ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра теоретической и математической физики

ОСОБЕННОСТИ МГД ОБТЕКАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ГАРТМАНА

Дипломная работа студента
очной формы обучения
направления подготовки 03.03.02 Физика
4 курса группы 07001210

Сохань Павел Витальевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

БЕЛГОРОД - 2016

РЕФЕРАТ

В дипломной работе в приближении Стокса проведено теоретическое описание магнитогидродинамического обтекания твердой частицы сферической формы при малых числах Рейнольдса и Гартмана. В процессе решения МГД уравнений получены аналитические выражения для полей скорости и давления и вычислена сила сопротивления в стоксовском приближении.

В пределе полученные выражения переходят в известные формулы как для твердой сферической частицы (формула Стокса).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тема исследования: влияние магнитного поля на движение твердых частиц сферической формы в жидкой электропроводящей среде.

***Актуальность исследования*:** Магнитную гидродинамику (сокращенно МГД) можно рассматривать как сочетание механики жидкости и электромагнетизма, т.е. как науку о поведении электропроводящей жидкости в электрическом и магнитном полях. Характерными для МГД. объектами являются плазма, жидкие металлы и электролиты.

Уравнения гидродинамики представляют собой одно векторное и три скалярных уравнения. Электрическое и магнитное поля описываются системой уравнений Максвелла и представляют собой два векторных и два скалярных уравнения. И хотя уравнения механики жидкостей заведомо нелинейны [1,2], уравнения же Максвелла линейны, что позволяет находить решения гидродинамики даже с добавлением уравнений Максвелла.

Исследование магнитогидродинамического обтекания тел является одной из важнейших и актуальных направлений магнитной гидродинамики. Эта связана с изучением столь различных явлений, как обтекание космических тел межзвездным газом, полеты тел в верхней атмосфере земли и других планет, а также с аэродинамикой больших скоростей. Имеется глубокая аналогия между обтеканием тел и обтеканием местных сопротивлений, шероховатостей и других элементов в проточных частях магнитогидродинамических машин. Эта также связано с перспективными способами обогащения руд и некоторыми вопросами химической технологии.

Интерес к изучению влияния магнитного поля на обтекание тел обусловлен также необходимостью создания измерительной техники, так как в прикладной и экспериментальной магнитной гидродинамике большинство датчиков для измерения различных характеристик гидродинамического и электромагнитного полей (давления, скорости, электрического потенциала и т. п.)

представляют собой тела, помещенные в поток жидкого металла или электролита.

Следует также отметить, что обтекание тел проводящей несжимаемой вязкой жидкостью в присутствии электромагнитных полей может существенно отличаться от классического обтекания. Основной причиной этого отличия является то, что сила Лоренца, действующая на токи в проводящей жидкости, не может быть полностью скомпенсирована перераспределением давления, поскольку ротор силы Лоренца, вообще говоря, отличен от нуля. Изменение картины обтекания имеет место при течении проводящих жидкостей в более или менее сильных магнитных полях. Для слабо проводящих сред, какими являются электролиты, величины требуемых магнитных полей значительны. Современное состояние и будущее развитие сверхпроводящих магнитных систем, позволяющих создавать значительные по величине магнитные поля, делают актуальным исследование МГД обтекания тел и слабо проводящими средами.

МГД эффекты при обтекании тел многообразны и сложны. Прежде всего, наличие магнитного поля может видоизменить картину обтекания: течение может стать безотрывным, или, наоборот, может появиться отрыв потока там, где в отсутствии магнитного поля течение было безотрывным. При МГД обтекании тел распределения завихренности и давления по поверхности могут существенно отличаться от классических распределений, поэтому могут изменяться коэффициенты гидродинамического сопротивления давления и трения.

Если внутри обтекаемого тела или на его поверхности текут электрические токи, то кроме традиционной силы гидродинамического сопротивления на тело действует электромагнитная сила. Такая сила может приводить тело в движение относительно жидкости или тормозить его движение вместе с силой гидродинамического сопротивления.

При обтекании тел в сильных внешних магнитных полях область течения разделяется на качественно отличающиеся друг от друга зоны. При таком МГД обтекании на поверхности тела образуются гартманвские слои, а вместо единственного следа за телом образуются два следа, один из которых может быть направлен против набегающего потока жидкости, вдоль магнитного поля. Наличие магнитного поля может приводить к исчезновению вихревой дорожки (при обтекании цилиндра), к подавлению колебаний в следе и к существенному снижению уровня турбулентности.

Большой интерес представляют исследования по изучению возможности воздействия электромагнитных сил на обтекание тел с целью снижения гидродинамического сопротивления (например, обтекание шара), содержащих внутренние источники электромагнитных полей.

Объектом исследования является изучение особенностей движения твердой частицы сферической формы в жидкой электропроводящей среде.

Предметом исследования - является изучение влияния однородного магнитного поля на величину силы сопротивления, действующей на твердую частицу сферической формы при малых числах Рейнольдса и Гартмана.

Цель исследования - получить выражения для силы сопротивления в стоксовском приближении, когда однородное магнитного поле совпадает с направлением движения частицы.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие ***задачи исследования:***

- ознакомление с историей развития МГД;
- изучить математические методы решения уравнений магнитной гидродинамики;
- получить выражения для силы сопротивления электропроводящей твердой частицы сферической формы при малых числах Рейнольдса и Гартмана;

- провести качественный анализ влияния однородного магнитного поля на величину силы сопротивления твердой частицы сферической формы при малых числах Рейнольдса и Гартмана.

Научная новизна исследования. В настоящей работе делается попытка проанализировать явление обтекания магнитной жидкостью твердой проводящей частицы сферической формы.

Практическая значимость работы. Материалы дипломной работы могут быть использованы в ходе преподавания физики в лицеях, колледжах, университетах, при разработке факультативных курсов по движению частиц в жидкости, экологических вопросов.

Апробация исследования. Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференции «***Современные проблемы математики и механики: теория и практика***» (г. Белгород, БУКЭиП, 2016) и по теме выпускной квалификационной работы опубликованы тезисы.

Структура работы.

Дипломная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы.

ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теоретическое исследование МГД обтекания шара в общем случае представляет сложную математическую задачу. Поэтому в дипломной работе рассматривается ламинарное течение. Электромагнитные силы, действующие на жидкость, зависят от поля скорости и электрического и магнитного полей. Распределение электромагнитный полей, в свою очередь, зависят от распределения скоростей течений. Таким образом, для исследования МГД обтекания частицы сферической формы необходимо решать систему уравнений Навье-Стокса, описывающую трехмерное течение жидкости, вместе с уравнениями электродинамики, описывающими распределение электрического и магнитного полей.

Математическая теория течений вязкой несжимаемой жидкости - обширная и быстро развивающая часть гидродинамики. Основой системы уравнений вязкой несжимаемой жидкости являются уравнения Навье-Стокса, представляющие математическое выражение законов сохранения импульса и массы.

Одно из наиболее неприятных свойств уравнения Навье-Стокса - нелинейность, обусловленная наличием конвективного члена ускорения. Кроме того, как правило, и сами краевые задачи для уравнений Навье-Стокса, описывающие течения конкретной вязкой среды, являются нелинейными.

С учетом этих фактов в гидродинамике были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему уравнений гидродинамики и приспособить их к характеру отдельных типов конкретных физических задач.

Существует обширный класс гидродинамических течений, в которых можно пренебречь нелинейным членом. В научной литературе такие уравнения получили название линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса.

Таким образом, при движении проводящей жидкости в магнитном поле в ней индуцируются электрические токи, на которые в магнитном поле действуют силы [3,4]. Эти силы, в свою очередь, могут оказать существенное влияние на движение жидкости. С другой стороны, возникающие токи изменяют само магнитное поле. Сложная картина взаимодействия гидродинамических и электромагнитных явлений описывается, как отмечалось в актуальности исследования, совместной системой уравнений Навье-Стокса, содержащих члены электромагнитного происхождения, уравнений Максвелла и закона Ома для движущихся сред.

Связь уравнений Навье-Стокса и Максвелла проявляется в том, что в уравнения Навье-Стокса входит величина объемной электромагнитной силы, а в систему уравнений Максвелла - скорость движущейся среды. Макроскопическая скорость движения среды считается значительно меньше скорости света. Магнитная проницаемость сред (жидкие металлы, электролиты, ионизованные газы) мало отличается от магнитной проницаемости вакуума, так что намагниченностью этих сред можно пренебречь. Помимо этого, для сред с относительно хорошей электропроводностью и не очень большой диэлектрической проницаемостью (именно таковыми являются упомянутые выше среды) можно также не учитывать и поляризацию среды. Будем считать, что среда обладает однородно изотропной проводимостью.

В большинстве приложений МГД рассматриваются среды, проводимость которых велика, и процессы, не слишком быстро изменяющиеся во времени, причем макроскопическая скорость движения среды значительно меньше скорости света. Это позволяет пренебречь током смещения и конвекционным током, т.к. эти токи малы по сравнению с током проводимости [3,4].

Как известно из динамики жидкостей, выбор системы отсчета позволяет упростить задачу, в частности, свести ее к стационарной задаче. Для этого перейдем из лабораторной системы координат в систему координат, связанную с частицей. Тогда наша задача сводится к анализу стационарного обтекании частицы плоским потоком вязкой проводящей жидкостью со скоростью $\boldsymbol{U}_\infty$, движущимся в направлении OX. В том же направлении приложено магнитное поле.

При этих условиях система уравнений для электромагнитного поля в движущейся среде описывается в следующем виде [3,4]:

$$\mathbf{j} = \mathrm{rot}\ \mathbf{H}, \quad \mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0, \ \ \mathrm{div}\ \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\,[\,\mathbf{E} + \mu_0\,\mathbf{U}\times\mathbf{H}\,], \tag{1.1}$$

где σ – электропроводность.

Движение среды подчиняется обычным гидродинамическим уравнениям, в которых учтена объемная электромагнитная сила $\mathbf{f}$:

$$(\mathbf{U}\,\mathrm{grad})\ \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{P} + \nu\,\Delta\,\mathbf{U} + \mathbf{f}, \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{U} = 0, \tag{1.2}$$

где P – давление; ρ, ν – плотность и кинематическая вязкость несжимаемой магнитной жидкости.

Величина силы $\mathbf{f}$ определяется взаимодействием токов проводимости (индуцированных движением жидкости и приложенных к ней из вне) с магнитным полем. Поэтому

$$\mathbf{f} = \mu_0\ \mathbf{j}\times\mathbf{H} = \sigma\,\mu_0\,[\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \mu_0\,(\mathbf{U}\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}\,]. \tag{1.3}$$

Окончательная система уравнений, описывающих магнитогидродинамическое течение, имеет вид:

$$(\mathbf{U}\,\mathrm{grad})\ \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{P} + \nu\,\Delta\,\mathbf{U} + \frac{\mu_0}{\rho}\,(\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\,), \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{U} = 0, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{rot}\ (\mathbf{U}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{\sigma\mu_0}\,\Delta\,\mathbf{H} = 0, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{H} = 0, \ \ \mathbf{j} = \mathrm{rot}\ \mathbf{H}, \ \mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0, \ \ \mathbf{j} = \sigma\,[\,\mathbf{E} + \mu_0\,\mathbf{U}\times\mathbf{H}\,]. \tag{1.6}$$

Заметим, что если магнитная жидкость обладает заметной проводимостью и, кроме того, движется в магнитном поле, то в проводящей среде возникает индукционный ток $\mathbf{j} = \sigma\,[\,\mathbf{E} + \mu_0\,\mathbf{U} \times \mathbf{H}\,]$ (σ – проводимость вещества) и, благодаря этому, на каждую единицу объема проводящей сплошной среды действует сила Ампера $\mathbf{f}$. В свою очередь, индукционный ток, согласно уравнению $\mathbf{j} = \mathrm{rot}\ \mathbf{H}$, становится источником магнитного поля. Таким образом, при пропускании тока через проводящую среду, которая находится во внешнем магнитном поле, возникает объемная сила. Эта сила приводит в движение проводящую среду, что и учтено в окончательной системе МГД.

В дипломной работе рассматривается обтекание твердой частицы сферической формы электропроводной жидкостью в присутствии электромагнитного поля.

В случае обычной гидродинамики эта задача впервые рассматривалась Стоксом и была решена при помощи функции тока, которую он изобрел специально для этой цели. Если через R, обозначить радиус сферы и предположить, что она движется в положительном направлении оси Z с постоянной скоростью $\boldsymbol{U}$, то получаем результат известный, как закон сопротивления Стокса [1]

$$\mathrm{F_S} = -6\pi \mathrm{R}\,\mu_{\mathrm{e}}\,\mathrm{U}$$

Здесь μ_e – динамическая вязкость жидкости, R – радиус сферы, $\mathrm{U} = |\boldsymbol{U}|$.

Отрицательный знак показывает, что сила, действующая со стороны жидкости на сферу, направлена противоположно движению частицы; следовательно, жидкость препятствует движению частицы через нее. Чтобы поддерживать стационарное движение, необходимо постоянно прикладывать силу этой же самой величины к сфере в направлении ее движения. На практике это обычно осуществляется за счет действия на сферу силы тяжести.

Формула Стокса справедлива, когда числа Рейнольдса ($R = \rho a U / \mu_e$) много меньше единицы. В процессе развития механики сплошных сред разные ученые уточняли формулу Стокса, например, хорошее приближение нашел Озеен [1-2]

$$F = F_S\left(1 + \frac{3}{8}R\right),$$

где ему частично удалось учесть конвективные члены, которыми пренебрег Стокс.

В 1957 году Проудмен и Пирсон [1], методом сращиваемых асимптотических разложений, улучшили результат Стокса, т.е. им удалось учесть влияние главных конвективных членов в уравнении Навье-Стокса на силу сопротивления:

$$F = F_S\left(1 + \frac{3}{8}R + \frac{9}{40}R^2 \log R + O\left(R^2\right)\right)$$

Если рассматривать обтекание сферы магнитной жидкостью, в которой поддерживается постоянное магнитное поле, то возникает вопрос, какое влияние это поле оказывает на величину силы сопротивления.

Согласно закону Ома, при движении проводящей жидкости в электромагнитном поле возникают электрические токи. Взаимодействие этих токов с магнитным полем приводит к возникновению магнитной силы, которая должна быть включена в уравнение Навье Стокса для движущейся жидкости. Проявление этой магнитной силы проявляется в торможении потока жидкости поперек лини силы.

Перейдем к безразмерной форме для системы МГД уравнений обычным способом – введением характерных масштабов для всех величин, входящих в эту систему:

$$(\mathbf{U}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{U} = -\,\mathrm{grad}\,P + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\,\mathbf{U} + \mathrm{Al}\,(\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\,), \qquad \mathrm{div}\;\mathbf{U} = 0, \tag{1.7}$$

$$\text{rot }(\mathbf{U}\times\mathbf{H})+\frac{1}{\text{Re}_\text{m}}\,\Delta\,\mathbf{H}=0, \tag{1.8}$$

$$\text{div }\mathbf{H}=0,\ \ \mathbf{j}=\text{rot }\mathbf{H},\ \ \text{rot }\mathbf{E}=0,\ \ \mathbf{j}=\text{Re}_\text{m}[\,\mathbf{E}+\mathbf{U}\times\mathbf{H}\,]. \tag{1.9}$$

где число Рейнольдса $\text{Re}=\dfrac{\text{U}_\infty \text{L}}{\nu}$, $\nu=\dfrac{\mu}{\rho}-$кинематическая вязкость жидкости, $\mu-$ динамическая вязкость жидкости, магнитное число Рейнольдса $\text{Re}_\text{m}=\mu_0\sigma \text{U}_\infty \text{L}$, число Альфвена $\text{Al}==\dfrac{\mu_0 \text{H}_\infty^2}{\rho \text{U}_\infty^2}$

При малых магнитных числах Рейнольдса ($R_m=\mu\;\sigma\;U_\infty\;R<<1$) не только отпадает необходимость отыскания индукции магнитного поля, но также значительно упрощается задача о вычислении напряженности электрического поля. В этом случае, учитывая, что $\text{rot }\mathbf{E}=0$, т.е. электрическое поле потенциально $\mathbf{E}=-\text{grad}\varphi$. Для нахождения потенциала φ можно получить уравнение, наложив условие сохранения электрического заряда $\text{div }\mathbf{j}=0$ на уравнение $\mathbf{j}=\sigma\,[\,\mathbf{E}+\mu_0\,\mathbf{U}\times\mathbf{H}\,]$. Это дает следующее выражение $\Delta\varphi=\mathbf{B}\,\text{rot }\mathbf{U}$.

Система уравнений (1.4) – (1.6) решается со следующими граничными условиями

$$r=a,\qquad \boldsymbol{U}=0 \tag{1.10}$$

$$r\to\infty,\qquad \boldsymbol{U}=U_\infty\,\boldsymbol{i},\quad P=P_\infty \tag{1.11}$$

Здесь $U_\infty=|\boldsymbol{U}_\infty|$, $\boldsymbol{i}$ - единичный направленный вдоль оси OX.

В граничных условиях на поверхности сферы ($r=a$) в (1.10) учтены условия непротекания для нормальных и непрерывность для касательных компонент массовой скорости $\boldsymbol{U}$ (условие прилипания); учитывая, что рассматривается обтекание, поэтому при $r\to\infty$ справедливы условия (1.11).

Обезразмерим уравнения (1.4)-(1.6) и граничные условия (1.10) – (1.11), введя безразмерное давление и скорость следующим образом:

$$p = \frac{a}{\rho \nu U_\infty} P, \quad V = \frac{U + U_\infty i}{U_\infty}.$$

После обезразмеривания получаем следующую систему МГД уравнений:

$$\mathrm{Re}(\mathrm{V}, \nabla)\mathrm{V} = -\nabla \mathrm{p} + \nabla^2 \mathrm{V} + \left(\frac{\mu a^2}{\rho \nu U_\infty}\right)[\mathrm{j}, \mathrm{H}], \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{V} = 0, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{rot\,rot\,H} = \mathrm{Re_m\,rot}[\mathrm{V}, \mathrm{H}], \tag{1.13}$$

$$r = a, \qquad \mathbf{V} = \boldsymbol{i}\ , \tag{1.14}$$

$$r \to \infty, \qquad \mathbf{V} = 0 \tag{1.15}$$

Система уравнений (1.12) – (1.13) с граничными условиями (1.14) – (1.15) позволяет определить поля скорости и давления в окрестности твердой частицы сферической формы.

Сила, действующая на частицу со стороны окружающей ее магнитной жидкости, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сферической системе координат имеет вид [3]:

$$\mathrm{F} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (-\mathrm{p}\cos\theta + \sigma_{\mathrm{rr}}\cos\theta - \sigma_{\mathrm{r}\vartheta}\sin\theta)\mathrm{r}^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi \tag{1.16}$$

где $\sigma_{rr} = 2\mu \dfrac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\mathrm{r}\theta} = \mu\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}_\theta}{\partial \mathrm{r}} + \dfrac{1}{\mathrm{r}}\dfrac{\partial \mathrm{U_r}}{\partial \mathrm{r}} - \dfrac{1}{\mathrm{r}}\mathrm{U}_\theta\right).$

Из выражения (1.16) видно, что для нахождения силы сопротивления необходимо найти выражения для компонент массовой скорости и давления.

ГЛАВА II. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ

В главе 1 мы получили следующую систему уравнений магнитной гидродинамики

$$\mathrm{Re}(\mathrm{V},\nabla)\mathrm{V} = -\nabla \mathrm{p} + \nabla^2 \mathrm{V} + \left(\frac{\mu a^2}{\rho \nu \mathrm{U}_\infty}\right)[\mathrm{j},\mathrm{H}], \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{V} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot\,rot\,H} = \mathrm{Re_m\,rot}[\mathrm{V},\mathrm{H}], \tag{2.2}$$

$$r = a, \qquad \mathbf{V} = \boldsymbol{i}\ , \tag{2.3}$$

$$r \to \infty, \qquad \mathbf{V} = 0 \tag{2.4}$$

Будем решать систему МГД уравнений в стоксовском приближении. Это означает, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{U}_\infty a}{\nu}$ много меньше единицы и поэтому в уравнении (2.1) мы можем пренебречь конвективными членами $(\mathrm{V}\nabla)\mathrm{V}$.

Построенное по характерной скорости и магнитное число Рейнольдса видим, что оно также много меньше единицы, т.е. $\mathrm{Re_m} = \mu\,\sigma\,\mathrm{U}_\infty \mathrm{R} \ll 1$. Сделаем оценку, например, для ртути $\nu = 10^{-2}$ и $\mu\sigma = 10^{-5}$, $\frac{\mathrm{Re_m}}{\mathrm{Re}} \approx 10^{-7}$. Если пренебречь членом $\mathrm{Re_m} \to 0$, содержащимся в (2.2), то мы получаем $rot\,rot\,H = 0$, т.е. магнитное поле не зависит от скорости движения жидкости.

Поскольку магнитное поле направлено по оси OZ, поток направлен параллельно оси OX, то этому условию соответствует $[\mathrm{V},\mathrm{H}] = 0$ на поверхности сферы и вдали от нее (на бесконечности). Следовательно, уравнение (1.6) с учетом граничных условий для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$ принимает вид:

$$\mathrm{rotE} = 0, \qquad \mathrm{j} = \mathrm{U}_\infty\,\mu\sigma\,[\mathrm{V},\mathrm{H}]. \tag{2.5}$$

где $\mathrm{H} == \mathrm{H}\,\boldsymbol{i}$.

Таким образом, наша задача сводится к решению чисто гидродинамической задачи:

$$-\nabla p+\nabla^2 V-M^2\left[V-i\,(V\,i\,)\right]=0\,,\quad \text{div }\mathbf{V}=0, \tag{2.6}$$

Здесь М – число Гартмана, $M=\mu Ha\left(\dfrac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Вид уравнения (2.6) показывает, что его решение для массовой скорости $\mathbf{V}$ и давления Р будем искать в следующем виде:

$$\mathbf{V}=\mathrm{e}^{\mathrm{Mx}}\nabla\varphi_1+\mathrm{e}^{-\mathrm{Mx}}\nabla\varphi_2, \tag{2.7}$$

$$p=M\left(e^{Mx}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-e^{-Mx}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right), \tag{2.8}$$

где функции φ_1 и φ_2 - неизвестные функции, которые необходимо найти. Обе функции φ_1 и φ_2 ~ $\mathrm{O}\left(M^{-1}\right)$ и при $M\to 0$ так, что поле скорости и давление переходит в классическое решение Стокса.

Подставляя (2.7) в уравнение непрерывности (2.6), получаем:

$$\nabla\boldsymbol{V}=e^{Mx}\left(\nabla^2\varphi_1+\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+e^{-Mx}\left(\nabla^2\varphi_2-\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)=0\,. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.7) – (2.9) в линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, получаем:

$$\begin{aligned}&-\nabla\mathrm{p}+\nabla^2\,\mathrm{V}-\mathrm{M}^2\left[\mathrm{V}-\mathrm{i}\left(\mathrm{V}\ \mathrm{i}\,\right)\right]=\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{Mx}}\left(\nabla^2\varphi_1+\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathrm{x}}\right)+\mathrm{e}^{-\mathrm{Mx}}\left(\nabla^2\varphi_2-\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathrm{x}}\right)=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

Видим, что оба уравнения справедливы тогда и только тогда, если:

$$\nabla^2\varphi_1+M\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0\,, \tag{2.11}$$

$$\nabla^2\varphi_2-M\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0\,. \tag{2.12}$$

Найдем решение уравнения (2.11):

$$\Delta\varphi_1+M\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0\,. \tag{2.11}$$

Будем искать решение для функции φ_2 в виде:

$$\varphi_1 = \mathrm{f}_1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{M\,x}}, \tag{2.12}$$

где f_1 – функция, зависящая от x,y,z.

Подставляя это выражение в уравнение (2.11) получаем следующее уравнение для нахождения функции f_1:

$$\Delta\, f_1 - \frac{M^2}{4} f_1 = 0, \tag{2.13}$$

Аналогично поступаем и для уравнения (2.10) с той лишь разницей, что

$$\varphi_2(\mathrm{x,y,z})) = \mathrm{f}_2(\mathrm{x,y,z}))\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{M\,x}}. \tag{2.14}$$

Если через $k = \dfrac{M}{2}$, тогда получаем известное уравнение в математической физике – уравнение Гельмгольца [5, 6]

$$\Delta f - k^2 f = 0, \tag{2.15}$$

где решение для функции f ищется в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\mathrm{f} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{F}(\mathrm{y}) \mathrm{P_n}(\cos\theta), \tag{2.16}$$

Здесь $\mathrm{f} = \mathrm{f}(\mathrm{y},\theta)$, $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}$, r,θ – сферические координаты, $\mathrm{P_n}(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра [5, 6]..

Подставляя (2.16) в (2.15) и, учитывая свойства полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}, m = n, \\ 0, m \neq n. \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{\partial P_n}{\partial x}\right]^{-1} + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

получаем следующее уравнение для функции $\mathrm{F(y)}$:

$$r^2 F'' + 2rF' - \left[r^2 k^2 + n(n+1)\right]F = 0,$$

решениями, которого являются модифицированные сферические функции Бесселя [5, 6].

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r}}I_{n+\frac{1}{2}}(r), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2r}}K_{n+\frac{1}{2}}(r),$$

Первую функцию мы не используем т. к. она не удовлетворяет условию конечности при $r \to \infty$ и оставляем только функцию $\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\mathrm{K}_{n+\frac{1}{2}}(\mathrm{r})$, которая имеет следующий вид [5,6] :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{r}}}\mathrm{K}_{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}(\mathrm{r}) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{r}}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{r}}{2}\right\}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{n}}\frac{(\mathrm{m}+\mathrm{n})!}{(\mathrm{n}-\mathrm{m})!\mathrm{m}!(\mathrm{r})^{\mathrm{m}}}.$$

Таким образом, имеем:

$$\varphi_1 = \left(\frac{\pi}{\mathrm{Mr}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{Mx}} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{A_n K}_{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Mr}\right)\mathrm{P_n}(\cos\vartheta) \tag{2.17}$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{\pi}{\mathrm{Mr}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Mx}} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{B_n K}_{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Mr}\right)\mathrm{P_n}(\cos\vartheta) \tag{2.18}$$

Из соображения симметрии вытекает: $B_n = (-1)^{n+1} A_n$. Остается получить коэффициент A_n, которые определяются из граничных условий.

Фундаментальными решениями уравнения (2.15) являются функции

$$r^{-1}e^{\frac{1}{2}M(r+x)}, \quad r^{-1}e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}$$

и поэтому мы можем записать:

$$\varphi_1 = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{C_n}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)^{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{r}+\mathrm{x})}}{\mathrm{r}}\right), \tag{2.19}$$

$$\varphi_2 = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}+1}\mathrm{C_n}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)^{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{r}-\mathrm{x})}}{\mathrm{r}}\right). \tag{2.20}$$

Учитывая, что явный вид функций φ_1 и φ_2 нами получен, то подставляя их в формулы (2.7) – (2.8) получаем выражения для полей скорости и давления:

$$V = e^{Mx}\nabla\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(r^{-1} e^{-\frac{1}{2}M(r+x)}\right)\right) - e^{-Mx}\nabla\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(r^{-1} e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}\right)\right)$$

$$p = Me^{Mx}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1} \left(r^{-1} e^{-\frac{1}{2}M(r+x)}\right) + Me^{-Mx}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1} \left(r^{-1} e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}\right)$$

Поскольку выражения для компонент массовой скорости нами получены, также выражение для поля давления, то мы можем найти и выражение для силы сопротивления сферической частицы в проводящей жидкости.

ГЛАВА III. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Во второй главе получены выражения для компонент массовой скорости и давления, которые имеют следующий вид:

$$V = e^{Mx}\nabla\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(r^{-1}e^{-\frac{1}{2}M(r+x)}\right)\right) -$$

$$- e^{-Mx}\nabla\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(r^{-1}e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}\right)\right), \quad (3.1)$$

$$p = Me^{Mx}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1}\left(r^{-1}e^{-\frac{1}{2}M(r+x)}\right) + Me^{-Mx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1}\left(r^{-1}e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}\right), \quad (3.2)$$

Сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора вязких напряжений по поверхности частицы и в сферической системе координат имеет вид [3]:

$$F = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-p\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\vartheta}\sin\theta\right)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (3.3)$$

где $\sigma_{rr} = 2\mu\frac{\partial U_r}{\partial r}$, $\quad \sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r}U_\theta\right)$

Учитывая, что в нашем случае число Гартмана $M = \mu Ha\left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{\frac{1}{2}} << 1$, то мы должны разложить выражения для компонент массовой скорости и давления в ряды по числу Гартмана и ограничиться соответствующими поправками малости к формуле Стокса. В дипломной работе мы ограничились поправками до $\sim O\left(M^4\right)$.

Отметим, что в формулу (3.4) входят размерные величины. Поэтому перед интегрированием необходимо сделать следующие преобразования. В сферической системе координат выражение для градиента скалярной функции имеет вид:

$$\nabla f(r,\theta) = \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta} e_\theta, \tag{3.4}$$

где e_r, e_θ – единичные векторы сферической системы координат, а выражение для вектора массовой скорости

$$V(r,\theta) = V_r e_r + V_\theta e_\theta. \tag{3.5}$$

Перейдем от безразмерных величин к размерным, используя выражения главы 1:

$$p = \frac{a}{\rho \nu U_\infty} P, \quad V = \frac{U + U_\infty i}{U_\infty}. \tag{3.6}$$

Из (3.4) – (3.5) получаем следующую связь:

$$\begin{aligned} &P(r,\theta) = P_\infty + U_\infty \frac{\rho\nu}{a} p(r,\theta), \\ &U_r(r,\theta) = U_\infty V_r(r,\theta) - U_\infty \cos\theta, \\ &U_\theta(r,\theta) = U_\infty V_\theta(r,\theta) + U_\infty \sin\theta \end{aligned} \tag{3.7}$$

В частности, пусть, например, n=0. Тогда для обезразмереннных компонент массовой скорости имеем:

$$V = e^{Mx}\nabla\left(C_0 \frac{e^{-\frac{1}{2}M(r+x)}}{r}\right) - e^{-Mx}\nabla\left(C_0 \frac{e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}}{r}\right).$$

Учитывая, что $x = r\cos\theta$ получаем

$$V = e^{Mr\cos\theta}\nabla\left(C_0 \frac{e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)}}{r}\right) - e^{-Mr\cos\theta}\nabla\left(C_0 \frac{e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)}}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{r}\left(C_0 \frac{e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)}}{r}\right) = -C_0 e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{M(1+\cos\theta)}{2r}\right),$$

$$\frac{\partial}{r}\left(C_0 \frac{e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)}}{r}\right) = -C_0 e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{M(1-\cos\theta)}{2r}\right),$$

и для компоненты V_r получаем:

$$V_r(r,\theta) = C_0\left\{e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{M(1-\cos\theta)}{2r}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{M(1+\cos\theta)}{2r}\right)\right\},$$

Далее раскладывая экспоненту в ряд до первого порядка малости получаем:

$$V_r(r,\theta) = -\frac{M}{r}C_0\cos\theta. \tag{3.8}$$

Для касательной компоненты массовой скорости V_θ имеем:

$$V = e^{Mx}\nabla\left(C_0\frac{e^{-\frac{1}{2}M(r+x)}}{r}\right) - e^{-Mx}\nabla\left(C_0\frac{e^{-\frac{1}{2}M(r-x)}}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_0\frac{e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)}}{r}\right) = C_0\frac{M}{2}\sin\theta e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_0\frac{e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)}}{r}\right) = -C_0\frac{M}{2}\sin\theta e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)},$$

и для компоненты V_θ получаем:

$$V_\theta(r,\theta) = \frac{M}{2r}C_0\sin\theta\left(e^{-\frac{1}{2}Mr(1-\cos\theta)} + e^{-\frac{1}{2}Mr(1+\cos\theta)}\right).$$

Далее раскладывая экспоненту в ряд до первого порядка малости получаем:

$$V_\theta(r,\theta) = \frac{M}{r}C_0\sin\theta. \tag{3.8}$$

Аналогичную процедуру можно проделать и с давлением.

Таким образом, в дипломной работе было получено следующее выражение для силы сопротивления сферы при отекании ее магнитной жидкостью

$$F = F_S\left(1 + \frac{3}{8}M + \frac{7}{960}M^2 - \frac{43}{7680}M^3 + O\left(M^4\right)\right) \qquad (3.9)$$

где $M = \mu Ha\left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$ - число Гартмана.

Если не учитывать влияния магнитного поля на величину силы сопротивления, то получаем формулу Стокса:

$$F_S = 6\pi\rho\nu a U.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе в приближении Стокса проведено теоретическое описание магнитогидродинамического обтекания твердой частицы сферической формы при малых числах Рейнольдса и Гартмана. В процессе решения МГД уравнений получены аналитические выражения для полей скорости и давления и вычислена сила сопротивления в стоксовском приближении.

В пределе полученные выражения переходят в известные формулы как для твердой сферической частицы (формула Стокса).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1960. 630 с
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Техиздат. 1958. 788 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Электродинамика сплошных сред. Т. VIII. М.: Физматлит. 1982. 620 с.
4. Дж. Дексон Классическая электродинамика. М.: Мир. 1965. 702 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735. с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1961. 703 с.