на подпространство Coker $D(t)$ — это оператор $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \int\limits_0^t (\cdot) dt \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\tilde{D}^{-1}(t) = (0 \quad 0 \quad 1)$.

В результате расщепления уравнения (1) на уравнения в подпространствах Im $D(t)$ и Coker $D(t)$ совершается эквивалентный переход от уравнения (1) к системе, состоящей из формулы для построения $u(t)$, и уравнения в подпространстве Coim $D(t)$, аналогичного уравнению (1). При этом условия (2) переходят в условия для псевдосостояния нового уравнения и его производных в точках t_i.

При выполнении определённых ограничений формулируются условия полной управляемости системы (1).

В частном случае система (1) с оператором $D(t)$, рассмотренном выше:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 + \int\limits_0^t u(t)dt, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u(t), \\ \dot{x}_3 = u(t) \end{cases}$$

полностью управляема при $a \neq 0$ и не является полностью управляемой при $a = 0$.

Полученные условия являются достаточными и для решения более широкого круга задач, например, задач с условиями на $u(t)$ и её производные в контрольных точках, с условием стабилизируемости программной траектории и др.

Даётся способ построения $x(t)$.

Литература

1. Зубова С.П. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом // Докл. РАН. – 2012. – 447, № 6. – С.599-602.

2. Зубова С.П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек // Автоматика и Телемеханика. – 2011. – № 1. – С.27-41.

MSC 35R30

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Д. Иванова

Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (является линейным непрерывным), оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в пространстве $\mathcal{X}$). Снабдим область определения D_M оператора M нормой его графика $\|\cdot\|_{D_M}$.

Рассмотрим задачу нахождения функций $x:[0,T]\to\mathcal{X}$ и $u:[0,T]\to\mathcal{U}$ из соотношений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t\in[0,T]\,, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{2}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t)\,, \quad t\in[0,T]\,. \tag{3}$$

При условии сильной (L,p)-радиальности оператора M [1] имеем представление пространств в виде прямых сумм $\mathcal{X}=\mathcal{X}^0\oplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^0\oplus\mathcal{Y}^1$. Обозначим через P и Q проекторы, действующие, соответственно, вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$ и вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$. Сужения операторов L и M на подпространства $\mathcal{X}^k$ обозначим через $L_k\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k\in\mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k=0,1$. При этом существуют обратные операторы $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ и $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, а также сильно непрерывная полугруппа операторов $\{X(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{X}) : t\geq 0\}$, разрешающая однородное уравнение (1).

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{U})$, $\mathcal{X}^1\subset\ker\Phi$, $B\in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $y\in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $\Psi\in C^1([0,T];\mathcal{U})$, существует обратный оператор $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}$ и при этом $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B)^{-1}\in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $\Phi HB(t)=0$ при всех $t\in[0,T]$, $x_0\in D_M$,*

$$(I-P)x_0 = M_0^{-1}(I-Q)(B(0)(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(0))^{-1}\times$$

$$\times\left(\Psi(0)+\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(0)\right)+y(0)).$$

Тогда решение $x\in C^1([0,T];\mathcal{X})\cap C([0,T];D_M)$, $u\in C^1([0,T];\mathcal{U})$ задачи (1)–(3) существует, единственно, имеет вид

$$x(t) = X(t)x_0 + \int\limits_0^t X(t-s)L_1^{-1}Q(B(s)u(s)+y(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}\left((I-Q)(B(t)u(t)+y(t))\right)^{(k)},$$

$$u(t)=-(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}\left(\Psi(t)+\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(t)\right)$$

и удовлетворяет условиям

$$\|x\|_{C^1([0,T];\mathfrak{X})}\le c\left(\|Px_0\|_{D_M}+\|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})}+\|y\|_{C^1([0,T];\mathfrak{Y})}\right),$$

$$\|u\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})}\le c\left(\|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})}+\|y\|_{C^1([0,T];\mathfrak{Y})}\right),$$

где $c>0$ не зависит от x_0, y, Ψ.

Замечание 1. Условие $\Phi HB(t)=0$ при всех $t\in[0,T]$ выполнено в следующих случаях:

- оператор M сильно $(L,0)$-радиален, тогда $H=0$;
- $\mathrm{im}B(t)\subset M[\ker L]$, тогда $HB(t)\equiv 0$;
- $\mathrm{im}L_0\subset M[\ker\Phi]$, тогда $\Phi H=0$.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T>0$, β, $\delta\in\mathbb{R}$. Обратная задача

$$(\beta+\Delta)(v(x,0)-v_0(x))=0,\quad x\in\Omega, \tag{4}$$

$$(1-\delta)v+\delta\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)=(1-\delta)w+\delta\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{5}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t)=\Delta v(x,t)-\Delta w(x,t)+b_1(x,t)u(t),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{6}$$

$$0=v+(\beta+\Delta)w+b_2(x,t)u(t),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{7}$$

с условиями переопределения на подпространстве вырождения

$$\int_\Omega K(y)w(y,t)dy=\psi(t),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{8}$$

может быть исследована в рамках задачи (1)–(3). Искомыми функциями здесь являются $v(x,t)$, $w(x,t)$, $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$. Система уравнений (6), (7) с точностью до линейной замены функций $v(x,t)$, $w(x,t)$ совпадает с линеаризацией квазистационарной системы уравнений фазового поля [2], описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода.

Литература

1. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – 12, Вып. 3. – С.173-200.

2. Плотников П.И., Клепачева А.В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. – 2001. – 42, №3. – С.651-669.

MSC 45P05

УСЛОВИЯ ДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C(D)$ [4)]

А.И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: inozemcev.a.i@gmail.com

К интегральным уравнениям с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред, теории упругих оболочек, дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, а также другие проблемы [1,2]. Постановка прикладных задач приводит к необходимости изучения решений уравнений с частными интегралами, понимаемых в различных смыслах. Это требует выбора приемлемых для изучения таких уравнений пространств, а также исследования в них свойств операторов, определяющих изучаемые уравнения.

В данной заметке изучаются свойства многомерных линейных операторов с частными интегралами в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ функций.

Работа содержит критерий и достаточные условия действия линейного оператора с многомерными частными интегралами

$$(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum_{i=2}^{2^n} \int_{D_i} k_i(t, S_i)x(s_i)\, dS_i$$

в пространстве $C(D)$, где $k_i\colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}$ — подмножества множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{2^n} = \tau$. S_i и dS_i — набор переменных τ_j из T_i и их дифференциалов $d\tau_j$ соответственно. Вектор s_i получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами T_i. D_i — декартово произведение множеств, на которых определены $\tau_j \in T_i$.

В случае $n = 2$ получим оператор $(Kx)(t_1, t_2) = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$, где $K_1 = k_1(t_1, t_2)x(t_1, t_2)$, $K_2 = \int\limits_{D_2} k_2(t_1, t_2, \tau_1)x(\tau_1, t_2)\, d\tau_1$, $K_3 = \int\limits_{D_3} k_3(t_1, t_2, \tau_2)x(t_1, \tau_2)\, d\tau_2$ и $K_4 = \int\limits_{D_4} k_4(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2$. Свойства операторов данного вида в различных функциональных пространствах изучались в работах Ю. Аппелля, П. П. Забрейко, А. С. Калитвина, В.А. Калитвина и др. Критерии и достаточные условия действия в $C(D)$ оператора при $n = 2$ содержатся в работах [1-3].

Теорема 1. *Если оператор K действует в $C\,(D)$, то он непрерывен.*

[4]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

Будем говорить,что измеримая функция $k_i(t,S_i)$ принадлежит $C(L^1(D_i))$, если $\sup\limits_D \int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i)|\,dS_i = L_i < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|t-t^0\| < \delta$ следует $\int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i) - k_i(t^0,S_i)|\,dS_i < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть функция $k_1(t)$ непрерывна на D, а $k_i(t,S_i) \in C(L^1(D_i))$ при $i = 2,3,\ldots,2^n$. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Условие теоремы 2 выполняется в случае непрерывности заданных функций, оно имеет место и при предположениях следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\|k_i(t,\cdot)\|_{L^{p_i}} \le A_i < \infty$ $(1 < i \le 2^n)$, где $t \in D$, $1 < p_i < \infty$, A_i — некоторые постоянные, и пусть ядра $k_i(t,S_i)$ имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $\tau_{S_i} = \phi_{S_i}(t)$, где τ_{S_i} — набор τ_j из подмножества T_i множества $\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\}$, $\phi_{S_i}(t)$ — набор непрерывных функций $\phi^j_{S_i}(t)$ таких, что $T_i \ni \tau_j = \phi^j_{S_i}(t)$. Тогда ядра $k_i(t,S_i)$ принадлежат $C(L^1(D_i))$.*

В теоремах 2 и 3 приведены достаточные условия действия в $C(D)$ оператора K. Приведем необходимые и достаточные условия его действия в $C(D)$. При получении таких условий существенную роль играет теорема Радона, согласно которой линейный непрерывный в $C(D)$ оператор K допускает представление в виде многомерного интеграла Стильтьеса $(Kx)(t) = \int\limits_D x(\tau)\,dg(t,\tau)$ с интегрирующей функцией $g(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ и слабо непрерывной по t.

Рассмотрим всюду плотное в $C(D)$ множество линейных комбинаций функций $x_\alpha = \prod\limits_{i=1}^n x^{\alpha_i}_{\xi_i}(\tau_i)$, где $x_{\xi_i}(\tau_i) = \begin{cases} \xi_i - \tau_i & \text{при } \tau_i \le \xi_i, \\ 0 & \text{при } \tau_i > \xi_i, \end{cases}$ а мультииндекс $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, причем α_i принимает значение 0 или 1 при $i = 1,\ldots,n$.

Теорема 4. *Линейный оператор K действует в пространстве $C(D)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном τ функции $B(t) = k_1(t) + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} k_i(t,S_i)\,dS_i$ и $B_\alpha(t) = \int\limits_D x_\alpha\,dg(t,\tau)$ непрерывны, а функция $\gamma(t) = |k_1(t)| + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i)|\,dS_i$ ограничена. При выполнении этих условий оператор K непрерывен и $\|K\| = \sup\limits_D \gamma(t)$.*

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

MSC 45A05

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПЕРЕМЕННЫЕ ПРЕДЕЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ [5)]

А.С. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvinas@mail.ru

Рассматриваются интегральные уравнения с частными интегралами вида

$$x(t,s) = (V_i x)(t,s) + f(t,s), i = 1,2,3,4, \tag{1}$$

где

$$(V_i x)(t,s) = \int_a^u l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^v m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^u \int_a^v n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

$(t,s) \in D = [a,b] \times [a,b]$, f принадлежит пространству $C(D)$ непрерывных на D функций, $l : G = D \times [a,b] \to R$, $m : G \to R$, $n : D \times D \to R$ — заданные измеримые функции, $u = t, v = s$ при $i = 1$, $u = s, v = t$ при $i = 2$, $u = t, v = t$ при $i = 3$, $u = s, v = s$ при $i = 4$.

Условия разрешимости и свойства решений уравнений (1) с частными интегралами, содержащими переменные пределы интегрирования, зависят от свойств заданных в этих уравнениях операторов V_i и существенно отличаются друг от друга при различных значениях i.

В [1,2] приведены критерии действия в $C(D)$, следовательно, и непрерывности оператора Вольтерра

$$(V_1 x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^t \int_a^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

и более общих классов линейных операторов с частными интегралами. В этих же работах получены и условия равенства нулю спектрального радиуса $r(V_1)$ оператора V_1, рассматриваемого в $C(D)$. В частности, $r(V_1) = 0$, если ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ принадлежат $C(L^1([a,b]))$ и $C(L^1(D))$ соответственно, т.е. непрерывны по $(t,s) \in D$ как функции со значениями в $L^1([a,b])$ и $L^1(D)$ соответственно. Оператор V_1 хорошо изучен в $C(D)$. В [3] приведен пример однородного уравнения Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами, которое имеет только нулевое суммируемое решение, и построены банаховы идеальные пространства, в которых оно имеет несуммируемые решения.

Оператор V_2 с частными интегралами и переменными пределами интегрирования принципиально отличается от оператора V_1. В этом случае из действия оператора

$$(V_2 x)(t,s) = \int_a^s l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^s \int_a^t n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

[5]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

в $C(D)$ вытекает его непрерывность, однако спектральный радиус $r(V_2)$ оператора V_2 в $C(D)$ может быть отличен от нуля даже в случае непрерывных ядер. Например, $r(V_2) = b - a = \|V_2\|$ для оператора V_2 с ялрами $l(t,s,\tau) \equiv 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 0$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$. Приведенный пример показывает, что оператор V_2 не является оператором Вольтерра с частными интегралами. Поэтому для изучения в $C(D)$ оператора V_2 и уравнения $x = V_2x + f$ следует применять общую теорию линейных операторов и уравнений с частными интегралами в $C(D)$ (но не теорию линейных операторов и уравнений Вольтерра с частными интегралами!). В частности, если $l, m \in C(L^1([a,b]))$, а $n \in C(L^1(D))$, то в силу [1,2] фредгольмовость оператора $I - V_2$ (фредгольмовость уравнения $x = V_2x + f$) равносильна обратимости в $C([a,b])$ операторов $I - L(s)$ и $I - M(t)$ при всех $t, s \in [a,b]$, где

$$(L(s)x)(t) = \int_a^s l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau, (M(t)x)(s) = \int_a^t m(t,s,\sigma)x(\sigma)d\sigma.$$

Оператор V_3 имеет вид

$$(V_3x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^t\int_a^t n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

он не является оператором Вольтерра с частными интегралами, но является частным случаем оператора V_2. Оператор V_3 — это оператор Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Поэтому для изучения оператора V_3 и уравнения $x = V_3x + f$ можно использовать результаты из [1,2]. В частности, если $l, m \in C(L^1([a,b]))$ и $n \in C(L^1(D))$, то в $C(D)$ обратимость последнего уравнения и его фредгольмовость равносильны обратимости оператора $(Mx)(t,s) = x(t,s) - \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, которая в свою очередь равносильна обратимости при каждом $t \in [a,b]$ оператора $I - M(t)$ [1].

Оператор V_4 и уравнение $x = V_4x + f$ изучаются в $C(D)$ так же, как оператор V_3 и уравнение $x = V_3x + f$.

Литература

1. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

2. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.

3. Калитвин А.С. Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2012 / Воронеж: ВГУ, 2012. – С.91-94.

MSC 45A05

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ [6)]

В.А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, РФ, e-mail: kalitvin@gmail.com

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D=[a,b]\times[c,d]$ функций рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int_a^t\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s),$$

где $(t,s)\in D$, l, m, n, f — заданные непрерывные на $D\times T$, $D\times S$, $D\times T\times[c,d]$, D соответственно функции, $T=\{\tau : a\le\tau\le t\le b\}$, $S=\{\sigma : c\le\sigma\le s\le d\}$.

Отметим, что оператор V, определяемый суммой первых трех слагаемых правой части уравнения, не является компактным в $C(D)$, если хотя бы одно из ядер $l(t,s,\tau)$ или $m(t,s,\sigma)$ принимает ненулевые значения [1].

Найти точное решение данного уравнения удается в редких случаях. Поэтому важное значение имеют численные методы построения его решений. При этом использование хорошо известных численных методов решения линейных интегральных уравнений второго рода (обоснование которых обычно использует компактность интегральных операторов [2,3]) для решения линейных уравнений с частными интегралами требует осторожности и обоснования; в частности, из-за отсутствия компактности у оператора V требуется обоснование применения метода механических квадратур.

Уравнение решается численно с применением квадратурных и кубатурной формул, изучается сходимость вычислительных процессов.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками

$$t_p=a+ph\ (p=0,1,\dots,P,\ a+Ph\le b<(P+1)h),$$

$$s_q=c+qg\ (q=0,1,\dots,Q,\ c+Qg\le d<(Q+1)g)$$

соответственно. Полагая $t=t_p$, $s=s_q$ и применяя квадратурные формулы

$$\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x(t_i,s_q)+r_{pq}^{l},$$

$$\int_c^{s_q} m(t_p,s_q,\sigma)x(t_p,\sigma)d\sigma=g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{pqj}x(t_p,s_j)+r_{pq}^{m}$$

[6]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

и кубатурную формулу

$$\int_a^{t_p}\int_c^b n(t_p,s_q,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}n_{pqij}x(t_i,s_j)+r_{pq}^n,$$

где $l_{pqi}=l(t_p,s_q,t_i)$, $m_{pqj}=m(t_p,s_q,s_j)$, $n_{pqij}=n(t_p,s_q,t_i,s_j)$, а r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n — остатки квадратурных и кубатурной формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках $(t_p,s_0),(t_0,s_q)$, (t_p,s_q) $(p=1,\ldots,P;q=1,\ldots,Q)$.

Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$$x_{00}=f(a,c),\ x_{p0}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{p0i}x_{i0}+f_{p0}+\delta_{p0},\ x_{0q}=g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{0qj}x_{0j}+f_{0q}+\delta_{0q},$$

$$x_{pq}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{pqj}x_{p_j}+hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}n_{pqij}x_{ij}+f_{pq}+\delta_{pq}$$

$(p=1,\ldots,P;\ q=1,\ldots,Q)$, где $f_{p0}=f(t_p,s_0)$, $f_{0q}=f(t_0,s_q)$, $f_{pq}=f(t_p,s_q)$.

Теорема. *Если r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$; существуют такие числа A,B,C, что $|\alpha_{pi}|\le A<\infty$, $|\beta_{jq}|\le B<\infty$, $|\gamma_{pqij}|\le C<\infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon>0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h<h_0$ и $g<g_0$ будут выполняться неравенства*

$$|x_{pq}-x(t_p,s_q)|<\epsilon\ (p=0,1,\ldots,P;q=0,1,\ldots,Q),$$

а последовательность функций

$$x_{pq}(t,s)=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l(t,s,t_i)x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m(t,s,s_j)x_{pj}+hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}n(t,s,t_i,s_j)x_{ij}+f(t,s)$$

равномерно сходится на D к решению $x(t,s)$ при $h\to 0$, $g\to 0$.

Литература

1. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений / М.: Наука, 1969. – 456 с.

3. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп / С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2006. – 288 с.

MSC 35K05

МЕТОД ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА В РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Т.Ш. Кальменов, Н.Е. Токмагамбетов

*РГП «Институт математики и математического моделирования» при МОН РК,
ул. Шевченко 28, Алматы, 050010, Казахстан, e-mail: kalmenov.t@mail.ru, tokmagam@list.ru

Уравнения с частными производными второго порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. В виду теоретической и прикладной важности изучения смешанной задачи Коши для модельного уравнения теплопроводности посвящены многочисленные работы. Среди них особо отметим монографий [1]-[3], в которых приведены основные методы исследования: метод Фурье, метод интегральных уравнений, метод априорных оценок. Но в то же время выписать решение в виде интегрального представления через известные и заданные функции до сих пор не удавалось. В данной работе этот пробел восполняется для одномерного уравнения теплопроводности. При решении одномерной смешанной задачи Коши существенно используется метод внешних потенциалов – специальное продолжение решения на все полупространство. Идея метода основывается на возможности представления общего решения уравнения только в виде объемных потенциалов, не привлекая поверхностные потенциалы. Получаемая таким методом система интегральных уравнений (в отличие от возникающей при классическом методе потенциала) допускает обращение и построение решения в квадратурах.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / Москва: Наука, 1988.

2. Ладыженская О.А. Краевые задачи для параболических уравнений / Москва: Наука, 1973.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Краевые задачи для параболических уравнений / Москва: Наука, 1980.

4. Кальменов Т.Ш., Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Об интегральном представлении корректных сужений и регулярных расширений дифференциальных операторов // Доклады РАН. – 2010. – 430, No 5. – С.589-591.

MSC 35K35

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТУЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.А. Каменская

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские горы, Москва, 119991, Россия, e-mail: info@rector.msu.ru

В слое $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ рассматривается равномерно-параболическое уравнение

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu = f, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

a) $\exists \delta_0 > 0 : \ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\sigma_i\sigma_j \geqslant \delta_0 \sigma^2 \,, \quad \forall (x,t) \in \bar{D}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n;$

b) коэффициенты $a_{ij}(i, j = 1, ..., n)$ ограничены в $\bar{D}$ и, кроме того,

$$|a_{ij}(x', t') - a_{ij}(x,t)| \leqslant \omega_0(|x' - x| + |t' - t|^{\frac{1}{2}}), \forall (x', t'), (x,t) \in \bar{D}\,;$$

где $\omega_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – модуль непрерывности, удовлетворяющий *условию Дини* $\displaystyle\int_0^t \frac{\omega_0(z)}{z} dz < \infty$, $t > 0$;

c) коэффициенты $b_i (i = 1, ..., n), c$ равномерно непрерывны и ограничены в $\bar{D}$.

Предполагается, что функция f равномерно непрерывна в каждом слое

$$D_{t_0,T} := D \bigcap \{t_0 \leqslant t \leqslant T\}\,, \qquad \forall t_0 \in (0,T)\,,$$

и справедлива оценка

$$\exists C > 0 : |f(x,t)| \leqslant C \frac{\omega(t)}{t}\ , \qquad \forall (x,t) \in D\,,$$

где $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ удовлетворяет условиям: $\omega(0) = 0$; ω непрерывна; ω не убывает;

$$\exists c > 0 : \frac{\omega(z_2)}{z_2} \leqslant c \frac{\omega(z_1)}{z_1}\,, \qquad \forall z_2 \geqslant z_1 > 0\,;$$

и, кроме того, для ω выполнено условие Дини.

Исследуются свойства объемного потенциала

$$(Vf)(x,t) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi \,,$$

где

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x-\xi,t-\tau;\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(x-y,t-\eta;y,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)dy \,,$$

$(x,t)\,,(\xi,\tau) \in \bar{D}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, где $Z(x,t;\xi,\tau)$ параметрикс для уравнения (1) с замороженными в точке (ξ,τ) коэффициентами, μ – решение интегрального уравнения (см. [1])

$$\mu(x,t;\xi,\tau) + L_{x,t} Z_0(x-\xi,t-\tau;\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{\mathbb{R}^n} L_{x,t} Z_0(x-y,t-\eta;y,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)dy = 0.$$

Доказывается, что Vf – обобщенное (в смысле [2]) решение задачи Коши для уравнения (1) с нулевым начальным условием. Приводятся оценки, характеризующие гладкость этого решения и его пространственных производных первого порядка.

Литература

1. Матийчук М. И., Эйдельман С. Д. О фундаментальных решения и задача Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. Воронеж. – 1967. – Вып. 9. – С.54-83.

2. Baderko E. Generalized solution of the Cauchy problem for non-divergence parabolic equations // Annales Univ. Sci. Budapest. 2010. – №53. – P.7-15.

MSC 35L15

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.В. Кириченко

В прямоугольной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу. Найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T H_i(t)u(x,t)dt = 0 \quad (i = 1; 2). \tag{3}$$

Функции $c(x,t)$, $f(x,t)$ заданы в $\overline{Q}_T$, $H_i(t)$ заданы для всех $t \in [0,T]$.

Заметим, что условия (3) представляют собой нелокальные интегральные условия I рода. Как известно [2], такие условия вносят серьезные трудности в исследование разрешимости задач. Однако, эти трудности можно преодолеть, если свести нелокальные условия I рода к нелокальным условиям II рода.

В представленной работе установлена эквивалентность условий (3) следующим условиям:

$$\begin{cases} H_1'(0)u(x,0) - H_1(0)u_t(x,0) - H_1'(T)u(x,T) + H_1(T)u_t(x,T) = \\ = -\int\limits_0^T (H_1(t)c(x,t) + H_1''(t))u(x,t)dt + \widetilde{g}_1(x), \\ H_2'(0)u(x,0) - H_2(0)u_t(x,0) - H_2'(T)u(x,T) + H_2(T)u_t(x,T) = \\ = -\int\limits_0^T (H_2(t)c(x,t) + H_2''(t))u(x,t)dt + \widetilde{g}_2(x)\,. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь обозначено $\widetilde{g}_i(x) = \int\limits_0^T H_i(t)f(x,t)dt$.

Рассмотрены ситуации, когда при выполнении некоторых дополнительных условий на функции $H_i(t)$ систему (4) можно разрешить относительно тех или иных граничных значений искомого решения, что упрощает доказательство разрешимости поставленной задачи.

Литература

1. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Математика. – 2012. – № 4. – С.74-83.

2. Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1-го рода с ядрами, зависящими от времени // Известия вузов. Математика. – 2012. – №10. – С.32-44.

MSC 35S35

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ [1)]

Л.А. Ковалева, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Теории эллиптических уравнений на стратифицированных множествах посвящены многочисленные исследования (см., например, [1]). Качественное исследование краевых задач на этих множествах основано на применении векторных дифференциальных операций с помощью надлежащего определения меры. В данной работе рассматриваются гармонические функции на двумерных стратифицированных множествах Ω, которые для простоты предполагаются комплексами. В ней предлагается теоретико функционально подход к исследованию задачи Дирихле для этих функций, основанный на ее сведении к так называемой нелокальной задаче Римана[2] для аналитических функций.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ попарно непересекающиеся открытые отрезки $\Omega^1_j,\ 1 \le j \le l$, и открытые плоские выпуклые многоугольники $\Omega^2_j,\ 1 \le j \le n$. Граница каждого многоугольника составлена из попарно непересекающихся сторон (открытых отрезков) и вершин. Предполагается, что эти границы попарно могут пересекаться только по сторонам или вершинам, причем семейство (Ω^1_j) составлено из различных сторон. Множество всех вершин обозначим F. Полученный двумерный комплекс

$$\overline{\Omega} = F \cup \Omega^1 \cup \Omega^2, \quad \Omega^k = \cup_j \Omega^k_j,$$

называется стратифицированным компактом, а составляющие его элементы Ω^1_k и Ω^2_s – стратами соответствующих размерностей. Под стратифицированным множеством Ω здесь понимается $\Omega^2 \cup \Omega^1_{(1)}$, где $\Omega^1_{(1)}$ – обьединение некоторого числа одномерных страт. Обьединение $\Omega^1_{(0)}$ оставшихся одномерных страт будет играть роль границы этого множества. Случай, когда одно из множеств $\Omega^1_{(0)},\ \Omega^1_{(1)}$ является пустым, не исключается. К каждому одномерному страту сходится один или несколько многоугольников Ω^2_s, в первом случае его называем стороной, во втором случае – ребром. Предполагается, что все ребра входят только в $\Omega^1_{(1)}$. Ниже на Ω естественным образом вводится понятие гармонической функции, для которой $\Omega^1_{(0)}$ будет являться носителем данных Дирихле.

Пусть m^2_s есть число сторон, составляющих границу $\partial\Omega^2_s$ и $m = m^2_1 + \ldots + m^2_n$. Все эти стороны занумеруем единым образом в виде $L_1, \ldots, L_m$ и рассмотрим разбиение $I^2 = \{I^2_s, 1 \le s \le n,\}$ множества $\{1, \ldots, m\}$, для которого стороны $L_j, j \in I^2_s$, составляют границу $\partial\Omega^2_s$. С каждым одномерным стратом Ω^1_k можно также связать некоторое

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357).

множество I_k^1 номеров j, для которых L_j совпадает с Ω_k^1, число элементов этого множества обозначим m_k^1. В результате получаем другое разбиение $I^1 = \{I_k^1, 1 \le k \le l,\}$ множества $\{1,\dots,m\}$. Рассмотрим еще семейство единичных векторов $\nu_j \in \mathbb{R}^3$, $1 \le j \le m$, таких, что для $j \in I_s^2$ вектор ν_j лежит в плоскости многоугольника Ω_s^2 и по отношению к нему является внутренней нормалью к стороне L_j.

По определению функция $u \in C(\Omega)$ называется гармонической на Ω, если для каждого s ее сужения u_s гармоничны (по отношению к некоторой, а значит, и любой прямоугольной декартовой системы координат) на двумерном страте Ω_s^2, непрерывно дифференцируемы вплоть до $\Omega_{(1)}^1 \cap \partial\Omega_s^2$ и ее нормальные производные

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_j^+ = \frac{\partial u_s}{\partial \nu_j}, \quad j \in I_s^2,$$

подчинены условию

$$\sum\nolimits_{j\in I_k^1} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_j^+ = 0, \quad \Omega_k^1 \subseteq \Omega_{(1)}^1.$$

Как обычно, задача Дирихле состоит в отыскании гармонической на Ω функции u, принимающей на $\Omega_{(0)}^1$ заданные значения.

Эта задача рассматривается в классе Гельдера $H(\overline{\Omega})$, а также в классе $\dot{H}(\overline{\Omega}, F)$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера вне любой окрестности F и в точках $\tau \in F$ допускающих особенности логарифмического характера. Показано, что задача Дирихле фредгольмова в каждом из этих классов. Индекс этой задачи описан в терминах так называемого концевого символа - семейства аналитических матриц- функций $X_\tau(\zeta)$, $\tau \in F$. Здесь X_τ – матрица порядка $2m_\tau$, где m_τ – число двумерных страт, имеющих τ своей вершиной, которая зависит только от геометрической структуры множества Ω и выбора $\Omega_{(0)}^1$.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

2. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Докл. АН СССР. – 1988. – 299, №.4. – С.825-828.

MSC 26D07

НЕРАВЕНСТВА ВИЛЬЯМА ЯНГА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

А.А. Ковальчук, С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Оценка произведений нескольких величин в терминах суммы некоторых других величин является известной математической задачей. Подобные неравенства играют существенную роль в самой математике и многих её приложениях: математической экономике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных уравнениях, теории сигналов, оценивании сложности прикладных алгоритмов и т.д. Примером таких оценок является неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. Другим классическим примером является доказанное в 1912 г. английским математиком Вильямом Янгом знаменитое неравенство, названное впоследствии его именем. Для двух чисел в простейшем случае неравенство Янга записывается в виде

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1}$$

при условиях $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1, x, y > 0$.

С.М. Ситником было замечено, что на самом деле неравенство В. Янга в традиционной формулировке—это не одно, а пара неравенств. Так как левая часть неравенства (1) симметрична, то на самом деле справедливо аналогичное второе неравенство

$$xy \leq \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}, \tag{2}$$

и поэтому возникает естественная задача о сравнении неравенств (1) и (2).

Далее без ограничения общности будем полагать, что выполнены условия

$$y \geq x, p \geq 2 \geq q > 1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3), тогда*

1. Если $y \geq x \geq 1$, то оценка (1) лучше, чем (2).

2. Если $1 \geq y \geq x \geq 0$, то оценка (2) лучше, чем (1).

3. Если $y \geq 1 \geq x \geq 0$, то возможны два варианта. При соотношении

$$y > y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

точнее неравенство (1). При соотношении

$$1 < y < y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

при данном у существует критическое значение $x = x, 0 < x < 1$, *которое является единственным решением трансцендентного уравнения*

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}. \tag{4}$$

В этом случае при $x \in (0, x)$ оценка (2) лучше, чем (1), а при $x \in (x, 1)$ оценка (1) лучше, чем (2).

На все рассмотренные случаи можно привести численные примеры [2-4].

Аналогичные результаты получены и для n чисел, но только в том случае, когда все числа лежат с одной стороны от единицы. Когда числа могут быть расположены с разных сторон от единицы, то результаты неизвестны даже для трёх чисел. Получены только некоторые результаты на основе компьютерных вычислений. Всего в этом случае получаем $n!$ вариантов обобщений неравенства Янга.

Теорема 2. *При условии, что выполнены неравенства* $0 \leq x \leq y \leq z \leq \dots$, *наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры* p, q, r *упорядочены по возрастанию* $p \leq q \leq r \dots$, *а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью)—по убыванию.*

Теорема 3. *При условии, что выполнены неравенства* $1 \leq x \leq y \leq z \leq \dots$, *наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры* p, q, r *упорядочены по убыванию* $p \geq q \geq r \dots$, *а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) – по возрастанию.*

Рассмотрен также случай неравенств Вильяма Янга (теперь мы знаем, что их два!) с парой произвольных взаимно дополнительных функций Янга. По обычной схеме [1] можно из полученного уточнённого неравенства Янга вывести уточнённое неравенство Гёльдера (или исторически более точно: Роджерса-Гёльдера-Рисса). Результаты получаются как для дискретного, так и для интегрального случаев.

Литература

1. Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M. Classical and new inequalities in Analysis / Kluwer, 1993.

2. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy-Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey// http:arxiv.org/abs/1012.3864, 2012. – 51 p.

3. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств // В кн.: Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия «Математический форум». Том 3 / Исследования по математическому анализу. Ред. Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев / Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания: Владикавказ, 2009. – С.221-266.

4. Ситник С.М. Сколько неравенств заключено в неравенстве Юнга // Труды Всероссийской заочной научно–практической конференции «Актуальные проблемы обучения математике», посвящённой 155-летию со дня рождения Андрея Петровича Киселёва / Орёл: Орловский государственный университет, 2007. – С.464-469.

MSC 35K55

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. Кожевникова, А.А. Леонтьев

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453100, Россия, e-mail: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$, $n\geq 2$. В цилиндре $D=\{t>0\}\times\Omega$ для анизотропного параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t=\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha})_{x_\alpha},\quad k>1,\quad (t,\mathbf{x})\in D; \tag{1}$$

$$u(t,\mathbf{x})\big|_S=0,\quad S=\{t>0\}\times\partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}),\quad \varphi(\mathbf{x})\in L_k(\Omega),\quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x})\in L_{p_\alpha}(\Omega),\quad \alpha=\overline{1,n}\,. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s\geq 0$, $\alpha=\overline{1,n}$, подчиняются условиям: $a(0)=0$, $a(s)\in C^1(0,\infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2}\leq a_\alpha(s)\leq\widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2},\quad p_1a_\alpha(s)/2\leq a_\alpha(s)+a'_\alpha(s)s\leq\widehat{b}a_\alpha(s),\quad \alpha=\overline{1,n}\,,$$

с положительными константами $\widehat{a}\geq\overline{a}$, $2\widehat{b}\geq p_1>k$ $(p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_n)$. Например, $a_\alpha(s)=s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha=\overline{1,n}$, $\widehat{b}=p_n$.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации при $t\to\infty$ решения задачи (1)-(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$ от показателей нелинейности.

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}\,{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}\,{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}\,{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространств $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам $\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega)}+\|u\|_{L_k(\Omega)}$, $\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}=\|u\|_{L_k(D^T)}+\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(D^T)}$, $\|u\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}=\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}+\|u_t\|_{L_k(D^T)}$.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *с функцией* $\varphi(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}\,{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *назовем функцию* $u(t,\mathbf{x})$ *такую, что при всех* $T>0$ $u(t,\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}\,{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T}\left(-|u|^{k-2}uv_t+\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}v_{x_\alpha}\right)d\mathbf{x}dt=\int\limits_{\Omega}|\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0,\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x})=0$.

Существование решения задачи (1)-(3) доказывается методом галеркинских приближений, который был предложен Ф.Х. Мукминовым для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщен авторами статьи на уравнения вида (1) (см. [1], [2]).

Утверждение. *Если* $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/p_n$, *то обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи (1)-(3) с ограниченной начальной функцией* $\varphi(\mathbf{x})$ *является ограниченным.*

Приведем результат об убывании для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Предполагается, что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 1. *Существуют* $C(\varphi,k,p_1,\widehat{a},\widehat{b}) > 0$ *и ограниченное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *такие, что при всех* $t \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t+1\right)^{-1/(p_1-k)} .$$

Для $r > 0$ введем следующие обозначения:

$$\nu(r) = \inf\left\{ \|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \,\Big|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} = 1 \right\},$$

$$\mu_1(r) = \inf\left\{ \|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \,\Big|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1 \right\},\ \Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega\ |x_s < r\}.$$

Предполагается, что выполнено условие: $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0$. Иначе достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0 .$$

Теорема 2. *Пусть* $s \in \overline{2,n}$. *Если выполнены условия:*

$$\mu_1(r) \geq C r^{-a}, \quad r > 1 , \quad a, C > 0 , \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho) d\rho = \infty ,$$

то существуют $M(p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}) > 0$ *и ограниченное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *такие, что для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Литература

1. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3, №4. – С.64-85.

2. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях // Уфимский математический журнал. – 2013. – 5, №1. – С.65-83.

MSC 35J65

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453100, Россия, e-mail: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

Работа посвящена некоторому классу анизотропных эллиптических уравнений второго порядка, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - |u|^{k-2}u = \Phi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$p_n \geq ... \geq p_2 \geq p_1 > 1,\ k > 1.$$

Для него в произвольной неограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле с однородным граничным условием

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Основной результат этой работы — исследование зависимости скорости убывания решения задачи (1), (2) от геометрии неограниченной области Ω и показателей нелинейности.

Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha} + \|v\|_k.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *с* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{k/(k-1)}(\Omega)$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}v_{x_\alpha} + (|u|^{k-2}u + \Phi(\mathbf{x}))v \right\} d\mathbf{x} = 0$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$.

И.М. Колодий [1] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. Здесь приведен результат об ограниченности решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Теорема 1. *Пусть* $u(\mathbf{x})$ — *обобщенное решение задачи* (1), (2) *и выполнены условия*

$$1 < \sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/k^2, \quad k^2 - nk + n \geq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u(\mathbf{x})| \leq C,$$

где C — *константа, зависящая от* p_α, k, n, $\|\Phi\|_{k/(k-1)}$.

Двусторонние оценки, характеризующие убывание решения задачи Дирихле для анизотропных уравнений без младших членов, получены в работе [2]. Здесь приведем оценку сверху для решения уравнения (1).

Будем рассматривать неограниченные области расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$). Введем обозначения: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \;\Big|\; a < x_s < b\}$, значения $a = 0,\ b = \infty$ опускаются.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω :

$$\nu(r) = \inf \left\{ \|g_{x_1}\|_{p_1,\gamma_r} \;\Big|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{p_1,\gamma_r} = 1 \right\}, \quad r > 0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

$$\int\limits_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty,$$

$$\operatorname{supp} \Phi(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 2. *Существуют положительные числа* κ, $\mathcal{M}$ *такие, что для ограниченного обобщенного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *при* $r > 2R_0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,\Omega_r}^{p_\alpha} + \|u\|_{r,\Omega_r}^{r} \leq \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho \right).$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Литература

1. Колодий И.М. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Вестник МГУ. – 1970. – №5. – С.45-52.

2. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Вестник СамГТУ. – 2013. – 30, №1.

MSC 35L55

ЗАДАЧА УСПОКОЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.А. Андреев, Е.А. Козлова, С.В. Лексина

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: andre01071948@yandex.ru,
elenakozlova.sstu@gmail.com, lesveta@rambler.ru

Для системы уравнений вида

$$u_{tt} + 2Bu_{xt} + Cu_{xx} = 0,$$

где B, C — постоянные перестановочные матрицы размерности 3×3 с собственными значениями b_k, c_k, $b_k^2 > c_k$, $k = \overline{1,3}$, $u(x,t)$ — вектор-функция, в прямоугольной области $Q = [0,l] \times [0,T]$ рассмотрена задача успокоения с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi^0(x), \quad u_t(x,0) = \psi^0(x), \quad 0 \le x \le l,$$

и финальными условиями

$$u(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

Необходимо построить граничные управления

$$\mu(t) = u(0,t), \quad \nu(t) = u(l,t), \quad 0 \le t \le T,$$

как функции, переводящие объект из начального состояния в финальное.

Здесь $\varphi^0(x)$, $\psi^0(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — вектор-функции размерности 3, и $\varphi_k^0(x) \in C^2[0,l]$, $\psi_k^0(x) \in C^1[0,l]$, $\mu_k(t), \nu_k(t) \in C^2[0,T]$, $k = \overline{1,3}$.

В зависимости от структуры входящих матричных коэффициентов рассматриваемая система может включать как однородные, так и неоднородные уравнения.

В работе построены в явном виде управляющие вектор-функции $\mu(t), \nu(t)$, а также условия, при которых управление осуществимо. В случае достаточно большого заданного времени управления T граничные управления найдены с произволом, зависящим от способа продолжения начальных условий.

Отметим, что в настоящей работе использованы результаты исследований В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [1,2] по задачам граничного управления для волнового уравнения, а также результаты, полученные в работах С.В. Лексиной и А.А. Андреева для системы-аналога волнового уравнения [3,4].

Литература

1. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. – 2000. – 36, №11, С.1513-1528.

2. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений смещением на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени // Докл. РАН. – 2007. – 417, №2. – С.160-166.

3. Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 2011. – 47, №6. – С.843-849.

4. Лексина С.В. Задача управления в условиях первой краевой задачи для гиперболической системы второго порядка // Математическое моделирование и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2009. – С.147-150.

MSC 35J60

ГЛАДКОСТЬ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Н. Конёнков

Рязанский государственный университет,
ул. Свободы, 46, Рязань, 390000, Россия, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

В слое $D = R^n \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv u_t - a_{ij}(x,t)u_{ij} - b_i(x,t)u_i - c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

вещественнозначные коэффициенты которого удовлетворяют условию равномерной параболичности

$$(\exists\, \delta_0 > 0)\ (\forall P \in \bar{D},\ \forall \xi \in R^n) \quad a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \tag{2}$$

и принадлежат анизотропным пространствам Гельдера:

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\bar{D}), \quad \alpha \in (0,1). \tag{3}$$

Для области $\Omega \subset D$ с компактной «боковой» границей $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ и функции ψ рассматриваем модифицированный потенциал простого слоя

$$\hat{U}\varphi(P) = \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} \Gamma(x,t,y,\tau)\psi(y,\tau)\varphi(y,\tau)\, ds d\tau, \quad \Sigma_\tau = \Sigma \cap \{t = \tau\}, \tag{4}$$

где $\Gamma(x,t,y,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1). При $\psi \equiv 1$ получается потенциал простого слоя $U\varphi$.

Обозначим через $\underset{\circ}{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ пространство с нормой

$$|f;\Omega|^{(k,\alpha)} = ||f;\Omega||^{(k,\alpha)} + \sup_{(x,t)\in\Omega} t^{-(k+\alpha)/2}|f(x,t)|,$$

где $||f;\Omega||^{(k,\alpha)}$ — норма в пространстве $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Если $\varphi \in \underset{\circ}{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\Sigma \in C^{1,\alpha}$, то потенциал простого слоя $U\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ [1]. При этом $U\varphi$ не будет, вообще говоря, принадлежать $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Исследуется вопрос о принадлежности потенциала (4) анизотропному пространству Гельдера $\underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ при условии, что «боковая» граница области принадлежит лишь классу $C^{1,\alpha}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ компактна. Тогда существует положительная функция*

$$\psi \in C^{0,\alpha}(\Sigma), \quad (\exists\, \delta > 0)\ \psi(P) \geq \delta > 0 \quad \forall\, P \in \Sigma,$$

такая, что модифицированный потенциал простого слоя является ограниченным оператором из $\underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma)$ *в* $\underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, *т.е.*

$$\hat{U}\varphi(P) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\ \forall\,\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

причем

$$(\exists\ C > 0) \quad \forall\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad |\hat{U}\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \le C|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Функция ψ определяется неоднозначно (с точностью до множителя — не обращающейся в нуль функции из класса $C^{1,\alpha}(\Sigma)$). Если «боковая» граница области Ω более гладкая, то одну из таких функций ψ можно указать явно:

Теорема 2. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), область Ω — цилиндрическая, $\Sigma \in C^{2,\alpha}$ компактна. Тогда для $\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\nu_i\nu_j$, где $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — внутренняя единичная нормаль к сечению Σ_t,*

$$\hat{U}\varphi \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\ C_1, C_2 > 0) \quad \forall\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad C_1|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)} \le |\hat{U}\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \le C_2|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_{ij}|_{\Sigma} \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда потенциал простого слоя*

$$U\varphi \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\ C_1, C_2 > 0) \quad \forall\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad C_1|\varphi, \Sigma|^{(1,\alpha)} \le |U\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \le C_2|\varphi, \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Используя представление эллиптического потенциала простого слоя с помощью параболических потенциалов [2], получены аналогичные утверждения для потенциала простого слоя, ядром которого является главное фундаментальное решение [3] для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Литература

1. Бадерко Е.А. О гладкости 2m-параболического потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. – 1990. – 26, № 1. – С.3-10.

2. Конёнков А.Н. О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. – 2002. – 38, № 2. – С.247-256.

3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / М.: ИЛ, 1957.

MSC 35J25

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПЛОХИМИ УСЛОВИЯМИ СОГЛАСОВАНИЯ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11, Минск, Беларусь, e-mail: Korzyuk@bsu.by

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, e-mail: Kozlovskaja@bsu.by

В последнее время при математическом моделировании в различных областях науки широко используются численные методы, при этом ослабло внимание к аналитическим исследованиям поставленных задач. Численные методы чаще всего базируются на предположениях существования классических решений этих задач, однако при одних и тех же выбранных граничных условиях без правильного выбора функций в этих условиях, удовлетворяющих так называемым условиям согласования, не будет существовать классического решения рассматриваемой задачи: решение не будет иметь ту гладкость во всей области его определения, которую предполагает применяемый в данном случае численный метод. Показывается влияние кроме правильного выбора граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными условий согласования для функций, которые задаются в качестве граничных условий.

В частности, на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе, доказывается, что решение или его производные терпят разрыв на определенном множестве внутри области задания уравнения, если отсутствуют полностью или частично условия согласования на заданные функции в граничных условиях и правую часть уравнения.

В области $Q = (0,\infty) \times (0,l)$ двух независимых переменных $(t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается волновое уравнение

$$(\partial_{tt} - a^2\partial_{xx})u(y,x) = f(t,x),\ (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где a^2 – положительное действительное число, $\partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – частные производные по t и x второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются начальные и граничные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \mu^{(1)}(t), \quad u(t,l) = \mu^{(2)}(t),\ t \in [0,\infty), \tag{3}$$

Функции φ, ψ, $\mu^{(i)}$, $i = 1,2$, f удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\varphi(0) - \mu^{(1)}(0) = \delta^{(1)}, \quad \psi(0) - \mu^{(1)\prime}(0) = \delta^{(2)}, \quad \mu^{(1)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(0) - f(0,0) = \delta^{(3)}, \tag{4}$$

$$\varphi(l) - \mu^{(2)}(0) = \sigma^{(1)}, \quad \psi(l) - \mu^{(2)\prime}(0) = \sigma^{(2)}, \quad \mu^{(2)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(l) - f(0,l) = \sigma^{(3)}, \qquad (5)$$

где $\mu^{(i)\prime}$ и $\mu^{(i)\prime\prime}$ – производные функций $\mu^{(i)}$ первого и второго порядков, $i = 1, 2$, φ'' – производная второго порядка функции φ.

Отметим, что классическое решение задачи (1)-(3) получено в статьях [1,2] при некоторых более жестких условиях согласования. Кроме доказательства нарушения гладкости решения задачи (1)-(3) при невыполнении частично или полностью условий согласования (4), (5) построено по несколько другой схеме в отличие от [1, 2] классическое решение задачи (1)-(5).

В работе также построено классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с интегральными по времени граничными условиями специального вида, имеющим определенный физический смысл. Решение получено с помощью метода характеристик, предполагающего разбиение области на подобласти и решение своей начально-краевой задачи в каждой из подобластей.

В области $\Omega = \{0 < t < \infty, 0 < x < l\}$ требуется определить функцию $u(x,t) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad (6)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (7)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = c_1\int\limits_0^t \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + g_1(t), \quad t \ge 0, \qquad (8)$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = c_2\int\limits_0^t \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=l}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + g_2(t), \quad t \ge 0, \qquad (9)$$

где $\varphi(x) \in C^2(0 \le x \le l)$, $\psi(x) \in C^1(0 \le x \le l)$, $g_1(t) \in C^2(0 \le t < \infty)$, $g_2(t) \in C^2(0 \le t < \infty)$, $a = \text{const}$, $a > 0$, $c_1 = \text{const}$, $c_1 > 0$, $c_2 = \text{const}$, $c_2 > 0$.

Литература

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – 53, № 1. – С.45-49.

2. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2009. – 17, № 2. – С.23-34.

3. Корзюк В.И. Уравнения математической физики / Минск: Издательский центр БГУ, 2011. – 460 с.

4. Корзюк В.И., Козловская И.С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных // Дифференциальные уравнения. – 2012. – 48, № 5. – С.700-709.

MSC 26C99

РЕШЕНИЕ ПОЧТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТНЫМИ ПРОПУСКАМИ

***В.И. Коробов, **А.Н. Бугаевская**

*Харьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua

**Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 12, Белгород, 308007, Россия, e-mail: bugaevskaya@bsu.edu.ru

Рассматривается решение систем нелинейных уравнений вида

$$-\sum_{i=1}^{m} T_i^{2k-1} + \sum_{i=m+1}^{n-1} T_i^{2k-1} + f_{2k-1}(\varphi(T_1,\ldots,T_n)) = S_{2k-1},\ k=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $T_1,\ldots,T_n$ – неизвестные, $\varphi(T_1,\ldots,T_n)$, $f_1(\varphi), f_3(\varphi),\ldots,f_{2n-1}(\varphi)$ – заданные непрерывные функции своих аргументов. Систему уравнений (1) будем называть *почти полиномиальной системой уравнений с четными пропусками*, так как в двух суммах левой части системы отсутствуют неизвестные T_i $(i=1,\ldots,n-1)$ с четными степенями. Решение систем вида (1) сводится к последовательному нахождению корней четырех функций одной переменной.

К решению систем вида (1) сводятся многие задачи. В модифицированной задаче Le Verrier'а нахождения собственных значений матрицы A по следам матриц нечетной степени $A, A^3,\ldots,A^{2p-1}$, а также при построении квадратурных формул типа Чебышева возникают полиномиальные системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^{2k-1} = S_{2k-1},\ k=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Для систем вида (2) найдена связь между элементарными симметрическими функциями и нечетными степенными суммами $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i^{2k-1}$, т.е. получен *аналог формул Ньютона.*

Полиномиальные системы с четными пропусками с чередующимися знаками при T_i $(i=1,\ldots,n)$ возникают при решении степенной min-проблемы моментов с четными пропусками [1].

Литература

1. Korobov V.I., Bugaevskaya A.N. The solution of one time-optimal problem on the basis of the Markov moment min-problem with even gaps // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – 6, №4. – P.505-523.

MSC 93D15

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.И. Коробов, О.А. Тарасова

Белгородский национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 12, Белгород, 308007, Россия

Возьмем линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,, \tag{1}$$

где A, B – постоянные вещественные матрицы размером $n \times n$ и $n \times r$ соответственно; x – вектор n-мерного пространства E_n; u – вектор r-мерного пространства E_r.

Зададим подпространство G равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, где H - постоянная матрица. Систему (1) назовем *стабилизируемой* относительно подпространства G, если существует такое линейно зависящее от x управление $u = Qx$ (Q – постоянная матрица размера $r \times n$), что $Hx(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, где $x(t)$ – любое решение системы $\frac{dx}{dt} = Ax + BQx$.

Теорема: *Для стабилизируемости системы* $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ *относительно подпространства* $G = \{x : Hx = 0\}$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $H^* \subset K^-$, *либо существовали вектор* c *и неотрицательное число* j *такие, что* $H^* \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-$, *причем* $\left(c, A^k b\right) = 0 \ (0 \le k < j)\,.\,(c, A^j b) \ne 0$.

Здесь L *– подпространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы* $(B, AB, ..., A^{n-1}B)$. $L \ne R^n, R^n = L + L^\perp$. $L^\perp$ *можно представить в виде* $L^\perp = K^- + K^+$, *где* K^- *– подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы* A^* *из* $L^\perp$.

Для линейной управляемой системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u\,, \qquad \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u$$

исследована возможность стабилизации. Управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c,b)}[-(c,Ax) - \gamma_1(c,x)] = \frac{1}{3}(-9x_1 + 3x_2).$$

Общее решение:

$$x_1 = x_1^0 e^{-t}\,, \qquad x_2 = x_2^0 e^{-t}\,,$$

где $x_1^0 = x_1(0), x_2^0 = x_2(0)$. Тогда $Hx = e^{-t}(2x_1^0 + x_2^0) \to 0$ при $t \to \infty$.

Система имеет реализацию в программе Maple, где коэффициенты матрицы А меняются на отрезке [-1,1].

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357.)

Литература

1. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства / 1975. С.117-122.

2. Коробов В.И. Критерии управляемости линейной системы на подпространство // Вестник Харьковского университета. – 1981. – №221, Вып.46г.

MSC 11D99

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ НАД О-КОЛЬЦОМ ФИБОНАЧЧИ

Д.В. Кузнецова

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: WolvShatakeruk@gmail.com

Хорошо известно, что каждое натуральное число раскладывается в системе счисления Фибоначчи, то есть может быть записано в виде

$$N = \sum_i \varepsilon_i F_i, \quad \varepsilon_i = 0,1, \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i+1} = 0. \tag{1}$$

Тогда для двух чисел $N, M \in \mathbb{N}$ вида

$$N = \sum_i \varepsilon_i F_i\,, \quad M = \sum_j \varepsilon'_j F_j$$

операция кругового умножения задается следующим образом [1], [2]

$$N \circ M = \sum_i \sum_j \varepsilon_i \varepsilon'_j F_{i+j}.$$

Относительно этой операции множество натуральных чисел образует $\circ$-кольцо Фибоначчи.

Круговое умножение так же можно задать формулой [3]

$$N \circ M = NM + [(N+1)\tau][(M+1)\tau],$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – золотое сечение.

В работе рассматривается уравнение от двух переменных $X, Y \in \mathbb{N}$:

$$F_n \circ X - F_m \circ Y = c, \quad X \leq N \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Определим функцию

$$\delta(x) = x - [(x+1)\tau]\widetilde{\tau} \in [-1;\tau), \quad \widetilde{\tau} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,.$$

Теорема 1. *Пусть $S_{n,m}(N)$ – число решений уравнения (2). Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$S_{n,m}(N) = c_{n,m}(\delta(c))N + O(\ln N)\,,$$

где $c_{n,m}(x)$ – кусочно-линейная функция от x, называемая функцией плотности.

Для вычисления функции плотности, достаточно рассмотреть случай, когда $n > m$.

Теорема 2. *Пусть $c_{n,m}(x)$ – функция плотности. Тогда для нее справедливы следующие явные формулы:*

$$c_{1,1}(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-\tau; 0), \\ 1-x, & x \in [0; \tau), \\ \tau^2, & x \in [-1; -\tau); \end{cases} \qquad c_{1,2}(x) = \begin{cases} \tau + x, & x \in [-\tau; 0), \\ \tau, & x \in [0; \tau^2), \\ 1-x, & x \in [\tau^2; \tau), \\ -\tau - x, & x \in [-1; -\tau); \end{cases}$$

при $m > 2$

$$c_{1,m}(x) = \begin{cases} R_m + \tau^2, & x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m; -\tau^2 - L_m), \\ \tau^{m-1}, & x \in [-\tau^2 - L_m; \tau - \tau^{m-1} - L_m), \\ \tau - L_m - x, & x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau), \\ \tau - L_m - x - \widetilde{\tau}, & x \in [-1; -1 - L_m), \\ 0, & x \in [-1 - L_m; -\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m); \end{cases}$$

и при $n \geq 2$

$$c_{n,m}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1 - L_m; L_n - L_m - \tau^{m-1}), \\ \frac{R_m - L_n + x}{\tau^{n-1}}, & x \in [L_n - L_m - \tau^{m-1}; L_n - L_m), \\ \tau^{m-n}, & x \in [L_n - L_m; R_n - L_m - \tau^{m-1}), \\ \frac{R_n - L_m - x}{\tau n - 1}, & x \in [R_n - L_m - \tau^{m-1}; R_n - L_m), \\ 0, & x \in [R_n - L_m; \tau - L_m). \end{cases}$$

Здесь

$$L_i = \begin{cases} -\tau^{2k}, & i = 2k-1, \\ -\tau^{2k}, & i = 2k; \end{cases} \qquad R_i = \begin{cases} \tau^{2k-1}, & i = 2k-1, \\ \tau^{2k+1}, & i = 2k. \end{cases}$$

Литература

1. Матиясевич Ю.В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гильберта // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1968. – 8.

2. Knuth D. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. – 1988. – С.57-60.

3. Журавлев В.Г. Суммы квадратов над ∘-кольцом Фибоначчи // Зап.научн.семин. ПОМИ. – 2006. – 337. – С.165-190.

MSC 11P99

БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Рассматривается задача получения асимптотических формул для числа решений уравнения с квадратичными формами, родственная проблеме делителей Ингама.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_1(\overline{m})$ и $Q_2(\overline{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 и A_2, $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$.

Теорема 1. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $n, h \in N$, $h \leq n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i = 1,2)$ *— двойные суммы Гаусса.*

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценки А. Вейля [1] для суммы Клоостермана.

Остаточный член асимптотической формулы в теореме 1 можно улучшить, используя оценку Х.Иванца [2] для суммы сумм Клоостермана.

Теорема 2. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $2 \nmid \delta_F$, h – натуральное число, такое, что $\delta_F \mid h$, $h \leq n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

В случае, когда квадратичные формы $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ принадлежат одному классу, условие $2 \nmid \delta_F$ в формулировке теоремы 2 можно снять. В частности, справедлива

Теорема 3. *Пусть ε — произвольное положительное число, $n \in N$, h — натуральное число, такое, что $4 \mid h$, $h \ll n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}} = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} S^2(q,l,0) S^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon}),$$

где $S(q,l,0)=\sum\limits_{s=1}^{q}\exp(2\pi i l s^2/q)$ — *сумма Гаусса.*

Вторым основным результатом являются асимптотические формулы дробных моментов некоторых рядов Дирихле.

Теорема 4. *Пусть* m — *натуральное число,* $\Phi(T)$ — *сколь угодно медленно стремящаяся к* $+\infty$ *при* $T\to+\infty$ *функция. Тогда при* $\frac{1}{2}+\frac{\Phi(T)}{\ln T}\le\sigma<1$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_{T}^{2T}|\zeta(\sigma+it)|^{2/m}dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}}+O\left(T(\sigma-1/2)^{-1/m^2}e^{-0,1\Phi(T)}\right),$$

где $d_k(n)$ – *коэффициенты разложения функции* $\zeta^k(s)$ *в степенной ряд.*

Наша формула справедлива при весьма близких к $1/2$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение результата И.Ш. Джаббарова [3].

В 1989 году А. Сельберг [4] определил класс рядов Дирихле $L(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$, $(\Re s>1)$ удовлетворяющих некоторым условиям и высказал ряд гипотез.

Получение асимптотических формул для моментов функций Сельберга представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 5. *Пусть* $\sum\limits_{n\le x}|a(n)|^2n^{-1}=\log x+O(1)$, *где* $a(n)$ – *коэффициенты Дирихле функции* $L(s)$ *степени 2. Пусть* m — *натуральное число,* $\Phi(T)$ — *сколь угодно медленно стремящаяся к* $+\infty$ *при* $T\to+\infty$ *функция. Тогда при* $\frac{1}{2}+\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}\le\sigma<1$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_{T}^{2T}|L(\sigma+it)|^{2/m}dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_{1/m}(n)a(n)|^2}{n^{2\sigma}}+O\left(Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Литература

1. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika. – 1961. – №8. – P.83-86.

2. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – №70. – P.219-288.

3. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38(4). – С.481-493.

4. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno. – 1992. – P.365-387.

MSC 11B39

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ НАД $\circ$-КОЛЬЦОМ ФИБОНАЧЧИ

А.В. Лаптев

Владимирский Государственный Университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail:Oxoron30189@yandex.ru

Исследуется диофантово уравнение, связанное с умножением Фибоначчи

$$A \circ B = AB + [(A+1)\tau][(B+1)\tau],$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – золотое сечение. Впервые введенная Ю.В. Матиясевичем [1] и, независимо, Д. Кнутом [2], в настоящий момент операция активно исследуется В.Г. Журавлевым [3], И.В.Швагиревой, Д.В.Кузнецовой.

В представленной работе рассматривается уравнение вида

$$A^{②} + B^{②} = C^{②}, \tag{1}$$

где $X^{②} = X \circ X$.

Из [4] известно, что используя функцию $\delta(x) = x - [(x+1)\tau]\widetilde{\tau}, \widetilde{\tau} = \frac{1+\sqrt{(5)}}{2}$, уравнение (1) можно перевести в кольцо $\mathbb{Z}[\tau]$ и, с некоторыми ограничениями, обратно.

Теорема 1. *Любой паре чисел $U, V \in \mathbb{Z}[\tau]$ соответствует семейство решений уравнения (1) (A, B, C), где*

$$A = \delta^{-1}(t \cdot (U^2 - V^2)), B = \delta^{-1}(t \cdot 2UV), C = \delta^{-1}(t \cdot (U^2 + V^2)),$$

t принадлежит некоторому зависящему от U, V счетному подмножеству $\mathbb{Z}[\tau]$.

Семейства, полученные от различных U, V могут совпадать; при этом все семейства обладают схожей геометрической структурой.

Литература

1. Матиясевич Ю.В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гильберта // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1968. – 8. – С.132-144.

2. Knuth D.E. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. – 1988. – 2. – P. 57-60.

3. Журавлев В.Г. Суммы квадратов над о-кольцом Фибоначчи // Зап. науч. семин. ПОМИ 2006. – 337. – С.165-190.

4. Лаптев А.В. Пифагоровы и фибоначчевы тройки // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – 124. – С.240-244.

MSC 35L82

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.Ю. Ломоносова

Самарский государственный университет,
ул. Академика Павлова, 1, г.Самара, 443011, Россия, e-mail: Lomonosova.e@gmail.com

В настоящее время нелокальные задачи для эволюционных уравнений активно изучаются [1], но большинство работ посвящено уравнениям второго порядка. Однако многие физические процессы, представляющие интерес для современного естествознания, описываются более сложными уравнениями [2]. Эти соображения привели к постановке задачи с нелокальными условиями для псевдогиперболического уравнения.

В области $Q = (0, l) \times (0, T)$ для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - \vartheta u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

рассматривается задача с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

и нелокальными условиями второго рода

$$\vartheta u_{xtt}(0,t) + u_x(0,t) = \int\limits_0^l K_1(x,t)u_t(x,t)dx, \tag{4}$$

$$\vartheta u_{xtt}(l,t) + u_x(l,t) = \int\limits_0^l K_2(x,t)u_t(x,t)dx. \tag{5}$$

Обобщенным решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t) \in W(Q)$, которая удовлетворяет условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l [-u_t v_t + u_x v_x - \vartheta u_{xt} v_{xt} + c(x,t)uv]dxdt + \int\limits_0^T v(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u_t(x,t)dxdt-$$
$$-\int\limits_0^T v(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u_t(x,t)dxdt = \int\limits_0^l \psi(x)v(x,0)dx + \int\limits_0^l \vartheta\psi' v_x(x,0)dx + \int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt \tag{6}$$

для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}(Q)$, где $W(Q) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q), u_{xt} \in L_2(Q)\}$, $\hat{W}(Q) = \{v(x,t) : v \in W(Q), v(x,T) = 0\}$.

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

$$c(x,t), c_t(x,t), K_1(x,t), K_{1_t}(x,t), K_2(x,t), K_{2_t}(x,t) \in C(\bar{Q}),$$
$$\varphi(x), \psi(x) \in W_2^1(0,l), f(x,t) \in L_2(Q), \vartheta > 0.$$

Тогда задача (1)-(5) имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство теоремы основано на полученых априорных оценках. Существование решения доказывается по следующей схеме: строится последовательность приближенных решений, для чего применяется метод Галеркина, затем выводятся оценки, позволяющие выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, и показывается, что предел этой подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение.

Литература

1. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Самара: Изд-во «Самарский университет», 2012.

2. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М.: URSS, 2010.

MSC 33C10

О РЯДАХ ШЛЕМИЛЬХА ПО j-ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

Л.Н. Ляхов

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, e-mail: levnlya@mail.ru

В отличие от классических рядов Шлемильха

$$\frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_kJ_\nu(kx)+b_kY_\nu(kx)}{(kx/2)^\nu}\ ,$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν, Y_ν — функция Струве порядка ν, рассматриваются ряд

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\nu)\ j_{ev,\nu}(kx)+b_k\ j_{od,\nu}(kx)$$

по четным j-функциям Бесселя $j_{ev,\nu}(x)=2^p\Gamma(p+1)\frac{J_\nu(x)}{x^p}$ и по нечетным j-функциям Бесселя $j_{od,\nu}(x)=j'_{ev,\nu}(x)$. В лекции будут приведены следующие результаты (см. [1]), представляющие собой реализации подходов использующих формулы обращения весовых дробных интегралов порядка $\frac{\gamma}{2}=\frac{2\nu+1}{2}$. Именно, в классе четных функций решение уравнения

$$f(t)=\Pi_t^\nu g(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(t\cos\alpha)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha$$

находится по формуле

$$g(x)=\frac{2\sqrt{\pi}\cdot x}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^\gamma\ dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\ .$$

Теорема 1. *Пусть четная функция* $f\in AC^{[\frac{\gamma}{2}]+1}(0,\pi)$ *представлена равномерно сходящимся рядом Шлемильха*

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\nu)\ j_{ev,\nu}(kx),\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\,.$$

Тогда

$$a_k=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int_0^\pi\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^\gamma\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\ x\ \cos(kx)\ dx.$$

Теорема 2. *Пусть нечетная функция f такова, что $\frac{f(x)}{x}\in AC^{[\gamma/2]+2}(0,\pi)$, представлена равномерно сходящимся j-рядом Шлемильха*

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ j_{\nu,od}(kx),\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\ .$$

Тогда

$$b_k=\frac{4(\gamma+1)(\pi)^{-1/2}}{k\ \Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int_0^\pi x\ \left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+2}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^{\gamma+1}\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\ \cos(kx)\ dx\,.$$

Литература

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Многочлены Шлемильха. Интерполяционная формула Рисса для B-производной и неравенство Берштейна для дробных B-производных Вейля-Маршо // ДАН. – 2007. – 417, №5. – С.592-596.

MSC 35L82

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА АСГЕЙРСОНА ДЛЯ ОБЩЕГО УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина

Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия, e-mail: lyakhov@box.vsi.ru, polovinkin@yandex.ru, ilina_dico@mail.ru

Классическое ультрагиперболическое уравнение имеет вид $\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y)$, где Δ_x и Δ_y операторы Лапласа одной размерности n (см. [1], [2]).

Пусть $\gamma_i \geq 0$ и $B_{\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Роль операторов Лапласа в наших исследованиях играет оператор $\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^m B_i$, рассматриваемый в $R_m^+ = \{x \in R_m;\ x_1 > 0, \ldots, x_m > 0\}$. При этом мы будем требовать, чтобы $m + |\gamma| = n$, допуская, что фиксированная размерность n соответствующего евклидова пространства может быть дробной (такой оператор Δ_γ введен в [3], при условии $\gamma_i > -1$). Такое допущение, как выяснилось, равносильно требованию совпадения размерностей операторов Лапласа в классическом ультрагиперболическом уравнении.

Идея наших исследований состоит в следующем. Если $u(t)$ в каком-то смысле подходящая функция одного переменного и n — произвольное натуральное число, то сферическим преобразованием координат получим $\Delta u(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}) = B_{n-1} u(r)$. Но если $m + |\gamma| = n$, то (так же сферическим преобразованием координат) получим $\Delta_\gamma u(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}) = B_{n-1} u(r)$. Как видим, правые части этих очень разных операторов совпали при выполнении требования $m + |\gamma| = n$.

Уравнение вида

$$(\Delta_{\gamma'})_{x'} u(x', x'') = (\Delta_{\gamma''})_{x''} u(x', x''), \quad x' \in R_{m'}, \quad x'' \in R_{m''}, \tag{1}$$

где m' и m'' натуральные числа, будем называть *сингулярным ультрагиперболическим уравнением*.

Пусть ${}^\gamma T^h$ многомерный обобщенный сдвиг с векторным шагом h порядка $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (см. [3]), при $\gamma_i = 0$ соответствующий обобщенный сдвиг — просто сдвиг на шаг h_i. Рассматриваемое в этой работе *весовое сферическое среднее, порождённое многомерным обобщенным сдвигом* (в.сф. среднее), имеет вид

$$M_r^\gamma f(x) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma T^{ry} f(x) y^\gamma d\omega,$$

где $|S_1^+(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} \prod\limits_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS$.

Пусть $u(x', x'') \in C^2(R_{m'}^+ \times R_{m''}^+)$, четная по каждой из переменных. По каждой из групп переменных x' и x'' возьмём весовые сферические средние по частям единичных сфер $S_1^+(m')$ и $S_1^+(m'')$ с центрами в началах координат в $\overline{R_{m'}^+}$ и $\overline{R_{m''}^+}$ соответственно; координаты векторов сдвига в $\overline{R_{m'}^+}$ и $\overline{R_{m''}^+}$ обозначим соответственно через $y=(y_1,...,y_{m'})$ и через $z=(z_1,...,z_{m''})$. Положим

$$(M_r^{\gamma'}u)(y,r;z)=\mu_\gamma(y,z,r)=\frac{1}{|S_1^+(m')|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(m')} T_y^{r\xi}u(y,z)\;\xi^\gamma\,dS(\xi),$$

$$(M_s^{\gamma''}u)(y;z,s)=\nu_\gamma(y,z,s)=\frac{1}{|S_1^+(m'')|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(m'')} T_z^{s\zeta}u(y,z)\;\zeta^\gamma\,dS(\zeta).$$

Следующий результат, является распространением хорошо известной теоремы Асгейрссона на B-ультрагиперболическое уравнение.

Теорема 1. *Если $m'+|\gamma'|=m''+|\gamma''|$ и функция $u(x',x'')$ удовлетворяет уравнению (1), то «двойное» в.сф. среднее $(M_r^{\gamma'}M_s^{\gamma''}u(x',x''))(y,z;r,s)$ не зависит от точек y и z в $\overline{R_{m'}^+}$ и $\overline{R_{m''}^+}$ соответственно и*

$$\mu_{\gamma'}(y,z;,r)=\nu_{\gamma''}(y,z;s)\quad\Big(\Longleftrightarrow\quad M_r^{\gamma'}M_s^{\gamma''}u=M_s^{\gamma'}M_r^{\gamma''}u.\Big)\tag{2}$$

Справедливо обратное утверждение: *всякая функция $u(x,y)\in C^2(R_{m'}^+\times R_{m''}^+)$, четная по каждой из своих переменных, удовлетворяющая для всякой точки $(x,z)\in R_{m'}^+\times R_{m''}^+$ и для всякого $r>0$ условию (2), удовлетворяет уравнению (1) в $R_{m'}^+\times R_{m''}^+$.*

В классическом случае обращение теоремы Асгейрссона, изучалось в [4]. Отметим также, что нами изучена задача Коши для уравнения (1) и получена структура решения.

Литература

1. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: ИЛ., 1958. – С. 156.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир. 1964. С. 830.
3. Ляхов Л.Н. Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя. // Тр. МИАН. – 2012. – Т.278. – С. 148-160.
4. Половинкин И.П. Теоремы о среднем для волновых уравнений и уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу // Дис. … канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1992.

MSC 35M99

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

М.Г. Мажгихова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89а, Нальчик, 360000, Россия mazhgihova.madina@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{at}^{\alpha}u(\eta)-\lambda u(t)=\mu u(t-\tau),\quad t>a, \tag{1}$$

где $\partial_{at}^{\alpha}u(\eta)$ – дробная производная Капуто [1, с.11], $1<\alpha<2$, λ,μ – произвольные постоянные, $\tau>0$.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(t)$, такую, что $u(t)\in C^2[a-\tau,\infty[$ для всех $t>a$.

Задача. Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1) при $t>a$, удовлетворяющее условию

$$u(t)=u_0(t),\ a-\tau\le t\le a, \tag{2}$$

где $u(t)$ – заданная функция из класса $C^2[a-\tau,a[$.

Справедлива

Теорема. *Пусть $\varphi(t)\in C^2[a-\tau,a[$. Тогда существует единственное решение задачи (1)-(2).*

□ Для доказательства существования решения задачи (1)-(2) воспользуемся методом шагов [2, с.17]. Разобьем интервал $]a,\infty[$ на интервалы длины τ: $]a,a+\tau[$, $]a+\tau,a+2\tau[$, $]a+2\tau,a+3\tau[$, ... Обозначим решение задачи (1)-(2) на интервале $]a+(n-1)\tau,a+n\tau[$ через $u_n(t)$ $(n=\overline{1,\infty})$.

Решение $u_n(t)$ задачи (1) -(2) на интервале $]a+(n-1)\tau,a+n\tau[$ является решением следующей задачи Коши:

$$\partial^{\alpha}_{a+(n-1)\tau,t}u_n(\eta)-\lambda u_n(t)=f_{n-1}(t), \tag{3}$$

$$u_n(a+(n-1)\tau)=u_{n-1}(a+(n-1)\tau),u_n^{'}(a+(n-1)\tau)=u_{n-1}^{'}(a+(n-1)\tau),\ n=\overline{1,\infty}, \tag{4}$$

где

$$f_0(t)=\mu\varphi_0(t-\tau),f_n(t)=\mu u_n(t-\tau)-\lambda u_n(a+n\tau)-\mu u_{n-1}(a+(n-1)\tau),$$

и имеет вид [3, с.16]

$$u_n(t)=u_{n-1}(a+(n-1)\tau)E_{1/\alpha}(\lambda(t-a-(n-1)\tau)^{\alpha};1)+$$

$$+u_{n-1}^{'}(a+(n-1)\tau)(t-a-(n-1)\tau)E_{1/\alpha}(\lambda(t-a-(n-1)\tau)^{\alpha};2)+$$

$$+\int\limits_{a+(n-1)\tau}^{t} f_{n-1}(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(\lambda(t-\xi)^{\alpha};\alpha)d\xi. \qquad (5)$$

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$– два различных решения однородной задачи, соответствующей (1)-(2). Обозначим $u_1(t)-u_2(t)=u(t)$. Тогда $u(t)$ является решением следующей однородной задачи:

$$\partial^{\alpha}_{at}u(\eta)-\lambda u(t)=0,$$

$$u(t)=0,\ a-\tau\le t\le a.$$

Из (5) следует, что $u_1(t)-u_2(t)=0$. Значит $u_1(t)=u_2(t)$. Следовательно, задача (1)-(2) имеет единственное решение. ■

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М.: Физматлит, 2003.

2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / М.: Наука, 1971.

3. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / Нальчик: изд-во КБНЦ РАН, 2005.

MSC 80M99

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу для конвективного уравнения теплопроводности с учетом степенного вида зависимости теплопроводности $\lambda_g = \lambda_\infty t_g^\alpha$, $\lambda_p = \lambda_\infty t_p^\gamma$ и плотности газообразной среды от температуры в сфероидальной системе координат. Значения показателей α и γ зависят от вида газа.

$$\rho_g c_{pg}(U_g \cdot \nabla)T_g = \operatorname{div}(\lambda_g \nabla T_g), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p\,, \tag{2}$$

где $T_g,\ \rho_g$ — температура и плотность вязкой среды, c_{pg} и λ_g — соответственно, удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности газообразной среды. Здесь и далее индексы «g» и «p» будем относить к газообразной среде и частице.

Система уравнений (1)-(2) решается со следующими краевыми условиями в системе координат сплюснутого сфероида (τ, η, φ):

$$\tau = \tau_0: \qquad T_g = T_p, \qquad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial \tau} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \tau} + \sigma_0 \sigma_1 (T_p^4 - T_\infty^4)\,, \tag{3}$$

$$\tau \to \infty: \qquad T_g \to T_\infty\,, \tag{4}$$

$$\tau \to 0: \qquad T_p \neq \infty\,, \tag{5}$$

где σ_0 – интегральная степень черноты, а σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана. Индексом «∞» обозначены значения физических величин, характеризующих газообразную среду вдали от частицы.

В граничных условиях на поверхности частицы (3) учтено условие равенства температур и непрерывность потоков тепла. В качестве условий на ∞ приняты условия (4). В граничном условии (5) отражена конечность физических величин.

Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром масс движущейся частицы, а ось Oz ориентировать по направлению распространения однородного потока излучения так чтобы она совпала с осью симметрии сфероида (задача в этом случае сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком).

Основная трудность, возникающая при решении такой системы связана с ее нелинейностью. В работе рассматривается не изотермическая газообразная среда. Это означает имеет место произвольный перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. В такой постановке задачи конвективный $\rho_g c_{pg}(\mathbf{U}_g \cdot \nabla)T_g$ и основной

$\mathrm{div}(\lambda_g \nabla T_g)$ члены в уравнении теплопроводности (1) становятся сравнимыми по порядку величины и им нельзя пренебречь. В этом случае обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, поскольку уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить достаточно пригодное решение, однородно справедливое для всей области течения.

Решение конвективного уравнения (1), удовлетворяющего смешанным краевым условиям, можно найти, используя метод сращиваемых асимптотических разложений. Главная идея, лежащая в основе этого метода, заключается в представлении решения несколькими разложениями, каждое из которых пригодно в некоторой части рассматриваемой области, причем области применимости соседних разложений перекрываются, что и позволяет провести их сращивание [1, 2].

Кроме того, в работе рассматривается сфероидальная система координат, а в этой системе координат коэффициенты Ламэ зависят от двух переменных, что приводит к дополнительным математическим трудностям.

Если заменить краевое условие (4) на условие, которое в системе координат сплюснутого сфероида имеет вид:

$$\tau \to \infty : \qquad T_g \to T_\infty + |\nabla\, T_g| c \,\mathrm{sh}\, \tau \cos\eta, \tag{6}$$

то краевую задачу (3), (5)-(6) для нелинейного уравнения конвективной теплопроводности (1)-(2) можно решить другим методом — методом последовательных приближений. Использование этого метода связано с особенностью постановки краевых условий вдали от частицы (на бесконечности).

В рассмотренных математических методах важное место отводится малому параметру. Определяющими параметрами задачи являются материальные постоянные ρ_∞, μ_∞, c_{pg} и сохраняющиеся в процессе движения частицы параметры R, $|\nabla\, T_g|$, T_∞ и U. Здесь $U-$ характерная скорость задачи. Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию $\mathrm{Re}_\infty = R U \rho_\infty / \mu_\infty$. В задаче, кроме числа Рейнольдса, имеется еще один малый контролируемый параметр $\zeta = R|\nabla T_g|/T_\infty$, характеризующий перепад температуры на размере частицы. По порядку величины характерная скорость равна $U \sim \mu_\infty |\nabla\, T_g|/(\rho_\infty T_\infty)$ и число Рейнольдса построенное по этой характерной скорости совпадает с малым параметром $\zeta = R|\nabla T_g|/T_\infty$. Поэтому при решении задачи методом сращиваемых асимптотических разложений удобнее пользоваться малым параметром Re, а при решении задачи методом последовательных приближений - параметром ζ.

Литература

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.: Мир, 1967. – 310 с.
2. Найфе А. Введение в методы возмущений / М.: Мир, 1984. -– 536 с.

MSC 80M99

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕПЛООБМЕНА СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

Н.В. Малай, А.А. Стукалов, Е.Р. Щукин, С.В. Цыбульников

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:
malay@bsu.edu.ru, ctukalov@bsu.edu.ru, evgrom@yandex.ru

Исследование многочисленных энергетических процессов связано с решением задач о переносе теплоты. Перенос этой субстанции в твердых телах, жидкостях и газах подчиняется условно принятым линейным зависимостям – перенос теплоты подчиняется закону Фурье: плотность теплового потока (удельный тепловой поток) пропорционален температурному градиенту. На основании этого линеаризованного закона выводится дифференциальное уравнение переноса теплоты [1,2]. В работе рассматривается следующая краевая задача:

$$\rho_e c_{pe} \left(\mathbf{U_e} \nabla\right) T_e = \operatorname{div}\left(\lambda_e \nabla T_e\right), \quad \operatorname{div}\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i \tag{1}$$

с краевыми условиями в сферической системе координат r, θ, φ

$$\begin{aligned} r = R,\ T_e = T_i,\ \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_o \sigma_1 \left(T_i^4 - T_{e\infty}^4\right), \\ r \to \infty, \quad T_e = T_{e\infty}, \\ r \to 0, \quad T_i \neq \infty, \end{aligned}$$

где R – радиус частицы, σ_o – постоянная Стефана-Больцмана; σ_1 – интегральная степень черноты; ρ_e, $\mathbf{U_e}$ и c_{pe} – плотность, массовоая скорость и удельная теплоемкость газообразной среды; q_i – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых происходит нагрев поверхности частицы.

В литературе первое уравнение в выражении (1) называется конвективным уравнением переноса тепла. Оно описывает переноса тепла в газообразной среде за счет движения самой среды левая часть этого уравнения и за счет теплопроводности – правая часть. Наличие левой части делает это уравнение существенно нелинейным, что приводит к большим математическим трудностям при нахождении его решений [3,4].

Таким образом, многие задачи по теплопереносу с которыми сталкиваются сегодня физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы.

Проведенные авторами исследования показали, что нелинейную систему уравнений можно решить используя метод сращиваемых асимптотических разложений [3,4]. Доказана теорема единственности решения для рассматриваемой краевой задачи.

Литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1971.
2. Соболев С.А. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1966.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике и жидкости / М.: Химия, 1966.
4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / М.: Иностр. лит-ра, 1958.

MSC 34K30

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АДАМАРА

Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Manaenkova@bsu.edu.ru

В банаховом пространстве X при $0 < \alpha, \beta < 1$ рассматривается задача типа Коши

$$ {}^H D^{\alpha}_{a+} \, {}^H D^{\beta}_{a+} u(t) = Au(t), \quad t > a, \tag{1} $$

$$ \lim_{t \to a+} {}^H D^{\beta-1}_{a+} u(t) = 0, \quad \lim_{t \to a+} {}^H D^{\alpha-1}_{a+} \left({}^H D^{\beta}_{a+} u(t) \right) = u_1, \tag{2} $$

при этом будем считать, что A — линейный замкнутый оператор, ${}^H D^{\beta-1}_{a+} u(t) = {}^H I^{1-\beta}_{a+} u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \displaystyle\int\limits_a^t \left(\ln \frac{t}{x} \right)^{-\beta} u(x) \, \frac{dx}{x}$ — левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1 - \beta$ (см. [1]).

Применим к обеим частям уравнения (1) операторы ${}^H I^{\alpha}_{a+}$ и ${}^H I^{\beta}_{a+}$ дробного интегрирования порядка α. Учитывая начальные условия, получим интегральное уравнение вида

$$ u(t) = \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta-1} \frac{u_1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int\limits_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} Au(s) \frac{ds}{s} \quad . \tag{3} $$

Определение 1. *Интегральное уравнение* (3) *называется равномерно корректным, если для каждого* $u_1 \in D(A)$ *существует единственное решение* $u(\tau; u_1) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$ *этого уравнения и если* $u_{1,m} \in D(A)$, $u_{1,m} \to 0$ *влечет сходимость* $u(\tau; u_{1,m}) \to 0$ *равномерно по* t *на любом компактном интервале из* $(0, \infty)$.

Определение 2. *Операторная функция* $W_{\alpha,\beta}(\tau) \in \mathcal{B}(X)$ *называется разрешающим оператором для задачи* (1), (2), *если выполнены следующие условия:*

(i) $W_{\alpha,\beta}(\tau)$ *сильно непрерывна при* $t > 0$ *и* $D^{\alpha-1}_{0+}(D^{\beta}_{0+}) W_{\alpha,\beta}(0) = I$,

(ii) $W_{\alpha,\beta}(\tau)$ *коммутирует с* A, *то есть,* $W_{\alpha,\beta}(\tau) D(A) \subset D(A)$ *и* $AW_{\alpha,\beta}(\tau) u_{n-1} = W_{\alpha,\beta}(\tau) A u_{n-1}$ *для любого* $u_{n-1} \in D(A)$ *и* $t > 0$,

(iii) $W_{\alpha,\beta}(\tau) u_{n-1}$ *является решением задачи* (1), (2) *для любого* $u_{n-1} \in D(A)$ *и* $t > 0$.

Определение 3. *Будем говорить, что оператор* A *принадлежит классу* $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M, \omega)$, *если задача* (1), (2) *имеет разрешающий оператор* $W_{\alpha,\beta}(\tau)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$ \| W_{\alpha,\beta}(\tau) \| \le M \left(\ln \frac{\tau}{a} \right) \tau^{\omega}, \quad \tau > 0, \tag{4} $$

где $\omega \in \mathbb{R}$ *и функция* $M(\tau) = \tau^{\alpha+\beta-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$, *тогда оператор* $(\lambda^{\alpha+\beta}I - A)$ *обратим и* $\widehat{W}_{\alpha,\beta}(\lambda) = R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)$, *то есть, множество* $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\}$ *включено в* $\rho(A)$ *и*

$$R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)u_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} W_{\alpha,\beta}(t) u_1 \, dt, \quad u_1 \in X. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0,\ \beta > 0$. *Тогда* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *оператор* $D_{0+}^{\alpha-1} D_{0+}^{\beta} W_{\alpha,\beta}(t)$ *непрерывен в равномерной операторной топологии только тогда, когда* $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$. *В этом случае* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!} \left\| \frac{d^n R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)}{d\lambda^n} \right\| \le K_0, \quad \lambda > \omega,\ K_0 > 0. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha \le 2$. *Тогда* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ *и существует сильно непрерывная операторная функция* $W(t)$, *удовлетворяющая неравенству* $\|W(t)\| \le M(t) t^\omega,\ \ t > 0,\ \ M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} W(t) u_{n-1} \, dt, \quad u_{n-1} \in X, \tag{7}$$

и в этом случае $W(t) = W_{\alpha,\beta}(t)$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.

MSC 76A10

ЗАДАЧА ТЕЙЛОРА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева

Новгородский Государственный университет им. Ярослава Мудрого,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Российская Федерация, e-mail:
oltan.72@mail.ru, tamara.sukacheva@novsu.ru

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-\kappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v \end{cases} \tag{1}$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта [1]. Функция $v = (v_1,\ldots,v_n), v_i = v_i(x,t), x\in\Omega$ имеет физический смысл скорости течения, функция $p = p(x,t)$ отвечает давлению. Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n = 2,3,4$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Параметры $\nu\in\mathbb{R}_+$ и $\kappa\in\mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно, функция $f = (f_1,\ldots,f_n),\ f_i = \ f_i(x,t)$ характеризует внешнее воздействие на жидкость.

Задача Тейлора для системы (1) моделирует ситуацию, когда вязкоупругая несжимаемая жидкость Кельвина-Фойгта занимает пространство между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами бесконечной длины [2]. Область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n = 2,3,4$ (с кусочно-гладкой границей) выбирается так, чтобы на ее границе $\partial_1\Omega$ (лежащей, например, при $n = 3$ на двух плоскостях α и β , перпендикулярных оси цилиндров) выполнялось условие периодичности. (т.е. $v(x,t)|_{\partial\Omega\cap\alpha} = v(x,t)|_{\partial\Omega\cap\beta}$, $\partial\Omega\cap(\alpha\cup\beta) = \partial_1\Omega$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$).

Выбирается некоторое стационарное решение $\tilde v = \tilde v(x)$ системы (1), удовлетворяющее на $\partial_1\Omega$ условию периодичности, а на $\partial_2\Omega = \partial\Omega\setminus\partial_1\Omega$ неоднородным условиям Дирихле (например, течение Куэтта), и исследуется динамика отклонения $v = v(x,t)$ от этого стационарного решения, вызванного начальным условием. Поэтому система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} (1-\kappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)\tilde v - (\tilde v\cdot\nabla)\, v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p, \\ 0 = \nabla\cdot v. \end{cases} \tag{2}$$

Для системы (1) рассматривается задача Тейлора

$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x), \quad \forall x\in\Omega, \quad v(x,t) = 0,\ \forall (x,t)\in\partial_2\Omega, \\ v(x,t)\ \text{ удовлетворяют условию периодичности на } \partial_1\Omega\times\mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Целью работы является изучение разрешимости задачи (2), (3). Разрешимость указанной задачи исследуется в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [3, 4]. Поэтому сначала исследуется абстрактная задача Коши для указанного класса уравнений, а затем задача (2), (3) рассматривается как конкретная интерпретация этой абстрактной задачи.

Теорема. *Пусть* $u_0 \in B$. *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(u_0)$ *существует единственное решение задачи (2), (3) являющееся квазистационарной траекторией* $u = (u_\sigma, 0, \bar{p})$ *класса* $C^\infty((-t_0, t_0); B)$ *и такое, что* $u \in B$ *для всех* $t \in (-t_0, t_o)$.

Здесь B – фазовое пространство [4] рассматриваемой задачи Тейлора.

Задача Тейлора для модели ненулевого порядка изучалась в [5], там же приведены и подробности редукции к абстрактной задаче Коши. Результаты по задаче Тейлора для обобщенной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта опубликованы в [6].

Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного программой стратегического развития Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого на 2012-2016 годы.

Литература

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1988. – №179. – С.126-164.

2. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Москва: Мир, 1980.

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / Utrecht-Boston: VSP, 2003.

4. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1990. – 26, №2. – С.250-258.

5. Матвеева О.П. Квазистационарные траектории задачи Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка // Вестник ЮУрГУ, Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2010. – №16(192), Вып.5. – С.39-47.

6. Матвеева О.П., Сукачева Т.Г. Задача Тейлора для обобщенной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка // Физико-математические науки и образование: сборник трудов участников Всероссийской научно-практической конференции (7-8 ноября). Магнитогорск: МаГУ, 2012. – С.149-153.

MSC 35Q05

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА

А.Н. Миронов

Елабужский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Казанская, 89, Елабуга, 423600, Россия, e-mail: miro73@mail.ru

Построен аналог уравнения Эйлера-Пуассона для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка, допускающий трехмерную алгебру Ли. Доказано, что максимальная размерность алгебры Ли, допускаемой указанным уравнением при специализации параметров, равна четырем.

Здесь рассматривается уравнение

$$u_{xxy} + a_{20}(x,y)u_{xx} + a_{11}(x,y)u_{xy} + a_{10}(x,y)u_x + a_{01}(x,y)u_y + a_{00}(x,y)u = 0, \qquad (1)$$

которое с различных точек зрения исследовалось, например, в [1], [2], [3]. Оно относится к одному из канонических видов, выделенных в [4]. Частным случаем (2) является уравнение Аллера $u_t = (au_x + bu_{xt})_x$, встречающееся при моделировании процесса переноса почвенной влаги в зоне аэрации [5, пп. 1.5 и 9.6].

Инварианты Лапласа для уравнения (2) имеют вид [6]

$$\begin{aligned} &h_1 = 2a_{20x} + a_{20}a_{11} - a_{10},\ h_2 = a_{11y} + a_{20}a_{11} - a_{10}, \\ &h_3 = a_{11x} + \frac{a_{11}^2}{2} - 2a_{01}, \\ &h_4 = 2a_{20xx} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}, \\ &h_5 = a_{11xy} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Приложения инвариантов Лапласа уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \qquad (3)$$

широко известны и изложены, в частности, в работах [7, с. 116-125], [8, с. 175-186].

Известно [7, с. 99-100], что алгебра Ли уравнения (2) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + \sigma(x,y)u\partial_u, \qquad (4)$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений подалгебра с оператором $\omega(x,y)\partial_u$, ω — решение уравнения (2).

Определяющие уравнения для (2) могут быть записаны в терминах инвариантов Лапласа (2).

Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} + \frac{A_{20}}{x+y}u_{xx} + \frac{A_{11}}{x+y}u_{xy} + \frac{A_{10}}{(x+y)^2}u_x + \frac{A_{01}}{(x+y)^2}u_y + \frac{A_{00}}{(x+y)^3}u = 0, \qquad (5)$$

где все $A_{ij} = \text{const}$. Используя определяющие уравнения, легко убедиться, что при всевозможных значениях параметров A_{ij} данное уравнение допускает алгебру L^3, образованную операторами $X_0 = u\partial_u$, $X_1 = \partial_x - \partial_y$, $X_2 = x\partial_x - y\partial_y$.

Уравнение (5) может рассматриваться в качестве аналога уравнения Эйлера-Пуассона. В частности, в работе [9] для частных случаев уравнения (5) предложен метод каскадного интегрирования, обобщающий известный результат для уравнения Эйлера-Пуассона [8, с. 177–181].

Теорема. *Пусть выполняется условие $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$. Тогда наибольшая размерность допускаемой уравнением (5) алгебры Ли L^r операторов (4) равна четырем.*

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. – 1987. – 297, №3. – С.547-552.

2. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – №10. – С.73-76.

3. Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Матем. заметки. – 2003. – 74, Вып.4.Ё– С.517-528.

4. Джураев Т.Д., Попёлек Я. О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка // Успехи матем. наук. – 1989. – 44, Вып.4. – С.237-238.

5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / М.: Наука, 2006. – 288 с.

6. Миронов А.Н., Миронова Л.Б. К инвариантам Лапласа для уравнения со старшей частной производной третьего порядка в R^2 // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. XIII всеросс. конф. с междунар. участием. Ч.3. Самара, 2011. – С.131-133.

7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / М.: Наука, 1978.

8. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / М.: ИЛ, 1957.

9. Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. – 2006. – №9. – С.67-70.

MSC 35J45

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *)

С.П. Митин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Рассмотрим в области D на плоскости систему Ламе

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

с кусочно постоянными матричными коэффициентами

$$a_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_6\\ \alpha_6 & \alpha_3\end{pmatrix},\qquad a_{12}=\begin{pmatrix}\alpha_6 & \alpha_4\\ \alpha_3 & \alpha_5\end{pmatrix},$$

$$a_{21}=\begin{pmatrix}\alpha_6 & \alpha_3\\ \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix},\qquad a_{22}=\begin{pmatrix}\alpha_3 & \alpha_5\\ \alpha_5 & \alpha_2\end{pmatrix},$$

которые сохраняют постоянное значение в некоторой подобласти $D_0\subseteq D$ и в ее дополнении $D_1=D\setminus D_0$. Предполагается, что D и D_0 ограничены сомкнутыми ляпуновскими дугами, соответственно Γ и Γ_0 с общими концами в одной точке τ (можно считать $\tau=0$), причем в этой точке они некасательны друг к другу.

Требуется найти вектор смещения $u=(u_1,u_2)\in C(\overline{D})$, являющийся решением системы (1) в $D_0\cup D_1$, удовлетворяющий краевому условию Дирихле

$$u\big|_{\Gamma}=f \tag{2}$$

и подчиненный контактному условию

$$(\sigma^+-\sigma^-)n\big|_{\Gamma_0}=0\,, \tag{3}$$

где знаки $+$ и $-$ соответствуют предельным значениям кусочно постоянного тензора напряжений σ на Γ_0 изнутри и снаружи D_0 и n означает единичную нормаль на Γ_0 (внешнюю по отношению к D_0).

Задачи подобного типа возникают в механике композитных материалов[1]. Более типична и хорошо изучена (см., например, [2,3]) ситуация, когда Γ_0 является гладкой

*Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357).

разомкнутой дугой с концами на ∂D, разбивающая D на две «равноправные» подобласти.

С помощью теоретико-функционального подхода[4], основанного на представлении общего решения системы Ламе через функции, аналитические по Дуглису, задача (1)-(3) редуцирована к так называемой нелокальной задаче Римана[5] для этих функций. В терминах концевого символа выписаны условия разрешимости этой задачи и описана асимптотика тензора напряжений в угловой точке области.

Литература

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / М., 1983.

2. Hein V.L., Erdogan F. // Internat. J. of Fracture Mech. – 1971. – 7. – P.317- 330.

3. Митин С.П., Солдатов А.П. О разрешимости смешанно-контактной задачи плоской теории упругости / Дифференц. уравн. – 1993. – 29, №.5. – С.885-889.

4. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Известия РАН (сер. матем.). – 2006. – 70, №6. – С.161-192.

5. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Докл.АН СССР. – 1988. – 299, №.4. – С.825-828.

MSC 37J99

СУЩЕСТВОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А.П. Михайлов

Старый Оскол, e-mail: mikhailovap@mail.ru

Вопросу существования периодических решений гамильтоновых систем посвящено достаточно большое количество работ.

При рассмотрении гамильтоновой системы вида $\dot{x} = JH'(t,x)$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, на функцию $H(t,x)$ накладываются условия, которые позволяют применять для нахождения критических точек различные вариационные методы.

Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему

$$\ddot{x} + V'(t,x) = v'(t,x)\,, \tag{1}$$

где $V:\ R\times R^n \to R - \omega$-периодическая по $\boldsymbol{t}$ и дифференцируемая по $\boldsymbol{x}$ функция, такая, что $V'(t,x) = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных и положительно однородна степени α, $\alpha \in (0;1)$,

$v'(t,x)/|x|^{\alpha} \to 0,\ |x| \to \infty$ равномерно по t,

$v'(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных.

Рассматривается задача о существовании $k\omega$-периодических решений уравнения (1), где $\boldsymbol{\kappa}$ – целое число, $k > 1$**.** Такие решения, не являющиеся ω-периодическими, называются субгармоническими. Исследованию вопроса существования субгармонических решений уравнения (1) посвящены работы [1],[2].

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\int\limits_0^{\omega} V(t,x)dt > 0,\ x \in\ S^{n-1}\,. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (2)*. Тогда уравнение* (1) *для каждого целого* $k > 1$ *имеет, по крайней мере, одно субгармоническое решение.*

Литература

1. Tang C.L., Wu X.P. Subharmonic solutions for nonautonomous sublinear second order Hamiltonian systems // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – 304. – P.383-393.

2. Serra E., Tarallo M. Subhamonic solutions to second order differential equations with periodic nonlinearities // Nonl. Anal. – 2000. – 41. – P.649-667.

MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА И С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

С.М. Мухсинова, А.Б. Расулов

Худжанд, Таджикистан, e-mail: mirzodaler@mail.com
Москва, Россия, e-mail: rasulov-abdu @rambler.ru

Пусть $S^+ = \{(x, y) : y > 0, -\infty < x < +\infty\}$. В области $S^+_\varepsilon = \{(x, y) : y > \varepsilon, -\infty < x < +\infty\}$ рассмотрим уравнение с сингулярной линией вида

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\partial_{\overline{z}} - \frac{a_j(z)}{z-\overline{z}}\right)U = f(z), \qquad m = 1, 2, 3; \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши-Римана, $a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{S^+}), j = \overline{1,3}, U(z)$ – искомая $F(z) \in L^{p,2}(S^+), p > 2$ – заданные функции.

Пусть $D^{j,p}(S^+)$, $p > 2, j = 1, 2, 3$ – класс функций, имеющих обобщенную производную j-го порядка по $\overline{z}$, ограниченных при $r \to \infty$ по любым направлениям. В работе найдено интегральное представление решений уравнения (1) и исследована задача типа Римана-Гильберта. Эта задача формулируется следующим образом.

Требуется найти решение $U(z) \in D^{3,p}(S^+)$ уравнения (1) по краевому условию

$$Re[\lambda_j|z-\overline{z}|^{-a_j}U]_{\partial S^+} = g_j(t), \tag{G}$$

где функция $\lambda_j(t) = \alpha_j(t) + i\beta_j(t) \in H(\partial S^+)$, - причем $\lambda_j(t) \neq 0, t \in \partial S^+, g_j(t) = o(|t|^{-h_j}), h_j > 0, j = 1, 2, 3.$

MSC 37N20

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА КОНЦЕНТРАЦИИ ПОГЛОЩАЮЩИХ МОЛЕКУЛ ПО ТРАССЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А.М. Нахушев, В.А. Нахушева

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, ул. Шортанова, 89а, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: niipma@mail333.com

Предложен метод расчета распределения концентрации поглощающих молекул по трассе $z \geq 0$ лазерного излучения в случае, когда поглощающий слой является средой с фрактальной геометрией. В основе метода лежит нагруженное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка, меняющего свой тип в критический момент времени $t = \tau$, когда концентрация молекул поглощающей среды достигает максимального значения. При определенных физически допустимых предположениях в качестве такого уравнения можно взять уравнение

$$\partial_{\tau t}^{\alpha+1} \upsilon(z, \eta) + \operatorname{sign}(t - \tau)|t - \tau|^m \frac{\partial^2 \upsilon(z, t)}{\partial z^2} = 0\,, \tag{1}$$

где $0 < \alpha = \mathrm{const} \leq 1$, $\partial_{\tau t}^{\alpha+1}$ – регуляризованный оператор Римана-Лиувилля дробного порядка $\alpha + 1$ с началом и концом в моменты времени τ и t или оператор дробного дифференцирования по Капуто, $\upsilon(z, t)$ – концентрация поглощающих молекул в точке $z \geq 0$ в момент времени t, m – неотрицательное число [1]-[3]. Уравнение (1) при $\alpha = 1$, $m = 1$ совпадает с хорошо известным в газовой динамике уравнением Трикоми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00142-а) и по Программе Отделения математических наук РАН «Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач» (проект «Нагруженные уравнения смешанного типа и их применение к фрактальным динамическим системам с распределенными параметрами»).

Литература

1. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов / М.: Наука, 2006. – 174 с.

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

3. Nakhushev A.M., Nakhusheva V.A. On an algorithm for calculating the concentration distribution of absorbing molecules along the laser beam // in «Physics of Extreme States of Matter» / Moscow, 2013. – P.154-157.

MSC 60J99

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

З.А. Нахушева

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, ул. Шортанова, 89 "а" , Нальчик, 360000, Россия, e-mail: niipma@mail333.com

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение фрактальной диффузии

$$D^{\alpha}_{0y} u\,(x, \eta) = \beta u_{xx}\,(x, y)\,, \tag{1}$$

где $\beta = \text{const} > 0$, D^{α}_{0y} – оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка α, $0 < \alpha \leq 1$.

Уравнение (1) относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений с частной производной по переменной y дробного порядка и является математической моделью многих процессов и явлений в средах с фрактальной топологией [1]-[4]. В этих моделях независимая переменная y играет роль безразмерной временной переменной.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу с интегральным условием, которую назовем задачей Самарского в видоизмененной постановке.

Постановка задачи. Найти решение $u\,(x, y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющего условиям:

$$\lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} u\,(x, y) = \tau(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

$$u\,(0, y) = u_0(y), \qquad 0 < y \leq T, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^l u\,(x, y)\,dx = \mu y^{\alpha-1}, \qquad 0 < y \leq T, \tag{4}$$

где $\tau(x)$ и $u_0(y)$ – заданные функции, μ – заданное действительное число.

Предполагается, что функция $y^{1-\alpha}u(x, y)$ – непрерывна в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, $u(x, y)$ в области Ω обладает производной порядка α по y, суммируемой по $x \in [0, l]$ для всех $y \in]0, T]$, $\tau(x) \in C[0, l]$, $u_0(y) \in C]0, T]$ и при $y \to 0$ может обращаться в бесконечность порядка $\leq 1 - \alpha$.

Условие

$$\int\limits_0^l \tau\,(x)\,dx = \mu$$

является необходимым условием разрешимости задачи (1)-(4).

В работе доказаны существование и единственность решения задачи Самарского в видоизмененной постановке; предложена конструктивная схема эквивалентной редукции этой нелокальной краевой задачи к локальной.

Литература

1. Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. – 2004. – 174, №8. – С.809-852.

2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / М.: Наука, 2012.

3. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов / М.: Наука, 2006.

4. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / М.: Наука, 2005.

MSC 93B30

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯХ

А.И. Недошивина

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: vishechka87@mail.ru

При эксплуатации систем видеонаблюдения объектов различного назначения возникает задача сжатия полученных данных, так как даже при скромных характеристиках видеопотоков количество информации, подлежащей хранению, чрезвычайно велико. В работе рассмотрена задача, возникающая в процессе реализации одной из методик сжатия видеоинформации.

Рассмотрим результат сохранения видеонаблюдений как последовательность массивов данных, подлежащих хранению. Например, могут сохраняться кадры с камер видеонаблюдения. При этом информация может сохраняться не со всего кадра целиком, а только с заранее определённой области экрана, что приводит к существенной экономии в объемах хранимых данных. При этом возникает задача определения нужной сохраняемой части данных, например, попиксельное определение координат сохраняемых точек. Так возникает задача о локализации области. Рассмотрим эту задачу подробнее. Для этой задачи существуют несколько различных алгоритмов решения, каждый из них имеет как свои достоинства, так и недостатки. В работе предлагается алгоритм решения, основанный на интегральных формулах Коши из теории функций комплексного переменного.

Как уже было указано, алгоритм основан на использовании теоремы и формулы Коши. Вычислим величину

$$K = \int\limits_{\Delta} \frac{dz}{z-w}\,,$$

где Δ – контур данного многоугольника , w – данная точка плоскости. Тогда из теоремы и формулы Коши следует, что при $K = 0$ точка $w \in M$, то есть рассматриваемая точка попадает внутрь заданного многоугольника. При $K = 2\pi i$ точка $w \notin M$, то есть рассматриваемая точка лежит снаружи от рассматриваемого многоугольника. А при $K = \infty$ точка $W \in \Delta$, то есть оказывается на границе многоугольника, на практике в этом случае при вычислениях значением величины K оказывается некоторое большое число.

Вычислим величину K при данных координатах вершин многоугольника M и точки плоскости w. Рассмотрим случай многоугольника. Для этого возьмем одну его сторону и произведем все вычисления для нее. Интеграл для стороны многоугольника получается равен сумме арктангенсов и натуральных логарифмов. Но если включить сторону в замкнутый контур многоугольника, логарифмы сокращаются. Величина K для многоугольника становится равной сумме арктангенсов.

Окончательная формула имеет вид

$$K = i\sum_{k}\left(\operatorname{arctg}\frac{(x_0-x_k)(x_k-x_{k+1})+(y_0-y_{k+1})(y_k-y_{k+1})}{y_0(x_{k+1}-x_k)+y_k(x_0-x_{k+1})+y_{k+1}(x_k-x_0)}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{(x_0-x_k)(x_k-x_{k+1})+(y_0-y_k)(y_k-y_{k+1})}{(y_0-y_k)(x_{k+1}-x_k)+x_0(y_k-y_{k+1})}\right),$$

где (x_0, y_0) – точка, принадлежность которой многоугольнику мы исследуем, а суммирование распространяется на все стороны многоугольника.

Метод позволяет решать поставленную задачу о локализации точки также относительно криволинейных многоугольных областей аналитически при по-мощи явных вычислений. Кроме того, к числу достоинств предложенного метода можно отнести три его особенности:

- метод работает для криволинейных границ, составленных из кусков сплайнов, кривых Безье и т.д. при этом вычисления с помощью пакета MATHEMATICA несколько усложняются, однако без принципиальных затруднений доводятся до явных формул, как только заданы уравнения частей границы;
- метод выгодно применять, когда точка лежит вблизи границы области. Конкурирующие методы приводят к необходимости сравнивать практически равные числа, тогда как в данном методе сравнивать приходится существенно различающиеся по модулю величины: $0, 2\pi, \infty$;
- данный метод не требует выпуклости многоугольника в отличие от большинства других известных методов.

Таким образом, для локализации части экрана, полученного в результате видеонаблюдения, предлагается следующий алгоритм:

1. Координаты всех точек экрана подставляются в полученную формулу.
2. Сохраняются только те точки, которые попадают в заданную область локализации.

Изложенная методика может быть использована для оптимизации сохранения данных, получаемых, например, при записи на компьютер результатов слежения видеоаппаратурой.

Литература

1. Недошивина А.И., Ситник С.М. Об одной задаче компьютерной геометрии, применяемой при сжатии результатов видеонаблюдений // Труды молодых ученых (РАН, Владикавказский научный центр). – 2010. – №3. – С.23-28.

2. Недошивина А.И. О локализации точки относительно плоских областей / Материалы 8 международной научно-практической конференции: «Перспективные разработки науки и техники», Польша. 2012. – С.78-85.

MSC 74F10

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ПЛАСТЕ ВБЛИЗИ СКВАЖИНЫ

И.В. Некрасова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Nekrasova-I@bsu.edu.ru

Представлена математическая модель распределения поля давления в пороупругом грунте в процессе гидравлического удара (разрыва) пласта. Её вывод основан на строгом усреднении точных уравнений, описывающих на микроскопическом уровне совместное движение твердого скелета грунта и вязкой жидкости, заполняющей поры в грунте.

В безразмерных переменных дифференциальные уравнения точной модели в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$, моделирующей нефтяной пласт, состоят из уравнений Стокса для вязкой жидкости в порах. В области Ω_0, моделирующей скважину, скорость $\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon / \partial t$ и давление p^ε также подчиняются системе уравнений Стокса. Твердая упругая часть области Ω подчиняется уравнениям Ламэ.

Модель замыкается условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений на границе жидкости и упругого тела, однородными начальными условиями на перемещения и скорости и смешанными условиями на границе области движения: на верхнем сечении области Ω задано распределение давления, а на оставшейся части границы – условие неподвижности.

Модель содержит два безразмерных параметра α_μ и α_λ, зависящих от малого параметра ε. Целью автора является вывод предельной модели (усреднённых уравнений) при стремлении ε к нулю. При этом безразмерные параметры удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 < \lambda_0 < \infty, \; 0 < \mu_0 < \infty \, ,$$

где

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon).$$

В результате усреднения получена односкоростная модель, представляющая собой начально-краевую задачу для нестационарной модели Стокса.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

MSC 35L05

ASYMPTOTIC EXPANSION OF SINGULAR SOLUTIONS OF PROTTER'S PROBLEM FOR (3+1)-D DEGENERATE WAVE EQUATION

A.N. Nikolov, N.I. Popivanov

Faculty of Mathematics and Informatics, University of Sofia,
James Baucher Str. 5, 1164 Sofia, Bulgaria, e-mail: lio6kata@yahoo.com, nedyu@fmi.uni-sofia.bg

In 1952 Protter introduced some new boundary value problems for the degenerate wave equation which are multidimensional analogues of the Darboux problems in R^2, but in contrast to the two-dimensional case, the Protter problems are not well possed. Actually, the homogeneous adjoint problems have infinitely many nontrivial classical solutions. This means that a necessary condition for the existence of classical solutions is the orthogonality of the right-hand side function of the equation to all these functions. Such nontrivial solutions were firstly built in 1993 by Popivanov and Schneider to Protter's problem for $(2+1)-D$ degenerate wave equation. They introduced an appropriate notion of generalized solution of this problem and they proved an existence and uniqueness of this solution. Further, they found that there exist generalized solutions with a strong power-type singularity at the origin, which is isolated at this point and does not propagate along the bicharacteristics.

We extend these results for this problem for the $(3+1)-D$ degenerate wave equation. As a main result, we construct an asymptotic expansion of the generalized solutions near the origin. This expansion gives necessary and sufficient conditions on the right-hand side of the equation for existence of singular solutions with fixed order of singularity.

Acknowledgments. This work was supported by the European Social Fund through the Human Resource Development Operational Programme under contract BG051PO001-3.3.06-0052 (2012/2014) and by the Bulgarian NSF under Grant DCVP 02/1.

References

1. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter's problem for (3+1)-D degenerate wave equation // AIP Conf. Proc. – 2012. – 1497 – P.233-238.

2. Popivanov N.I., Popov T.P. Behaviour of singular solutions to 3-D Protter problem for a degenerate hyperbolic equation // Compt. rend. Acad. bulg. Sci. – 2010. – 63, №. 6. – P.829-834.

3. Popivanov N.I., Schneider M. The Darboux problems in R^3 for a class of degenerated hyperbolic equations // J. Math. Anal. Appl. – 1993. – 175. – P.537-579.

4. Protter M.H. New boundary value problem for the wave equation and equations of mixed type // J. Rat. Mech. Anal. – 1954. – 3. – P.435-446.

MSC 34M99

ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ

М.Х. Нуман Эльшейх

В сообщении рассматриваются операторы Лапласа на графах с конечным или счётным числом рёбер. Работа является продолжением исследований [2], в которых изучался граф с конечным множеством ребер. Даётся описание самосопряжённых расширений симметрического оператора, изначально заданного на гладких финитных функциях, носитель которых не содержит точек ветвления.

Граф с одной вершиной. Граф Γ мы определяем как объединение n экземпляров полупрямых $\Gamma_j = [0, +\infty)$, $j = 0, \ldots, n$ с общим началом Q, называемым вершиной графа. Предполагается, что на Γ задана Борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую полупрямую Γ_j совпадало со стандартной мерой Лебега, тогда $L_2(\Gamma) = \oplus L_2(\Gamma_j)$. Пусть $C_0^\infty(\Gamma)$ – векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точки Q, и $L_0 = \oplus L_0^j$ – линейный оператор, определяемый на $C_0^\infty(\Gamma)$, соотношением $L_0 u = \{L_0^j u_j\}$, $L_0^j u_j = \dfrac{1}{m_j}\Delta_j u_j + iB_j(x)\dfrac{\partial u_j}{\partial x} + i\dfrac{\partial (B_j(x) u_j)}{\partial x} + C_j(x) u_j$. Здесь $\{u_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ -– сужения функции u на полупрямые Γ_j. Предполагается, что при всех j числа $m_j > 0$ и функции $B_j(x)$, $C_j(x)$ вещественнозначны, ограничены и непрерывно дифференцируемы на полупрямой Γ_j. Через b_j обозначим предельное значение функции $B_j(0)$ в точке Q. Оператор L_0 с областью определения $D(L_0) = C_{0,0}^\infty(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(L_0^*)$ сопряжённого оператора L_0^* является линейное подпространство $D(L_0^*) = \oplus_{j=1}^n W_2^2(P_j) := W_2^2(\Gamma) \subset H$. Сужения всякой функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ на полупрямые P_j, $j = 1, \ldots, n$ обладают граничными значениями в вершине, которые обозначим через $u_j(0)$, где символ $u(0)$ означает $u(0) = (u_1(0) u_2(0) \ldots u_n(0))^T \in C_n$. Это то же верно для первых производных этих сужений, для них используем аналогичные обозначения.

Теорема фон Неймана (см. [1]) предоставляет описание множества самосопряжённых расширений симметрического оператора. Нами получено явное описание множества самосопряжённых расширений оператора L_0 в терминах условий на линейные подпространства в пространстве граничных значений $G = \frac{D(L_0^*)}{D(L_0)} = \{(u(0), u'(0))\} = C_{2n}$.

Теорема 1. *Пусть* $m = 1$, $B(x) = 0$ *и* $C(x) = 0$. *Оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ *самосопряжен тогда и только тогда когда матрица* A *удовлетворяет равенству* $A = A^*$.

□ Если $u \in D(L_0)$ и $v \in D(L_0^*)$, то справедливо равенство

$$(L_0 u, v)_H - (u, L_0^* v)_H = \left((u(0))^T, \overline{v'}(0)\right)_{C_n} - \left((u'(0))^T, \overline{v}(0)\right)_{C_n} = 0.$$

Следовательно $(L_0 u, v)_H - (u, L_0^* v)_H = \left[\overline{v'}(0) - A^T \overline{v}(0)\right] (u(0))^T = 0$.

Следы $(u(0))^T$ принимают произвольные значения, поэтому равенство $v'(0) = A^* v(0)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(L_0^*)$, что и доказывает теорему 1. ■

Следствие 1. *Если* $M = \mathrm{diag}\frac{1}{m_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $C = (c_{i,j})$, *где* $c_{i,j} \in L_\infty(\Gamma)$ *и* $B = \mathrm{diag} b_k$, *то оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, *самосопряжен тогда и только тогда когда матрица* A, M *и* B *удовлетворяет равенству* $A = M^{-1}A^*M - 2iM^{-1}B$.

Граф с нескольким вершинами. Пусть граф Γ представляет собой набор из n вершин $Q_1, \ldots, Q_n$, из каждой из которых исходит r_j, $r_j \in \mathrm{N}$ ребер Γ_j^i, представляющих собой либо бесконечные полупрямые, либо отрезки, соединяющие вершину Q_j с другими вершинами. Сохраним обозначения предыдущего раздела. Введем операторы L_0, L_0^* и пространство граничных значений функций из $D(L_0^*)$ и их производных, линейно изоморфное пространству C_{2m}, где $m = r_1 + \ldots + r_n$. Через $u(Q_j)$ обозначим совокупность предельных значений функции по ребрам, входящим в точку Q_j, а через $u(0)$ обозначим m–мерный вектор $(u(Q_1) \ldots u(Q_n))^T$, для вектора предельных значений производной $u'(0)$ используем аналогичные обозначения.

Теорема 2. *Пусть* $m = 1$, $B(x) = 0$ *и* $C(x) = 0$. *Оператор* L *с областью определения* $D(L) = \left\{ u \in W_2^2(\Gamma) : \begin{pmatrix} u'(Q_1) \\ \vdots \\ u'(Q_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(Q_1) \\ \vdots \\ u(Q_n) \end{pmatrix} \right\}$, *где* A – *матрица размерности* $2m \times 2m$, *самосопряжен тогда и только тогда когда матрица* A *удовлетворяет равенству* $A = A^*$.

Граф с одной вершиной и со счётным множеством лучей. Обозначим через μ – счётно аддитивную вероятностную меру на N такую, что $\mu(k) = \mu_k > 0$, и $L_2(N, 2^N, \mu, \mathrm{C})$ – гильбертово пространство граничных значений с нормой $\|\{u_n\}\|^2 = \int_N |u_n|^2 d\mu(n) = \sum_{k=1}^\infty |u_n|^2 \mu(k)$. Сужения всякой функции на полупрямую обладают граничными значениями в вершине: $u(0) = (u_1(0) \ldots u_n(0) \ldots)^T \in L_{2,\mu}$. Это то же верно для первых производных этих сужений $u'(0)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu_k = 1$, $m = 1$, $B(x) = 0$ *и* $C(x) = 0$. *Оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, *самосопряжен тогда и только тогда когда оператор* A *самосопряжен в пространстве* L_2.

Следствие 3. *Если* $\mu_k \in L_1$, $b_k \in L_\infty$, E, B – *операторы в пространстве* $L_2(N, 2^N, \mu, \mathrm{C})$, *заданные диагональными матрицами с числами* μ_k, b_k *на диагонали,* $C = (c_{ij})$,*где* $c_{ij} \in L_\infty(\Gamma)$. *Тогда оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, *самосопряжен тогда и только тогда когда выполняется* $A = E^{-1}A^*E - 2iB$.

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики «Функциональный анализ». Т.1 / М.: Мир, 1977.

2. Сакбаев В., Смолянов О. Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения / ДАН. – 2010. – 433:3. – С.314-317.

MSC 26A33

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАМЯТЬЮ

Е.Н. Огородников

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

В докладе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$(ED_{0t}^{\alpha}-GD_{0t}^{\beta})(\dot{x}-Ax-f)=g(t), \tag{1}$$

где G, A — постоянные действительные. а E — единичная $[n\times n]$-матрицы $(n\in\mathbb{N})$; $x=x(t)$ — $[n\times 1]$-вектор искомых, а $f=f(t)$ и $g=g(t)$ — $[n\times 1]$-векторы заданных функций, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $t\in[0,T]$ $(T>0)$; $D_{0t}^{\alpha}u=(D_{0t}^{\alpha}u)(t)$ и $D_{0t}^{\beta}u=(D_{0t}^{\beta}u)(t)$ — левосторонние дробные производные Римана-Лиувилля вектор-функции $u=u(t)$ порядков $\alpha>\beta\geq 0$ соответственно [1],[2]. Поводом для изучения систем уравнений подобного типа послужили аналогичные примеры скалярных дифференциальных уравнений, возникающие в задачах математического моделирования дробных осцилляторов, конструктивной основой которых в рамках принятых механических аналогий являлась гипотеза о наличии в динамической системе неидеальной вязко-упругой связи, описываемой дробным аналогом некоторых реологических моделей типа Кельвина, Зенера и др. [3].

Пусть $\alpha>\beta\geq 0:\alpha\in(n-1,n],\beta\in(m-1,m]$, где $m\leq n$ $(n,m\in\mathbb{N})$. Вводится класс вектор-функций

$$L_G^{\alpha,\beta}(0,T)=\{u(t):u(t)\in L(0,T),I_{0t}^{n-\alpha}u\in AC^{n-m}[0,T],\\ (D_{0t}^{\alpha-m}-GI_{0t}^{m-\beta})u\in AC^{m}[0,T]\}.$$

Далее вводится вектор-функция $u(t)=\dot{x}(t)-Ax(t)-f(t)$, относительно которой обосновывается корректность постановки предварительной задачи типа Коши в классе вектор-функций $L_G^{\alpha,\beta}(0,T)$ для системы уравнений (1) с условиями

$$\lim_{t\to 0+}(D_{0t}^{\alpha-k}-GD_{0t}^{\beta-k})u=a_k,\quad k=1,2,\ldots,m; \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-m-j}u=a_{m+j},\quad j=1,2,\ldots,n-m, \tag{3}$$

где a_k $(k=1,2,\ldots,m,m+1,\ldots,n-m)$ — заданные $[n\times 1]$-векторы.

Отмечается, что для $\beta<\alpha:\alpha-s\leq\beta<\alpha-s+1$ $(s=1,2,\ldots,n)$ начальное условие (3) можно заменить локальным весовым условием $\lim\limits_{t\to 0+}[t^{n-\alpha}u(t)]^{(k)}=b_{n-k}$, $k=0,1,\ldots,s-1$. Решение начальной задачи (2), (3) удается найти в явном виде в терминах обобщённой дробной матричной экспоненциальной функции и интегрального оператора с указанной матрицей в ядре:

$$\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;G;t)=t^{\mu-1}E_{\alpha}(Gt^{\alpha};\mu)=t^{\mu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Gt^{\alpha})^k}{\Gamma(k\alpha+\mu)},$$

$$E^{\mu,\alpha}_{0t;G}u = \int\limits_0^t \mathrm{Exp}(\alpha,\mu;G;t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $E_\alpha(z;\mu)$ — функция типа Миттаг-Леффлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [1]. Оно имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Exp}(\alpha-\beta,\alpha-k+1;G;t)a_k + (E^{\alpha,\alpha-\beta}_{0t;G}g)(t).$$

Окончательно задача сводится к решению классической задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + f + u, \quad x(0) = x_0,$$

структура которого хорошо известна.

Приведем пример дробно-осцилляционного уравнения

$$(D^\alpha_{0t} + \lambda I)(\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega^2 x - f) = 0, \tag{4}$$

в котором $\alpha \in (0,1)$; r,ω — известные постоянные величины, $x = x(t)$ координата частицы, I — тождественный оператор. Оно возникает в случае, когда вязко-упругая связь подчиняется следующему определяющему соотношению:

$$\beta\sigma + D^\alpha_{0t}\sigma = E(\beta\varepsilon + D^\alpha_{0t}\varepsilon) + \eta(\beta\dot{\varepsilon} + D^\alpha_{0t}\dot{\varepsilon}), \tag{5}$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — направление и деформация связи; β, η, E, $\alpha \in (0,1)$ — константы модели (5), определяемые экспериментально.

В докладе обоснована корректность начальной задачи для уравнения (4) с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0+} I^{1-\alpha}_{0t}\ddot{x} = u_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

в классе функций $x(t) : \ddot{x}(t) \in L^{\alpha,1}(0,T)$. Решение находится в явном виде.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М: Физматлит, 2003.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / Elsevier: North-Holland Mathematics Studies, 2006.

3. Огородников Е.Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ. – 2013. – 1(30). – С.245-252.

MSC 35G99

ОДИН КЛАСС ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.А. Омельченко

Уральский филиал Российской академии правосудия,
пр. Победы, 160, Челябинск, 454084, Россия, e-mail: omeka@ya.ru

Рассмотрим задачу

$$u(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \quad h \in C([-r, 0]; \mathfrak{U}), \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа с запаздыванием

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi u_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{2}$$

Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\Phi \in \mathcal{L}(C([-r, 0]; \mathfrak{U}); \mathfrak{F})$ (линейны и непрерывны), оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$, действует в $\mathfrak{F}$), $u_t \in C([-r, 0]; \mathfrak{U})$, $u_t(s) = u(t + s)$ для $s \in [-r, 0]$.

Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален [1]. Используя идею сведения уравнения с запаздыванием к эволюционному дифференциальному уравнению без запаздывания (см., например, [2]) и результаты теории вырожденных полугрупп операторов [1], получим достаточные уловия разрешимости задачи (1), (2). Для этого построим оператор $T \in \mathcal{C}l(C([-r, 0]; \mathfrak{U}^1))$, $Tz = z'$, заданный на области определения

$$\mathrm{dom}T = \left\{ z \in C^1 \left([-r, 0] ; \mathfrak{U}^1 \right) : z(0) \in \mathrm{dom}M_1, z'(0) = L_1^{-1} M_1 z(0) + L_1^{-1} Q \Phi z \right\}.$$

Здесь и далее используются обозначения для некоторых операторов и подпространств, сущесвование которых следует из сильной (L, p)-радиальности оператора M [1].

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален, $\Phi \in \mathcal{L}(C([-r, 0]; \mathfrak{U}); \mathfrak{F})$, $\mathrm{im}\Phi \subset \mathfrak{F}^1$, $h \in \mathrm{dom}T$. Тогда существует единственное решение $u \in C([-r, +\infty); \mathfrak{U}) \cap C^1([0, +\infty); \mathfrak{U})$ задачи* (1), (2).

Литература

1. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – 12. – № 3. – С.173-200.

2. Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / New York, Berlin, Heidelberg: Spriger-Verlag, 2000.

MSC 62J99

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

М.М. Ошхунов, З.М. Ошхунова, М.А. Джанкулаева

В работе предлагается алгоритм нахождения регрессионных функций, отличных от классического подхода. Суть метода заключается в выборе линий регрессии по минимуму суммы квадратов расстояний от статистических точек. Указанный подход приводит к неединственному решению (в отличие от классического подхода выбора прямой), что имеет ясное геометрическое объяснение. Даны примеры расчета коэффициента корреляции по двум методам, которые показали большую эффективность предлагаемого метода по степени отклонения от статистических данных. Предпринята попытка распространить данный алгоритм на многофакторный регрессионный анализ. Приводятся практические расчеты корреляционных параметров применительно к конкретной статистической информации.

MSC 82C22

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ЧАСТИЦАМИ

М.М. Ошхунов, З.В. Нагоев

В работе предлагается альтернативный подход к проблемам моделирования в области механики деформируемого твердого тела. Суть подхода состоит в замене сплошной деформируемой среды эквивалентной по физико-механическим свойствам системой взаимодействующих частиц. Решение для этих частиц системы обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом фактора затухания приводит в предельном случае к статическим задачам механики деформируемого твердого тела, в частности, задачам классической теории упругости. Такой подход позволяет, меняя потенциал взаимодействия между частицами, имитировать такие свойства деформируемых сред, как упругость, пластичность, вязко-упругость и т.д.

Кроме того, появляется возможность смоделировать такой фактор как большие деформации, когда физическая и геометрическая нелинейность среды весьма существенны.

Приводятся расчеты и сравнения с точным решением некоторых задач теории упругости (задача о деформации подвешенной упругой балки под действием гравитации, задача о прогибе балки при различных условиях опирания и т.д.).

Результаты численных экспериментов по предлагаемому алгоритму показали его эффективность, т.к. появляется возможность учесть в рамках единого подхода такие факторы, как физическая и геометрическая нелинейность, большие перемещения и деформации, динамические эффекты и т.д.

MSC 35K70

ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Панов

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: gjd@bk.ru

Рассматривается полулинейное уравнение вида

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u), \tag{1}$$

где α и $f = f(z)$ – постоянный и функциональный параметры, $u = u(t,x)$ – неизвестная функция. Данное уравнение, при $f(z) = e^z$ или $f(z) = ze^{z^2}$, описывает физические явления в полупроводниках при учёте дебаевской экранировки и учёте источников свободных зарядов [1]. В случае $f(z) = z^3$ уравнение описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов, а при $f(z) = z$ получаем уравнение стратификации объемного заряда в полупроводнике [1]. Теорией полупроводников не ограничивается область применения уравнений такого класса. Например, при $f(z) = z - az^3$ получается известное уравнение Хоффа, описывающее выпучивание двутавровой балки.

Для данного класса уравнений методами группового анализа [2] найдены ядро основных алгебр Ли, спецификации параметров, дающие расширение основной алгебры Ли.

Теорема 1. *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (1) *при* $\alpha \neq 0$ *состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

В случае $\alpha = 0$ *базис имеет вид*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t}.$$

Теорема 2. *Базис основной алгебры Ли уравнения* (1) *в случае* $\alpha \neq 0$, $f(z) = e^z$ *состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}.$$

При $\alpha = 0$, $f(z) = e^z$ *базис состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} - \tau'(t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Теорема 3. *Базис основной алгебры Ли уравнения* (1) *в случае* $\alpha = 1$, $f(z) = z^{-3}$ *состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 4t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial x} + ue^{2x}\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x} - ue^{-2x}\frac{\partial}{\partial u}.$$

В случае $\alpha = -1$, $f(z) = z^{-3}$ *базис состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 4t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = \cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - u\sin 2x\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = \sin 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\cos 2x\frac{\partial}{\partial u},$$

а при $\alpha = 0$, $f(z) = z^{-3}$ *базис имеет вид*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 4t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Литература

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / М.: Наука, 1978.

MSC 35F10

РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Е.Ю. Панов

Новгородский государственный университет,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия, e-mail:
Eugeny.Panov@novsu.ru

В слое $(t,x) \in \Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$ рассматривается задача Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = g(t,x,u), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{1}$$

где вектор потока $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, а функция-источник $g(t,x,u)$ является функцией Каратеодори, такой что $|g(t,x,k)| \in L^1_{loc}(\Pi_T)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет одностороннему условию Липшица: $\exists L = L(g) \ge 0$: $g(t,x,v) - g(t,x,u) \le L(v-u)$ $\forall v, u \in \mathbb{R}$, $v > u$. Начальная функция $u_0(x)$ предполагается лишь измеримой. В случае $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \equiv 0$ хорошо известен классический результат С.Н. Кружкова [1] о существовании и единственности ограниченного обобщенного энтропийного решения задачи (1). Для неограниченных решений теряется свойство конечности скорости распространения начального возмущения, что может приводить к потере корректности задачи Коши. В частности, естественные требования $u, g(t,x,u) \in L^1_{loc}(\Pi_T)$, $\varphi(u) \in L^1_{loc}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$ могут оказаться слишком ограничительными. Однако, отказавшись от этих требований, мы не можем рассматривать энтропийные условия (и даже само уравнение) в рамках теории распределений. Для корректного определения таких решений $u = u(t,x)$ (называемых *ренормализованными*) используются энтропийные условия для суперпозиций $s(u)$, где s - ограниченные функции. Ренормализованные энтропийные решения (р.э.р.) задачи (1) были впервые введены в работе [2] в случае $g \equiv 0$ и $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В [2] доказаны существование и единственность р.э.р. В статье [3] эти результаты были обобщены на случай произвольных измеримых начальных данных. В настоящей работе мы распространяем результаты [3] на неоднородный случай. Пусть $s_{a,b}(u) = \max(\min(u,b),a)$ - срезающая функция на уровнях $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\chi_{(a,b]}(u)$ – характеристическая функция промежутка $(a,b]$.

Определение. *Измеримая функция $u = u(t,x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным субрешением (р.э.субр.) задачи (1), если $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:*

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u) g(t,x,u) = \mu_b - \mu_a \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \tag{2}$$

где μ_k, $k \in \mathbb{R}$ – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T и

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u>k} (g(t,x,k))^- dt dx \right) = 0\,, \quad \operatorname*{ess\,lim}_{t \to 0+} (s_{a,b}(u(t,x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^+ = 0$$

в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Измеримая функция* $u = u(t,x)$ *на* Π_T *называется ренормализованным энтропийным суперрешением (р.э.суперр.) задачи (1), если выполнено (2) для некоторого семейства неотрицательных локально конечных мер* $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ *на* Π_T *и*

$$\lim_{k\to-\infty}\left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u<k}(g(t,x,k))^+dtdx\right) = 0\,, \quad \operatorname*{ess\,lim}_{t\to0+}(s_{a,b}(u(t,x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^- = 0$$

в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Наконец, р.э.р. задачи (1) называется измеримая функция* $u = u(t,x)$, *которая одновременно является р.э.субр. и р.э.суперр. этой задачи.*

С использованием варианта метода удвоения переменных установлен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть измеримые функции* $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ *являются, соответственно, р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1) с начальными данными* $u_0(x)$, $v_0(x)$ *и функциями-источниками* $g(t,x,u)$, $h(t,x,u)$. *Пусть* $L = \min(L(g), L(h))$ *и* $q(t,x) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}}(g(t,x,u) - h(t,x,u))^+$. *Тогда, для почти всех* $t \in (0,T)$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u(t,x) - v(t,x))^+dx \le e^{Lt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x) - v_0(x))^+dx + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}^n} q(\tau,x)d\tau dx\right).$$

Из Теоремы 1 вытекает следующий принцип сравнения:

Следствие. *Пусть функции* $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ *являются р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1), с начальными данными* $u_0(x)$, $v_0(x)$ *и функциями-источниками* $g(t,x,u)$, $h(t,x,u)$, *соответственно. Тогда, если* $u_0(x) \le v_0(x)$ *почти всюду на* $\mathbb{R}^n$, $g(t,x,u) \le h(t,x,u)$ *почти всюду на* $\Pi_T \times \mathbb{R}$, *то и* $u(t,x) \le v(t,x)$ *почти всюду на* Π_T.

Из принципа сравнения следует единственность р.э.р. Существование р.э.р. в общем случае может нарушаться. Так, например, задача $u_t + (u^2)_x = x^2$, $u(0,x) \equiv 0$ не имеет р.э.р. Поэтому, для существования р.э.р. нужны дополнительные условия на входные данные задачи. Мы предположим, что $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$, $g(t,x,0) \in L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$. Справедлива следующая

Теорема 2. *При сделанных предположениях существует р.э.р. задачи (1).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-01-00230-а.

Литература

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. – 1970. – 81, №2. – С.228-255.

2. Bénilan Ph., Carrillo J., Wittbold P. Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 2000. – 29. – P.313-327.

3. Лысухо П.В., Панов Е.Ю. Ренормализованные энтропийные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Проблемы математического анализа. – 2010. – 51. – С.3-20.

MSC 11E25

О ДВОЙНЫХ СУММАХ ГАУССА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ КЛАССАМ ИДЕАЛОВ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ

У.М. Пачев, Р.А. Дохов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: urusbi@rambler.ru

Вычислению сумм Гаусса разных видов посвящено большое число работ (см. например [1,2]). Мы рассматриваем вычисление двойных сумм Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля $F = Q(\sqrt{d})$, где $d < 0$ свободно от квадратов.

Известно, что каждому классу идеалов поля $Q(\sqrt{d})$ взаимно однозначно соответствует положительная примитивная бинарная квадратичная форма

$$Q(m_1, m_2) = am_1^2 + bm_1m_2 + cm_2^2$$

с дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, равным дискриминанту δ_F поля F (см. [3]).

Для рассматриваемых двойных сумм Гаусса

$$G(q, l) = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{q} \exp\left(2\pi i \frac{lQ(m_1, m_2)}{q}\right)$$

в явном виде получены их значения через дискриминант D.

Теорема 1. *Пусть q – нечетное положительное число; l, a – целые числа, взаимно простые с q, причем НОД$(\delta_F, q) > 1$. Тогда:*

1) если $q \nmid \delta_F$, то

$$G(q, l) = \left(\frac{la}{d}\right)\left(\frac{-D'}{q'}\right) i^s \sqrt{d} q,$$

где $d =$НОД(δ_F, q); $D' = \dfrac{D}{q}, q' = \dfrac{q}{d}$;

$$S = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad q, q' \equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & \text{если} \quad q, q' \equiv -1 \pmod 4, \\ 2, & \text{если} \quad q, q' \equiv -1 \pmod 4, \end{cases}$$

$\left(\dfrac{*}{d}\right)$, $\left(\dfrac{*}{q}\right)$ *– символы Якоби*

2) Если $q | \delta_F$, то

$$G(q, l) = \left(\frac{la}{d}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q\sqrt{q}.$$

Следующий результат относится к более сложному случаю четного модуля q.

Теорема 2. *Пусть* $q = 2^\alpha q_1$ *- целое положительное число;* q_1 *- нечетно;* D*- дискриминант примитивной бинарной квадратичной формы* (m_1, m_2)*, причем* $\frac{|D|}{8} \equiv \pm 1\,(mod\,4)$*. Тогда*

$$G(q,l) = \begin{cases} \gamma_d(q,D,l) i^{q_1 l a} \left(\dfrac{a}{d}\right) & \text{при} \quad \dfrac{|D|}{8} \equiv 1 \pmod 4, \\ \gamma_d(q,D,l) \left(\dfrac{a}{d}\right) & \text{при} \quad \dfrac{|D|}{8} \equiv -1 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\gamma_d(q,l,d) = \left(\frac{2^\alpha}{d}\right) \left(\frac{|D| : d}{q_1 : d}\right) i^s \sqrt{d} q_1 2^{\alpha+1} \sqrt{2}\,.$$

Теоремы 1 и 2 могут быть применены при вычислении сумм произведений характера мнимого квадратичного поля на указанные двойные суммы Гаусса.

Литература

1. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды МИАН. – 1962.

2. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. Тула. – 2003. – Т.4. №2.

3. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел / М.: Наука, 1985.

MSC 15A18

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТРИЦ АДАМАРА

А.Ю. Пигарев

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: pochtaname@gmail.com

В современной теории кодирования, задачах математической криптографии широкое использование получили методы, основанные на использовании специальных матриц с определёнными свойствами [1-4]. Важное значение имеет такое свойство матриц: все их миноры должны быть отличны от нуля. Это позволяет проводить частичную расшифровку сообщений, проверку их подлинности и сохранности, а также производить распараллеливание вычислений. Стандартными матрицами в этих приложениях стали степенные матрицы и матрицы Коши.

Степенные матрицы (которые часто без всяких оснований связывают с именем Вандермонда) состоят из последовательных степеней элементов второй строки. Вычисление определителя этой матрицы и её обращение были по существу указаны Ньютоном, явные формулы по его идеям вычислил Де Муавр. По сути этими вычислениями определяется и известный метод интерполяции, который впоследствии получил имя Лагранжа. Важную для приложений теорему о не-отрицательности миноров этого определителя доказал Н.Г. Чеботарёв. При вычислениях также большую роль играют полученные в последнее время различные удобные факторизации степенной матрицы через матрицы более простой структуры.

Другой удобный класс матриц был введён Коши, который для их определителя вывел явную формулу. Отметим, что частным случаем матрицы и определителя Коши являются матрица и определитель Гильберта. Замечательным свойством матрицы Коши является то, что любой её минор также является матрицей Коши, и поэтому при невырожденности исходной матрицы также невырожден. Это делает подобные матрицы чрезвычайно популярными при кодировании, на них основано известное семейство кодов Гоппы [2].

С другой стороны давно известны приложения в теории кодирования матриц Адамара [5–7]. Они возникли при рассмотрении Жаком Адамаром достаточно абстрактной математической задачи о достижении равенства в так называемом неравенстве Адамара для определителей. Им был выделен класс бинарных матриц, на которых достигалось равенство. В дальнейшем матрицы Адамара изучались в работах Сильвестра, Пэли и других математиков. В 1970-х годах матрицы Адамара нашли неожиданные применения в теории кодирования, так построенные с их помощью коды позволяют исправлять ошибки, число которых может достигать половины объёма сообщения. Матрицы Адамара, например, были использованы при передаче сигналов спутников с Марса ввиду большого количества сбоев и ошибок, вызванных удалённостью спутника при передаче и большим количеством помех.

На основе матриц Адамара вводится преобразование Адамара. Преобразование Адамара векторов обладает многими замечательными свойствами, которые находят применения и в самой теоретической математике, и в различных приложениях, например кодировании и сжатии информации.

Автором изучены некоторые спектральные свойства матриц Адамара: собственные значения, наборы собственных векторов [8–10]. Вычисления проводились на компьютере в системе MATHEMATICA. Знание указанных и других спектральных характеристик позволяет в некоторых случаях оптимизировать вычисления при кодировании.

Литература

1. Влэдуц С.Г., Ногин Д.Ю., Цфасман М.А. Алгеброгеометрические коды / М.: МЦНМО, 1993.

2. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / М.: Мир, 1986.

3. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / М.: Техносфера, 2006.

4. Злотник Б.М. Помехоустойчивые коды в системах связи / М.: Радио и связь, 1989.

5. Agaian S.S. Hadamard Matrices and Their Applications / Springer, 1985.

6. Horadam K.J. Hadamard Matrices and Their Applications / Princeton University Press, 2007.

7. Zyczkowski K. Complex Hadamard Matrices and Some of Their Applications / 2009.

8. Пигарев А.Ю. Спектральные характеристики матриц Адамара и их применения при кодировании // Сборник материалов II Всероссийской научно-практической конференции «Информационная безопасность в государственных и негосударственных структурах». Юго-Западный государственный университет, Курск, 2012. – С.107-109.

9 Пигарев А.Ю. Об одном методе аппроксимации сигналов // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» памяти Н.К. Карапетянца / Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, 2012. – С.88.

10. Пигарев А.Ю. Спектральные характеристики матриц Адамара и их применения при кодировании // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные вопросы эксплуатации систем охраны и защищённых телекоммуникационных систем». Воронеж, ВИ МВД, 2012. – С.141-142.

MSC 35M99

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.Р. Пинигина

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Белинского, 58, Якутск, 677000, Россия, e-mail: n-pinig@mail.ru

В работе рассматриваются нелокальные по времени краевые задачи для вырождающихся уравнений соболевского типа с эллиптико-параболическим оператором A, эллиптическим оператором B, действующими по пространственным переменным.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, ..., x_n$ с компактной и гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, $Q = \Omega \times (0, T)$ — цилиндрическая область, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$. Функции $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, ..., n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $f(x, t)$, $p_k(x)$, $k = 1, ..., m$ — заданные, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $t_1, ..., t_m$ — заданные числа такие, что $0 < t_1 < ... < t_m \leq T$.

Оператор A — эллиптико-параболический второго порядка вида

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u, \quad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

B — эллиптический оператор такого же вида

$$Bu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u, \quad b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0 \mid \xi \mid^2, \ \ m_0 > 0, \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Нелокальная краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в области Q решением уравнения

$$Au_t + Bu = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t) \mid_S = 0,$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x)u(x, t_k), \quad x \in \Omega.$$

Доказано существование и единственность регулярного решения поставленной краевой задачи с использованием метода регуляризации и метода продолжения по параметру.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (соглашение №14.A18.21.0367).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (соглашение №14.A18.21.0367).

MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: polunin@bsu.edu.ru, soldatov@bsu.edu.ru

Пусть односвязная область $D \subset \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S и вектор $n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ является единичным вектором внешней нормали к этой поверхности в точке $y \in S$. Для четырехкомпонентной вектор-функции $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ в этой области рассмотрим задачу

$$u_1^+(y) = f_1(y),\ u_2^+(y)n_1(y) + u_3^+(y)n_2(y) + u_4^+(y)n_3(y) = f_2(y)\,, \quad y \in S, \tag{1}$$

для системы Моисила-Теодореску

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u(x) = 0\,, \quad M(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта задача является аналогом известной задачи Шварца для аналитических функций.

Теорема 1. *Если $S \in C^{2,\mu+0}$, то существует такая скалярная функция $e(y) \in C^\mu(S)$, что любое решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ рассматриваемой системы единственным образом представимо в виде интеграла типа Коши*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{M^\top(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y) ds_y, \quad x \in D,$$

с вектор-функцией $\psi \in C^\mu(S)$ вида $\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_2 = n_1\varphi_2,\ \psi_3 = n_2\varphi_2,\ \psi_4 = n_3\varphi_2,$, где φ_2 ортогональна e. В случае $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = e$ функция u в этом интегральном представлении обращается в нуль.

В основе теоремы 1 лежит следующая теорема о разрешимости задачи Шварца.

Теорема 2. *В предположении $S \in C^{2,\mu+0}$ и условия ортогональности $\int_S f_2 ds = 0$ задача (1) однозначно разрешима в классе $C^\mu(\overline{D})$ и эквивалентным образом редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений*

$$\varphi(y_0) + (K\varphi)(y_0) = f(y_0), \quad (K\varphi)(y_0) = \int_S k(y_0, y; y - y_0)\varphi(y) ds_y, \quad y_0 \in S,$$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

где матричное ядро

$$k(y_0, y; y - y_0) = \frac{1}{2\pi|y - y_0|^3} \begin{pmatrix} n(y)y - y_0 & 0 \\ n(y)[y - y_0, n(y_0)] & n(y_0)y - y_0 \end{pmatrix}$$

имеет слабую особенность при $y = y_0$. *Здесь* $[\cdot\,,\cdot]$ *означает обычное векторное произведение, а произведение без скобок – скалярное. Ядро и коядро оператора* $1 + K$ *одномерны и определяются, соответственно, функциями* $\varphi = (0, e)$ *и* $f = (0, 1)$.

Эти результаты другим методом были получены ранее В.И. Шевченко[1]. Предлагаемый нами подход позволяет распространить их на более общие системы типа Коши-Римана.

Литература

1. Шевченко В.И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора // Сб. «Матем. физика». Киев. – 1970. – Вып.8. – С.172-187.

MSC 81V45

О ПРОБЛЕМЕ РАЗМЕРА АТОМА

И.Н. Полякова, А.Г. Шкловский

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: polyakova_i@bsu.edu.ru
shklovsky@bsu.edu.ru

При численном решении дифференциального уравнения в частных производных большое значение имеет выбор равномерной или неравномерной сетки. Этот выбор существенно зависит от размера исследуемой системы. Построение сетки при решении уравнения Кона-Шема для атомов или молекул начинается с определения их характерного размера. В настоящем докладе для исследования эффективного размера атома решалась сферически симметричная задача для атома аргона [1,2]:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2u_{n,l}(r)}{dr^2}+\left(\frac{l(l+1)}{2r^2}-\frac{Z(r)}{r}\right)\cdot u_{n,l}(r)=E_{n,l}u_{n,l}(r) \tag{1}$$

с граничными условиями $u_{n,l}(0)=0, u_{n,l}(r_{at})=0$. Для аргона $Z(0)=18, Z(r_{at})=1$

Здесь и далее используется атомная система единиц, расстояния измеряются в радиусах Бора, а энергии - в Ha (для удобства мы переводим их в эВ). Были рассмотрены $r_{at}=12.07060, 12.54991, 12.93152, 13.32473, 17.97832, 24.25718$

В докладе приводятся графики наиболее протяженной функции — 3р-функции аргона и эффективного заряда $Z(r)$. Если нанести на один график все эффективные заряды, самосогласованные для различных r_{at}, то все графики визуально совпадают. Аналогично совпадают и графики $u_{3,1}(r)$. Поэтому, чтобы увидеть получившуюся разницу, пришлось построить графики разности функций $u_{3,1}(r)$, вычисленных для $r_{at}=12.07060$, и для оставшихся r_{at}. Аналогично построены графики разности эффективных зарядов $Z(r)$, самосогласованных для $r_{at}=12.07060$.

Учитывая, что получившиеся разности очень малы по величине, можно считать, что $r_{at}=12.07060$ является характерным размером атома аргона и далее использовать в расчетах именно эту величину.

Литература

1. Старовойтов А.С., Шкловский А.Г. Модифицированный локальный потенциал для вычисления энергии ионизации атомов // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. –2010. – Вып.19, №11(82). – С.126-134.

2. Береговой А.В., Плесканев А.А., Шкловский А.Г. Приближение локального функционала плотности с обменно-корреляционной энергии для релятивистских атомов // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – Вып.29, №23 (142). – С.17-42.

MSC 35J60

SUPERCRITICAL AND CRITICAL CASES FOR 2D AND 3D BVP FOR QUASILINEAR EQUATIONS OF MIXED ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE

Nedyu Popivanov

Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Sofia, James Baucher Str. 5, 1164 Sofia, Bulgaria, e-mail: nedyu@fmi.uni-sofia.bg

This talk is based on our joint work with D. Lupo & K. Payne (Italy) and L. Dechevski (Norway), already published, or in progress.

Starting from the ground-breaking paper of Pohožaev (1965), it is well known that the homogeneous Dirichlet problem for semilinear elliptic equations such as $\Delta u + u|u|^{p-2} = 0$ in Ω, a bounded subset of $\mathbf{R}^n$ with $n \geq 3$, permits only the trivial solution $u \equiv 0$ if the domain is star-shaped, the solution is sufficiently regular, and $p > 2^*(n) = 2n/(n-2)$ where the latter quantity is the critical exponent in the Sobolev embedding of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ for $p \leq 2^*(n)$ which fails to be compact at the critical exponent. At dimension $n = 2$, the critical nonlinearity is of exponential type, but it has been shown that the nonexistence principle in supercritical case also holds for certain two dimensional problems of mixed elliptic-hyperbolic type for the mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L, and it is also valid for a large class of such problems even in higher dimensions. At dimension 2, such operators have a long-standing connection with transonic fluid flow. All such operators are invariant with respect to a certain anisotropic dilation which defines a suitable notion of star-shapedness by using the flow of the vector field which is the infinitesimal generator of the invariance. In all cases, for the operator L the critical exponent phenomenon is of pure power type $u|u|^{p-2}$, where p agrees with a critical Sobolev exponent ($p = 2^*(n, m)$) in the embedding of a suitably weighted version of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$. As usual, in BVP for such mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L, the boundary data's part Σ is a proper subset or all of $\partial\Omega$. The set Γ on which no data is prescribed is a piece of a characteristic surface. The lack of a boundary condition on Γ complicates the control of the corresponding boundary integral in the Pohožaev argument, but if Γ is characteristic and tangential to the dilation flow, a sharp Hardy-Sobolev inequality ensures that the contribution along Γ has the "right" sign, that suffices for completion of the estimate.

In all $2D$ and multimensional cases the results are like

Theorem. *Let $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ be a Guderley-Morawetz domain (or Tricomi domain, or Tricomy-Frankl domain). Under some restricions on the boundary (which are fixed in each case), if the nonlinearity is $F(u) = u^p$, if $p > 2^*(2, m) = 2(m+4)/m$ (the critical Sobolev exponent), then for solutions $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ it follows $u \equiv 0$.* The same is true also at the critical case $p = 2^*(1, m)$ *if we suppose in addition that some part of the boundary is strongly star-like surface at its noncharacteristic points.*

The multidimensional cases are given for some Protter-Morawetz problems, which linear variant is strongly overdetermined in a sense of classical solvability.

MSC 44A12

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА-КИПРИЯНОВА НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

О.И. Попова

Воронежский Государственный Университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: olyaa.popova@yandex.ru

Классическое преобразование Радона радиальных функций совпадает с преобразованием Радона-Киприянова K_γ функций одного переменного, когда индекс γ — натуральное число. В [2] приведена формула связи преобразования Радона-Киприянова с интегралами дробного порядка Римана-Лиувилля. Это позволяет создать таблицу преобразования Радона радиальных функций и, в обобщающем виде, таблицу преобразований Радона-Киприянова элементарных функций (одного переменного).

Преобразование Радона-Киприянова в $\mathbb{R}_n^+\{x\ :\ x_1>0\}$ введено в [1] (далее, сокращая, будем писать K_γ-преобразование) определяется выражением

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{x_1}^\nu \delta(p-\langle x,\xi\rangle)\,x_1^\gamma\,dx, \quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\ , \quad \gamma>0, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}_n^+=(0,+\infty)\times\mathbb{R}_{n-1}$, $\langle x,\xi\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,\xi_i$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}_n$, $p=\langle x,\xi\rangle$ — уравнение плоскости, проходящей на расстоянии $|p|$ от начала координат, ортогонально единичному вектору ξ, $\delta(P)$ — δ-функция сосредоточенная на $(n-1)-$мерной поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n$, символ $\Pi_{x_1}^\nu$ обозначает действие оператора Пуассона порядка $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$ по переменной x_1:

$$\Pi_{x_1}^\nu g(x_1,x')=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(x_1\cos\alpha,\,x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha.$$

Полагая в (1) $n=1$, выводим следующую формулу для K_γ-преобразование функции одного переменного

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int_0^{+\infty} f(x)\,\Pi_x^\nu\delta(p-x)\,x^\gamma\,dx, \quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\ , \quad \gamma>0.$$

Теорема 1. *K_γ-преобразование четной функции одного переменного $f\in L_1$ представляется в виде левостороннего интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка $\frac{\gamma}{2}$ в виде*

$$K_\gamma[f](\sqrt{q})=\widehat{f}(\sqrt{q})=I_-^{\frac{\gamma}{2}}f_1(q)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int\limits_q^\infty\frac{f_1(\tau)}{(\tau-q)^{1-\frac{\gamma}{2}}}d\tau \tag{2}$$

от функции

$$f_1(\tau)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{2\sqrt{\pi}}f(\sqrt{\tau}), \quad f_1\in L_1^\gamma.$$

Отметим, что когда функция (четная) имеет носитель $(0,b)$ в $\mathbb{R}_1^+$, то функция f_1 имеет носитель, принадлежащий множеству $(0,b^2)$.

Формулу (2) применим для вычисления K_γ-преобразования (1) элементарных функций. Заметим, что формула (2), примененная к произвольной степенной функции с неограниченным носителем теряет смысл, поэтому, чтобы избавиться от неопределенности в решении, будем умножать исходную функцию на кусочно-постоянную функцию Хевисайда $\Theta(x)$, равную нулю для неположительных значений аргумента и единице — для положительных.

Кроме того, отметим, что K_γ-преобразование определено для четных функций. Учитывая наличие квадратных корней в аргументе функции f_1, далее рассматриваем функции от аргумента x^2, что делает функции и четными и очень удобными для применения формулы (2) одновременно.

K_γ-преобразование функции от x^2.

1. $\varphi(x)=\Theta(b^2-x^2)(b^2-x^2)^{(\beta-1)},\ \beta>0\,,$

$$K_\gamma[\varphi](p)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}\Theta(b^2-x^2)(b^2-p^2)^{\frac{\gamma}{2}+\beta-1}\,.$$

2. $\varphi(x)=(x^2-a)^{\beta-1}(b^2-x^2)^{(\alpha-1)}\Theta(b^2-x^2).$

$$K_\gamma[\varphi](p)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\Gamma(\beta)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}(b^2-a)^{\beta-1}(b^2-p^2)^{\gamma/2+\beta-1}\ {}_2F_1(1-\beta,\alpha,\frac{\gamma}{2}+\alpha;\frac{p^2-b^2}{b^2-a}).$$

3. $\varphi(x)=(b^2-x^2)^{\beta-1}\ln(b^2-x^2)\Theta(b^2-x^2),$

$$K_\gamma[\varphi](p)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\Gamma(\beta)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}(b^2-p^2)^{\beta+\gamma/2-1}\Theta(b^2-p^2)(\psi(\beta)-\psi(\beta+\gamma/2)+\ln(b^2-p^2)),$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера.

4. $\varphi(x)=e^{-ax^2}, \qquad K_\gamma[\varphi](p)=\dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}}a^{-\gamma/2}e^{-ap^2}.$

5. $\varphi(x)=e^{-ax^2}\sin bx^2 \qquad K_\gamma[\varphi](p)=\dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}}\dfrac{e^{-ap^2}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\sin(bp^2+\alpha\varphi).$

6. $\varphi(x)=e^{-ax^2}\cos bx^2, \qquad K_\gamma[\varphi](p)=\dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}}\dfrac{e^{-ap^2}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\cos(bp^2+\alpha\varphi).$

Полученные здесь формулы справедливы и для классического преобразования Радона радиальных функций. Достаточно в найденных формулах положить $\gamma=0$.

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // ДАН. – 1998. – 360. – №2. – С.157-160.

2. Ляхов Л.Н. RK_γ-преобразование с $\gamma\in(0;2]$ весовых сферических средних функций. Соотношение Асгейрсона // ДАН. – 2011. – 439,№ 5. – С.589-592.

3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев И.О. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – С.688.

MSC 26A33

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE MULTI-TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

A.V. Pskhu

Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC, RAS,
89A, Shortanov street, Nalchik, Russia, e-mail: pskhu@mail333.com

Consider the equation

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial y_k^{\sigma_k}} u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y)\,. \tag{1}$$

Here $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$ and $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m$, $\lambda_k>0$; Δ_x is the Laplace operator, $\Delta_x=\sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$; $\partial^{\sigma_k}/\partial y_k^{\sigma_k}$ is an operator of fractional partial differentiation of order σ_k, $\sigma_k\in(0,1)$, with respect to y_k and with origin at $y_k=0$. The fractional differentiation is given by the Dzhrbashyan-Nersesyan operator associated with the sequence $\{\alpha_k,\beta_k\}$, α_k, $\beta_k\in(0,1]$, $\sigma_k=\alpha_k+\beta_k-1$, $\partial^{\sigma_k}/\partial y_k^{\sigma_k}=D_{0y_k}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}=D_{0y_k}^{\beta_k-1}D_{0y_k}^{\alpha_k}$ (see [1]), where $D_{0y_k}^{\beta_k-1}$ and $D_{0y_k}^{\alpha_k}$ are the Riemann-Liouville fractional integral and derivative.

For a survey on results relating the initial and boundary value problems for a fractional diffusion equation and its generalizations, we refer to papers [2] and [3].

For any element $z\in\mathbf{R}^m$, we denote by z_k the k-th coordinate of z. Let z and ζ be elements of $\mathbf{R}^m$. The expressions $z\zeta$, z^ζ, z_* and $z_{*,k}$ denote the vectors $(z_1\zeta_1,...,z_m\zeta_m)$ and $(z_1^{\zeta_1},...,z_m^{\zeta_m})$, and the quantities $\prod_{i=1}^m z_i$ and $\prod_{i=1,\ i\neq k}^m z_i$ respectively.

Consider the function

$$f_{m,\delta}(z;\sigma;\mu)=\int_0^\infty t^{-\delta}e^{-\frac{1}{t}}\prod_{k=1}^m \phi(-\sigma_k,\mu_k;-z_k t)\,dt\,, \tag{2}$$

where $m\in\mathbf{N}$, $\delta\in\mathbf{R}$, and z, σ, $\mu\in\mathbf{R}^m$, $z_k>0$, $k=\overline{1,m}$. Here, $\phi(\xi,\eta;t)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{t^i}{i!\Gamma(\xi i+\eta)}$ is the Wright function (see [4]). In terms of function (2), we define the function

$$\Gamma_{m,n}^{\sigma}(x,y)=C_n|x|^{2-n}y_*^{-1}f_{m,n/2}\left(\frac{|x|^2}{4}\lambda y^{-\sigma};\sigma;0\right),\quad \text{where}\quad C_n=\frac{1}{4}\pi^{-n/2}.$$

We put $T=\{y:\ y_k\in(0,T_k),\ k=\overline{1,m}\}$ and $\Omega=\{(x,y):\ x\in\mathbf{R}^n,\ y\in T\}$. By $T_{(k)}$ and $y_{(k)}$ we denote the projections of T and $y\in\mathbf{R}^m$ onto $\mathbf{R}^{m-1}$ along y_k. Also we write

$$I_y=(0,y_1)\times\cdots\times(0,y_m),\quad I_y^{(k)}=(0,y_1)\times\cdots\times(0,y_{k-1})\times(0,y_{k+1})\times\cdots\times(0,y_m).$$

By Ω_k we denote the interior points of the set $\Omega_k=\partial\Omega\cap\{y_k=0\}$, $k=\overline{1,m}$.

A function $u(x,y)$ is called a regular solution of equation (1) if $y_*^{1-\nu}u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ for some $\nu \in \mathbf{R}^m$ with positive ν_k, $D_{0y_k}^{\alpha_k-1}u \in C(\Omega \cup \Omega_k)$, $D_{0y_k}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}u$ and $u_{x_jx_j}$ belong to $C(\Omega)$, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. This function satisfies equation (1) at all points $(x,y)\in\Omega$.

In this work, we study the following problem: *find a regular solution $u=u(x,y)$ of equation (1) in Ω such that*

$$\lim_{y_k\to 0} D_{0y_k}^{\alpha_k-1}u(x,y)=\tau(x,y_{(k)}), \quad x\in\mathbf{R}^m, \quad y_{(k)}\in T_{(k)}, \quad k=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Formulate the main results of the work.

Theorem 1. *Suppose that $y_{*,k}^{1-\mu}\tau_k(x,y_{(k)})\in C\left(\mathbf{R}^n\times\overline{T}_{(k)}\right)$ and $y_*^{1-\mu}f(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ for some $\mu\in\mathbf{R}^m$ with positive μ_k, and*

$$\lim_{|x|\to\infty} y_{*,k}^{1-\mu}\tau_k(x,y_{(k)})\exp\left(-\rho_k|x|^{\frac{2}{2-\sigma_k}}\right)=0, \quad \lim_{|x|\to\infty} y_*^{1-\mu}f(x,y)\exp\left(-\rho_k|x|^{\frac{2}{2-\sigma_k}}\right)=0,$$

where $\rho_k<\left(1-\frac{\sigma_k}{2}\right)\left(\frac{\sigma_k}{2T_k}\right)^{\frac{\sigma_k}{2-\sigma_k}}$ and $k=\overline{1,m}$. Then a regular solution $u(x,y)$ of problem (1), (3) that satisfies the condition

$$\lim_{|x|\to\infty} y_*^{1-\nu}u(x,y)\exp\left(-\rho_k|x|^{\frac{2}{2-\sigma_k}}\right)=0, \quad k=\overline{1,m},$$

has the form

$$u(x,y)=\int_{I_y}\int_{\mathbf{R}^n} f(\xi,\eta)\Gamma_{m,n}^{\sigma}(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\int_{I_y^{(k)}}\int_{\mathbf{R}^n}\left[D_{y_k\eta_k}^{\beta_k-1}\Gamma_{m,n}^{\sigma}(x-\xi,y-\eta)\right]_{\eta_k=0}\tau_k(\xi,\eta_{(k)})\,d\xi d\eta_{(k)}.$$

Theorem 2. *There is at most one regular solution of problem (1), (3) in the class of functions that satisfy the following condition for some positive constant ρ:*

$$\lim_{|x|\to\infty} y_*^{1-\nu}u(x,y)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\sigma_0}}\right)=0,$$

where $\sigma_0=\min\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$.

References

1. Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order // Izv. Akad. Nauk Armenian SSR Matem. – 1968. – 3, No.1. – P.3-29. (Russian)

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations / North-Holland Math. Stud. – vol.204, Amsterdam: Elsevier, 2006.

3. Pskhu A.V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order // Izvestiya: Mathematics. – 2009. – 73, No.2 – P.351-392.

4. Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J.London Math. Soc. – 1933. – 8, No.29. – P.71-79.

MSC 35D05

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

Л.Н. Раджабова

Таджикский технический университет имени академика М.С.Осими

Через D обозначим прямоугольник $D = \{a < x < a_1,\ b < y < b_0\}$, соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{a < x < a_0,\ y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a,\ b < y < b_0\}$,. В области D рассмотрим уравнение:

$$u(x,y) + A_1 \int_a^x \frac{u(x,y)}{t-a} dt + A_2 \int_a^x \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{u(x,y)}{t-a} dt + B_1 \int_b^y \frac{u(x,y)}{s-b} ds +$$

$$+B_2 \int_b^y \ln\left(\frac{y-b}{s-b}\right) \frac{u(x,s)}{s-b} ds + C_1 \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_b^y \frac{u(t,s)}{s-b} ds + C_2 \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_b^y \ln\left(\frac{y-b}{s-a}\right) \times$$

$$\times \frac{u(t,s)}{s-a} ds + C_3 \int_a^x \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{dt}{t-a} \int_b^y \frac{u(t,s)}{s-b} ds +$$

$$+C_4 \int_a^x \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{dt}{t-a} \int_b^y \ln\left(\frac{y-b}{s-b}\right) \frac{u(t,s)}{s-b} ds = f(x,y),$$

где $A_i,\ B_i,\ C_i,\ i = 1,2;,\ j = \overline{1,4}$, – заданные постоянные, $f(x,y)$ – заданная функция, $u(x,y)$ – искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на особых линях Γ_1 и Γ_2.

Интегральное уравнение (1) при $A_2 = B_2 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ является модельным двумерным интегральным уравнением типа Вольтерра с граничными особыми линиями, изученное ранее.

В работе изучается двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра, имеющее фиксированную особенность первого порядка и логарифмическую особенность на границах области. В случае, когда параметры уравнения связаны между собой определенным образом,в зависимости от знака параметров и корней соответствующих характеристических уравнений, общее решение рассматриваемого уравнения может содержать одну, две, три или четыре произвольные функции одной переменной и выделяется случай, когда интегральное уравнение (1) имеет единственное решение.

MSC 74A25

К ПРОБЛЕМЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ДО ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Е.В. Радкевич

МГУ им. М.В. Ломоносова,
e-mail: evrad07@gmail.com

Хорошо известно, что состояния до локального равновесия прежде всего характеризуются самовозбуждающимися режимами(пример коагуляции, начальной стадии кристаллизации сплавов [1], [2]. В докладе, на примере начальной стадии уплотнения в гиперзвуковом потоке и начальной стадии кристаллизации мы приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов на основе нетрадиционной регуляризации классических моделей механики сплошных сред (двухкомпонентной системы уравнений Эйлера и системы Био насыщенной пористой среды) с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии.

Литература

1. Lukashov E.A., Radkevich E.R. Solidification and Structuresation of Instability Zones // Applied Mathematics. – 2010. – 1. – P.159-178.

2. Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Радкевич Е.В. Исследование процесса направленной кристаллизации методом математической реконструкции // Доклады РАН. – 2012. – 445, №4. – С.1-4.

MSC 35J40

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

А.Б. Расулов

Москва,Россия, e-mail: rasulov_abdu @rambler.ru

Пусть G – односвязная конечная область, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром $\partial G \in C^{1,\alpha}, 0 < \alpha < 1$, содержащая внутри точку $z = 0$.

В области G рассмотрим уравнение произвольного порядка с особенностью высокого порядка в начале координат

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\partial_{\overline{z}} - \frac{za_j(z)}{r^{n+1}}\right)U + B(z)\overline{U} = F(z), m \in N, \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$–оператор Коши-Римана, $n \geq 1, a_j(z) \in C(\overline{G}), j = \overline{1,m}, U(z)$ – искомая $B(z), F(z) \in L^p(G), p > 2$ – заданные функции.

В дальнейшем, будем пользоваться классом функций $D^{m,p}(G\backslash 0)$ непрерывно дифференцируемых по $\overline{z}$ до $(m-1)$-го порядка, а производная m-го порядка по $\overline{z}$ и принадлежит классу $L_p(G), p > 2$. Введем следующие обозначения:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}, \qquad A_j(z) = \frac{za_j(z)}{r^{n+1}}, \qquad A_{j0}(z) = \frac{z}{r^{n+1}}\left[a_j(z) - a_j(0)\right].$$

Лемма. *Пусть*

$$\frac{z}{r^{n+1}}[a_{j0}(z) - a_{j0}(0)] \in L^p(G), p > 2.$$

Тогда при $n > 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = \frac{-a_j(0)c_n}{r^{n-1}} + h(z),$$

где

$$c_n = \frac{2}{n-1}, \qquad h(z) = (TA_{j0})(z) + \frac{a_{j0}(0)}{(n-1)\pi i}\int_{\partial G}\frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}\ .$$

В случае $n = 1$ справедлива формула

$$(TA_j)(z) = 2\ln|z| - 2\ln\, r + (TA_j0)(z),$$

где круг $|z| \leq r$ *содержится в* G *и*

$$A_{j0}(\zeta) = \begin{cases} 0, |z| < r \\ \bar{\zeta}^{-1}, |z| \geq r \end{cases}$$

Теорема. *Пусть в уравнении (1), функции*

$$a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{G}), \quad \mathrm{Re} a_j(0) = 0, \quad A_{j0}(z) \in L^p(G),\ p > 2,\ j = \overline{1, m}, \quad B(z) = 0$$

и правая часть $e^{-TA_1}F(z) \in L^p(G), p > 2$ *Тогда любое решение уравнения (1) из класса*

$D^{m,p}(G \backslash 0)$ *представимо в виде*

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1}),$$

где

$$S_k(U_{k+1}) \equiv e^{TA_{m-k}(z)}\Bigg(\Phi_{m-k}(z) + \Bigg(T(e^{-TA_{m-k}(\zeta)})U_{k+1}\Bigg)(z)\Bigg)$$

$k = 0, 1, 2...m-1,$ *где* $U_0 \equiv U, U_m = F, \Phi_{m-k}(z), k = 0, 1..., m-1$*-произвольные аналитические функции комплексного переменного* z*, причем, если известно,* U *в* G*, то соответствующие аналитические функции* $\Phi_j(z), j = \overline{1, m}$ *через значения функции* $U(z)$ *и ее производных до* $(m-1)$ *-го порядка включительно, находятся единственным образом.*

Замечание . Случай $B(z) \neq 0$ сводится к интегральному уравнению

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1}),$$

где: $B(z), e^{-TA_1}r^{-n-1}f(z) \in L_p(G), p > 2$, причем $U_m = B(z)\overline{U} + F$, которое решается методом последовательных приближений.Случай $B(z) = r^{-1}b(z), b(z) \in C(\overline{G})$ исследован отдельно . Используя полученные интегральные представления можно исследовать задачу типа Римана-Гильберта.

MSC 35Q05

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Р.Р. Раянова

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Рассмотрена краевая задача в характеристическом квадрате с данными на параллельных характеристиках для системы гиперболических уравнений с волновым оператором и сингулярным матричным коэффициентом при младшей производной. Используя известное решение задачи Коши для указанной системы уравнений с данными на линии сингулярности матричного коэффициента, поставленная задача редуцируется к системе интегральных уравнений Карлемана. В работе найдено в явном виде решение указанной краевой задачи.

Обозначим через M_n — множество постоянных матриц порядка n. Пусть $\Lambda(G)$ — спектр матрицы $G \in M_n$, λ_i — собственные значения матрицы G $(i = 1, 2, ..., n)$.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}$ рассмотрим систему уравнений

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2G}{y} u_y = 0, \qquad (1)$$

где $u(x, y) = \big(u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y)\big)^\top$ — вектор искомых функций, $\Lambda(G) \in (0, 1/2)$.

Пусть $D_0 = D \cap \{y > 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y < 0\}$.

Обозначим $\theta_0\big(\frac{x}{2}; \frac{x}{2}\big)$ и $\theta_1\big(\frac{1+x}{2}; \frac{x-1}{2}\big)$ — точки пересечения характеристик $x - y = 0$ и $x - y = 1$ с характеристикой другого семейства, выходящей из точки $(x, 0)$.

Задача Требуется найти вектор-функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $u(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^2(D_0 \cup D_1)$,
2. $u(x, y)$ удовлетворяет системе (1) в области $D_0 \cup D_1$,
3. $u(\theta_0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]$,
4. $u(\theta_1) = \psi(x), \quad x \in [0, 1]$,
5. $\lim\limits_{y \to 0-} (-y)^{2G} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0+} y^{2G} \dfrac{\partial u}{\partial y}$,

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x))$ - заданные вектор-функции.

Поставленная задача сводится к системе интегральных уравнений Карлемана.

Пусть $\Omega = [a, b]$, где $-\propto < a < b < +\propto$.

Определение 1. *Через* $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$, *где* $\Omega = [a, b]$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, *обозначим класс вектор-функций* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ *с областью определения* $D_f = \Omega$, *каждая компонента которых, удовлетворяет на* Ω *условию Гельдера*

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq A_k |x_1 - x_2|^{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

со своими фиксированными значениями A_k *и* λ_k.

Определение 2. *Через* $H^* = H^*(a, b)$ *обозначим класс вектор-функций* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$, *для которых существуют такие мультииндексы* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ *и* $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, *что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\epsilon}(b-x)^{1-\delta}},$$

где $f^*(x) \in H^\lambda([a, b])$ *и каждой компоненте вектора* $f(x)$ *соответствуют свои фиксированные значения мультииндексов* λ, ϵ *и* δ.

Определение 3. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — *мультииндекс. Через* H^*_α *обозначим класс вектор-функций* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ *таких, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\alpha-\epsilon}(b-x)^{1-\alpha-\delta}},$$

где $0 < \epsilon_k < 1 - \alpha_k$, $0 < \delta_k < 1 - \alpha_k$ *(*$k = 1, 2, ..., n$*), а каждая компонента вектора* $f^*(x)$ *принадлежит своему классу* $\tilde{H}_{\alpha_k}$, *который определен в [1].*

Справедлива теорема.

Теорема *Пусть* $G \in M_n$ *– матрица, у которой спектр* $\Lambda(G) \subset (0, 1/2)$. *Пусть, далее, матрица* $T \in M_n$ *является матрицей преобразования* G *к жордановому виду* $\Lambda_G = TGT^{-1}$. *Пусть вектор* $Tg(x) \in H^*_\alpha$, *где* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_k = 1 - 2\lambda_k$, $\lambda_k \in \Lambda(G)$. *Тогда единственное решение системы интегральных уравнений Карлемана в классе вектор-функций, таких что* $T\nu(x) \in H^*$ *имеет вид*

$$\nu(x) = \Big(L\Gamma(E - 2G)\Big)^{-1} D^{E-2G}_{a+}\Big(E - Z(x) D^{2G}_{a+} I^{2G}_{b-} Z^{-1}(x)\Big) g(x), \tag{2}$$

где матрицы $Z(x) = \left(\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right)^{E-2G}$, $L = 4\cos^2\!\big(\frac{\pi}{2}(E - 2G)\big)$.

Подставляя найденное в формуле (2) выражение для вектора $\nu(x)$ в решения задач Коши в областях $\overline{D_0}$ и $\overline{D_1}$ найдем окончательно решение $u(x, y)$ в области $\overline{D} = \overline{D_0} \cup \overline{D_1}$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.

MSC 35L45

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

О.С. Розанова

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия, e-mail: rozanova@mech.math.msu.su

Мы показываем, что метод стохастического возмущения вдоль характеристик позволяет связать со многими уравнениями и системами уравнений первого порядка уравнения баланса специального вида. Например, с уравнением Хопфа как в одномерном, так и в векторном случае, таким образом связывается система уравнений газовой динамики со специфическим интегральным членом, который может быть интерпретирован как градиент давления. Наиболее тонким является вопрос о том, как проявляет себя стохастическое возмущение в терминах уравнений баланса. То, что для гладких решений стохастическое возмущение действует так же, как и вязкость, является ожидаемым и достаточно известным фактом. Однако оказывается, что после момента образования разрыва в решении исходного уравнения (или системы) результаты, получающиеся в предельном переходе по малой вязкости и по малому параметру стохастического возмущения, принципиально разнятся. А именно, для того, чтобы перейти к пределу в случае стохастического возмущения, нужно формально перейти к кинетической модели и задать тип взаимодействия между частицами. Для «невзаимодействующих» частиц таким образом получается система, в определенном смысле эквивалентная строго гиперболической системе уравнений одноатомного политропного газа, тогда как метод введения вязкости дает в предельном переходе систему уравнений газовой динамики «без давления», описывающую «слипающиеся частицы». Последняя система является гиперболической не в строгом смысле и ее решения могут быть сильно-сингулярными, то есть содержать дельтаобразные особенности. В этом смысле переход к системе, решения которой могут содержать лишь ударные волны, может быть интерпретирован как регуляризация. Тем не менее, существует процедура перехода от одного решения к другому, которая в одномерном случае реализуется совсем просто, а в многомерном случае требует использования компьютерной алгебры.

Далее, существует интегральная формула, с помощью которой можно получить представление решения исходной задачи. С помощью этой формулы можно, например, исследовать асимптотику образования особенности. Даже для уравнения Хопфа для вектора скорости эта формула имеет ряд преимуществ в сравнении с методом введения вязкости, то есть с переходом к уравнению Бюргерса. А именно, в многомерном случае преобразование Коула-Хопфа, которое позволяет свести уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности и тем самым получить явное интегральное представление, может быть применено только в случае потенциального начального поля скорости. Метод, который мы предлагаем, не имеет такого ограничения, поэтому позволяет исследовать течения произвольного типа.

Работа поддержана РФФИ, проект 12-01-00308, и Министерством образования РФ, проект №1.370.2011.

Литература

1. Albeverio S., Rozanova O. A representation of solutions to a scalar conservation law in several dimensions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013, http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.039.

2. Albeverio S., Korshunova A., Rozanova O. A probabilistic model associated with the pressureless gas dynamics // Bulletin des Sciences Mathematiques – 2013, in press.

3. Korshunova A., Rozanova O. On effects of stochastic regularization for the pressureless gas dynamics // Contemp. Appl. Math. – 2012. – 17. – P.486-493.

MSC 42A38

КЛАССЫ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

С.А. Рощупкин

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Совхозная, 13, Елец, 399761, Россия, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Основные функции для классического преобразования Фурье-Бесселя (см. [1]), оказались плохо приспособленными при работе с полным преобразованием Фурье-Бесселя (см. [2]). В связи с чем появилась необходимость введения новых классов основных функций, которые частично рассмотрены в этой работе.

Пусть $R_N^+ = R_n \times R_{N-n},\ x=(x',x''),\ x' \in R_n,\ x'' \in R_{N-n},\ j_\nu(x)$ — одно из решений сингулярного уравнения Бесселя $\frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}t^\gamma\frac{d}{dt}u = -u$, отвечающее индексу $\gamma = 2\nu+1$ и удовлетворяющее условиям $j_\nu(0)=1,\ j_\nu'(0)=0$.

Ядра прямого и обратного полного преобразований Фурье-Бесселя имеют вид:

$$\Lambda_\gamma^\pm(x',\xi') = \prod_{i=1}^n \left(j_{\nu_i}(x_i\xi_i) \mp i\frac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1} j_{\nu_i+1}(x_i\xi_i)\right), \quad \gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n), \quad \gamma_i>0, \quad \gamma_i = 2\nu_i+1.$$

Прямое и обратное полные смешанные преобразования Фурье-Бесселя (далее, сокращая, будем писать $\mathcal{F}_B$-*преобразования*) функции u задается выражениями:

$$\mathcal{F}_B[u](\xi) = \int\limits_{R_n} \Lambda_\gamma^+(x',\xi')\, e^{-i(x'',\xi'')}\, u(x)\,(x')^\gamma\, dx,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[u](x) = C_{\gamma,n,N} \int\limits_{R_n} \Lambda_\gamma^-(x',\xi')\, e^{-i(x'',\xi'')}\, u(x)\,(x')^\gamma\, dx = C_{\gamma,n,N}\mathcal{F}_B[u](-x).$$

Здесь $C_{\gamma,n,N} = \frac{(2\pi)^{1-n}}{2^{2(\nu+1)}\,\Gamma^2(\nu+1)},\ (x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma_i/2}$.

Введем следующие обозначения: $\alpha=(\alpha',\alpha'')$, α' и α'' целочисленные мультииндексы, размерности $n,\ N-n$ соответственно,

$$D_B^\alpha = \left(\partial_B^{\alpha'}\right)_{x'} \partial_{x''}^{\alpha''}, \quad \left(\partial_B^{\alpha'}\right)_{x'} = \partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1}\ldots\partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n}, \quad \partial_{x''}^{\alpha''} = \partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}\ldots\partial_{x_N}^{\alpha_N}, \quad \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,2,\ldots,N,$$

$$\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} = \left\{ \begin{array}{ll} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k_i, \\ \partial_{x_i} B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}, & \alpha_i = 2k_i+1 \end{array} \right., \quad k_i = 0,1,2,\ldots, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

где $B_{\gamma_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{d}{dx_i}\,x_i^{\gamma_i}\frac{x}{dx_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, отвечающий индексу γ_i. В классе четных, достаточно гладких интегрируемых функций оператор D_B^α имеет символ $(i\xi)^\alpha\ :\ D_B^\alpha\varphi = \mathcal{F}_B^{-1}[(i\xi)^\alpha \mathcal{F}_B\,\varphi]$ (такие операторы рассмотрены в [3]).

Введем систему норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k = max\left(\sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n} \left| x^\alpha\, D_{B_\gamma}^\beta\,\varphi(x)\right|,\ \sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n} \left| D_{B_\gamma}^\beta\,(x^\alpha\varphi(x))\right|\right), \qquad (1)$$

где выполнено условие

$$\alpha_i + \beta_i = 2k_i,\ i=1,\ldots,n,\ k_i = 0,1,2,\ldots \qquad (2).$$

Через $S_{ev}(R_N)$ будем обозначать множество быстро убывающих функций четных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с конечными нормами (1) для каждого целого положительного k. Эти нормы определяют топологию в $S_{ev}(R_N)$. В частности, последовательность функций u_n из $S_{ev}(R_N)$ сходится к функции u в этом пространстве, если сходится к ней по каждой из этих норм, когда индекс k пробегает все неотрицательные числа.

Теорема 1. *При выполнении условия* (2) $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$*-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства* S_{ev}*, т.е. для любого неотрицательного целого числа* k*, найдется число* k'*, что выполняется неравенство*
$|\langle \mathcal{F}_B[\,\varphi]\,\rangle|_k \leq |\langle \varphi \rangle|_{k_1}$.

Среди основных функций оказывается удобным класс основных функций Л. Шварца $S(R_N)$, исчезающих на координатных гиперплоскостях $x_i = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$ (типа основных функций П.И. Лизоркина, см. также в [4]):

$\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)=\{\psi : \psi\in S, \, \partial_{B_i}^\beta \psi(0)=0, \, \beta\in Z^+\}, \, i = 1, \ldots, n, \; \mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)=\{\varphi : \varphi=\mathcal{F}_B[\psi], \, \psi\in\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)\}$.
В классах $\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)$ и $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ символ оператора D_B^α имеет тот же вид, что и в S_{ev}.

Теорема 2. *Класс* $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(x)\in S(R_N^+)$*, которые ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам:*

$$\varphi(x)\in S(R_N^+)\,, \quad \int\limits_{R_N^+} (x')^m \varphi(x)\, x^\gamma\, dx=0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+),$$

Для четного преобразования Фурье-Бесселя (см. книгу [4]) *функции* $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ *ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам, четным по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$:

$$\varphi(x)\in S(R_N^+)\,, \quad \int\limits_{R_N^+} (x')^{2m} \varphi(x)\, x^\gamma\, dx=0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+),$$

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997.

2. Катрахов В.В., Ляхов Л.Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференц. Уравнен. – 2011. – 47, № 5. – С.681-695.

3 Lyakhov L.N. , Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessel transformations and some singular differential equations // Cambridge Scientific Publishers. – 2012 / Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. – С.107-112.

4 Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.

MSC 35M10

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФРАНКЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СМЕШАННОГО ТИПА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

К.Б. Сабитов

Институт прикладных исследований АН РБ,
ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda K(y)(\operatorname{sgn}\xi)u = 0, \tag{1}$$

где $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $n = \mathrm{const} > 0$, λ – комплексный параметр,

$$\xi = x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}, \ \operatorname{sgn}\xi = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0, \\ -1, & \xi \leq 0, \end{cases}$$

в области D, ограниченный отрезком AA' оси $x = 0$, $-a < y < a$; характеристикой $A'B$: $x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = l = \mathrm{const} > 0$ уравнения (1) при $y < 0$ и кривой Γ_0 : $x^2 + \left(\frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}}\right)^2 = l^2$, x, $y > 0$; здесь $a = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n+2}}$, $A = (0, a)$, $A' = (0, -a)$, $B = (l, 0)$.

Пусть OP – часть характеристики уравнения (1), исходящей из точки $O = (0, 0)$ до пересечения с $A'B$ в точке P, $D_1 = D \cap \{y > 0\}$, D_2 – область, ограниченная кривыми OP, PB и OB; D_3 – область, ограниченная кривыми OA', $A'P$ и PO.

В 1956 году Ф.И. Франкль [1], исследуя обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, пришел к математической задаче, именуемой в настоящее время задачей Франкля. Эта задача была объектом исследования многих авторов. Обзор работ и основные результаты по задаче Франкля приведены в монографиях [2–4].

В этой работе изучается следующая задача (Задача Φ_λ) на собственные значения для оператора, заданного уравнением (1).

Задача Φ_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AO \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3), \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \ \ (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3, \tag{3}$$

$$u(x, y) = 0, \ \ (x, y) \in \Gamma_0, \tag{4}$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = 0, \ 0 \leq y \leq a, \tag{5}$$

$$u_x(0, y) = 0, \ 0 < |y| < a. \tag{6}$$

Отметим, что задача Φ_λ для уравнения (1) при $n = 0$ изучалась в работах [5–7].

Методом разделения переменных найдены две серии собственных значений $\lambda_{1k,m}$ и $\lambda_{2k,m}$ как корни уравнений

$$J_{\rho_{1k}}(\sqrt{\lambda}l) = 0 \ \text{ и } \ J_{\rho_{2k}}(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν; $\rho_{1k} = 4k + \beta$, $k = 0, 1, 2, ...$; $\rho_{2k} = 4k - 1 + \beta$, $k = 0, 1, 2, ...$; $m = 1, 2, ...$, $\beta = n/2(n + 2)$, и построены в явном виде соответствующие функции $u_{1k,m}(x, y)$ и $u_{2k,m}(x, y)$ в областях D_i, $i = 1, 2, 3$. Система функций $\{u_{1k,m}(x, y), u_{2k,m}(x, y)\}$ исследуются на полноту и базисность в пространствах $L_2(D_i)$, $i = 1, 2, 3$, и $L_2(D)$.

Литература

1. Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // ПММ. – 1956. – 20, Вып. 2. – С.196-202.

2. Смирнов А.В. Уравнения смешанного типа / М.: Наука, 1970. – 295 с.

3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.

4. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. / Palmarium Academic Publishing. Deutschland, 2012. – 327 p.

5. Сабитов К.Б., Тихомиров В.В. О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Матем. моделирование. – 1990. – 2, №10. – С.100-109.

6. Сабитов К.Б. О спектре одной газодинамической задачи Франкля для уравнений смешанного типа // ДАН. – 1991. – 316, №1. – С.40-44.

7. Моисеев Е.И., Абаси Н. О полноте собственных функций задачи Франкля с условием нечетности // Дифференц. уравнения. – 2008. – 44, №3. – С.390-393.

MSC 35J05

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ШАРЕ

М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан, e-mail: makhmud-s@mail.ru

Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави,
ул. Саттарханова, Туркестан, 161200, Казахстан, e-mail: turmetovbh@mail.ru

Хорошо известно, что задачи Дирихле и Неймана являются основными задачами теории гармонических функций. В одномерном случае, а также при рассмотрении уравнения в многомерном параллелепипеде также одной из основных задач является периодическая краевая задача. Однако при рассмотрении уравнения в многомерном шаре аналогов периодических краевых задач построено не было.

В настоящем докладе рассматривается новый класс краевых задач для уравнения Пуассона в многомерном шаре. Эти задачи являются аналогами классических периодических краевых задач. Доказана корректность рассматриваемых задач. Единственность решения задач обосновывается применением принципа экстремума. Существование решения доказано методом функции Грина.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : r = |x| < 1\}$ – единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера. Обозначим $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}$, $\partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \leq 0\}$, $I = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 = 0\}$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ сопоставим *«противоположную»* ей точку $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) \in \Omega$, где $\alpha_j, j = 2, ..., n$ принимают одно из значений ± 1. Очевидно, что если $x \in \partial\Omega_+$, то $x^* \in \partial\Omega_-$. Рассмотрим следующие два типа задач ($k = 1, 2$).

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую в Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

а на его границе – краевым условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = \tau(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{2_k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial}{\partial r} u(x^*) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{3_k}$$

где $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$ и $f(x) \in C^{\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $0 < \varepsilon < 1$.

При $k = 1$ задачу будем называть *антипериодической краевой задачей*, а при $k = 2$ – *периодической.*

Очевидно, что необходимым условием существования решения из класса $C^1(\bar{\Omega})$ является выполнение естественных условий согласования:

$$\tau(0, x_2, ..., x_n) + (-1)^k \tau(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0, \quad (0, x_2, ..., x_n) \in I, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0,x_2,...,x_n)+(-1)^k\frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0,\alpha_2 x_2,...,\alpha_n x_n)=0, \quad j=\overline{1,n}, \quad (0,x_2,...,x_n)\in I, \tag{5}$$

и

$$\mu(0,x_2,...,x_n)-(-1)^k\mu(0,\alpha_2 x_2,...,\alpha_n x_n)=0, \qquad (0,x_2,...,x_n)\in I \tag{6}$$

Всюду в дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Обозначим через $G_D(x,y)$ и $G_N(x,y)$ – функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения (1) в области Ω.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\tau(x)\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x)\in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $0<\varepsilon<1$, *и выполнены условия согласования (4)-(6). Тогда решение задачи* (1), (2_1), (3_1) *существует, единственно и представляется в виде:*

$$u(x)=\int_{\Omega}G_1(x,y)f(y)dy-\int_{\partial\Omega_+}\frac{\partial G_1}{\partial n_y}(x,y)\tau(y)ds_y+\int_{\partial\Omega_+}G_1(x,y)\mu(y)ds_y, \tag{7}$$

где $G_1(x,y)$ *– функция Грина антипериодической задачи* (1), (2_1), (3_1):

$$G_1(x,y)=\frac{1}{2}\left[G_D(x,y)+G_D(x,y^*)+G_N(x,y)-G_N(x,y^*)\right].$$

При этом очевидно что, несмотря на то, что функция Грина задачи Неймана определяется с точностью до постоянного слагаемого, функция Грина антипериодической задачи определяется однозначно.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)\in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\tau(x)\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x)\in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $0<\varepsilon<1$, *и выполнены условия согласования (4)-(6). Тогда для разрешимости задачи* (1), (2_2), (3_2) *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{\Omega}f(y)ds_y=\int_{\partial\Omega_+}\mu(y)ds_y.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x)=\int_{\Omega}G_2(x,y)f(y)ds_y-\int_{\partial\Omega_+}\frac{\partial G_2}{\partial n_y}(x,y)\tau(y)ds_y+\int_{\partial\Omega_+}G_2(x,y)\mu(y)ds_y+\mathrm{const}, \tag{8}$$

где $G_2(x,y)$*- функция Грина периодической задачи, которая определяется равенством*

$$G_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[G_D(x,y)-G_D(x,y^*)+G_N(x,y)+G_N(x,y^*)\right]+\mathrm{const}.$$

В докладе обосновывается, что обе задачи являются самосопряженными. Показана методика построения всех собственных функций задачи.

MSC 74H35

О ЯВЛЕНИИ ВЗРЫВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт,
Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская обл., 141700, Россия, e-mail: fumi2003@mail.ru

В работе исследуется явление возникновения взрыва решения задачи Коши для линейного и для нелинейного уравнения Шредингера, которое состоит в его непродолжаемости за пределы ограниченноого промежутка времени. Получены условия на оператор Шредингера, необходимые и достаточные для существования начальных данных, при которых решение задачи Коши существует лишь конечное время. Исследовано поведение норм решения в различных пространствах при приближении к границе промежутка существования. Определены свойства возникновения особенностей, общие для решений линейного и нелинейного уравнений Шредингера. Исследована процедура продолжения динамического преобразования пространства начальных данных через момент возникновения особенностей, основанная на предельном перехода в методе исчезающей вязкости.

Рассматривается задача Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{L}u(t) = \mathrm{div}(G\nabla u) + \frac{i}{2}((\mathbf{a}, \nabla u) + \mathrm{div}(\mathbf{a}u)) + Vu; \quad u(+0) = u_0; \tag{1}$$

где $u_0 \in H \equiv L_2(R^d)$, а заданный дифференциальным выражением второго порядка оператор $\mathbf{L}$ является плотно определенным замкнутым оператором в пространстве X. Коэффициенты дифференциального выражения являются измеримыми вещественнозначными функциями аргумента $x \in R^d$ в случае линейного уравнения или аргументов $(x, u) \in R^d \times \mathbf{C}$ в случае нелинейного уравнения.

В работе [1] установлено, что вырождение характеристической формы линейного дифференциального оператора $\mathbf{L}$ может привести к нетривиальности индексов дефекта оператора, и что в этом случае справедлив следующий критерий корректности задачи Коши (1).

Теорема 1. *Пусть оператор* $\mathbf{L}$ *является максимальным симметричным линейным оператром в пространстве* H *с индексами дефекта* $(n_-, n_+) = (0, m)$, $m > 0$. *Тогда оператор* $i\mathbf{L}$ *генерирует изометрическую полугруппу* $e^{it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, *а оператор* $-i\mathbf{L}^*$ – *сжимающую полугруппу* $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geq 0$, *преобразований пространства* H. *При этом* $H = H_0 \oplus H_1$, *где* $H_0 = \bigcap\limits_{t>0} \mathrm{Im}(e^{it\mathbf{L}})$, $H_0 = \bigcup\limits_{t>0} \mathrm{Ker}(e^{-it\mathbf{L}^*})$, *а задача Коши (1) имеет решение на промежутке* $[0, T)$, $T > 0$, *тогда и только тогда, когда* $u \in H_0(T) = \mathrm{Im}(e^{iT\mathbf{L}})$.

Для установления факта разрушения H^1-решения определим на пространстве H^1 функционал

$$J(u) = \mathrm{Im}\int\limits_{\Omega} (x, \nabla u)\bar{u}dx = \mathrm{Im}\int\limits_{\Omega} ru_r\bar{u}dx\,,$$

где $r = |x|$, а область определения функционала определяется сходимостью интеграла.

Исследование нелинейной задачи Коши (1) без сингулярного потенциала (при $V \equiv 1$, $\mathbf{a} \equiv 0$, $G = I$) проведено в работе [2]. Для нелинейного оператора $\mathbf{L}$ с коэффициентами $G = I$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и $V = |u|^p/|x|^\alpha,\ p > 0,\ \alpha \in [0, 2)$, справедливо следующее утверждение о корректности задачи Коши (1).

Теорема 2. *Если $p \in [0, \frac{2(2-\alpha)}{d})$, то для любого $u_0 \in W_2^1(R^d)$ задача Коши (9)-(10) имеет единственное H_1-решение глобально на промежутке $[0, +\infty)$, причем функция $\|u(t)\|_{H_1}$, $t \in [0, +\infty)$, ограничена на промежутке $[0, +\infty)$.*

Пусть $p \in (\frac{2(2-\alpha)}{d}, +\infty)$. Тогда существует такое $u_0 \in W_2^1(R^d)$, что выполняются неравенства $E(u_0) > 0$ и $J(u_0) > 0$. Тогда время $T_1 = T_1(u_0) \in (0, +\infty]$ существования H^1-решения конечно и $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \|u(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)} = +\infty$.

Поскольку задача Коши (1) для уравнения Шредингера проявляет свойство некорректности в случае вырожденного линейного оператора $\mathbf{L}$ или оператора $\mathbf{L}$ со сверхкритическим показателем нелинейности, то она будет рассмотрена вместе со своей регуляризацией в пространстве задач Коши – последовательностью задач Коши (2)

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{L}_\epsilon u(t), \quad u(+0) = u_0; \quad \epsilon \in (0, 1), \tag{2}$$

где $\mathbf{L}_\epsilon u(t) = \mathrm{div}(G\nabla u) + i((\mathbf{a}, \nabla u)/2 + \mathrm{div}(\mathbf{a}u)) + Vu + \epsilon\boldsymbol{\Delta}^2 u$, и исследуем предельное поведение решений регуляризованных задач при $\epsilon \to 0$.

Теорема 3. *Пусть $u_0 \in W_2^1(R^d)$ и $T_* \in (0, +\infty)$ – точная верхняя грань длин промежутков, на которых существует решение задачи Коши (1). Тогда для любого $T \in (0, T_*)$ последовательность $\{u_\epsilon(t),\ t > 0,\}$ решений задач (2) сходится к решению $u(t)$, $t \in [0, T_*)$ задачи (1) равномерно на отрезке $[0, T]$.*

Если $T > T_*$, то не существует бесконечно малой последовательности $\{\epsilon_k\}$ такой, что последовательность $\{u_{\epsilon_k}\}$ сходится в пространстве $C([0, T], L_2(R^d))$ при $q \geq pd(2-\alpha)^{-1}$.

Литература

1. Zhidkov P.E. Korteweg-de Vries and nonlinear Schrodinger equations: qualitative theory / Lect. Notes. In Math. V. 1756. – Springer, 2001.

2. Сакбаев В.Ж. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2012. – 43. – С. 120-134.

MSC 45D05

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В КВАДРАТУРАХ

И.М. Сарварова

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия, e-mail: inna.sarvarova@yandex.ru

Данное сообщение является непосредственным продолжением работы [1]: полученные в этой статье результаты применяются к решению уравнения

$$u(x,y)+a_1(x,y)\int_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+a_2(x,y)\int_{y_0}^{y} b_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta=F(x,y), \qquad (1)$$

рассматриваемого в области $D=\{x_0<x<x_1, y_0<y<y_1\}$.

При условии $a_1b_2\neq 0$ (1) редуцируется к задаче Гурса об отыскании в D решения уравнения

$$z_{xy}+az_x+bz_y+cz=f \qquad (2)$$

по вычисляемым из (1) граничным значениям $z(x_0,y)=\varphi(y)$, $z(x,y_0)=\psi(x)$, $\varphi(y_0)=\psi(x_0)$. Коэффициенты в (2) даются формулами

$$a=a_2b_2, \quad b=a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x, \quad c=b_2[a_{2x}-a_2(\ln a_1)_x], \quad f=b_2[F_x-(\ln a_1)_x], \qquad (3)$$

а решение исходного уравнения (1) определяется через $z:\quad z=b_2^{-1}z_y$. С помощью соотношений (8) – (11) из [1] получаем следующие наборы требований, в терминах которых формулируются варианты условий разрешимости уравнения (1) в квадратурах:

$$\{a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x\}_y-(a_2b_2)_x\equiv a_1b_1a_2b_2\equiv \alpha_1(x)\beta_1(y)\neq 0, \qquad (4)$$

$$(a_2b_2)_x-\{a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x\}_y\equiv\{a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x\}_y+$$
$$+a_1b_1a_2b_2-(a_2b_2)_x\equiv\alpha_2(x)\beta_2(y)\neq 0, \qquad (5)$$

$$m(a_2b_2)_x-\{a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x\}_y\equiv m\{a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x\}_y-(a_2b_2)_x\equiv$$
$$\equiv(m-1)\{a_1b_1a_2b_2-(a_2b_2)_x\}, \qquad (6)$$

$$\omega\equiv\frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2}\ , \quad s'(x)t'(y)\neq 0, \quad s(x)+t(y)\neq 0, \qquad (7)$$

При этом предполагается, что в $\overline{D}$ имеют место неравенства

$$a_1b_1a_2b_2\neq 0, \quad \{a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x\}_y+a_1b_1a_2b_2-(a_2b_2)_x\neq 0, \qquad (8)$$

$(x, y) \in \overline{D}$.

Произведения α_r, β_r характеризуют структуру конструкций, стоящих в (4), (5) слева от этих произведений, $\alpha_r, \beta_r \in C^1, s, t, m \in C^2$, причем m зависит лишь от одной из переменных (x, y) и не принимает значения 2, а классы C^1, C^2 задаются на замкнутых множествах (сторонах $\overline{D}$).

Основным результатом является

Теорема. *Пусть вместе с условиями (8) существуют функции $\alpha_r, \beta_r, m, s, t$ указанных выше классов, для которых имеет место хоть одна из групп соотношений (4)-(5), или при выполнении тождеств (6) хотя бы одна из комбинаций в левых частях (8) имеет вид ω из (7). Тогда уравнение (1) разрешимо в квадратурах.*

Замечание. Для обоснования проведенных при доказательстве теоремы рассуждений требуется, чтобы коэффициенты из (1) удовлетворяли в $\overline{D}$ условиям гладкости

$$a_1, b_2 \in C^{2,2}, \quad a_2 \in C^{2,1}, \quad b_1 \in C^{1,2}, \quad F \in C^{2,1}. \tag{9}$$

Литература

1. Жегалов В. И., Сарварова И. М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Изв. вузов. Математика. – 2013. – №3. – С.68-73.

MSC 30G20

О РЕШЕНИЯХ ТИПА ФЛОКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Д.С. Сафаров

Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава,
Республика Таджикистан, e-mail: Safarov-5252@mail.ru

На комплексной плоскости рассмотрим уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw\,(z+h_1) + bw\,(z+h_2) = 0\,, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$, $2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y$ a, b и отклонения аргументов h_1, h_2 постоянные.

Если искать частные решения, уравнения (1) в виде

$$w\,(z) = e^{\lambda\bar{z}}, \quad \lambda - \text{постоянная}, \tag{2}$$

то для определения λ получим, так называемое, характеристическое уравнение

$$\lambda + ae^{\lambda\bar{h}_1} + be^{\lambda\bar{h}_2} = 0. \tag{3}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество корней, так как функция

$$\varphi\,(\lambda) = \lambda + a\exp\left(\lambda\bar{h}_1\right) + b\exp\left(\lambda\bar{h}_2\right)$$

целая аналитическая функция.

Кратному корню λ уравнения (3) кратности m соответствуют линейно независимых частных решений вида

$$e^{\lambda\bar{z}}, \bar{z}e^{\lambda\bar{z}}, ..., \bar{z}^{m-1}e^{\lambda\bar{z}}.$$

Из (2) получим, что

$$w\,(z+h_j) = w\,(z)\exp\left(\lambda\bar{h}_j\right), \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Легко видеть, что всякая функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (4) представимо в виде

$$w\,(z) = e^{\lambda\bar{z}}\psi\,(z)\,, \tag{5}$$

где $\psi\,(z)$ – периодическая с периодами h_1, h_2 функция.

Подставляя (5) в (1) получим, что $\psi\,(z)$ аналитическая функция. Отсюда следует

Теорема. *Пусть λ_j есть m_j – кратный корень уравнения (3). Тогда уравнение (1) имеет m_j линейно независимых решений вида*

$$w_{j1}\,(z) = \psi_{j1}\,(z)\exp\left(\lambda_j\bar{z}\right),$$

$$w_{j2}\left(z\right)=\left[\bar{z}\psi_{j1}\left(z\right)+\psi_{j2}\left(z\right)\right]\exp\left(\lambda_{j}\bar{z}\right), \tag{6}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$w_{jm_{j}}\left(z\right)=\left[\bar{z}^{m_{j}-1}\psi_{j1}\left(z\right)+\bar{z}^{m_{j}-2}\psi_{j2}\left(z\right)+...+\psi_{jm_{j}}\left(z\right)\right]\exp\left(\lambda_{j}\bar{z}\right),$$

где функции $\psi_{js}\left(z\right)$ при $Im\left(h_{2}/h_{1}\right)=0$ *однопериодические аналитические функции, а при* $\mathrm{Im}(h_{2}/h_{1})\neq 0$ – *эллиптические функции.*

Решения вида (6) называются решениями типа Флоке.

MSC 34E99

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т.А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
пр. Морской, 26, Северодвинск, 164515, Россия, e-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Пусть выполняются следующие условия:
$a)$ $P(x)$ - невырожденная матриц-функция на полуоси $R_+ := [0; +\infty)$,
$b)$ $P^{-1}(x) = (p_{ij}(x))$ и $Q(x) = (q_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - эрмитовы матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определены и измеримы на R_+,
$c)$ $R(x) = (r_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - комплекснозначная матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определена и измерима на R_+,
$d)$ функции $q_{ij}(x)$, $p_{ij}(x)$, $r_{ij}(x)$ локально суммируемы на R_+ $(q_{ij}, p_{ij}, r_{ij} \in L^1_{loc}(I))$.

Предполагая, что вектор-функции $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ и $y^{[1]} = (y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \ldots, y_n^{[1]})^t := P(y' - Ry)$ (t - символ транспонирования) уже определены и являются локально абсолютно непрерывными на R_+, рассмотрим однородное симметрическое дифференциальное уравнение второго порядка с матричными коэффициентами

$$-(y^{[1]})' - R^* y^{[1]} + Qy = 0, \qquad x \in R_+. \tag{1}$$

Пусть далее матрицы $P_1 = (p_{ij}^{(1)})$, $Q_1 = (q_{ij}^{(1)})$ и $R_1 = (r_{ij}^{(1)})$ обладают теми же свойствами, что и матрицы P, Q и R, а вектор-функции y, $y^{[1]} := P_1(y' - R_1 y)$ определены и y, $y^{[1]} \in AC_{loc}(R_+)$.

Рассмотрим второе дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(y^{[1]})' - (R_1)^* y^{[1]} + Q_1 y = 0, \qquad x \in R_+ \tag{2}$$

и через T обозначим фундаментальную матрицу системы решений этого уравнения, столбцы которой имею вид $(u_j, u_j^{[1]})^t$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$, где u_j - линейно независимые векторные решения уравнения (2) (квазипроизводные определяются посредством матриц P_1 и R_1).

Работа посвящена установлению достаточных условий на коэффициенты матриц P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 и фундаментальную матрицу T систему решений уравнения (2), обеспечивающих асимптотическую близость решений уравнений (1) и (2) при $x \to +\infty$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрицы P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 и T таковы, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| T^{-1} \begin{pmatrix} R - R_1 & P^{-1} - P_1^{-1} \\ Q - Q_1 & -R^* + R_1^* \end{pmatrix} T \right\| < +\infty. \tag{3}$$

Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ уравнение (1) имеет решение $\phi(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] u_j(x) \quad \text{и} \quad \phi^{[1]} = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] (u_j)^{[1]}(x),$$

где $a_j(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (j=1,2,. . . ,2n), а $||.||$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы (первая квазипроизводная вектор-функции ϕ определяется посредством матриц P и R, а вектор-функций u_j - посредством матриц P_1 и R_1).

В качестве примера рассмотрим случай $n = 2$.

Пусть $P_1 = I$, $R_1 = \sigma_1(x)$, $Q_1 = -\sigma_1^2(x)$, где I - единичная матрица второго порядка, а вещественная, симметрическая матрица $\sigma_1(x)$ имеет вид:

$$\sigma_1(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \\ \dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1} & -\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

$(\alpha > 2, 0 < \beta < \alpha)$.

Пусть далее, $P = I$, $R = \sigma(x)$, $Q = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x) = (s_{ij})(x)$ - вещественная, симметрическая матрица второго порядка, квадраты элементов которой локально суммируемы на полуоси ($s_{ij}^2 \in L^1_{loc}(R_+)$); x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ - возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $x_0 = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. Выберем произвольную точку $\nu_k \in [x_k; x_{k+1})$ и определим элементы $s_{ij}(x)$ матрицы $\sigma(x)$, полагая: $s_{11}(x) = s_{22}(x) = -\frac{\nu_k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $s_{12}(x) = s_{21}(x) = \frac{\nu_k^{\beta+1}}{\beta+1}$ при $x \in [x_k, x_{k+1})$.

Тогда, если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1}^{\alpha} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+1}^{2\alpha+1}}{(x_k^{\alpha} + x_k^{\beta})^{1/2}} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty,$$

то матрицы $\sigma(x)$ и $\sigma_1(x)$ удовлетворяют условию (3) теоремы 1 (более подробно см. [1] и [2]).

Автор выражает благодарность проф. Мирзоеву К.А. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 11-01-00790-а и № 12-01-31491-мол а, и Минобрнауки РФ, грант № 1.5711.2011.

Литература

1. Сафонова Т.А. Асимптотическое интегрирование систем квазидифференциальных уравнений второго порядка // Математические заметки. – 2011. – 89, Вып.6. – С.951-953.

2. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3, №3. – С.105-119.

MSC 35M10

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.Н. Сидоров

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
ул. Ленина, 47, г. Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = f(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < 1,\, -\alpha < t < \beta\}$, где $m > 0$, $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \quad (x,t) \in D_- \cup D_+, \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – достаточно гладкие функция, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Начально-граничная задача для уравнения (1) при $f(x) = 0$ изучалась в работах [1–3] в прямоугольной области D без условия (7). В работе [4] изучена задача с нелокальным условием $u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \psi(x)$ для уравнения (1) при $f(x) = 0$, $m = 0$, $b = 0$. В работах [5–7] изучены обратные задачи для уравнения (1) при $m = 0$ в прямоугольной области D с граничными условиями первого – третьего родов. В этих работах установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленных задач.

В работе, аналогично [1-4], методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задачи (2)–(7).

Теорема. *Если существует решение* $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *задачи* (2)-(7), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\Delta_k(\alpha,\beta,b) = \lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k) \int\limits_{-\alpha}^{0} J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\, ds + \gamma_{-1/(2q)}(k) \int\limits_{-\alpha}^{0} J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\, ds +$$

$$+1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}\left[\sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) + \lambda_k^2 w_k(-\alpha)\right] \neq 0,$$

где $J_\nu(z)$ *– функция Бесселя первого рода порядка* ν; $\lambda_k^2 = (qp_k)^2 = b^2 + (\pi k)^2$; $2q = m+2$;

$$\gamma_{1/(2q)}(k) = \frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{1/(2q)}, \quad \gamma_{-1/(2q)}(k) = -\frac{1}{2q}\Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{-1/(2q)};$$

$$w_k(-\alpha) = \frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q)\int\limits_{-\alpha}^{0} J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\, ds -$$

$$-\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q)\int\limits_{-\alpha}^{0} J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\, ds.$$

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. – 2009. – 86. – Вып.2. – С.273-279.

2. Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2008. – 44. – №9. – С.1175-1181.

3. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47. – С.1-8.

4. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. – 2011. – 89. – Вып.4. – С.596-602.

5. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. – 2009. – 429. – № 4. – С.451-454.

6. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области – // Известия вузов. Математика. – 2010. – №4(546). – С.55-62.

7. Сабитов К.Б. Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. – 2010. – 87. – Вып.6. – С.907-918.

MSC 44A15

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА-ЭРДЕЙИ

С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Теория операторов преобразования составляет самостоятельный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения [1-4]. Важным классом операторов преобразования являются операторы Бушмана-Эрдейи. Название «операторы Бушмана-Эрдейи» было предложено автором, в последнее время оно стало общепринятым.

Изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х годах в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. Операторы Бушмана-Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T.P. Higgins, Ta Li, E.R. Love, G.M. Habibullah, K.N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, В.И. Смирнова, Н.А. Вирченко, И. Федотовой, А.А. Килбаса, О.В. Скоромник и ряде других работ [5]. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения.

Важность операторов Бушмана-Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями [6-11]. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана-Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями. Автором было впервые показано [8], что операторы Бушмана-Эрдейи являются операторами преобразования для дифференциального выражения Бесселя и изучены их специальные свойства именно как операторов преобразования.

В докладе рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана-Эрдейи различных классов к вложению пространств И.А. Киприянова в весовые пространства С.Л. Соболева, формулам для решений уравнений с частными производными с операторами Бесселя, уравнениям Эйлера-Пуассона-Дарбу, включая лемму Копсона, построению операторов обобщённого сдвига, операторам Дункла, преобразованию Радона, построению обобщённых сферических гармоник и B-гармонических полиномов, а также доказательству унитарности в пространстве Лебега обобщений классических операторов Харди. Приведён обзор результатов В.В. Катрахова по приложению операторов преобразования Бушмана-Эрдейи к построению нового класса псевдодифференциальных операторов и изучению введённого им класса краевых задач с K-следом с существенными особенностями в решениях.

Литература

1. Carroll R.W. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions, North Holland, 1982.

2. Carroll R.W. Transmutation Theory and Applications, North Holland, 1986.

3. Ситник С.М. Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. (Ред. Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев) / Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2008. – С.226-293.

4. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey // arXiv:1012.3741, 2012. 141 p.

5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

6. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // arXiv: 1304.2114, 2013. 67 p.

7. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // in «Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012» (Edited by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin) / Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013. – 32 p.

8. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР, 1990. – 44 с.

9. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина-Пуассона // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – Вып.18, № 5 (76). – С.135-153.

10 Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи: история, классификация, основные свойства и приложения //Тезисы докладов международной конференции AMADE (Analytical Methods of Analysis and Differential Equations) / Беларусь, Минск, 2011. – С.136-137.

11. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи //Тезисы докладов международного научного семинара «Аналитические методы Анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE) / Минск, Беларусь, Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С.65-66.

12. Sitnik S.M. Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral theory and differential equations (STDE–2012). International conference in honor of V.A. Marchenko's 90th birthday / B.Verkin Institute for low temperature and engineering NASU, V. Karazin Kharkiv National University / Book of abstracts. Kharkiv, 2012. – P.101-102.

MSC 35J10

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КУЛОНОВСКОГО СФЕРОИДАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С.Л. Скороходов

Выцислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: sskorokhodov@gmail.com

На отрезке $\eta \in [-1, 1]$ рассматривается спектральная задача для кулоновского сфероидального волнового уравнения с параметрами $b, c \in \mathbb{C}$, $\ m \in \mathbb{Z}^{+}$:

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}\,U(\eta)\right]+\left(b\,\eta-c^2\,\eta^2-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right)U(\eta)=-\lambda\,U(\eta)\,, \tag{1}$$

$$|U(-1)|<\infty\,, \qquad |U(1)|<\infty\,. \tag{2}$$

Через $U(\eta)=U_k(\eta)$ и $\lambda=\lambda_k$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим собственные функции и собственные значения оператора задачи (1), (2) и отметим, что уравнение (1) является сингулярным, поскольку коэффициент $(1-\eta^2)$ перед старшей производной обращается в ноль на границах отрезка $[-1, 1]$. Поэтому краевыми условиями для функции $U(\eta)$ являются ограниченность (2) решения в особых точках $\eta=\pm 1$. Отметим также, что при комплексных b или c оператор (1) несамосопряженный, а при $b=0$ уравнение (1) определяет угловые сфероидальные функции $S_m(c,\eta)$. Функции $U(\eta)$ и $S_m(c,\eta)$ широко используются в математической физике, например, $U(\eta)$ возникают при решении трехмерного уравнения Шредингера в вытянутых или сплюснутых сфероидальных координатах, см. [1].

Решение $U(\eta)$ представимо, см. [2], в виде двух разложений $\overset{-}{U}(\eta)$ и $\overset{+}{U}(\eta)$ с центрами в точках $\eta=-1$ и $\eta=1$ с радиусами сходимости, определяемыми далее:

$$\overset{-}{U}(\eta)=\left(1-\eta^2\right)^{m/2}\sum_{p=0}^{\infty}\overset{-}{u}_p\left(1+\eta\right)^p, \qquad \overset{+}{U}(\eta)=\left(1-\eta^2\right)^{m/2}\sum_{p=0}^{\infty}\overset{+}{u}_p\left(1-\eta\right)^p. \tag{3}$$

Коэффициенты $\overset{-}{u}_p$ и $\overset{+}{u}_p$ зависят от λ и удовлетворяют однородным рекуррентным соотношениям 3-го порядка. Исследование асимптотического при $p\to\infty$ поведения этих коэффициентов на основе анализа характеристических уравнений и использования теории Пуанкаре-Перрона для разностных уравнений позволяет определить области сходимости разложений (3): для $\overset{-}{U}(\eta)$ это круг $|1+\eta|<2$, а для $\overset{+}{U}(\eta)$ — круг $|1-\eta|<2$.

Искомое решение $U(\eta)$ задачи (1), (2) в круге $|1+\eta|\le 1$ будем представлять в виде разложения $\overset{-}{U}(\eta)$ с весом $\overset{-}{C}$, а в круге $|1-\eta|\le 1$ — в виде $\overset{+}{U}(\eta)$ с весом $\overset{+}{C}$:

$$U(\eta)=\overset{-}{C}\,\overset{-}{U}(\eta)\,, \quad |1+\eta|\le 1\,, \qquad\qquad U(\eta)=\overset{+}{C}\,\overset{+}{U}(\eta)\,, \quad |1-\eta|\le 1\,, \tag{4}$$

где веса $\overset{-}{C}$ и $\overset{+}{C}$ найдем из условия гладкой сшивки разложений (4) в точке $\eta = 0$:

$$\overset{-}{C}\overset{-}{U}(0) = \overset{+}{C}\overset{+}{U}(0), \qquad \overset{-}{C}\overset{-}{U}{}'(0) = \overset{+}{C}\overset{+}{U}{}'(0). \tag{5}$$

Разрешимость системы (5) относительно коэффициентов $\overset{-}{C}$ и $\overset{+}{C}$ приводит к равенству нулю вронскиана $W(\overset{-}{U}, \overset{+}{U})$:

$$W(\overset{-}{U}, \overset{+}{U}) = \overset{-}{U}(0)\overset{+}{U}{}'(0) - \overset{+}{U}(0)\overset{-}{U}{}'(0) = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) позволяет вычислить счетное множество искомых собственных значений λ_p, а затем и соответствующие им собственные функции $U_p(\lambda_p;\, \eta)$ задачи.

На основе построенного метода было численно исследовано поведение собственных значений λ_p как функций комплексного аргумента c при фиксированном параметре b, т.е. $\lambda_p = \mathcal{F}_{p,\,b}(c)$, и как функций комплексного аргумента b при фиксированном параметре c, т.е. $\lambda_p = \mathcal{H}_{p,\,c}(b)$. С помощью обширных численных экспериментов обнаружено, что функции $\mathcal{F}_{p,\,b}(c)$ имеют точки ветвления 2-го порядка c_s, в которых значения $\mathcal{F}_{p,\,b}(c)$ для различных номеров p_1 и p_2 совпадают: $\mathcal{F}_{p_1,\,b}(c_s) = \mathcal{F}_{p_2,\,b}(c_s)$. Аналогично этому, функции $\mathcal{H}_{p,\,c}(b)$ также имеют свои комплексные особые точки ветвления 2-го порядка b_s, в которых значения $\mathcal{H}_{p,\,c}(b_s)$ для других различных номеров p_3 и p_4 совпадают: $\mathcal{H}_{p_3,\,c}(b_s) = \mathcal{H}_{p_4,\,c}(b_s)$.

С помощью обобщенного итерационного метода Ньютона и квадратичных аппроксимаций Эрмита-Паде было вычислено с высокой точностью большое количество точек ветвления c_s и b_s собственных значений λ_n и численно исследованы траектории этих точек при изменении, соответственно, параметров b и c.

Развитый в работе метод обладает существенно более высокой эффективностью, чем известные методы. Он был реализован в задачах [3, 4] о вычислении некоторых специальных функций и спектра оператора Орра-Зоммерфельда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13–01–00923) и Программы № 3 ОМН РАН.

Литература

1. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции / М.: Наука, 1976.

2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / М.-Л.: ГТТИ, 1950.

3. Скороходов С.Л. Методы аналитического продолжения обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_{p-1}(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_{p-1}; z)$ // Журнал вычислит. матем. и матем. физ. – 2004. – 44, №7. – С.1164-1186.

4. Скороходов С.Л. Точки ветвления собственных значений оператора Орра-Зоммерфельда // Доклады Академии Наук. – 2007. – 416, №5. – С.600-605.

MSC 35R30

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ЦИЛИНДРЕ

В.В. Соловьев

Нац. Исследовательский Ядерный Университет(МИФИ),
ул. Декабристов, 20-3-155, Москва, 127273, Россия, e-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.com

Пусть $0 < \alpha < 1$ некоторое фиксированное число, в пространстве точек $x = (x_1, ..., x_n) \in R_x^n$ задана ограниченная область $D \subset R_x^n$ с гладкой границей ∂D класса $C^{2,\alpha}$. Будем далее считать, что пространство R_x^n вложено в пространство точек $(y, x) = (y, x_1, ..., x_n) \in R_y \times R_x^n$. Пусть заданы фиксированные числа $q_1, q_2 : q_1 < 0 < q_2$. Определим в пространстве $R_y \times R_x^n$ цилиндр $\Omega = (q_1, q_2) \times D$. Боковую поверхность этого цилиндра обозначим $\Gamma = (q_1, q_2) \times \partial D$. Определим пространства функций $U(\Omega), F(D)$ по правилам :

$$U(\Omega) = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \in C^{2,\alpha}(\Omega), u_{yy} \in C(\bar{\Omega})\},$$

$$F(D) = \{f \in C(\bar{D}) : f \in C^{\alpha}(D), f(x) \le 0, x \in D\},$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U(\Omega) \times F(D)$, состоящую из условий:

$$-(Lu)(y, x) = -(a(x)u_{yy} + (L_x u)(y, x)) = f(x)u(y, x) + g(y, x), \quad (y, x) \in \Omega,$$

$$u(y, x) = \mu(y, x), \quad (y.x) \in \Gamma, \quad u(q_i, x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \in \bar{D}\,, \tag{1}$$

$$u(0, x) = \chi(x), \quad x \in D. \tag{2}$$

В условиях (1) оператор L_xимеет вид:

$$(L_x u)(y, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)u_{x_i x_j}(y, x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(y, x) + c(x)u(y, x),$$

функции $a, g, a_{ij}, b_i, c, \mu, \chi$ заданные, достаточно гладкие функции. Определим пространство функций:

$$H(D) = \{\chi \in C(\bar{D}) : \chi \in C^{2,\alpha}(\Omega),\ L_x\chi \in C(\bar{D})\}.$$

Для того чтобы сформулировать теорему существования и единственности для обратной задачи (1)-(2) определим вспомогательную функцию $\bar{w} \in C^{2,\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$ из условий:

$$-(L\bar{w})(y, x) = -g_{yy}(y, x), \quad (y, x) \in \Omega, \quad \bar{w}(y, x) = -\mu_{yy}(y, x), \quad (y, x) \in \bar{\Gamma},$$

$$\bar{w}(q_i, x) = g(q_i, x)/a(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in \bar{D}.$$

Определим для задачи (1)-(2) условия согласования, необходимые для существования её решения:

$$\mu(q_i,x)=0, \quad -a(q_i,x)\mu_{yy}(q_i,x)=g(q_i,x), \quad i=1,2, \quad \mu(0,x)=\chi(x), \quad x\in\partial D.$$

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре* Ω *оператора* L *справедливы включения* $a, a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(D)\cap C(\bar{D})$, *для функций* g,μ,χ *справедливы включения* $g, g_{yy}\in C^\alpha(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, $\mu,\mu_{yy}\in C(\bar{\Gamma})$, $\chi\in H(D)$, *выполнены условия согласования и неравенства*

$$\chi(x)\geq\chi_0>0, \qquad a(0,x)\bar{w}(0,x)-((L_x\chi)(x)+g(0,x))\leq 0\,, \quad x\in D\,,$$

$$g(y,x)\geq 0, \quad g_{yy}(y,x)\leq 0, \quad \mu(y,x)\geq 0, \quad \mu_{yy}(y,x)\leq 0, \qquad (y,x)\in\Gamma\,.$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(2) в указанном классе функций.

Изучена также обратная задача определения коэффициента в эллиптическом уравнении в цилиндре для случая переопределения при $y=q_2$ и имеющего вид $u_y(q_2,x)=0$. В этом случае получены условия однозначной разрешимости носящие аналогичный характер.

Литература

1. Соловьев В.В. Обратная задача определения коэффициента в уравнении Пуассона в цилиндре // ЖВМиМФ. – 2011. – 51, № 10. – С.1-8.

MSC 70H05

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Вещественную $2n \times 2n$-матрицу $\mathcal{G}$, $n \in \mathbb{N}$ вида

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с блоками в виде $n \times n$-матриц $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ таких, что $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$, $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}$ назовем *канонической гамильтоновой матрицей с n степенями свободы.*

Важность изучения таких матриц связана с тем, что они являются генераторами сдвига по времени $t \in \mathbb{R}$ вдоль траекторий $\langle P(t), Q(t) \rangle$, $P(t) = \langle p_1(t), ..., p_n(t) \rangle$ и $Q(t) = \langle q_1(t), ..., q_n(t) \rangle$ в $\mathbb{R}^{2n}$ для линейных механических гамильтоновых систем

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial q_i}\,, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1 \div n\,,$$

каждая из которых определяется квадратичной формой

$$\mathsf{H} = \frac{1}{2}(P, \mathcal{A}P) + (P, \mathcal{B}Q) + \frac{1}{2}(Q, \mathcal{C}Q)\,.$$

В работе устанавливается характеристическое свойство для матриц $\mathcal{F}$ четной размерности $2n$, которые приводятся посредством линейного преобразования $\mathcal{U}\mathcal{G}\mathcal{U}^T = \mathcal{F}$ к канонической гамильтоновой матрице $\mathcal{G}$ на основе ортогональной $2n \times 2n$-матрицы $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathbf{1}$. Эта характеризация основана на следующем наблюдении

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица $\mathcal{G}$ имела вид (1) необходимо и достаточно чтобы она удовлетворяла соотношению*

$$\mathcal{J}\mathcal{G}\mathcal{J}^T = -\mathcal{G}^T\,, \tag{2}$$

где $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{J}$ имеет блочный вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Основой для характеризации является

Теорема 2. *Множество вещественных $2n \times 2n$-матриц $\mathcal{I}$, удовлетворяющих условиям $\mathcal{I}^T = -\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^2 = -\mathbf{1}$, состоит из матриц, ортогонально эквивалентных матрице $\mathcal{J}$, то есть*

$$\mathcal{I} = \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^T\,, \qquad \mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathbf{1}\,.$$

Следствием этого утверждения является

Теорема 3. *Для того, чтобы* $2n \times 2n$*-матрица* $\mathcal{F}$ *приводилась посредством линейного преобразования к матрице* $\mathcal{G}$ *на основе ортогональной матрицы* $\mathcal{U}$ *необходимо и достаточно чтобы существовала матрица* $\mathcal{J}$ *такая, что* $\mathcal{J}^T = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -\mathbf{1}$*, для которой имеет место* $\mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{J}^T = -\mathcal{F}^T$.

Таким образом, это свойство является характеристическим для матриц ортогонально эквивалентных некоторой канонической гамильтоновой матрице.

MSC 78A99

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ В КРИСТАЛЛЕ НА ВЫХОД НЕКОГЕРЕНТНОГО ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.В. Сыщенко, А.И. Тарновский

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

При взаимодействии релятивистских заряженных частиц с кристаллами наряду с когерентными эффектами в тормозном излучении, обусловленными периодическим расположением атомов в кристалле, в спектре тормозного излучения присутствует некогерентная составляющая, наличие которой связано с тепловыми колебаниями атомов относительно их положений равновесия. Спектр некогерентного излучения, на первый взгляд, не должен зависеть от ориентации кристалла относительно пучка падающих частиц, однако при движении частиц в кристаллах возможно возникновение явления каналирования, когда частицы движутся в каналах, образованных потенциалами атомных цепочек или плоскостей, которое приводит к перераспределению потока частиц и может оказывать влияние на выход процесса некогерентного тормозного излучения.

Для выявления особенностей ориентационной зависимости выхода некогерентого тормозного излучения частиц в кристалле необходимо проанализировать их траектории движения. Однако поле кристалла существенно неоднородно, движение в таком поле может носить как регулярный, так и хаотический характер. Сильная нелинейность уравнения движения приводит к необходимости применения численных методов определения траекторий движения.

На рисунке представлены траектории электронов и позитронов, полученные с помощью численного решения уравнения движения, и вклад в интенсивность некогерентного тормозного излучения вдоль траектории частицы, рассчитанный с помощью дипольного приближения квазиклассической теории тормозного излучения [1] в соответствии с условиями эксперимента [2].

Из полученных результатов следует, что при углах падения частицы на кристаллографическую плоскость близких к нулю, для большей части точек влета частицы в кристалл имеет место плоскостное каналирование. В режиме плоскостного каналирования электрон проводит большую часть времени движения в кристалле вблизи атомной плоскости (рис. a). Это приводит к существенному увеличению вклада в интенсивность некогерентного излучения. Поскольку в этом случае электрон испытывает в среднем больше столкновений с атомами с малыми прицельными параметрами, чем при движении в аморфной среде, то интенсивность некогерентного излучения будет превышать интенсивность излучения в аморфной среде (при совпадающем числе взаимодействий с атомами). Позитрон, напротив, в режиме плоскостного каналирования находится большую часть времени вдали от атомных плоскостей (рис. d), что приводит к уменьшению выхода некогерентного излучения.

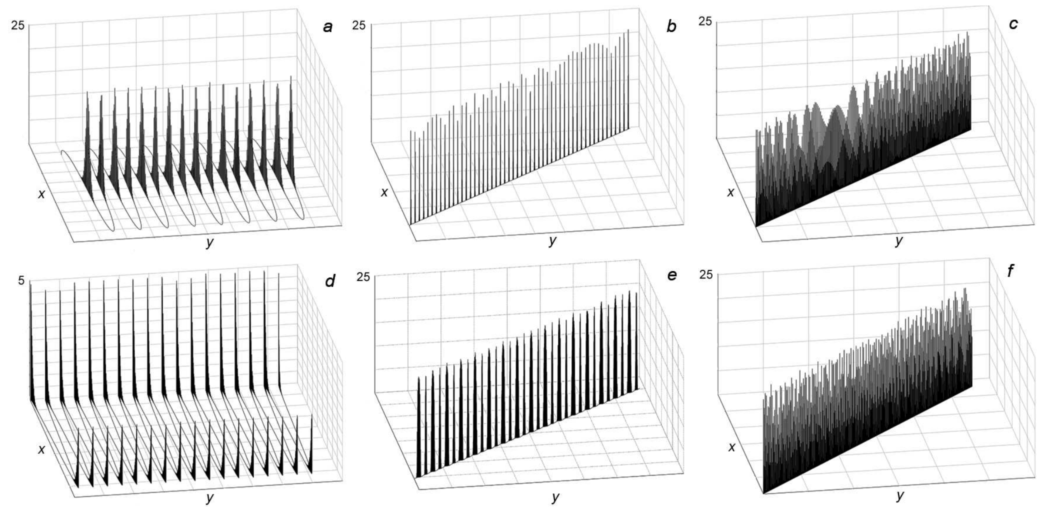


Рис. 1. Типичные траектории движения электронов (сверху) и позитронов (снизу) при различных углах падения на плоскость (110) кристалла типа кремния. По вертикали обозначен вклад в интенсивность некогерентного тормозного излучения от каждого акта взаимодействия частицы.

Если значение угла падения на плоскость близко к критическому углу плоскостного каналирования, энергия поперечного движения частиц становится сравнима с высотой потенциального барьера атомных плоскостей. Надбарьерные позитроны в этом случае проводят большую часть времени вблизи атомных плоскостей кристалла (рис. e), что приводит к увеличению выхода некогерентного излучения. Надбарьерные электроны же легко пролетают сквозь атомные плоскости (рис. b), в результате чего, выход некогерентного излучения понижается.

При углах падения значительно превышающих критический угол плоскостного каналирования энергия поперечного движения частиц будет существенно больше высоты потенциального барьера. В этом случае траектории частиц становится почти прямолинейными (рис. c,f). Для таких траекторий все возможные прицельные параметры столкновений с атомами являются почти равновероятными и интенсивность некогерентного излучения перестает зависеть от ориентации кристалла.

Литература

1. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / М.: Наука, 1993. – 344 с.

2. Backe H. et al. // Abstracts of the 4th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena. – Ferrara: INFN, 2010. – P.33.

MSC 41A05

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

А.С. Тимашов

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: loaderrus@gmail.com

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1-7].

Более точно, будет исследована следующая основная

Задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $s > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $g(x)$, так же определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp\left(\frac{(x-k)^2}{2s^2}\right)$$

и совпадает с интерполируемой функцией $f(x)$ во всех целых точках $x = m, m \in \mathbb{Z}$

$$g(m) = f(m), \qquad m \in \mathbb{Z}\,.$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [1]. Как показано в [2-4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели, оценки которых получены в [5-7]. Другой подход разрабатывался в [3-4], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ [8-9].

В работе получены теоретические результаты, касающиеся корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / University of Linköping, Sweden, 2007.

2. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences. Springer. – 2011. – 173, №2. – P.231-241.

3. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. – 2010. – 67. С.107-116.

4. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2009. – № 13(68), Вып.17/2. – С.89-99.

5. Минин Л.А., Ситник С.М. О неравенствах для тета-функций Якоби // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика». – 2009. – № 1(8). – С.234-311.

6. Минин Л.А., Ситник С.М. Неравенства для третьей тета-функции Якоби // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ) / Тезисы докладов международной конференции. Минск, Беларусь, 2009. – С.111.

7. Минин Л.А., Ситник С.М. О неравенствах для тета-функций Якоби // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау–Дюрсо. 2008 / Ростов-на-Дону: Южный Федеральный университет, 2008. – С.124-126.

8. Ситник С.М., Тимашов А.С. Применение экспоненциальной интерполяции в задачах сжатия и хранения информации // Сборник материалов II Всероссийской научно-практической конференции: «Информационная безопасность в государственных и негосударственных структурах» / Юго-Западный государственный университет, Курск, 2012. – С.50-59.

9. Тимашов А.С. О решении систем уравнений, определяющих коэффициенты разложения по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Труды восьмой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», пос. 75-летию Ю.П. Самарина (ММиКЗ) / Самара, 2011. – С.234-236.

MSC 45A05

О ЛИПШИЦЕВОСТИ И ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C^{(1),n}(D)$

Н.И. Трусова

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, trusova.nat@gmail.com

При изучении разрешимости нелинейных уравнений в банаховых пространствах часто используются условия липшицевости и гёльдеровости содержащихся в этих уравнениях операторов. В данной заметке приводятся условия липшицевости и гёльдеровости нелинейных матричных операторов с частными интегралами в пространстве $C^{(1),n}$ непрерывно дифференцируемых вектор-функций со значениями в R^n. Эти условия могут быть использованы при исследовании разрешимости и однозначной разрешимости систем интегральных уравнений с частными интегралами в $C^{(1),n}$.

Пусть $B = (B_{ij})$ $(i,j = 1,...,n)$, где

$$(B_{ij}y)(t,s) = \int\limits_T l_{ij}(t,s,\tau,y(\tau,s))d\tau + \int\limits_S m_{ij}(t,s,\sigma,y(t,\sigma))d\sigma +$$

$$\iint\limits_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,y(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \quad i,j = 1,...,n,$$

–операторы Урысона с частными интегралами, в которых $T = [a,b]$, $S = [c,d]$, $t,\tau \in T$, $s,\sigma \in S$, $D = T \times S$, $u \in R = (-\infty; +\infty)$, $l_{ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{ij}(t,s,\sigma,u)$ и $n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции.

Через $C^{(1)}(D)$ обозначим пространство функций со значениями в R, частные производные которых по t и s непрерывны. Норма в пространстве $C^{(1)}(D)$ определяется равенством

$$||x||_{C^{(1)}(D)} = \sup_{(t,s)\in D} |x(t,s)| + \sup_{(t,s)\in D} \Big|\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}\Big| + \sup_{(t,s)\in D} \Big|\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\Big|.$$

Пусть $C^{(1),n}(D)$ — пространство вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s),...,x_n(t,s))$, принимающих значения в R^n и имеющих непрерывные частные производные по t и s, и нормой

$$||x|| = \max_{1\le i\le n} ||x_i||_{C^{(1)}(D)}, \quad i = 1,...,n.$$

Оператор F удовлетворяет на $\Omega \subset C^{(1),n}(D)$ условию Липшица, если для любых $x, y \in \Omega$

$$\|Fx - Fy\| \le C\|x - y\|, \qquad C = const,$$

и условию Гёльдера, если

$$\|Fx - Fy\| \le C_1\|x - y\|^{\alpha}, \qquad C_1 = const,\ 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 1. *Пусть для любого* $x \in \Omega \ \ ||x|| \leq h$, *функции* l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ *и их частные производные первого порядка по* t, s, *и непрерывны на* $D \times T \times R$, $D \times S \times R$, $D \times D \times R$ *и удовлетворяют условию Липшица по последней переменной. Тогда оператор* B *действует в* $C^{(1),n}(D)$ *и удовлетворяет условию Липшица на* Ω.

Теорема 2. *Пусть для любого* $x \in \Omega \ \ ||x|| \leq h$, *оператор* $B_{ij} : C^{(1),n}(D) \to C^{(1),n}(D)$,

$$\int\limits_a^b |l'_{ij_u}(t,s,\tau,u)|d\tau \leq L, \quad \int\limits_c^d |m'_{ij_u}(t,s,\sigma,u)|d\sigma \leq M, \quad \iint\limits_D |n'_{ij_u}(t,s,\tau,\sigma,u)|d\tau d\sigma \leq N,$$

функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ *и их частные производные по* t *и* s *удовлетворяют условию Гёльдера по последней переменной. Тогда оператор* B *удовлетворяет условию Гёльдера на* Ω.

Отметим,что липшицевость и гельдеровость операторов Урысона с частными интегралами в других классах пространств изучались в [1-3].

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A. S., Zabrejko P.,P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

MSC 35L70

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО БЕЗДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ В ПРАВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Х.Г. Умаров

Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: umarov50@mail.ru

Явный вид решения задачи Коши и смешанных начально-краевых задач для названного в заглавии уравнения:

$$v_{xt}+v_{yy}+f\left(x,y,t\right)=0,$$

в котором область изменения пространственных переменных (x,y) — правая полуплоскость, получен сведением рассматриваемых задач к соответствующим абстрактным задачам в банаховом пространстве $C\left[0,+\infty\right]$ непрерывных ограниченных функций на полуоси.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

MSC 45E05

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

Т.М. Урбанович

Полоцкий государственный университет,
ул. Блохина, 29, Новополоцк, 211440, Беларусь, e-mail: UrbanovichTM@gmail.com

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t),\ t\in\Gamma, \tag{1}$$

где Γ — простой гладкий замкнутый контур на комплексной плоскости, коэффициенты a,b кусочно непрерывны на Γ.

Пусть задано конечное множество $F=F_+\cup F_-\subset\Gamma$, содержащее все угловые точки контура, и семейство $\alpha=(\alpha_\tau,\tau\in F)$ неотрицательных вещественных чисел. Исключительный случай уравнения (1) возникает, когда функции $a\pm b$ допускают в точках $\tau\in\Gamma$ нули порядка α_τ:

$$(a+b)(t)=O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t\to\tau\in F_+,$$

$$(a-b)(t)=O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t\to\tau\in F_-.$$

Исходя из семейства $\lambda=(\lambda_\tau,\ \tau\in F)$ вещественных чисел, введем класс $H_\lambda(\Gamma,F)$ функций $\varphi\in C(\Gamma\setminus F)$, которые на каждой гладкой дуге $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ с концом $\tau\in F$, не содержащей других точек из F, представимы в виде $\varphi(t)=|t-\tau|^{\lambda_\tau}\varphi_0(t)$, $t\in\Gamma_0$, где функция φ_0 принадлежит классу Гельдера $H(\Gamma_0)$.

Условие на функции $a\pm b$ уточним следующим образом. Пусть D^+ и D^-, соответственно, конечная и бесконечная компоненты дополнения к Γ на плоскости и $z_0\in D^+$ — фиксированная точка. В D^+ и D^- рассмотрим, соответственно, функции

$$A(z)=\prod_{\tau\in F_+}(z-\tau)^{\alpha_\tau},\quad B(z)=\prod_{\tau\in F_-}\left(\frac{z-\tau}{z-z_0}\right)^{\alpha_\tau},$$

где степенные функции во втором равенстве выбраны с разрезом вдоль дуг $[\tau,z_0]\in\overline{D^+}$. В этих обозначениях

$$(a+b)(t)=c(t)A(t),\quad (a-b)(t)=d(t)B(t), \tag{2}$$

где коэффициенты $c(t)$, $d(t)$ обратимы в классе $H_0(\Gamma,F)$ кусочно гельдеровых функций.

Выберем целые n_τ по условию $-1<\alpha_\tau+\lambda_\tau-\mathrm{Re}\delta_\tau+n_\tau<0$ и введем индекс

$$æ=\sum_{\tau\in F}n_\tau.$$

Функцию $X(z)$ построим следующим образом:

$$X(z) = X_0(z) \prod_{\tau \in F} (z-\tau)^{-n_\tau},$$

где

$$X_0(z) = e^{\Omega(z)}, \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\ln G)(t)dt}{t-z}.$$

Теорема. *Пусть $f \in H_{\alpha+\lambda}(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda_\tau < 0$, $\tau \in F$ и выполнено условие*

$$\alpha_\tau + \lambda_\tau - Re\delta_\tau \notin \mathbb{Z}, \quad \tau \in F.$$

Тогда при æ ≥ 0 уравнение (1) в предположениях (2) безусловно разрешимо в классе $H_\lambda(\Gamma, F)$ и его общее решение дается формулой

$$\begin{gathered}\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Ac} + \frac{1}{Bd}\right) f + \left(\frac{1}{Ac} - \frac{1}{Bd}\right) cX^+ P + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Ac} - \frac{1}{Bd}\right) \frac{cX^+}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)dt}{c(t)X^+(t)(t-z)},\end{gathered} \tag{3}$$

где P — произвольный многочлен степени не выше æ -1 (при æ $= 0$ положим $P = 0$).

Если æ < 0, то для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-$æ условий разрешимости

$$\int_\Gamma \frac{f(t)}{c(t)X^+(t)} t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, ..., -æ - 1,$$

и (единственное) решение уравнения дается формулой (3) при $P = 0$.

MSC 35L82

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.К. Уринов, К.С. Халилов

Ферганский Государственный университет,
ул. Мураббийлар (19), Фергана, (150100), Узбекистан, e-mail: urinovak@mail.ru, xalilov_q@mail.ru

В конечной односвязной области D плоскости xOy, ограниченной прямыми $x=0$, $y=1$, $x=1$, $x-y=1$, $x+y=0$ рассмотрим дифференциальное уравнение $Lu=0$ параболо - гиперболического типа, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1u \equiv u_{xx}-u_y-\lambda^2 u, & (x,y)\in D_1 = D\cap(y>0)\,, \\ L_2u \equiv u_{xx}-u_{yy}-(2\beta/y\ )\,u_y, & (x,y)\in D_2 = D\cap(y<0)\,, \end{cases}$$

а $\beta,\lambda\in R$, причем $0<\beta<(1/2)\,.$

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача H_1. Требуется найти функцию $u\,(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^{(2,1)}_{x,y}\,(D_1)\cap C^2\,(D_2)$ удовлетворяющую уравнению $Lu=0$ в области $D_1\cup D_2$ и следующим условиям:

$$u\,(0,y)=\mu_1\,(y)\,,\quad \int\limits_0^1 u\,(x,y)\,dx=\int\limits_0^1 u\,(1,t)\,dt+\mu_2\,(y)\,,\qquad 0\le y\le 1; \tag{1}$$

$$a\,(x)\,D^{1-\beta}_{0x}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+b\,(x)\,D^{1-\beta}_{x1}u\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)+$$
$$+\,c\,(x)\lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta}u_y\,(x,y)=e\,(x)\,,\qquad 0<x<1; \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+0}u_y\,(x,y)=\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y\,(x,y)\,,\qquad 0<x<1, \tag{3}$$

где $\mu_1\,(y)\,,\ \mu_2\,(y)$, $a\,(x)$, $b\,(x)$, $c\,(x)$, $e\,(x)$ - заданные непрерывные функции,

$$D^{1-\beta}_{0x}q\,(x)=\frac{1}{\Gamma\,(\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1}q\,(t)\,dt,\qquad D^{1-\beta}_{x1}q\,(x)=\frac{-1}{\Gamma\,(\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 (t-x)^{\beta-1}q\,(t)\,dt,$$

операторы дробного дифференцирования[1], $\Gamma\,(z)$-гамма-функция Эйлера.

Приведем схему исследования поставленной задачи H_1. Пусть $u\,(x,y)$ - решение задачи H_1. Учитывая условие (3) и $u\,(x,y)\in C\left(\bar D\right)$, примем обозначения $u\,(x,+0)=u\,(x,-0)=\tau\,(x)\,,\ 0\le x\le 1;\ \lim\limits_{y\to+0}u_y\,(x,y)=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y\,(x,y)=\nu\,(x)\,,\ 0<x<1$ и предположим, что $\tau\,(x)\in C\,[0,1]\cap C^{(2,\delta)}\,(0,1)$, $\nu\,(x)\in C^2\,(0,1)$, $[x\,(1-x)]^{2\beta}\nu\,(x)\in C\,[0,1]$, $\delta>0$. Тогда, функция $u\,(x,y)$ в области D_2, как решение видоизменённой задачи Коши для уравнения $L_2u=0$, представима в виде [1]

$$u\left(x,y\right)=\gamma_1\int\limits_0^1\tau\left(z\right)[t\left(1-t\right)]^{\beta-1}dt-\gamma_2(-y)^{1-2\beta}\int\limits_0^1\nu\left(z\right)\left[t\left(1-t\right)\right]^{-\beta}dt, \qquad (4)$$

где $z=x+y\left(1-2t\right),\ \gamma_1=\Gamma\left(2\beta\right)/\Gamma^2\left(\beta\right),\ \gamma_2=\Gamma\left(1-2\beta\right)/\Gamma^2\left(1-\beta\right).$

Пользуясь формулой (4) и условием (2),как и в работе [1], находим

$$A\left(x\right)\nu\left(x\right)=\gamma a\left(x\right)\left(1-x\right)^\beta D_{0x}^{1-2\beta}\tau\left(x\right)+\gamma b\left(x\right)x^\beta D_{x1}^{1-2\beta}\tau\left(x\right)-g\left(x\right),\quad 0<x<1. \qquad (5)$$

Здесь

$$\gamma=2^{2\beta}\Gamma\left(\beta+1/2\right)\Gamma\left(-\beta+1/2\right),\quad g\left(x\right)=\left[2^{1-2\beta}\Gamma\left(1-\beta\right)/\Gamma\left(1-2\beta\right)\right]\left[x\left(1-x\right)\right]^\beta e\left(x\right),$$

$$A\left(x\right)=\left(1-x\right)^\beta a\left(x\right)+x^\beta b\left(x\right)-2\Big[\left(1-2\beta\right)^{2\beta}\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(-\beta+1/2\right)\Big]^{-1}\left[x\left(1-x\right)\right]^\beta c\left(x\right).$$

Из уравнения $L_1u=0$ и краевых условий (1),(2) при $y\to+0$ получим

$$\tau''\left(x\right)-\lambda^2\tau\left(x\right)=\nu\left(x\right),\qquad 0<x<1, \qquad (6)$$

$$\tau\left(0\right)=\mu_1\left(0\right),\qquad \int\limits_0^1\tau\left(x\right)dx=\mu_2\left(0\right). \qquad (7)$$

Следовательно, функции $\tau\left(x\right)$ и $\nu\left(x\right)$ удовлетворяют уравнениям (5),(6) и условиям (7). Доказано, что справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$a^2\left(x\right)+b^2\left(x\right)\neq0,\quad a\left(x\right)b\left(x\right)\geq0,\quad a\left(x\right)c\left(x\right)\leq0,\quad b\left(x\right)c\left(x\right)\leq0\quad x\in\left[0,1\right], \qquad (8)$$

$$a\left(x\right),\ b\left(x\right),\ c\left(x\right)\in C\left[0,1\right]\cap C^2\left(0,1\right),\ e\left(x\right)\in C^2\left(0,1\right),\ \left[x\left(1-x\right)\right]^{3\beta}e\left(x\right)\in C\left[0,1\right]. \qquad (9)$$

Тогда задача $\{(5),(6),(7)\}$ *имеет единственное решение.*

Единственность решения задачи $\{(5),(6),(7)\}$ доказывается с использованием принципа экстремума для операторов $D_{0x}^{1-2\beta}$и $D_{x1}^{1-2\beta}$ [1], а существование решения- эквивалентным сведением рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи.

После того, как найдены функции $\tau\left(x\right)$ и $\nu\left(x\right)$ из задачи $\{(5),(6),(7)\}$, решение задачи H_1 в области D_2 находится с помощью формулы (4), а в области D_1определяется как решение задачи об определении функции $u\left(x,y\right)\in C\left(\bar{D}_1\right)\cap C_{x,y}^{2,1}\left(D_1\right)$, удовлетворяющей уравнение$L_1u=0$ и условия (1), (2), $u\left(x,0\right)=\tau\left(x\right)$,$0\leq x\leq1$. Последняя задача исследуется, как и в работе [2].

Справедлива следующая основная

Теорема 2. *Пусть* $h_1\left(y\right),h_2\left(y\right)\in C\left[0,1\right]$ *и выполнены условия (8),(9). Тогда решение задачи* H_1 *существует и оно единственно.*

Замечание. Этим же методом можно исследовать задачу H_1 и в том случае, когда второе из условий (1) заменено условием $u\left(1,y\right)=\int\limits_0^1 u\left(x,y\right)dx+\mu_2\left(y\right),\quad 0\leq y\leq1.$

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа/ Москва: Наука, 1985. – 304 с.

2. Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – 6, №2. – С.339-349.

MSC 60J70

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СЛУЧАЙНОМ СТОХАСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ БЕЛОГО ШУМА

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Рассматривается стохастическая динамическая система [1], описывающая движение $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{v}}(t), \tilde{\mathbf{M}}(t)\rangle$ во внешнем случайно изменяющемся магнитном поле $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ частицы, которая обладает как электрическим зарядом, так и собственным магнитным моментом. Здесь $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ – радиус-вектор случайного положения частицы, $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ – ее скорость и $\tilde{\mathbf{M}}(t)$ – магнитный момент в момент времени t. Знак «тильда» над символами указывает на то, что соответствующие функции являются случайными. Стохастические дифференциальные уравнения динамической системы, в пренебрежении релятивистским изменением массы частицы и ее торможением, которое связано с собственным излучением, имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) \\
\dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) &= \frac{e}{mc}\,[\tilde{\mathbf{v}}(t), \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)] + \\
&+ \Big([\tilde{\mathbf{M}}(t), [\nabla, \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t))]] + (\tilde{\mathbf{M}}(t), \nabla)\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)) \Big)\,, \\
\dot{\tilde{\mathbf{M}}}(t) &= g[\tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)]\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

в котором случайное поле $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$ играет роль мультипликативного шума [2].

Относительно статистических свойств случайного поля $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$ предполагается, что оно – гауссовское с нулевым средним значением $\langle \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\rangle = 0$. Корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \langle \tilde{\mathbf{B}}_i(\mathbf{x}, t)\tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x}, t)\rangle$, полностью характеризующая, в этом случае, поле $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$ обладает свойствами стохастической трансляционной инвариантности и временно́й однородности. Кроме того, полагается, что это поле имеет спектральную плотность, по определению пропорциональную

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{B}_i(\mathbf{x}, t)\tilde{B}_j(\mathbf{y}, s)\rangle \exp(i\omega(t-s))dt$$

не зависит от частоты ω. Эти предположения приводят к следующему общему виду корреляционной функции

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \delta(t-s)(\nabla_i\nabla_j - \delta_{ij}\Delta)D(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,,$$

где функция $D(z)$ является положительно определенной. Существенно, что в указанной форме корреляционной функции учтено также, что случайные реализации $\tilde{B}_i(\mathbf{x}, t)$ соленоидальны, $\nabla_i \tilde{B}_i(\mathbf{x}, t) = 0$. δ-функционная зависимость от времени корреляционной функции $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ позволяет утверждать [2], многомерный случайный процесс, порождаемый решениями системы стохастических дифференциальных уравнений (1), является марковским диффузионным процессом. Поэтому его плотность условных вероятностей перехода, полностью его определяющая с точностью до вероятности входа в процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению Колмогорова – многомерному параболическому уравнению второго порядка. В работе вычислена, в терминах функции D, матрица коэффициентов квадратичной формы, определяющая это дифференциальное уравнение. В силу стохастической трансляционной инвариантности поля $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$, эта матрица оказывается постоянной, то она не зависит от пространственной точки положения частицы.

Литература

1. Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 2d ed.– Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985.

2. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions.– Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 398 pp.

MSC 85A30

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

В.Е. Федоров

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: kar@csu.ru

При математическом моделировании в гидродинамике часто встречаются системы уравнений, содержащие уравнение несжимаемости $\nabla \cdot v = 0$ и векторные уравнения, содержащие сумму $(v \cdot \nabla)v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i v_{x_i}$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Такие системы уравнений иногда называют системами гидродинамического типа. Исследуем на однозначную локальную разрешимость начально-краевые задачи для одного класса систем уравнений, включающего в себя системы гидродинамического типа. Введем обозначения

$$\underset{1}{v} = (v_{x_1}, v_{x_2}, \ldots, v_{x_n}), \quad \underset{2}{v} = (v_{x_1x_1}, v_{x_1x_2}, \ldots, v_{x_nx_n}).$$

Через J обозначим некоторый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку t_0. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$(1 - \chi\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v + (q(t,x,v) \cdot \nabla)v + G(t, v, \underset{1}{v}, \underset{2}{v})v +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} G^i(t, v, \underset{1}{v}, \underset{2}{v})v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(t, v, \underset{1}{v}, \underset{2}{v})v_{x_ix_j} - r, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J, \tag{3}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n \leq 4$. Параметр $\chi \in \mathbb{R}$, как правило, характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu \in \mathbb{R}$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Задана вектор-функция $q = (q^1, \ldots, q^n)$ и функционалы G, G^i, G^{ij}, $i,j = 1, \ldots, n$, зависящие от t, v и от производных функций $v_1, \ldots, v_n$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ первого и второго порядков, G, G^i, $G^{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_\sigma \times (L_2(\Omega))^{n(n^2+n^3)} \to \mathbb{R}$. Например, G, G^i, G^{ij} могут быть функциями от интегралов по области Ω или ее подобластям от функции v и ее частных производных по пространственным переменным первого и второго порядков, функцией от значений v в фиксированных точках области и т. п.

Понятно, что при $q(t,x,v) \equiv v$ система (1), (2) является системой гидродинамического типа

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Через $\mathbb{L}_2^m$ будем обозначать m-ю декартову степень пространства $\mathbb{L}_2$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ — соответствующий ортопроектор.

В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A = \Sigma\nabla^2$. Как известно, оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [1].

С помощью редукции исследуемой начально-краевой задачи к задаче Шоуолтера для полулинейного уравнения соболевского типа в банаховом пространстве, используя методы теории вырожденных полугрупп операторов [2], получим следующий результат

Теорема 1. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G^{ij} \in C^1(J \times \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{L}_2^{n^2+n^3}; \mathbb{R})$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи* (1)–(4).

Следствие 1. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu, \nu_1 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи* (3), (4) *для системы уравнений обобщенного гидродинамического типа с нелинейной взякостью*

$$(1-\chi\nabla^2)v_t = \left(\nu + \nu_1 \int\limits_\Omega \sum_{j,m=1}^n \left|v_{x_m}^j(x)\right|^2 dx\right) \nabla^2 v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v - r, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J. \tag{6}$$

При $\nu_1 = 0$ (5), (6) является системой уравнений с линейной вязкостью, а при $q(t,x,v) \equiv v$ — системой уравнений Осколкова, моделирующей течение вязкоупругой несжимаемой жидкости [3, 4].

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Utrecht–Boston: VSP, 2003.

3. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 179. – С.126-164.

4. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – 31. – С.3-144.

MSC 76S05

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю.С. Федяев

«Орловский государственный университет»,
ул. Комсомольская, 95, Орёл, 302026, Россия, e-mail: FedyaevYS@gmail.com

Рассмотрим плоскопараллельную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды постоянной толщины с тензором проницаемости K . Течение жидкости характеризуют обобщённый потенциал φ и функцией тока ψ, которые удовлетворяют всюду в области фильтрации D (за исключением особых точек течения) системе уравнений [1]:

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, v_x, v_y – проекции скорости фильтрации. Компоненты тензора проницаемости K_{ij}, $i, j = 1, 2$ – постоянные величины, для которых выполняются условия:

$$K_{11} > 0, \quad |K_s| = K_{11}K_{22} - (K_{12} + P_{21})^2/4 > 0,$$

где $|K_s|$ — определитель симметричной части тензора K.

Поставим двумерную задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t на комплексной плоскости $z = x + iy$ (физической плоскости). Область фильтрации D может ограничивать контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2, которые в общем случае будем обозначать L. Граница L является прямой линией, которая совпадает с осью Ox. Течение жидкости происходит в верхней полуплоскости $(y > 0)$ и описывается обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ, которые удовлетворяют системе уравнений (1). На границе L_1 должно выполняться условие

$$\varphi^+(z) = \mathrm{const}\,, \quad z \in L_1, \tag{2}$$

а на L_2 – условие

$$\psi^+(z) = \mathrm{const}\,, \quad z \in L_2. \tag{3}$$

Знак «+» означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны орта нормали к ней. Нормаль направлена внутрь области D. Граница Γ_t делит область фильтрации D на части D_1 и D_2. Воспользуемся моделью «разноцветных» жидкостей, согласно которой физические свойства жидкостей (вязкость, плотность) в D_1 и D_2 одинаковы. Граница Γ_t представляет собой «отмеченные» частицы жидкости.

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаём параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z = z(t, s) \quad (x = x(t, s),\ y = y(t, s)), \quad z \in \Gamma_t. \tag{4}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s),\ y_0 = y(0, s)), \quad z \in \Gamma_0. \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения движения границы имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_t. \tag{6}$$

Задача эволюции границы Γ_t ставится следующим образом. Задано положение границ Γ_0, L, тензор проницаемости K. Необходимо найти положение границы Γ_t (4) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (6) с учётом граничных условий (2), (3) и начальных условий (5).

Поставленная задача решается на вспомогательной плоскости [1]. Это позволяет значительно упростить систему уравнений (1), приведя её к каноническому виду. Фундаментальные решения выписанных уравнений известны [2]. Они моделируют работу эксплуатационных и нагнетательных скважин. Граница области фильтрации L учитывается с помощью теоремы сопряжения на прямой [1].

Для исследования эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей построен численный алгоритм. С его помощью изучено влияние анизотропии грунта (компонент тензора проницаемости), первоначальной формы границы раздела жидкостей, границы области фильтрации на движение границы раздела жидкостей [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Орловской области (проект 12-01-97522 р_центр_а), Министерства образования и науки Российской Федерации.

Литература

1. Пивень В.Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде // Дифференциальные уравнения. – 2009. – 45, №9. – С.1286-1297.

2. Пивень В.Ф. Фундаментальные решения уравнений двумерной фильтрации в анизотропном слое пористой среды // Труды Международной школы-семинара «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Орёл: ГОУ ВПО «ОГУ», 2008. – С.86-94.

3. Федяев Ю.С. Исследование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в ограниченном анизотропном однородном слое пористой среды // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – №6(50). – С.195-198.

MSC 93B99

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.В. Флоринский

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: flor@bsu.edu.ru

Рассматривается линейная задача быстродействия с двумерным управлением:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + b_1u_1 + b_2u_2, \qquad |u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1, \\ &x(0) = x_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min . \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - управления, переводящие точку x_0 в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = -\int\limits_0^\Theta e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

а через $M_2(\Theta)$ – множество точек вида

$$w_0 = -\int\limits_0^\Theta e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau.$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ являются выпуклыми, содержащими 0 в качестве внутренней точки.

Очевидно, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1u_1, \qquad |u_1| \le 1, \tag{2}$$

а множество $M_2(\Theta)$ - областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2u_2, \qquad |u_2| \le 1. \tag{3}$$

Рассмотрим множество $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Оно является выпуклым, содержащим x_0 в качестве внутренней точки. Так как области управляемости $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ удовлетворяют условиям:$M_1(\Theta_1) \subset M_1(\Theta_2)$ и $M_2(\Theta_1) \subset M_2(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$, то и $M_3(\Theta_1) \subset M_3(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357 от 6 августа 2012г.)

Теорема. *Пусть для задачи (1) выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank}(b_1, Ab_1, ..., A^{n-1}b_1) = n \text{ и } \operatorname{rank}(b_2, Ab_2, ..., A^{n-1}b_2) = n.$$

Тогда для того, чтобы время быстродействия Θ для задачи (1) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ было непустым и не содержало внутренней точки.

Таким образом, время быстродействия Θ должно быть таким, чтобы множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ имели общую граничную точку $\hat{x}_0$. В этой точке существует (возможно не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$. Отсюда следует, что решение задачи быстродействия (1) сводится к решению следующих задач быстродействия:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + b_1u_1, \quad |u_1| \leq 1, \\ &x(0) = \hat{x}_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min . \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + b_2u_2, \qquad |u_2| \leq 1, \\ &x(0) = x_0 - \hat{x}_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min . \end{aligned} \tag{5}$$

и нахождению такой точки $\hat{x}_0$, что время быстродействия Θ будет являться общим как для задачи (4), так и для задачи (5) и оно же будет временем быстродействия для задачи (1).

Для каждой из задач (4) и (5) время быстродействия, род управления и моменты переключения оптимального по быстродействию управления можно находить методом, основанном на применении min-проблемы моментов Маркова, предложенном В.И. Коробовым и Г.М. Скляром [1,2].

Построены численные методы решения задачи (1), основанные на применении min-проблемы моментов Маркова.

Литература

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. – 1987. – 134(176), № 2(10). – С.186-206.

2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 6, №3/4. – С.264-287.

MSC 35K45

НОРМАЛЬНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ 3-Х МЕРНОЙ СИСТЕМЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А.В. Фурсиков

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Москва, 119991, Россия, e-mail: fursikov@gmail.com

Известно, что для трехмерной системы Гельмгольца, описывающей вихрь поля скорости вязкой несжимаемой жидкости, энергетическое неравенство не выполнено. Полулинейная параболическая система относительно векторного поля v называется нормальной, если ее нелинейный член $B(v)$ коллинеарен вектору v при каждом v. Так как энергетическое неравенство справедлово, когда $B(v) \perp v$, нормальная система не удовлетворяет энергетическому неравенству «в наибольшей степени».

Мы строим нормальную систему, чей нелинейный член $B(v)$ является ортогональной проекцией нелинейного члена системы Гельмгольца на луч, порожденный v. Оказывается, что существует явная формула для решений этой нормальной системы, позволяющая описать ее динамическую структуру, т.е. разбить ее фазовое пространство на множество взрывов (множество начальных условий, для которых решение взрывается за конечное время), множество устойчивости (когда решение экспоненциально убывает с заданной скоростью, если время $t \to \infty$) и промежуточное множество, а также дать аналитическое описание этих множеств. Мы надеемся в будущем использовать полученные результаты для исследования нелокальной разрешимости системы Гельмглльца.

Литература

1. Fursikov A.V. The simplest semilinear parabolic equation of normal type // Mathematical Control and Related Fields(MCRF). – 2012. – 2, №2. – P.141-170.

2. Fursikov A.V. On the Normal Semilinear Parabolic Equations Corresponding to 3D Navier-Stokes System // CSMO 2011, IFIP AICT 391, Berlin: Springer, 2013. – P.338-347.

MSC 42A50

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДОВ АНАЛИЗА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Э.О. Хазириши

Сухум, Республика Абхазия, e-mail: esma10@yandex.ru

1. Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Коши по окружности γ единичного радиуса с центром в начале координат:

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\,, \quad t\in\gamma\,. \tag{1}$$

Предположим, что $\varphi \in F_{\rho}^{C}$, где в класс F_{ρ}^{C} входят непрерывные функции, аналитически продолжимые в кольцо $\rho^{-1} < |z| < \rho$ и ограниченные по модулю константой C на границе этого кольца.

Будем считать, что информация, которую может использовать приближённый метод M, состоит из коэффициентов $\{\alpha_k\}_{-n}^{n}$, взятых из соотношения

$$\varphi \approx \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k\,, \qquad \alpha_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau\,. \tag{2}$$

Теорема 1. *При условии, что $\varphi \in F_{\rho}^{C}$, погрешность* (2) *оценивается равенством:*

$$\Delta(\{\alpha_k\}, F_{\rho}^{C}) = \sup_{\varphi\in F_{\rho}^{C}}\left\|\varphi(t) - \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k\right\|_{C(\gamma)} = \frac{2C}{\rho^n}\cdot\frac{1}{\rho-1}\ . \tag{3}$$

Теорема 2. *При условии, что $\varphi \in F_{\rho}^{C}$, оптимальный по точности метод M^* вычисления сингулярного интеграла* (1) *в пространстве непрерывных на γ функций $C(\gamma)$ даётся формулой:*

$$S\varphi \approx \sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k - \sum_{k=-n}^{-1}\alpha_k t^k\,. \tag{4}$$

При этом погрешность удовлетворяет равенству:

$$\Delta(\{\alpha_k\}, F_{\rho}^{C}) = \Delta(M^*, \{\alpha_k\}, F_{\rho}^{C}) = \frac{2C}{\rho^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}}\ . \tag{5}$$

Далее, пусть $\pi_n = [-1;1]^n$ – n-мерный куб. $G_{A_\varepsilon}^{\nu}$ – действительные в π_n функции, аналитически продолжимые за пределы π_n, причём для $\varphi \in G_{A_\varepsilon}^{\nu}$ имеем:

$$|\varphi(z)| \le A_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)|z|}\,, \qquad \nu>0, \varepsilon>0. \tag{6}$$

Классы $G^{\nu}_{A_\varepsilon}$ являются подклассами класса целых функций.

Теорема 3. *При условии, что $\varphi \in G^{\nu}_{A_\varepsilon}$, оптимальный по точности метод M^* вычисления сингулярного интеграла (1) даётся равенством:*

$$\Delta(M^*, \{\alpha_k\}, G^{\nu}_{A_\varepsilon}) = 2A_\varepsilon \sum_{|k|>n} \left(\frac{\exp(\nu+\varepsilon)}{|k|} \right)^{|k|}. \tag{7}$$

2. Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$S_1\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \operatorname{ctg} \frac{x-x_0}{2} dx\,. \tag{8}$$

Пусть периодическая функция $\varphi(x)$ задана в узлах $x_\nu = \pi\nu/n$, $\nu = \overline{1,2n}$ и $x_\nu < x_0 < x_{\nu+1}$. Построив наилучшие по точности в $\mathbb{C}_{[0;2\pi]}$ интерполяционные приближения функции $\varphi(x)$, сверху $\sigma^+_{2n}(x)$ и снизу $\sigma^-_{2n}(x)$, где $\sigma_{2n}(\varphi, t_k) = \varphi(t_k)$, $k = \overline{1,2n}$ есть тригонометрический интерполяционный сплайн порядка r дефекта 1; причём $\sigma^+_{2n} = \sup\limits_{\sigma \in \mathbb{C}_{[0;2\pi]}} \sigma_{2n}(x)$, $\sigma^+_{2n} = \inf\limits_{\sigma \in \mathbb{C}_{[0;2\pi]}} \sigma_{2n}(x)$, получим следующее предположение.

Теорема 4. *При условии, что $\varphi \in \mathbb{C}_{[0;2\pi]}$, асимптотически оптимальный по точности метод в $\mathbb{C}_{[0;2\pi]}$ для вычисления интеграла (8) даётся формулой:*

$$\tilde{\mathrm{S}}_1\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}\nu} \frac{\sigma^+_{2n}(x) - \sigma^-_{2n}(x)}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-x_0}{2} dx + \frac{1}{2]\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^+_{2n}(x) - \sigma^-_{2n}(x)}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-x_0}{2} dx + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{n}\nu}^{\frac{\pi}{n}(\nu+1)} \sigma_{2n}(x) \operatorname{ctg} \frac{x-x_0}{2} dx\,. \tag{9}$$

MSC 81V45

СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РАСЧЕТА РИДБЕРГОВСКИХ СОСТОЯНИЙ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

[*,]Л.Л. Хай, [*]А.А. Гусев, [*]С.И. Виницкий**

[*]Объединённый Институт Ядерных Исследований
Дубна, Россия, e-mail: luonglehai_tcl@yahoo.com.vn, gooseff@jinr.ru
[**] НИУ «БелГУ», Белгород, Россия

В цилиндрической системе координат, компонента $\Psi(\rho,z)$ волновой функции водородоподобного атома в однородном магнитном поле $\vec{B}=(0,0,B)$ удовлетворяет двумерному уравнению Шредингера

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi(\rho,z)+A_c\Psi(\rho,z)=\epsilon\Psi(\rho,z)\,,\quad A_c=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+m\gamma+U(\rho,z)\,,$$

$$U(\rho,z)=\frac{m^2}{\rho^2}+\frac{\gamma^2\rho^2}{4}+V_c(\rho,z),\quad V_c(\rho,z)=-\frac{2q}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,.$$

со стандартными граничными условиями и условием ортонормировки. Здесь m – магнитное квантовое число, $\gamma=B/B_0=\hbar\omega_c/(2Ry)$, $B_0\cong 2.35\times 10^5\,T$ – безразмерный параметр, определяющий напряженность магнитного поля B, $\omega_c=eB/(m_ec)$ – циклотронная частота, q – заряд ядра и $\epsilon=2E$ – энергия (в Ридбергах, $1\,Ry=(1/2)$ а.е.).

Решение $\Psi_t^{m\sigma}(\rho,z)$ задачи ищется разложением по набору $j_{\max}$ одномерных базисных функций $\Psi_t^{m\sigma}(\rho,z)=\sum_{j=1}^{j_{\max}}B_j^m(\rho;z)\chi_j^{(m\sigma t)}(z)$. В методе Канторовича, базисные функции $B_j(\rho;z)$ и потенциальные кривые $E_j(z)$ (в Ry) определяются как решения параметрической задачи на собственные значения

$$A_cB_j(\rho;z)=E_j(z)B_j(\rho;z),\quad \left\langle B_i(\rho;z)\middle|B_j(\rho;z)\right\rangle_\rho=\int_0^\infty B_i(\rho;z)B_j(\rho;z)\rho d\rho=\delta_{ij}\,.\qquad(*)$$

Отсюда получаем краевую задачу для системы $j_{\max}$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $\boldsymbol{\chi}^{(i)}(z)$:

$$\left(-\mathbf{I}\frac{d^2}{dz^2}+\mathbf{U}(z)+\mathbf{Q}(z)\frac{d}{dz}+\frac{d\mathbf{Q}(z)}{dz}\right)\boldsymbol{\chi}^{(t)}(z)=\epsilon_t\mathbf{I}\boldsymbol{\chi}^{(t)}(z),$$

где $\mathbf{I}$, $\mathbf{U}(z)$, $U_{ij}(z)=E_i(z)\delta_{ij}+H_{ij}(z)$и $\mathbf{Q}(z)$ – матрицы эффективных потенциалов:

$$H_{ij}(z)=\int_0^\infty\frac{\partial B_i(\rho;z)}{\partial z}\frac{\partial B_j(\rho;z)}{\partial z}\rho d\rho\,,\quad Q_{ij}(z)=-\int_0^\infty B_i(\rho;z)\frac{\partial B_j(\rho;z)}{\partial z}\rho d\rho.$$

Цель работы получить аналитические выражения для эффективных потенциалов при больших значениях $|m|$. В этом случае мы можем рассмотреть кулоновский потенциал как возмущение по сравнению с поперечным центробежным потенциалом и потенциалом осциллятора и разложить его в ряд Тейлора в окрестности точки ($x_0=x_s\gamma$):

$$V_c(x,z) = -\sum_{k=1}^{j_{\max}} V^{(k)}(x,z)\varepsilon^k = -\frac{\varepsilon q}{\gamma(z^2+2x_s)^{1/2}} + \frac{\varepsilon q(x-x_s\gamma)}{\gamma^2(z^2+2x_s)^{3/2}} - \frac{3\varepsilon^2 q(x-x_s\gamma)^2}{2\gamma^3(z^2+2x_s)^{5/2}} + \ldots,$$

где $x = \gamma\rho^2/2$, $\varepsilon = 1$ – формальный малый параметр, $x_s = \rho_s^2/2$, $\rho_s = \sqrt{2|m|/\gamma}$. При этом для уравнения (*) при $q = 0$ известны аналитические решения $B_j^{(0)}(x)$, $E_j^{(0)}(z) = 2\gamma(n+(m+|m|+1)/2)$. Разлагая $E_j(z)$ и $B_j(x;z)$ по степеням ε, а $B_j(x;z)$ и по базисным функциям $B_j^{(0)}(x)$

$$E_j(z) = E_j^{(0)}(z) + \sum_{k=0}^{k_{\max}} \varepsilon^k E_j^{(k)}(z), \quad B_j(x;z) = B_n^{(0)}(x) + \sum_{k=0}^{k_{\max}} \varepsilon^k \sum_{s=-s_{\max}}^{s_{\max}} b_{n;s}^{(k)}(z) B_{n+s}^{(0)}(x,z),$$

получаем рекуррентную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $b_{n;s}^{(k)}(z)$ и поправок $\lambda_n^{(k)}(z)$, после решения которой получаем аналитические выражения для этих коэффициентов, а затем и для матричных элементов $H_{ij}(z) = \sum_{k=2}^{k_{\max}} H_{ij}^{(k)}(z)$, $Q_{ij}(z) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} Q_{ij}^{(k)}(z)$. Сходимость разложений для матричных элементов при $m = -200$, $q = 1$, $\gamma = 2.553191 \cdot 10^{-5}$ приведена в таблице.

$k_{\max}$	$E_1(z)$, 10^{-4}	$E_2(z)$, 10^{-4}	$H_{11}(z)$, 10^{-9}	$H_{22}(z)$, 10^{-8}	$H_{12}(z)$, 10^{-10}	$Q_{12}(z)$, 10^{-5}
	$z=0$	$z=0$	$z=2000$	$z=2000$	$z=2000$	$z=2000$
0	0.2553	0.7660				
1	−4.7849	−4.2490				7.6077
2	−4.8573	−4.3416	5.7877	1.7421		6.9209
3	−4.8521	−4.3316	4.7428	1.3812	4.1057	7.8650
4	−4.8587	−4.3420	6.2408	1.8791	3.1350	7.6671
5	−4.8574	−4.3393	5.8064	1.7154	4.4733	7.8197
6	−4.8584	−4.3413	6.1601	1.8475	4.0086	7.7717
7	−4.8581	−4.3405	6.0269	1.7919	4.3858	7.8007
[1]	−4.8583	−4.3410	6.0896	1.8176	4.2989	7.7938

Значения матричных элементов приведённые в последней строке вычислены численно с помощью программы ODPEVP [1]. Как видно из таблицы при данных значениях параметров при $k_{\max} = 3$ эффективные потенциалы $E_j(z)$, $Q_{ij}(z)$, и $H_{ij}(z)$ вычисляются с точностью 10^{-6}, $2 \cdot 10^{-6}$ и 10^{-9}, а при $k_{\max} = 7$ с точностью 10^{-7}, $5 \cdot 10^{-7}$ и 10^{-10}, соответственно, что позволяет их использовать для расчёта ридберговских состояний и скоростей распада в сильных магнитных полях [2].

Литература

1. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Vinitsky S.I., Abrashkevich A.G. ODPEVP: A program for computing eigenvalues and eigenfunctions and their first derivatives with respect to the parameter of the parametric self-adjoined Sturm-Liouville problem. Comput. Phys. Commun. – 2009. – 180. – P.1358.

2. Gusev A.A. et al, // Lect. Notes Computer Sci. – 2012. – 4770. – P.155.

MSC 35K99

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ф.Г. Хуштова

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, ул. Шортанова, 89(А), Нальчик, 360000, Россия, e-mail: khushtova@ya.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$x^{\alpha} u_{xx} - D_{0y}^{\mu} u = 0, \tag{1}$$

где D_{ay}^{μ} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка μ с началом в точке a [1, с. 9], $\alpha < 1$, $0 < \mu < 1$.

Первая краевая задача для уравнения (1) при $\alpha = 0$ была рассмотрена в работе [2]. В работе [3]найдено представление решения первой краевой задачи для уравнения (1) при $\alpha = \mu = 1$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $D_{0y}^{\mu-1} u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $D_{0y}^{\mu} u(x, y) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, y) \in \Omega$.

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\mu-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{2}$$

$$|u(0, y)| < \infty, \quad u(r, y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{3}$$

и условию согласования

$$\varphi(0) = \varphi(r) = 0,$$

где $\varphi(x)$ *– заданная функция.*

Пусть $\beta = 2 - \alpha$, $f(x) = x^{\frac{\beta-2}{2\beta}} \varphi(x^{\frac{2}{\beta}})$. Справедлива следующая

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *имеет полное ограниченное изменение в любом интервале* (a, b), *удовлетворяющем условию* $0 < a < b < r$, *то существует решение задачи* (1)-(3), *которое имеет вид*

$$u(x, y) = \int_0^r \xi^{\beta-2} G(x, \xi, y) \varphi(\xi) d\xi, \tag{4}$$

где

$$G(x, \xi, y) = \frac{\beta}{r^{\beta}} \frac{\sqrt{x\xi}}{y^{1-\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\beta} x^{\frac{\beta}{2}}\right) J_{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \xi^{\frac{\beta}{2}}\right)}{J_{\frac{1}{\beta}+1}^{2}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\beta} r^{\frac{\beta}{2}}\right)} E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda_n y^{\mu}; \mu),$$

$J_\nu(z)$ – *функция Бесселя первого рода порядка* ν [4], $E_\rho(z;\mu)$ – *функция типа Миттаг-Леффлера* [5].

При $\beta = 2$, $\mu = 1$ из (4) следует известное представление решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями [6, с. 205]

$$u(x,y) = \int\limits_0^r G(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,y) = \frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2 y} \sin\frac{\pi n}{r}x \cdot \sin\frac{\pi n}{r}\xi.$$

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / М.: Наука, 2005. – 200 с.

3. Хуштова Ф.Г. Первая краевая задача для одного параболического уравнения со знакопеременной характеристической формой // Материалы VI Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 2008. – С.242-243.

3. Кузнецов Д.С. Специальные функции / М.: Высшая школа, 1965. – 248 с.

4. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.: Наука, 1966. – 672 с.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1977. – 736 с.

MSC 35M10

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ.

Е.В. Чаплыгина

Орловский Государственный университет,
ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026, Россия, e-mail: lena260581@yandex.ru

Уравнение

$$L(U(x,y)) \equiv U_{xx}(x,y) + \operatorname{sgn} y\; U_{yy}(x,y) = A_{xy}(U(x,y)), \tag{1}$$

$A_{xy} \equiv (R_x^{\tau} H(x) + R_x^{-\tau} H(3\tau - x) - 1)(\partial/\partial x + \sqrt{-\operatorname{sgn} y}\;\partial/\partial y)$, $0 < \tau \;\equiv \mathrm{const}$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, R_x^{Θ} – оператор сдвига: $R_x^{\Theta} q(x) = q(x - \Theta)$, рассмотрим в области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$, где

$$D^+ = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau,\ 0 < y < h\} = \bigcup_{k=0}^{2} D_k^+ \bigcup_{n=1}^{2} J_n \quad (0 < h \;\equiv \mathrm{const})\,, \quad D^- = \bigcup_{k=0}^{2} D_k^-$$

– эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau, 0 < y < h\},$$
$$D_k^- = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\} \quad (k = 0,1,2),$$
$$I = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau, y = 0\}, \qquad J_n = \{(x,y) : x = n\tau (n = 1,2), 0 < y < h\}\,.$$

Пусть $D_k = D_k^+ \bigcup D_k^- \bigcup I_k$, где $I_k = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau,\ y = 0\}$ $(k = 0,1,2)$.

Задача G. Найти в области D функцию

$$U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \backslash (J_1 \cup J_2)) \cap C^2(D \backslash (I \cup J_1 \cup J_2)),$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$\begin{aligned}
&U(0,y) = U(3\tau,y) = 0, && 0 \le y \le h,\\
&U(x,h) = \varphi(x), && 0 \le x \le 3\tau,\\
&U(x,x-\tau) = \psi_0(x), && \tau/2 \le x \le \tau,\\
&U(x,\tau-x) = \psi_1(x), && \tau \le x \le 3\tau/2,\\
&U(x,x-3\tau) = \psi_2(x), && 5\tau/2 \le x \le 3\tau;
\end{aligned}$$

условиям сопряжения

$$U(x,-0) = U(x,+0) = \omega(x), 0 \le x \le 3\tau,\ \ U_y(x,-0) = U_y(x,+0) = \nu(x), 0 < x < 3\tau, x \ne \tau, 2\tau;$$

условиям согласования
$\varphi(0)=\varphi(3\tau)=0,\ \psi_0(\tau)=\psi_1(\tau),\psi_2(3\tau)=0,$
где $\varphi(x),\psi_k(x)(k=0,1,2)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если функции*

$$\varphi(x)\in C[0,3\tau]\cap C^2(0,3\tau),\quad \psi_0(x)\in C[\tau/2,\tau]\cap C^2(\tau/2,\tau),$$

$$\psi_1(x)\in C[\tau,3\tau/2]\cap C^2(\tau,3\tau/2),\quad \psi_2(x)\in C[5\tau/2,3\tau]\cap C^2(5\tau/2,3\tau),$$

абсолютно интегрируемы на своих промежутках, $\varphi(0)=\varphi(3\tau)=0,\psi_0(\tau)=\psi_1(\tau),\psi_2(3\tau)=0;\psi_0'(x)$ *при* $x\to\tau,\psi_1'(x)$ *при* $x\to\tau,\psi_2'(x)$ *при* $x\to 3\tau$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи* G.

Вопрос существования решения задачи G в D_k сведен к разрешимости разностного уравнения

$$g_k(x)-i\,\mathrm{sgn}((x-\tau)(x-2\tau))\bar{B}_x(g_k(x)+Q_x(g_k(x)))=\gamma_k(x),\quad k\tau<x<(k+1)\tau\ \ (k=0,1,2),$$

где

$$g_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int_{k\tau}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}},\quad \bar{B}_x=\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih},$$

$$Q_x(g_k(x))=\begin{cases}\dfrac{1+i}{2}\dfrac{R_x^{-2ih}}{\alpha_k(x-k\tau-ih)}\displaystyle\int_{k\tau}^{x}\alpha_k'(t-k\tau)g_k(t)dt, & k\tau<x<(k+1)\tau\ \ (k=0,2),\\ \dfrac{1-i}{2}\displaystyle\int_{\tau}^{x}\dfrac{\alpha_1'(t-\tau)}{\alpha_1(t-\tau)}g_1(t)dt, & \tau<x<2\tau,\end{cases}$$

причем $\alpha_0(x)=\alpha_2(x)=e^{-x}(\mathrm{ch}\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sh}\sqrt{2}x),\alpha_1(x)=e^{-x}(\mathrm{ch}\sqrt{2}x+\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}x),$
$\gamma_k(x)$ – известная функция, зависящая от $\varphi(x),\psi_k(x)\,(k=0,1,2)$.

MSC 35N10

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Ф.М. Шамсудинов

Курган-Тюбинский госуниверситет,
Курган-Тюбе, Таджикистан, e-mail: faizullo 100@yahoo.rcom

Пусть D прямоугольник $D = \{(x,y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0, \ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{y = 0, \ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим уравнение следующего вида

$$\begin{cases} U_{xy} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha} U_x + \frac{b_1(x,y)}{r^\beta} U_y + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} U = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} \ , \\ U_{xx} + \dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma} U_x + \dfrac{c_2(x,y)}{r^\gamma} U = \dfrac{f_2(x,y)}{r^\gamma} \ , \\ U_{yy} + \dfrac{b_2(x,y)}{r^\delta} U_y + \dfrac{c_3(x,y)}{r^\delta} U = \dfrac{f_3(x,y)}{r^\delta} \ , \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2, \ a_j(x,y), \ b_j(x,y), \ c_k(x,y), \ f_k(x,y), \ j = \overline{1,2}, \ k = \overline{1,3}$ – заданные функции в области $D, \ \alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.

Проблеме исследования многообразия решений переопределенных систем дифференциальных уравнении с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвященны много работ. Целю настоящей работы является получение представления многообразия решений системы уравнений (1) через произвольные постоянные. По способу, разработанному Н. Раджабовым, для переопределенной системы уравнений (1) получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

1. $a_2(x,y), b_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), \ \ a_1(x,y), a_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), \ \ a_1(x,y), \ \ f_j(x,y),$

   $c_j(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), \ \ j = \overline{1,3};$

2. $c_1(x,y) = r^2 \partial_y \left(\dfrac{b_1(x,y)}{r} \right) + a_1(x,y) b_1(x,y),$

   $c_2(x,y) = r\partial_{\ x} \left(\dfrac{a_2(x,y)}{r^2} \right),$

   $c_3(x,y) = r\partial_y \left(\dfrac{b_2(x,y)}{r} \right);$

3. $|a_2(x,y) - a_2(0,0)| \le H_1 r^{\alpha_1}, \;\; H_1 = \text{const}, \;\; 0 < \alpha_1 < 1,$
   $|b_2(0,y) - b_2(0,0)| \le H_2 y^{\nu_1}, \quad H_2 = \text{const}, \;\; 0 < \nu_1 < 1;$

4. $\partial_y \left(\dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta} \right) = \partial_x \left(\dfrac{b_2(x,y)}{r^\delta} \right)$ в D;

5. $a_2(0,0) > -1, \;\; b_2(0,0) > -1;$

6. *Функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y), f_3(x,y)$ и $f_2(x,y)$ связаны при помощи коэффициенты системы уравнений (1).*

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$U(x,y) = \Omega_1 \left(\psi_3(y), \psi_2(y), f_2(x,y) \right),$$

$$\psi_3(y) = N_1 \left(c_1, f_3(0,y) \right),$$
$$\psi_2(y) = N_2 \left(c_2, f_1(0,y) \right),$$

где $\Omega_1 \left(\psi_3(y), \psi_2(y), f_2(x,y) \right), N_1 \left(c_1, f_3(0,y) \right), N_2 \left(c_2, f_1(0,y) \right), c_j, \;\; j = 1,2$ *– произвольные постоянные.*

Полученное решение имеет следующие свойства.

1^0. Если $x \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0} U(x,y) = \varphi_1(y).$$

2^0. Если $x \to 0$ и $y \to 0$, то

$$\lim_{y \to 0} \left\{ \lim_{x \to 0} U(x,y) \right\} = \lim_{y \to 0} \varphi_1(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; b_2(0,0) < 0, \\ 0, & \left(\exp \left[b_2(0,0) \omega_{\delta - 1}(y) \right] \right), \quad \text{если} \;\; b_2(0,0) > 0. \end{cases}$$

3^0.

$$\lim_{y \to 0} \left\{ \exp \left[-b_2(0,0) \omega_{\delta-1}(y) \right] U(0,y) \right\} = c_1.$$

4^0. Если $y \to 0$, то

$$U(x,y) = 0 \left(\exp \left[-b_1(0,0) \omega^{(2)}_{\frac{\beta}{2} - 1}(x,y) \right] \right).$$

Замечание 1. Представление многообразия решений системы уравнений (1) получено в явном виде когда второе уравнение системы является главным и коэффициенты уравнения системы связаны.

Замечание 2. Когда коэффициенты уравнений системы (1) не связаны представление многообразия решений названной системы получено через резольвента двухмерного интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенности.

MSC 35L15

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА СИНГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Шафаревич

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские Горы, 1, Москва, 119992, Россия, e-mail: shafarev@yahoo.com

Обсуждаются свойства решения задачи Коши на пространствах переменной размерности, представляющих собой набор римановых многообразий, соединенных кривыми. Найдена квазиклассическая асимптотика решения, описывающего рассеяние узкого гауссова пакета при прохождении точки склейки. Изучены статистические свойства решения при больших временах; в частности, показано, что порядок роста числа пакетов существенно зависит от топологии многообразий и траекторий соответствующей гамильтоновой системы.

MSC 60C20

МОДЕЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА С АДДИТИВНЫМ «БЕЛЫМ ШУМОМ»

А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков

Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, e-mail:
admin@susu.ac.ru, ridyu@mail.ru, hudyakov74@gmail.com

Математическая модель измерительного устройства (МИУ) состоит, во-первых, из системы уравнений леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + Du, \tag{1}$$

которая является конечномерным аналогом уравнений соболевского типа. Второй составной частью МИУ является специальным образом построенный функционал штрафа

$$J(u) = \alpha J_1(u) + \beta J_2(u), \quad \alpha, \beta \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+, \quad \alpha + \beta = 1, \tag{2}$$

который в случае $\alpha = 1$ описывает только эффект инерционности, а в случае $\alpha, \beta \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ еще и резонансность модели. Наконец, МИУ содержит начальное условие Шоутера–Сидорова

$$[R^L_\mu(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \tag{3}$$

где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – полюс L-резольвенты матрицы в точке ∞. МИУ (1)-(3) предназначена для восстановления (детерминированных) сигналов, искаженных либо инерционностью, либо еще и резонансами [1],[2].

В [3] (детерминированная) система (1) была заменена на стохастическую

$$L\overset{\circ}{x} = Mx + Du + N\overset{\circ}{\omega}, \tag{4}$$

где $\overset{\circ}{\omega}$ обозначает производную Нельсона–Гликлиха винеровского процесса. Показано, что $\overset{\circ}{\omega}$ обладает многими свойствами белого шума, в частности, хорошо согласуется с теорией броуновского движения Энштейна–Смолуховского. Поэтому $\overset{\circ}{\omega}$ была названа «белым шумом» («БШ»). В целом МИУ (2)-(4) (где в (3) x_0-векторная случайная величина) предназначена для восстановления детерминированного сигнала и, искаженного не только инерционностью и резонансами МИУ, но еще и входящим «БШ».

Поскольку входящий «БШ» тоже искажается инерционностью и резонансами МИУ, то возникает необходимость в создании пространств «шумов» [4], куда обязательно входит как $\overset{\circ}{\omega}$, так и ω. В докладе приводятся как результаты качественных исследований МИУ (2)-(4), так и направления численного анализа.

Литература

1. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16(192) Вып.5. – С.116-120.

2. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011, №17(234) Вып.8. – С.70-75.

3. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the «White Noise» // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012, №27(286) Вып.13. – С.99-108.

4. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Динамические измерения в пространствах «шумов» // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013.

MSC 46A12

FOURIER-BESSEL TRANSFORM OF A GENERALIZED FUNCTION VANISHING OUTSIDE A BOUNDED SURFACE

E.L. Shishkina

Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russia, e-mail: ilina_dico@mail.ru

Let $\mathbb{R}_n^+$ denote an Euclidean space of points $x=(x_1,...,x_n)$, $x_1>0,...,x_n>0$ and the multiindex $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ runs through fixed positive numbers. The space $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)=S_{ev}$ is the subspace of the Schwartz function space that consists of functions $\varphi(x)$ even in each variable $x_1,...,x_n$. The space of linear continuous functionals, whose regular representatives are generated by the linear weighted form

$$(f,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\varphi(x)x^\gamma dx, \qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i},$$

is called the distribution space over S_{ev} and is denoted by $S'_{ev}(\mathbb{R}_n^+)=S'_{ev}$.

The Fourier-Bessel transform is denoted by formula

$$F_B[f](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma\, dx\,,$$

where $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod\limits_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\,\xi_i)$, $j_\nu(t)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{2}{t}\right)^\nu J_\nu(t)$, $t\in\mathbb{R}_1$, $J_\nu(t)$ is Bessel functions of the first kind. Spaces S_{ev} and S'_{ev} are invariant to Fourier-Bessel transform (see [1]).

For the generalized function $f\in S'_{ev}$, vanishing outside a bounded surface $\Omega\subset\mathbb{R}_n^+$ the Fourier-Bessel transform is functional

$$(f(x),\mathbf{j}_\gamma(x,\xi))_\gamma=\int\limits_\Omega f(\sigma)\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma dx,$$

which acts as follows: function $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$ is replaced by a test function $\varphi_0(x,\xi)=\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$ for $x\in\Omega$ and $\varphi_0(x,\xi)=0$ for $x\notin\Omega$, then functional f applies to $\varphi_0(x,\xi)$. The number obtained is independent of choice of this function $\varphi_0(x,\sigma)$.

The Fourier-Bessel transform of any generalized function $f\in S'_{ev}$ vanishing outside a bounded surface for any test function $\psi(x)\in S_{ev}$ is denoted by formula

$$\int(f(x),\mathbf{j}_\gamma(x,\sigma))_\gamma\,\widehat{\psi}(\sigma)\sigma^\gamma d\sigma=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}(f,\psi)_\gamma.$$

We shall introduce a singular generalized weighted function (compare with construction in [2] page 247)

$$(\delta_\gamma(r-a),\varphi)_\gamma = \int\limits_{S_n^+(a)} \varphi(x)x^\sigma dS, \qquad \varphi(x)\in S_{ev}.$$

The Fourier-Bessel transform of $\delta_\gamma(r-R)$ is calculated according to the formula:

$$F_B[\delta_\gamma(r-R)](\xi) = \int\limits_{S_n^+(R)} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma\, dS_R = R^{n+|\gamma|-1}|S_n^+(1)|_\gamma j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(R|\xi|). \tag{1}$$

Following [3] we introduce the operator Δ_γ:

$$\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i},$$

where B_{γ_i} is Bessel operator:

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,...,n.$$

The formula (1) can be used for solving a problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle_\gamma u(x,t), \tag{2}$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=\delta_\gamma(x). \tag{3}$$

For $0<n+|\gamma|-\alpha<3$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ the solution of (2)-(3) is

$$u(x,t) = C_{\alpha,\gamma}(n)t^{1-n-|\gamma|}\,{}_2F_1\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|-1}{2},\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{|x|^2}{t^2}\right),$$

where

$$C_{\alpha,\gamma}(n) = 2^{n+|\gamma|-\alpha-2}|S_1^+(n)|_\gamma \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-n-|\gamma|}{2}\right)}.$$

References

1. Lyakhov L.N. Multipliers of the mixed Fourier–Bessel transform // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 1997. – 17, V.214. – P.234–249.

2. Gel'fand, I.M., Shilov, G.E. Generalized functions. Vol. I: Properties and operations / Boston: Academic Press, 1964.

3. Kipriyanov I.A. Singular Elliptic Boundary Value Problems / Moscow: Nauka, 1996.

MSC 35K15

LOCALIZATION OF SINGULARITIES OF SOLUTIONS TO SEMI-LINEAR PARABOLIC AND ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATE ABSORPTION POTENTIAL

Andrey E. Shishkov

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine

We study existence and the limit behaviour as $k \to \infty$ of solutions u_k of the Cauchy problem:

$$u_t - \Delta u + hu = 0 \text{ in } R^N \times (0;\infty); \quad u(x;0) = k\delta_0(x);\ p > 1;\ N \geq 1;$$

where $\delta_0(x)$ is the Dirac measure, nonnegative continuous function $h(x;t) = 0$ on some smooth manifold Γ with $(0;0) \in \Gamma$. Particularly, if $h = h(|x|) = |x|^\beta$, $\beta > 0$, then by arbitrary $\lambda : 1 < \lambda < \lambda_{cr} := 1 + \frac{2+\beta}{N}$ for each $k \in N$ there exists "fundamental" solution u_k and limiting solution u_∞ is an explicit very singular (more singular than u_k) solution with point singularity at $(0;0)$. In opposite case when $\lambda > \lambda_{cr}$ mentioned problem has no solution for any $k \in N$ [1]. Strong degeneration of potential h yields the following new phenomenon. By $k \to \infty$ point singularity of solutions u_k may propagate on all manifold γ and, as result, u_∞ turns into solution with nonlocalized singularity set Γ (for example, "razor blade" solution). For some model manifolds (partiacularly, $\Gamma_1 = \{o, t\}$; $\Gamma_2 = \{x; 0\}$) we found sharp necessary and sufficient condition (criterium) on the flatness of h near to Γ, guaranteeng propagation or nonpropagation of singularity set on Γ. We investigate mentioned phenomenon for different classes of quasilinear parabolic diffusion-absarption type equation (porous medium, evolution p-Laplace) with degenerate absorption potential. Stationary (elliptic) version of mentioned theory of propagation-nonpropagation of singularities of very singular solutions (see [2], [3]) will be discussed too. Results of joint works with Laurent Veron, Moshe Marcus.

References

1. Shishkov A., Veron L. Singular solutions of some nonlinear parabolic equations with spatially inhomogeneous absorption // Calc. Var. Part. Differ. Equat. -– 2008. -– 33. – P.343–375.

2. Shishkov A., Veron L. Diffusion versus absorption in semi-linear elliptic equations // J.Math. Anal. Appl. — 2009. -– 352. -– P.206–217.

3. Murcus M., Shishkov A. Fading absorption in non-linear elliptic equations / Ann. I. H. Pointcare – AN. – 2012, http://dx.doi.org/10.1016/j. anihpe. 2012.08.002.

MSC 60D05

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗАМКНУТЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ С ОДНОМЕРНЫМ КОМПАКТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПОГРУЖЕНИЯ

[**]О.Л. Шпилинская, [*]Ю.П. Вирченко

[*]Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

[**]Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Изучается метод построения распределений вероятностей для случайных замкнутых сепарабельных множеств, каждое из которых состоит с верояностью 1 из конечного дизъюнктивного набора отрезков (компонент) в $[0,1]$. Этот метод основан на задании бесконечного набора *частных распределений* для случайных величин – концов компонент случайного множества. Устанавливается связь такого метода задания распределения вероятностей с разработанным ранее формализмом построения вероятностного описания случайных множеств на основе многоинтервальных функций [1].

Пусть Ω – система множеств из [0,1], содержащая все замкнутые подмножества.

Определение 1. *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ *называется случайным замкнутым множеством, если* σ*-алгебра* $\mathfrak{F}$ *содержит все замкнутые подмножества [0,1] и для любого события* $X \in \mathfrak{F}$ *выполняется* $\mathsf{P}(X) = \mathsf{P}(\mathrm{cl}(X))$.

Следующее определение сепарабельности случайного множества аналогично соответствующему определению в теории случайных процессов [2].

Определение 2. *Случайное замкнутое множество* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ *назовем сепарабельным, если для любого счетного, всюду плотного в* $[0,1]$ *множества* $\Lambda \subset [0,1]$ *выполняется*

$$\Pr\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} = 1\,.$$

В работе [1] было доказано, что распределение вероятностей случайных множеств может быть задано на основе бесконечного набора многоинтервальных функций

$$R(a_1, b_1; ...; a_n, b_n) = \Pr\{\tilde{X} \cap [a_1, b_1] = \varnothing, ..., \tilde{X} \cap [a_n, b_n] = \varnothing\}\,, \tag{1}$$

$0 \le a_1 < b_1 < ... < a_n < b_n \le 1$, $n \in \mathbb{N}$. Эти функции не очень удобны в операционном отношении, но являются универсальными. Они могут быть использованы для определения распределения вероятностей любого замкнутого случайного множества.

Введем для произвольного натурального $m \in \mathbb{N}$ класс $\mathbf{Q}_m$, который состоит из случайных замкнутых множеств в [0,1], реализациями которых являются объединения m

дизъюнктивных отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [0,1]$, $i = 1 \div m$. Для множеств этого класса определим функции распределения

$$F_m(x_1, y_1; ....; x_m, y_m) =$$

$$\Pr\{\langle \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_m, \beta_m \rangle \in [0,1]^m : \alpha_i < x_i, \beta_i < y_i, \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}; i = 1, ..., m\},$$

где $\alpha_{m+1} = 1$, неубывающие по каждому из аргументов и при этом $F(0, ..., 0) = 0$, $F(1, ..., 1) = 1$. Для этой функции справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы неубывающая по своим $2m$ аргументам неотрицательная функция $F_m(x_1, y_1; ...; x_m, y_m) : [0,1]^{2m} \to [0,1]$, которая удовлетворяет условиям $F_m(1, 1; \ldots; 1, 1) = 1$, $F_m(0, 0; \ldots; 0, 0) = 0$, определяла распределение вероятностей для случайных интервалов $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1 \div m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = 1 \div m$ выполнялось $F_m(x_1, y_1; \ldots; x_i, y_i; \ldots; x_n, y_n) = F_m(x_1, y_1; \ldots; y_i, y_i; \ldots; x_n, y_n)$, если $y_i < x_i$ и*

$$F_m(x_1, y_1; \ldots; x_i, y_i; x_{i+1}, y_{i+1}; \ldots; x_n, y_n) = F_m(x_1, y_1; \ldots; x_i, x_{i+1}; x_{i+1}, y_{i+1}; \ldots; x_n, y_n),$$

если $y_i > x_{i+1}$.

Очевидно, что в общем случае каждая из функций F_m, $m \in \mathbb{N}$ может быть представлена в виде 3^{2m} слагаемых, которые представляют собой меры, чистые по каждому из $2m$ аргументов. Это устанавливается разложением Лебега по каждому из них.

В простейшем и наболее востребованном в приложениях случае эти функции являются абсолютно непрерывными по всем аргументам. В этом случае для каждой из них можно вести соответсвтующую плотность f_m, которая тождественно равна 0 в том случае, если хотя бы для одного номера $i = 1 \div m$ выполняется: либо $y_i > x_{i+1}$, либо $y_i < x_i$. Тогда

$$F_m(x_1, y_1; ...; x_m, y_m) = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_{x_1}^{y_1} dy_1 ... \int\limits_{y_{m-1}}^{y_m} dx_m \int\limits_{x_m}^{y_m} f_m(x_1, y_1; ...; x_m, y_m) dy_m .$$

$i = 1 \div m$.

Число m, в общем случае, является значением случайной величины ν, принимающей значения в $\mathbb{N}_+$. Распределение вероятностей такого случайного множества задается бесконечым набором функций F_m и связанным с ним распределением вероятностей $p_m = \Pr\{\nu = m\}$.

Взаимно однозначное соответствие между набором функций F_m, $m \in \mathbb{N}$ и набором $R(a_1, b_1; ...; a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ многоинтеравальных функций распределения случайных множеств устанавливается алгебраическими соотношениями. В частности, для множеств класса $\mathbf{Q}_1$ имеет место формула

$$R(a_1, b_1; ...; a_n, b_n) = F_1(a_1, a_1) + \sum_{i=1}^{n} (F_1(a_{i+1}, a_{i+1}) - F_1(b_i, a_{i+1})),$$

где $a_{n+1} = 1$.

Кроме того, для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ одноинтервальное распределение вероятностей множества класса $\mathbf{Q}_m$ выражется формулой

$$R(a,b) = F_m(a,a;...;a,a) + (F_{m-1}(a,a;...;a,a) - F_m(a,a;...;a,a;b,1)) + ... + (1 - F_1(b,1))\,,$$

где имеет место $F_{l+1}(x_1,y_1;...;x_l,y_l;1,1) = F_l(x_1,y_1;...;x_l,y_l)$, $l = 1,2,\ldots,m-1$.

В общем случае они выражаются на основе вероятностей

$$R_{n,m}(a_i,b_i; i = 1 \div n|a,b) = \Pr\{[\alpha_j,\beta_j] \subset [a,b], [a_i,b_i] \cap [\alpha_j,\beta_j] = \varnothing; i = 1 \div n, j = 1 \div m\}\,,$$

вычисляемых посредством справедливых при всех $n, m \in \mathbb{N}$ рекуррентных соотношений

$$R_{n+1,m}(a_i,b_i; i = 1 \div n+1|a,b) =$$

$$R_{n,m}(a_i,b_i; i = 1 \div n|a,a_{n+1}) + R_{n,m}(a_i,b_i; i = 2 \div n+1|b_1,b) - R_{n-1,m}(a_i,b_i; i = 2 \div n|b_1,a_{n+1})\,.$$

Литература

1. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Marginal probability distributions of random sets in $\mathbb{R}$ with markovian refinements // Theory of stochastic processes. – 2005. – 11(27);3-4. – P.121-130.

2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов / М.: Наука, 1977. -– 567 с.

MSC 11J71

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

А.В. Шутов

Владимирский государственный университет,
ул. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: a1981@mail.ru

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – вектор в $\mathbb{R}^d$. Данный вектор определяет сдвиг

$$R_\alpha : x \to x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^d}$$

на d-мерном торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Рассмотрим произвольное односвязное подмножество $X \subset \mathbb{T}^d$ и определим счетную функцию

$$N(\alpha, a, n, X) = \sharp\{i : 0 \leq i < n, R_\alpha^i(a) \in X\}.$$

Вектор α будем называть вектором общего положения, если $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Очевидно, что множество векторов общего положения есть множество полной меры в $\mathbb{R}^d$.

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [2], если α – вектор общего положения и X – множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией, то

$$N(\alpha, a, n, X) = n|X| + o(n),$$

то есть количество точек орбиты, попавших в область пропорционально d-мерному объему этой области.

Нас интересует случай, когда в качестве X берется множество, размерность которого меньше, чем размерность тора. В этом случае теорема Вейля дает

$$N(\alpha, a, n, X) = o(n)$$

и возникает вопрос о возможности улучшения данной оценки.

Пусть π – естественная проекция $\mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$.

Теорема 1. *Пусть P – многогранник в $\mathbb{R}^d$. Тогда для любого вектора общего положения α*

$$N(\alpha, a, n, \pi(\partial P)) = O(1),$$

то есть для всех a множество $\pi(\partial P)$ содержит только конечное число точек орбиты $\{R_\alpha^i(a)\}$. Здесь ∂P – граница многогранника P.

При отказе от условия общности положения теорема 1 становится неверной.

Более интересно, что теорему 1 нельзя обобщить на произвольные множества положительной коразмерности.

Теорема 2. *Для любого вектора общего положения $\alpha \in \mathbb{R}^2$ существует выпуклая кривая $\gamma \in \mathbb{R}^2$, содержащая бесконечно много точек орбиты $\{R^i_\alpha(a)\}$, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} N(\alpha, 0, n, \pi(\gamma)) = \infty.$$

Множество $X \subset \mathbb{T}^d$ называется множеством ограниченного остатка [1], если для него теорема Вейля о равномерном распределении допускает уточнение вида

$$N(\alpha, a, n, X) = n|X| + O(1).$$

Хорошо известно [3], что в одномерном случае, а также в случае d-мерных параллелепипедов понятие множества ограниченного остатка не зависит от выбора начальной точки орбиты a. Из полученных нами результатов вытекает, что в общем случае это не так.

Теорема 3. *Для любого вектора общего положения $\alpha \in \mathbb{R}^2$ существует двумерное множество $X \subset \mathbb{T}^2$ и начальные точки $a_1, a_2 \in \mathbb{T}^2$ такие, что*

$$N(\alpha, a_1, n, X) = n|X| + O(1),$$

но

$$\lim_{n\to\infty} |N(\alpha, a_2, n, X) - n|X|| = \infty.$$

Литература

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. – 1921. – V.5. – P.54-76.

2. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.

3. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей / М.: Мир. 1985.

MSC 46E99

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.И. Эминов, В.С. Эминова

Новгородский государственный университет,

ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия,
e-mail: eminovsi@mail.ru

Многие задачи теории дифракции и теории упругости описываются уравнением вида

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(\tau\right)a\left(t\right)\ln\frac{1}{|t-\tau|}\right)\right]u\left(t\right)dt+\int_{-1}^{1}K\left(\tau,t\right)u\left(t\right)dt=f\left(\tau\right), \tag{1}$$

где $a\left(\tau\right)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию: $0<a_0\leq a\left(\tau\right)\leq b_0$ при всех τ, $u\left(t\right)$ – неизвестная функция, ядро $K\left(\tau,t\right)$ является непрерывной функцией или имеет логарифмическую особенность. В работе [1] был исследован частный случай уравнения (1),когда функция $a\left(\tau\right)$ постоянна. Исследование уравнения (1) сводится к изучению гиперсингулярного интегро-дифференциального оператора

$$\left(Au\right)\left(\tau\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}u\left(t\right)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}dt\,,\qquad -1\leq\tau\leq 1.$$

Оператор A является симметричным положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2\left[-1,1\right]$ и имеет плотную область определения $D\left(A\right)$ [1]. Положительная определенность означает, что для любой функции u из области определения $D\left(A\right)$ оператора A справедливо неравенство

$$\left(Au,u\right)\geq\gamma^2\left(u,u\right)\,,\qquad\gamma>0.$$

Введем энергетическое пространство H_A симметричного положительно- определенного оператора A, как гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$\left[u,v\right]=\left(Au,v\right),$$

$$\left[u\right]^2=\left(Au,u\right).$$

Используя положительную определенность оператора A несложно доказать, что для любого u из области определения $D\left(A\right)$ оператора A справедливо неравенство

$$\gamma\left\|u\right\|\leq\left[u\right]\leq\frac{1}{\gamma}\left\|Au\right\|.$$

Положительно-определенный оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}. В следующей теореме этот результат усиливается.

Теорема 1. *Оператор, обратный к положительно определенному оператору A задается формулой*

$$\left(A^{-1}f\right)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln\left|\frac{\tau - t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right| dt.$$

и является вполне непрерывным в пространстве $L_2[-1,1]$.

Из этой формулы следует, что оператор A^{-1} является интегральным оператором с логарифмическим ядром. Теорема 1 позволяет доказать эквивалентность исходного уравнения, уравнению Фредгольма второго рода в энергетическом пространстве оператора A. Далее введем в рассмотрение систему функций

$$\varphi_n(\tau) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \sin\left[n\arccos(\tau)\right] = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \sqrt{1-\tau^2}\,U_n(\tau), \quad n = 1,2,3,\ldots \; .$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2\;[-1,1]$, а $U(\tau)$ – полиномы Чебышева второго рода: $U_1(\tau) = 1$, $U_2(\tau) = 2\tau$, $U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$ и т. д. Имеет место теорема.

Теорема 2. *Система функций*

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin\left[n\arccos(\tau)\right], \qquad n = 1,2,3,...$$

является полной в энергетическом пространстве H_A и ортонормированной.

Кроме того, введенные функции удовлетворяют известным условиям Мейкснера на ребре. Используя теоремы 1 и 2 получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет единственное решение в энергетическом пространстве H_A. Тогда приближенное решение, построенное методом Галеркина на основе базисных функций $\varphi_n(\tau)$, сходится к точному решению в пространстве H_A.*

Литература

1. Эминов С.И. Теория интегрального уравнения тонкого вибратора // Радиотехника и электроника. – 1993. – 38, Вып.12. – С.2160-2168.

2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970.

MSC 11P99

ДВЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ ДВОИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

К.М. Эминян

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Ленинградский пр., 49, Москва, 125993, Россия, e-mail: eminyan@mail.ru

Пусть $n = e_0 + e_1 2 + \ldots + e_k 2^k$ — представление натурального числа n двоичной системе счисление ($e_j = 0, 1$). Пусть $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел, двоичные разложения которых имеют четное число единиц, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$.

Цель настоящего доклада — представить следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Пусть $J(N)$ — число решений уравнения*

$$p_1 + p_2 + x^n = N \tag{1}$$

в простых числах p_1, p_2 и натуральных числах x таких, что

$$p_1 \in \mathbb{N}_0, \quad p_2 \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $I(N)$ — число решений уравнения (1) в произвольных простых числах p_1, p_2 и произвольных натуральных числах x. Тогда для любого $C > 3$ справедливо равенство

$$J(N) = \frac{1}{8} I(N) + O_C(N^{1+1/n} L^{-C}),$$

где $L = \ln N$.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Пусть $J_1(N)$ — число решений уравнения*

$$p_1 + p_2^2 + p_3^2 + x^n = N \tag{2}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3 и натуральных числах x таких, что

$$p_1 \in \mathbb{N}_0, \quad p_2 \in \mathbb{N}_0, \quad p_3 \in \mathbb{N}_0 \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $I_1(N)$ — число решений уравнения (2) в произвольных простых числах p_1, p_2, p_3 и произвольных натуральных числах x. Тогда для любого $C > 3$ справедливо равенство

$$J_1(N) = \frac{1}{16} I_1(N) + O_C(N^{1+1/n} L^{-C}).$$

MSC 35L30

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю.О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В докладе рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка общего вида с двумя независимыми переменными $x, y \in \mathbb{R}$

$$AU_{xxx} + BU_{xxy} + CU_{xyy} + U_{yyy} = 0,$$

где $U(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))$ – искомая двухмерная вектор-функция, A, B, C — коммутативные постоянные квадратные матрицы второго порядка с различными собственными значениями.

Каждое уравнение системы имеет три некратные характеристики, отличные от нуля.

Задача Коши. Найти решение $U\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ системы уравнений, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $l : y = 0$:

$$\langle l_1, U\,(x,\,0)\rangle = \alpha_1(x), \qquad \langle l_2, U\,(x,\,0)\rangle = \alpha_2(x),$$
$$\left\langle l_1, \frac{\partial U}{\partial n}\,(x,0)\right\rangle = \beta_1(x), \qquad \left\langle l_2, \frac{\partial U}{\partial n}\,(x,0)\right\rangle = \beta_2(x),$$
$$\left\langle l_1, \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\,(x,0)\right\rangle = \gamma_1(x), \qquad \left\langle l_2, \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\,(x,0)\right\rangle = \gamma_2(x),$$

где $n : x = 0$ – нормаль к прямой l, $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$, $\gamma_i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1,\,2, \langle a, b\rangle$ – скалярное произведение, l_1, l_2 – заданные векторы, зависящие от матриц-коэффициентов рассматриваемой системы.

Получено решение задачи, которое записано в виде формулы, являющейся аналогом формулы Даламбера.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики / Москва: Наука, 1982.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / Москва: Наука, 1972.

3. Яковлева Ю.О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Вестник СамГТУ. Серия физмат. наук. – 2012. – №1 (26). – С.247-250.

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

г. Белгород, 26 – 31 мая 2013 года

Сборник материалов
Международной конференции

В редакции авторов

Отпечатано в ООО Издательско-полиграфический центр
Подписано в печать 25.05.2013. Усл. п. л. 25,1. Тираж 80 экз. Заказ № 825