ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Ковалева Лидия Александровна

Чернова Ольга Викторовна

Методические указания к решению задач по теме:

Интегралы, зависящие от параметра

Белгород – 2018

.

Ковалева Л. А., Чернова О. В.

Методические указания к решению задач по теме: Интегралы, зависящие от параметра.

Методические указания предназначены для студентов дневных отделений математических и физических специальностей бакалавриата и магистратуры в рамках изучения дисциплин «Математический анализ» и «Дополнительные главы математического анализа».

Основная цель предлагаемых методических указаний — помочь научиться решать задачи по одному из курсов, традиционно трудных для усвоения студентами. В указаниях содержится 50 задач и упражнений различной степени трудности. В зависимости от трудности, задачи снабжены либо подробными решениями, либо указаниями, помогающими в нестандартных ситуациях выбирать верный путь решения, либо просто ответами.

Пособие может быть полезно для студентов других специальностей, а также аспирантов и преподавателей, которые желают углубить свои знания в области математического анализа.

Оглавление

Введение

Интегралы, зависящие от параметра — одна из глав математического анализа, изучению которой в основном курсе математического анализа уделяется мало внимания. Это связано с уменьшением общего числа часов для математического анализа и недостаточной подготовкой студентов к полноценному восприятию данного раздела на первом и втором году обучения.

Вместе с тем глава «Интегралы, зависящие от параметра» является неотъемлемой частью математического образования, целью которого является не только изучение математических дисциплин и формирование способности к интенсивной научно–исследовательской работе, но и воспитание научной ответственности за свои личные научные рассуждения и исследования. Только в разделе «Интегралы, зависящие от параметра» можно изучить возможность предельного перехода под знаком собственного и несобственного интеграла, дифференцирования и интегрирования по параметру собственного и несобственного интеграла, т.е. определить достаточные условия, при которых справедливы следующие равенства:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx,$$

$$\int\limits_a^{b_2}\left[\int\limits_a^{b_1} f(x,y)dx\right]dy=\int\limits_a^{b_1}\left[\int\limits_a^{b_2} f(x,y)dy\right]dx.$$

В главе «Интегралы, зависящие от параметра» можно изучить строгий вывод значений классических несобственных интегралов, зависящих от параметра — интегралов Дирихле, Эйлера–Пуассона, Лапласа, Френеля, Фруллани.

Также математический аппарат главы «Интегралы, зависящие от параметра» позволяет провести строгое исследование свойств Гамма–функции и Бета–функции Эйлера в области действительных значений параметров.

Исходя из предлагаемого круга читателей, «Методические указания» написаны применительно к книгам Г. М. Фихтенгольца [1] и Б. П. Демидовича [2], часто используемых в университетской практике. Все ссылки в тексте даны только на эти две книги.

Все пособие разбито на три параграфа и пункты. В начале каждого пункта помещены формулировки основных определений и теорем, применяемых для решения задач. Следует сразу же отметить, что эти сведения имеют своей целью лишь напомнить основные положения рассматриваемой темы, дают возможность при ссылках исключить частые обращения к внешним литературным источникам.

В начале каждого параграфа мы приводим номера разделов книги [1], предварительное и тщательное изучение которых позволит перейти к решению предложенных задач с должным пониманием. Нумерация теорем и определений в каждом их трех параграфов своя, нумерация задач – единая. Вслед за порядковым номером каждой задачи указан в скобках ее номер в сборнике [2]. Для сокращения записи вместо слов «определение» и «теорема», мы пишем «О» «Т», соответственно.

Вполне понятно, что наши «Методические указания» ни в коей мере не претендуют на полноту и не могут заменить соответствующие задачники и пособия. Часть основной литературы, рекомендуемой программой по математическому анализу, мы приводим в списке литературы на странице 39.

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Рекомендуем предварительно изучить соответствующий раздел по конспекту и учебнику [1], стр. 704 – 854.

<u>Основные теоремы</u>

Т. 1. (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра)

Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутом прямоугольнике $[a,b;c,d] = (x,y) : a \le x \le b; c \le y \le d$, то

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

представляет собой функцию, непрерывную на сегменте $[c,d]$.

Т. 2. (о дифференцировании под знаком интеграла)

Пусть выполнены условия Т. 1 и частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывная в прямоугольнике $[a,b;c,d]$. Тогда при $c < y < d$ справедлива формула Лейбница

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

В общем случае, когда пределы интегрирования есть дифференцируемые функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ параметра y и $a < \varphi(y) < b$, $a < \psi(y) < b$ имеем:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx,$$

$$c < y < d.$$

Т. 3. (интегрирование под знаком интеграла)

При условиях Т. 1 имеет место равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Т. 4.

Если функция $f(x,y)$ при фиксированном y интегрируема по x в промежутке $[a,b)$ и при $y \to y_0$ стремится к $\varphi(x)$ равномерно относительно x на $[a,b)$, то имеет место равенство

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Т. 5.

Пусть функция

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)g(x)dx,$$

где функция $g(x)$ абсолютно интегрируема при $x \in [a,b]$. В предположениях Т. 2 функция $I(y)$ дифференцируема по параметру и имеет место формула

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)g(x)dx.$$

Задачи

1 (3711). Показать, что интеграл

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$$

от разрывной функции $f(x,y) = \mathrm{sng}(x-y)$ является непрерывной функцией. Построить график функции $u = F(y)$.

Решение. Условия Т. 1. не выполнены. Разобьем область изменения $y \in (-\infty, \infty)$ на три части: $(-\infty, 0) \cup [0,1] \cup (1, +\infty)$. Тогда

$$F(y) = \begin{cases} \int\limits_0^1 dx = 1, & \text{если} \quad y \in (-\infty, 0), \\ -\int\limits_0^y dx + \int\limits_y^1 dx = 1 - 2y, & \text{если} \quad y \in [0,1], \\ -\int\limits_0^1 dx = -1, & \text{если} \quad y \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{y \to +0} F(y) = \lim_{y \to -0} F(y) = 1,$$

$$\lim_{y \to 1-0} F(y) = \lim_{y \to 1+0} F(y) = -1.$$

Указание. График данной функции построить самостоятельно.

2 (3712). Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(y)}{x^2 + y^2} dx,$$

где $f(x)$– положительная и непрерывная на сегменте $[0,1]$ функция.

Решение. Легко проверить (см. Т. 1.), что $F(y)$ непрерывна при любом $y \neq 0$. Очевидно, что $F(y) > 0$, если $y > 0$ и $F(y) < 0$, если $y < 0$. Покажем, что

$$\lim_{y \to +0} [F(y) - F(-y)] \neq 0.$$

Обозначим

$$\min_{x \in [0,1]} f(x) = m.$$

Тогда при $y > 0$ имеем:

$$F(y) \geq m \int\limits_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \cdot \mathrm{arctg} \frac{1}{y},$$

$$F(-y) \leq -m \int\limits_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = -m \cdot \mathrm{arctg} \frac{1}{y},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{y \to +0} [F(y) - F(-y)] - m\pi$. Таким образом, $F(y)$ терпит разрыв в точке $y = 0$.

3 (3713). Найти:

$$a) \quad \lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx,$$

$$b) \quad \lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}.$$

Указание. Применить Т. 4.

Ответ: a) 1; b) $\dfrac{\pi}{4}$.

4 (3714). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[A, B]$. Доказать, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_a^x [f(t + h) - f(t)] dt = f(x) - f(a), \quad A < a < x < B.$$

Указание. Представить интеграл в виде разности интегралов, в первом из них выполнить замену переменной $t + h = u$ и найти пределы (воспользовавшись, например, правилом Лопиталя).

Замечание. Если $f(t)$ дифференцируема, то эту формулу можно доказать путем предельного перехода под знаком интеграла.

5 (3715). Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx?$$

Указание. Исследовать при каждом фиксированном $x \in [0,1]$ поведение подинтегральной функции при $y \to 0$. Затем, вычислив интеграл, перейти к пределу при $y \to 0$. Сравнить полученные результаты.

6 (3720). Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int\limits_a^b f(y)|x-y|dy,$$

где $a < b$ и $f(y)$—непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция.

Решение. Пусть $x \in (a,b)$. Тогда

$$F(x) = \int\limits_a^x f(y)(x-y)dy - \int\limits_x^b f(y)(x-y)dy,$$

по Т. 2 имеем

$$F'(x) = \int\limits_a^x f(y)dy - \int\limits_x^b f(y)dy, \quad F''(x) = 2f(y).$$

Если $x \notin (a,b)$, то

$$F(x) = \begin{cases} -\int\limits_a^b f(y)(x-y)dy, & \text{если} \quad x \in (-\infty, a), \\ \int\limits_a^b f(y)(x-y)dy, & \text{если} \quad x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} -\int\limits_a^b f(y)dy, & \text{если} \quad x \in (-\infty, a), \\ \int\limits_a^b f(y)dy, & \text{если} \quad x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

$$F''(x) = 0.$$

7 (3721). Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta, \quad h > 0,$$

где $f(x)$—непрерывная функция.

Решение. Пусть $\varphi(x)$—первообразная функция для $f(x)$. Тогда

$$F(x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h [\varphi(x+\xi+\eta) - \varphi(x+\xi)]d\xi$$

и то Т. 2 имеем:

$$F'(x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h [f(x+h+\xi) - f(x+\xi)]d\xi = \frac{1}{h^2}[\varphi(x+2h) - 2\varphi(x+\xi) + \varphi(x)].$$

Следовательно,

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}[\varphi(x+2h) - 2\varphi(x+\xi) + \varphi(x)].$$

Замечание. Если предположить, что функция $f(x)$ дифференцируема, то этот же результат можно получить путем дифференцирования под знаком интеграла.

8 (3727). Пусть

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}}dx,$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на сегменте $[0, \alpha]$. Доказать, что при $0 < \alpha < 1$ выполняется равенство

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int\limits_0^{\alpha} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}} dx.$$

Решение. Применить Т. 2 непосредственно нельзя, так как подинтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = \alpha$. Сделаем замену переменной $x = \alpha t$. Тогда

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{\alpha - \alpha t}} dt = \sqrt{\alpha} \int\limits_0^{\alpha} \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1 - t}} dt.$$

Интегрируя по частям $\left[u = \varphi(\alpha \cdot t), dv = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t}}\right]$ и возвращаясь к переменной x, получим

$$I(\alpha) = 2\sqrt{\alpha}\varphi(0) + 2\int\limits_0^{a} \sqrt{\alpha - x}\varphi'(x) dx.$$

По Т. 2 из полученного соотношения следует доказываемое равенство.

9 (3732). Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(a, b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 sin^2(x) + b^2 cos^2(x)) dx.$$

Указание. Можно считать $a > 0$, $b > 0$ (почему?). Найти I'_b (или I'_a), затем (после преобразований) восстановить $I(a, b)$, учитывая, что

$$I(a, a) = \frac{\pi}{2} \ln a^2.$$

Ответ. $I(a, b) = \pi \ln \dfrac{|a| + |b|}{2}$.

10 (3736). Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1 + x^2 y^2},$$

вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Рассмотрим сначала интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad y \geq 0, \quad I(1) = I.$$

Применим Т. 5

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Положив $x = \cos t$, получим $I'(y) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Отсюда

$$I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}),$$

так как $I(0) = 0$ и $I(1) = \dfrac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2})$.

Обратимся к вычисляемому интегралу

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Применяя Т. 3 и используя $I(y)$, получим (проверить!)

$$I = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Изучить по учебнику [1] стр. 597-615, стр. 623-642, стр. 645-654, стр. 659-678.

1. Сходимость интегралов

Основные теоремы

Т. 1. (критерий Коши)

Для сходимости несобственного интеграла первого рода

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\to +\infty} \int\limits_a^{b} f(x)dx \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ *существовало число* $b = b(\varepsilon)$, *такое, что при любых* $b' > b$ *и* $b'' > b$ *выполнялось равенство*

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Т. 2.

Пусть $|f(x)| \leq F(x)$ *при* $x \geq a$. *Если интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx$$

сходится, то интеграл (1) сходится, причем абсолютно.

Т. 3.

Если $\psi(x) > 0$ *и* $\varphi(x) = O(\psi(x))$, *т.е. существует конечный предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k, \quad k \neq 0, \quad k \neq \infty,$$

то интегралы

$$\int_a^{+\infty} \psi(x)dx \qquad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Т. 4.

Пусть $f(x) = 0\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ *при* $x \to +\infty$. *Тогда интеграл (1) сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leq 1$.

Т. 5.

Пусть функция $f(x)$ *не ограничена в окрестности точки* $x = b$, *причем* $f(x) = O(\frac{1}{(x-b)^p})$ *при* $x \to b - 0$. *Тогда интеграл*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

сходится при $p < 1$ *и расходится при* $p \geq 1$.

Т. 6. (специальный признак сходимости)

Если

1) функция $\varphi(x)$ *монотонно стремится к нулю при* $x \to +\infty$ *и*

2) функция $f(x)$ *имеет ограниченную первообразную*

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi, \quad a \leq x \leq +\infty,$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

сходится, вообще говоря, не абсолютно.

Т. 7.

Для существования несобственного интеграла

$$I + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

необходимо и достаточно, чтобы какова бы ни была последовательность $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $A_n > a$, $A_n \to \infty$. *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx, \quad A_0 = a$$

сходился бы к одной и той же сумме, которая и дает конечное значение несобственного интеграла I.

Задачи

В задачах № 11 – 14 определить множества значений параметров, для которых данный интеграл сходится:

11 (3741).

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx.$$

Решение. Пусть $a \geq 0$. Тогда $\dfrac{e^{-ax}}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ при $x \to +\infty$ и по Т. 2 и Т. 4 исследуемый интеграл сходится. Если $a < 0$, то $\dfrac{e^{-ax}}{1+x^2} \to +\infty$ при $x \to +\infty$, откуда и следует, что интеграл расходится.

12 (3742).

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^p+x^q}dx.$$

Решение. Заметим, что $\left|\int\limits_{\pi}^{x} \cos(t)dt\right| \leq 1$. Пусть $\max(p,q) > 1$, тогда $\dfrac{x}{x^p+x^q} \to 0$ при $x \to +\infty$ и по Т. 6 интеграл сходится. Исследуем интеграл при условии $\max(p,q) \leq 1$. Для определенности положим $q \leq p \leq 1$. Пусть b', b''—произвольные числа, $b' > \pi$, $b'' > \pi$. Используя обобщенную теорему о среднем (см., например [1], стр. 114), имеем

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''}\frac{x\cos(x)}{x^p+x^q}dx\right| = \left|cos(\xi)\int\limits_{b'}^{b''}\frac{x}{x^p+x^q}dx\right| \geq \left|\frac{1}{2}\cos(\xi)\int\limits_{b'}^{b''}x^{1-p}dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\cos(\xi)\frac{b''^{2-p}-b'^{2-p}}{2-p}\right|,$$

где $\xi \in [b', b'']$. Каково бы ни было число $b > \pi$, всегда можно подобрать b', $b'' > b$, $b' \neq b''$, такие, что $\cos(\xi) \neq 0$ на отрезке $[b', b'']$, а следовательно, нельзя сделать интеграл меньше любого $\varepsilon > 0$. Но тогда по Т. 1 интеграл расходится. Таким образом, исследуемый интеграл расходится лишь при условии $\max(p, q) > 1$.

13 (3743).

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(x^q)}{x^p}dx.$$

Решение. Сделаем замену переменной $x = t^{\frac{1}{q}}$, $t > 0$, $q > 0$. Далее разобьем полученный интеграл на два интеграла. Тогда получим

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(x^q)}{x^p}dx = \frac{1}{q}\int\limits_0^{a}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt +$$

$$+\frac{1}{q}\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt, \quad \alpha = \frac{p-1}{q}+1, \quad a > 0.$$

Так как $\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} = O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$ при $t \to +0$, то первый интеграл, в илу признака сравнения, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$. Второй интеграл расходится, так как

$$\frac{1}{q}\int\limits_\pi^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{|\sin(t)|}{t}dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\xi_n^\alpha}, \quad \pi n \leq \xi_n \leq \pi(n+1),$$

Таким образом, если $q>0$, то данный интеграл сходится при условии $0<\dfrac{p+q-1}{q}<2$, или, что тоже самое, при $|p-1|<q$. Если $q<0$, то полагая $q=-q_1$, $q_1>0$, и производя аналогичные выкладки и рассуждения, приходим к такому условию сходимости данного интеграла: $|p-1|<q_1$, или $|p-1|<-q$. Объединяя обо случая и учитывая, что при $q=0$ интеграл расходится, получаем множество значений параметров, для которых сходится данный интеграл: $\left|\dfrac{p-1}{q}<1\right|$.

14 (3746).

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^p+\sin(x)}dx,\quad p>0.$$

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^p+\sin(x)}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 0<p<1,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если}\quad p=1,\\ 1, & \text{если}\quad p>1.\end{cases}$$

Поэтому достаточно исследовать поведение интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^p+\sin(x)}dx,\quad a>0.$$

Справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^p+\sin(x)}dx=\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^p}dx-\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^p(x^p+\sin(x))}dx.$$

Первый из интегралов в правой части сходится по Т. 6 при $p>0$.

Указание. Оценить второй интеграл, используя признак Дирихле.

Ответ: $p>\dfrac{1}{2}$

В задачах № 15 – 16 при помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов:

15 (3748).

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{1 + x^n \sin^2(x)}, \quad n > 0.$$

Решение. Так как

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{1 + x^n \sin^2(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1 + x^n \sin^2(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{(k\pi + t)dt}{1 + (k\pi + t)^n \sin^2(t)},$$

то имеет смысл исследовать на сходимость последний ряд.

Заметим, что

$$I_1 = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{(k\pi)dt}{1 + (k+1)^n \pi^n \sin^2(t)} < \int\limits_{0}^{\pi} \frac{(k\pi + t)dt}{1 + (k\pi + t)^n \sin^2(t)} < \int\limits_{0}^{\pi} \frac{(k+1)\pi dt}{1 + (k^n \pi^n \sin^2(t)} = I_2,$$

где $I_1 = \dfrac{k\pi^2}{\sqrt{1 + (k+1)^n \pi^2}}$, $I_2 = \dfrac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1 + k^n \pi^n}}$. Так как $I_1 = O(\dfrac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}})$, $I_2 = O(\dfrac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}})$, при $k \to \infty$, то по признаку сравнения, ряд, а значит и интеграл, сходится лишь при $n > 4$.

16 (3749).

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{sin^2(x)}}.$$

Решение. Данный интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{sin^2(x)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{sin^2(x)}}.$$

Поэтому будем рассматривать последний ряд. Обозначим $x = n\pi + t$, тогда получим

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{sin^2(x)}} = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{(n\pi + t)^p \sqrt[3]{sin^2(t)}}.$$

Последний интеграл является несобственным и сходится по признаку сравнения

$$\frac{1}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{sin^2(t)}} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right), \quad \text{при} \quad t\to\infty,$$

$$\frac{1}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{sin^2(t)}} = O\left(\frac{1}{(\pi-t)^{\frac{2}{3}}}\right), \quad \text{при} \quad t\to\pi-0.$$

В силу оценок

$$\frac{1}{\pi^p(n+1)^p}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2(t)}} < \int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{sin^2(t)}} < \frac{1}{\pi^p n^p}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt[3]{sin^2(t)}},$$

исследуемый ряд (интеграл) сходится и расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится только при $p>1$. Следовательно, данный интеграл сходится так же при $p>1$.

17 (3753). Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I=\int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2)}dx, \quad 0<y<1,$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

Решение. Заметим, что интеграл $L=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ сходится, а поэтому для любого $\varepsilon>0$, найдется $B(\varepsilon)$ такое, что справедливо неравенство

$$L=\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2}dt<\varepsilon \qquad (*)$$

Выберем чисто A так, что

$$A>\frac{2L}{\varepsilon}+B(\varepsilon). \qquad (**)$$

Используя замену $t = \dfrac{1}{y^2}(x - \dfrac{1}{y})$ для интеграла $\int\limits_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2)}dx$ и неравенства (*) и (**), получим оценку

$$\int\limits_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}dx = y \int\limits_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty} e^{-t^2}dt <$$

$$< \begin{cases} y\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt, & \text{если} \quad 0 < y < \dfrac{\varepsilon}{2L}, \\ \int\limits_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \int\limits_{A-\frac{2L}{\varepsilon})}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \int\limits_{B}^{+\infty} e^{-t^2}dt, & \text{если} \quad \dfrac{\varepsilon}{2L} \le y < 1, \end{cases}$$

Из оценки непосредственно следует равномерная сходимость интеграла на интервале $(0,1)$. Что касается мажорирования, то здесь можно привести следующие соображения. Предположим такая мажорантная функция F существует. Тогда должно выполняться неравенство

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2)} \le F(x).$$

Легко видеть, что согласно области определения функции $f : (1,+\infty)\times(0,1) \to \mathbb{R}$ для любого x найдется y, такой, что $f(x,y) = 1$. Таким образом, для любого x выполнено неравенство $F(x) \ge 1$. Очевидно, соответствующий несобственный интеграл от $F(x)$ расходится.

18 (3754). Показать, что интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx$$

1) сходится равномерно в любом промежутке $0 < a \le \alpha \le b$;

2) сходится неравномерно в промежутке $0 \le \alpha \le b$.

Решение. В первом случае можно построить мажорирующую функцию $F : x \to be^{-ax}$. Поэтому, по признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

Во втором случае, с помощью замены $t = \alpha x$, $x > 0$ и $\alpha > 0$, получим

$$\int\limits_{B}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int\limits_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-\alpha B}.$$

Из равенства следует, что для любого $B > 0$ существует α из промежутка $(0, b)$, такое, что $e^{-\alpha B} > \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Например, число α можно выбрать из неравенства $0 < \alpha < \dfrac{1}{B} \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно.

В задачах № 19 – 21 исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

19 (3758).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} dx, \quad -\infty, \alpha < +\infty$$

Решение. Так как $\dfrac{|\cos(\alpha x)|}{1 + x^2} \le \dfrac{1}{1 + x^2}$, $-\infty < \alpha < +\infty$, и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

20 (3759).

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + 1}, \quad 0 \le \alpha < +\infty.$$

Решение. Сделаем замену $x = \alpha + t$ в интеграле $I(B, \alpha) = \int\limits_{B}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x - \alpha)^2 + 1}$.

Тогда $I(B, \alpha) = \int_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$. Если положить $\alpha = B > 0$, то при любом B будет $I(B, \alpha) > \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, данный интеграл сходится неравномерно. Заметим, что сходимость данного интеграла при фиксированном α, $0 \le \alpha < +\infty$, следует из признака сравнения $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2+1} \sim \dfrac{1}{x^2, x \to +\infty}$

21 (3765).

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx, \quad p \ge 0.$$

Решение. Сделаем замену $x = \sqrt{t}$, тогда получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)dt}{2\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)\sqrt{t}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$, в силу признака Дирихле, сходится, а функция $t \to \dfrac{1}{2(1+t^{\frac{p}{2}})}$, $p \ge 0$, монотонна по t и ограничена числом $0,5$, таким образом данный интеграл сходится равномерно.

2. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру

О. 1. *Интеграл называется равномерно сходящимся при данном значении параметра, если он равномерно сходится в некоторой окрестности этого значения.*

22 (3773). Функция f интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha \to +0} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Решение. Оценим разность

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(x)dx =$$
$$= \int\limits_0^{B} (e^{-\alpha x} - 1)f(x)dx + \int\limits_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(x)dx. \tag{1}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда, замечая, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(dx)$ сходится равномерно при $\alpha \geq 0$, при достаточно большом фиксированным B можно записать

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha \geq 0. \tag{2}$$

По данному ε и фиксированному B найдем такое α такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_0^{B} (e^{-\alpha x} - 1)f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Имеем

$$\left|\int\limits_0^B (e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right| \le (1-e^{-\alpha B})MB < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$0 \le \alpha \le \frac{1}{B}\ln\frac{2MB}{2MB-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<2MB, \tag{4}$$

где $M = \sup\limits_{0\le x\le B}|f(x)| \ne 0$ (при $M=0$ теорема тривиальна.) Тогда из (1), с учетом неравенств (2), (3), находим

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

если B достаточно велико, а число α удовлетворяет условию (4).

23 (3776). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{x^n+1} \le \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x\in[0,1), \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{если} \quad x\ge 1, \end{cases} \qquad \text{при} \quad n\ge 2.$$

По Т. 10 интеграл сходится равномерно. Предельный переход под знаком интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}$ возможен в силу Т. 11. Так как $\frac{1}{x^n+1}$ равномерно стремится к 1 при $x\in[0,1)$, то можно перейти к пределу и под знаком интеграла $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^n+1}$. Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1} = \int\limits_0^1 dx = 1.$$

В упражнениях № 30 – 32 исследовать функции на непрерывность в указанных промежутках.

24 (3780).

$$F(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha}} dx, \quad \alpha > 0.$$

Указание. Интегрируя по частям, получим

$$F(\alpha) = -\sin(1) + \alpha \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Проверить выполнение условий Т. 4, Т. 10 и затем Т. 8.

Ответ: непрерывна.

25 (3783).

$$F(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x} dx, \quad |\alpha| < \infty.$$

Решение. $F(0) = 0$, $F(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha} e^{-x\alpha^2} \Big|_{0}^{+\infty} = \dfrac{1}{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$, откуда следует, что функция $F(\alpha)$ разрывна в точке $\alpha = 0$.

3. Дифференцирование и интегрирование по параметру под знаком интеграла

Основные теоремы

Т. 13. (правило Лейбница)

Если

1) функция $f(x,y)$ *непрерывна вместе со своей производной* $f'_y(x,y)$ *в области* $a \le x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$;

2) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *сходится;*

3) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ *сходится равномерно в интервале* (y_1, y_2), *то*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx, \quad y_1 < y < y_2$$

Т. 14. (дифференцирование по параметру)

Если

1) функция $f(x,y)$ *непрерывна при* $x \ge a$ *и* $y_1 < y < y_2$;

2) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *сходится равномерно в конечном сегменте* $[y_1, y_2]$, *то*

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty}\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$$

Если $f(x,y) \ge 0$, *то предыдущая формула верна также и для бесконечного промежутка* (y_1, y_2) *в предположении, что внутренние интегралы этого равенства непрерывны и одна из частей равенства имеет смысл.*

Задачи

26 (3786). Доказать, что интеграл (Дирихле)

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя вычислить с помощью правила Лейбница.

Указание. Из № 20 следует, что Т. 13 применять нельзя. Сделать замену переменной $\alpha x = y$.

27 (3788). Исходя из равенства

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int\limits_a^b e^{-xy} dy,$$

вычислить интеграл

$$I - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Решение. Очевидно,

$$I = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_a^b e^{-xy} dy \quad \text{и} \quad e^{-xy} \leq e^{-x \min(a,b).}$$

Тогда по Т. 10 интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, а по теореме Т. 14 имеем

$$I = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}.$$

28 (3789). Доказать формулу (Фруллани):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

где $f(x)$−непрерывная функция и интеграл $\int\limits_{A}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

Указание. Представить интеграл

$$I(A) = \int\limits_{A}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx \quad \text{в виде} \quad \int\limits_{Aa}^{Ab} \frac{f(u)}{u}du.$$

Применить теорему о среднем.

29 (3793). С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующий интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Решение. По Т. 4 интеграл сходится, а по Т. 10 интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-tx^2}dx$ сходится равномерно для $t \geq t_0 > 0$ (мажоранта $e^{-t_0x^2}$). Следовательно, можем применить Т. 13:

$$\begin{gathered} I'_\alpha = -\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2\alpha}, \\ I'_\beta = \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\beta x^2}dx = \frac{1}{2\beta}. \end{gathered} \tag{8}$$

Из (8) имеем $I = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi(\beta)$, откуда

$$I'_\beta = \varphi'(\beta) = \frac{1}{2\beta}, \quad \varphi(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta + C,$$

то есть

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} + C.$$

Так как $I = 0$ при $\alpha = \beta$, то $C = 0$.

Замечание. Тот же результат $I = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$ легко получить сразу по формуле Фруллани, полагая $a = \sqrt{\alpha}$, $b = \sqrt{\beta}$.

30 (3795). С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin(mx)dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Указание. См. задачу № 37.

Ответ: $I = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}, m \neq 0.$

В следующих задачах № 39 – 41 вычислить интегралы:

31 (3797).

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\ln 1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq .$$

Указание. Использовать Т. 13.

Ответ: $I = -\pi(1 - \sqrt{1 - \alpha^2})$.

32 (3799).

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Указание. Использовать Т. 13.

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha(1 + |\alpha| - = \sqrt{1 + \alpha^2})$.

33 (3803). Вычислить интеграл (Эйлера–Пуассона)

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{9}$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy. \tag{10}$$

Решение. Заметим, что $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Покажем сначала, что с учетом этого замечания, формулы (9) и (10) эквивалентны. Если положить в (9) $x = ut, u > 0$, то получим

$$I = u \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2t^2} dt.$$

Умножим обе части этого равенства на e^{-u^2} интегрируем по u от 0 до $+\infty$:

$$I \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} u du \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2t^2} dt.$$

Переставив интегралы в (10), получим

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+y^2)} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{так как} \quad I > 0.$$

Покажем, что перестановка интегралов законна. Т. 15 неприменима (проверить!). Однако для прямоугольника $[x_0, +\infty; 0, +\infty]$, $x_0 > 0$, пользуясь тем, что интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{-(1+y^2)x^2} x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{1+y^2} e^{-(1+y^2)x_0}.$$

Если непрерывная функция от y для всех $y \geq 0$, то можно применить Т.15. Таким образом,

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)x^2} x dy = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{-(1+y^2)x^2} dx.$$

Переходя к пределу при $x_0 \to 0$, получим нужный результат. Итак, $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Замечание. Интеграл (9) вычислен ранее (см. № 28 и замечание к задаче № 33).

Пользуясь интегралом Эйлера–Пуассона, найти интегралы в задачах № 42 – 45.

34 (3705).

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2 + 2b_1x + c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

Указание. Выполнить замену переменной $\sqrt{a}x + \dfrac{b}{\sqrt{a}} = t$.

Ответ: $\dfrac{(a+2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

35 (3807).

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx, \quad a > 0.$$

Указание. Продифференцировать I по a (обосновать возможность дифференцирования). В интеграле I'_a сделать подходящую замену переменной.

Ответ: $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$.

36 (3809).

$$I(b) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)dx, \quad a > 0.$$

Ответ: $I(b) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

37 (3811).

$$I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos(2bx)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Указание. Установить соотношение, связывающее интеграл I_n и интеграл $I(b)$ из задачи № 41.

Ответ: $I_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \dfrac{d^{2n}}{db^{2n}} e^{-b^2}.$

38 (3812). Исходя из интеграла

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx, \quad \alpha \geq 0,$$

вычислить интеграл (Дирихле)

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx.$$

Решение. Интеграл I можно дифференцировать по параметру β, так как подинтегральная функция и ее производная по β непрерывны по x и β для $x \geq 0$ и любого β, интеграл I сходится, согласно Т. 4, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

(см. [2] № 1828) сходится равномерно относительно β при $\alpha > 0$, так как мажорируется интегралом $\int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx$ согласно Т. 13. Для любого β имеем

$$\frac{dI}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Отсюда $I = \operatorname{arctg} \dfrac{\beta}{\alpha} + C$, $C = 0$, так как $I = 0$ при $\beta = 0$. Эта формула получается в предположении, что $\alpha > 0$. Но при $\beta = \text{const}$ интеграл I оказывается функцией от α, непрерывной и при $\alpha = 0$. Поэтому

$$D(\beta) = \lim_{\alpha \to +0} I = \lim_{\alpha \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta.$$

III. Эйлеровы интегралы

Изучить по учебнику [1] стр. 754 – 793.

О. 1. *Интеграл* $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, *сходящийся при* $0 < x < +\infty$, *называется Гамма – функцией.*

О. 2. *Бета – функцией называется интеграл*

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

<u>Основные формулы</u> (см. [1], стр. 754 – 764):

1) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

2) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$

3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

4) $B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) = \dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q).$

5) $B(p,1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$

6) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

С помощью Эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы № 47 – 56.

39 (3843).

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx.$$

Решение. По О. 2 имеем $I = B\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. Применяя формулу (4), получим $I = \dfrac{1}{8} B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

40 (3844).

$$I = \int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \quad a > 0.$$

Указание. Положить $t = \dfrac{x^2}{a^2}$.

Ответ: $I = \dfrac{\pi a^4}{16}$.

41 (3845).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx.$$

Указание. Применить формулу (6).

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

42 (3847).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

Указание. Выполнить подстановку $x^4 = t$, затем применить формулу (5).

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Выразить через Эйлеровы интегралы следующие интегралы и определить области существования их параметров:

43 (3851).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx, \quad n > 0.$$

Решение. Положим $x^n = y$. Тогда, согласно формуле (5)

$$I = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin(\frac{m\pi}{n})}.$$

Интеграл сходится при $0 < \dfrac{m}{n} < 1$.

44 (3853).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a + bx^n)^p} dx, \quad a > 0, \quad 0 \quad n > 0.$$

Решение. Положим $\dfrac{b}{a} x^n = t$. Тогда

$$I = \frac{1}{n} \frac{a^{\frac{m-np+1}{n}}}{b^{\frac{m+1}{m}}} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right).$$

Отсюда $0 < \dfrac{m+1}{n} < p$.

45 (3855).

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^m}}, \quad m > 0.$$

Решение. Положим $x^m = t$. Легко получить, что

$$I = \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right),$$

откуда $n > 1$ или $n < 0$.

46 (3859).

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n} dx, \quad n > 0.$$

Решение. Сделав подстановку $x^n = y$, получим

$$I_n = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \quad n > 0.$$

Замечание. Полагая $n = 2$, получим интеграл Пуассона – Эйлера (№ 41).

$$I_2 = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

47 (3865).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x)\ln(x)}.$$

Решение. Заметим, что $\dfrac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x)\ln(x)} = \displaystyle\int\limits_q^p \dfrac{x^{t-1}}{1+x}$. Тогда

$$I = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_q^p \frac{x^{t-1}}{1+x} dt.$$

Изменив порядок интегрирования и применяя О. 2 и формулу (5), получим

$$I = \int\limits_q^p B(t, 1-t)dt = \int\limits_q^p \frac{\pi}{\sin(\pi t)} dt = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|.$$

(Обосновать возможность изменения порядка интегрирования!)

48 (3868).

$$\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)dx = R_0 \quad \text{интеграл Раабе.}$$

Решение. По формуле (1) имеем $\ln\Gamma(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln(x)$, откуда следует существование интеграла. Положим $x = 1 - t$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-t)dt = R_0.$$

Легко видеть, что

$$2R_0 = \int\limits_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]dx = \int\limits_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin(\pi x)} dx = \ln 2\pi.$$

Окончательно получаем $R_0 = \ln\sqrt{2\pi}$.

Доказать равенства:

49 (3872).

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Указание. Положить $x^4 = t$.

50 (3873).

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Указание. Доказывается аналогично № 57.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II / Пред. прим. А. А. Флоринского. 8-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 864 с.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. – 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, – 1997. – 624 с.

3. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть 2. Учебник для вузов. 4-е изд. — М.: Физматлит, 2002. — 464 с.

4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2. Наука, 6-е издание. – 1968.

5. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции одного переменного). Часть 3. – 1970. – М.: Наука. – 344 с.

6. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ в примерах и задачах. Часть 2. – 1974. – Киев: «Вища школа». – 680 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. II. – 1981. – М.: ВШ. – 584 с.

8. Никольский С. М. Курс математического анализа. Том. 2. Издание 3 – 1983 – М.:Наука. – 448 с.