

031.3(01)  
Ц 75

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

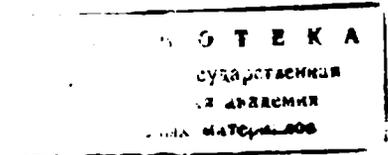
Белгородская государственная технологическая академия  
строительных материалов  
Кафедра автоматизации технологических процессов и производств

930

Утверждено  
научно-методическим советом  
академии

**ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу  
«Моделирование объектов и систем управления»  
для студентов специальности 210200 - Автоматизация технологических  
процессов и производств



Белгород 1998

**Составители:** Маматов А.В., к.т.н., доц.  
Подлесный В.Н., к.т.н., доц.

**Рецензент**    Виноградов А.А., к.т.н., доц.

## Лабораторная работа № 1

### Оценка качества переходных процессов линейных объектов и систем управления

**Цель работы:** изучение взаимосвязи между прямыми и косвенными показателями качества переходного процесса.

#### Содержание работы

При оценке качества переходного процесса линейных объектов и систем управления используются как прямые, так и косвенные показатели [1]. К прямым относится ряд показателей, получаемых непосредственно по переходному процессу, к основным - время регулирования и перерегулирование. Время регулирования  $t_p$  - это минимальное время, по истечении которого регулируемая величина  $h(t)$  будет оставаться близкой к установившемуся значению  $h_{\infty}$  с заданной точностью  $\delta$  (обычно 3-5% от  $h_{\infty}$ ), т.е.

$$|h(t) - h_{\infty}| \leq \delta.$$

Перерегулирование  $\sigma$  - максимальное отклонение переходного процесса  $h_{\max}$  от установившегося значения  $h_{\infty}$ , выраженное в процентах:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}} 100\%.$$

Прямые показатели качества переходного процесса не всегда удобны при синтезе системы. В этом смысле более предпочтительны косвенные показатели, которые в основном ориентированы на тот или иной метод синтеза. Примерами косвенных показателей качества являются корневые и частотные. Корневые показатели основываются на расположении корней характеристического уравнения замкнутой системы в плоскости корней. К ним относятся степень устойчивости  $\eta$  - расстояние от мнимой оси до ближайшего корня, и колебательность  $\mu$  - тангенс угла, образованного отрицательной вещественной полуосью и лучом из начала координат к корню, у которого отношение мнимой части к действительной максимально:

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)_{\max},$$

где  $\beta$  - мнимая часть корней характеристического уравнения;  $\alpha$  - действительная часть.

Частотные показатели качества вычисляются по частотным характеристикам системы. Показатель колебательности  $M$  - это отношение максимального значения АЧХ замкнутой системы к ее значению при частоте  $\omega = 0$ . Частота среза  $\omega_p$  - частота, при которой АЧХ системы принимает значение, равное 1. Запас устойчивости по фазе - величина угла  $\gamma = \pi - |\varphi(\omega_p)|$ , где  $\varphi(\omega)$  - ФЧХ разомкнутой системы;  $\omega_p$  - частота среза разомкнутой системы. Запас устойчивости по амплитуде - величина отрезка оси абсцисс  $\Lambda$ , заключенного между критической точкой  $(-1, j0)$  и КЧХ разомкнутой системы.

Частотные и корневые показатели качества связаны с временем регулирования и перерегулированием. Однако аналитическая зависимость между ними в общем случае не установлена и на практике используются в основном приближенные формулы и моделирование.

Рассмотрим линейную систему автоматического управления, показанную на рис.1.

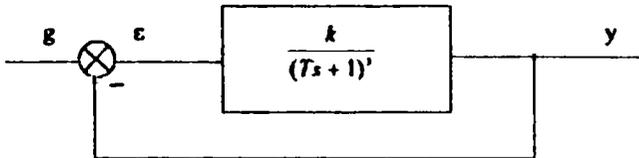


Рис.1

Изменяя коэффициент усиления разомкнутой системы  $k$ , можно добиться различных видов переходного процесса: от апериодического вплоть до неустойчивого. Анализ и сопоставление показателей качества этих переходных процессов позволяет сделать выводы об общих тенденциях взаимосвязи прямых и косвенных показателей.

### Порядок выполнения работы

1. Определите отрезок устойчивости замкнутой системы относительно коэффициента  $k$ . При вычислениях используйте не менее двух критериев устойчивости.

2. Подбирая коэффициент усиления  $k$ , получите и зафиксируйте аperiodический, монотонный, колебательный и неустойчивый переходные процессы в замкнутой системе.

3. Разработайте алгоритм вычисления прямых, частотных и корневых показателей качества.

4. Изменяя коэффициент усиления  $k$  в пределах отрезка устойчивости, для каждого переходного процесса вычислите прямые и косвенные показатели качества. По результатам вычислительного эксперимента постройте графики следующих функциональных зависимостей:

$$t_s(\eta), t_p(\mu), t_p(M), t_p(\omega_p), t_p(\gamma), t_p(\Lambda), \sigma(\eta), \sigma(\mu), \sigma(M), \sigma(\omega_p), \sigma(\gamma), \sigma(\Lambda).$$

Сделайте выводы о взаимосвязи показателей качества переходного процесса.

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: необходимые расчеты по пп. 1-3; аperiodический, монотонный, колебательный и неустойчивый переходные процессы; экспериментальные функциональные зависимости между прямыми и косвенными показателями качества; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Поясните различные методы построения переходного процесса систем автоматического управления.

2. Дайте определение частотным характеристикам линейных систем автоматического управления.

3. Что называется показателем качества переходного процесса? В чем различие между прямыми и косвенными показателями?

4. Объясните характер зависимости корневых и прямых, частотных и прямых показателей качества переходного процесса.

## Лабораторная работа № 2

### Цифровое моделирование процессов в системах управления

**Цель работы:** изучение различных способов построения процессов в линейных непрерывных системах с помощью ЦВМ; сравнительный анализ методов дискретизации непрерывных передаточных функций.

#### Содержание работы

Моделирование непрерывных объектов и систем управления на ЦВМ требует описания ее динамики с помощью дискретной передаточной функции. Подобный анализ обычно состоит из двух этапов [2]:

- 1) описания непрерывной системы с помощью дискретной модели;
- 2) собственно цифрового моделирования - построения на ЦВМ временных процессов при различных входных воздействиях и параметрах системы.

Существуют различные методы дискретизации непрерывных передаточных функций [3]:

- 1) метод введения фиктивного квантователя и фиксатора;
- 2) метод аппроксимации операции интегрирования;
- 3) метод аппроксимации операций кратного интегрирования.

Опишем коротко первых два.

1. На входе аналоговой модели непрерывной системы  $W(s)$  вводят импульсный элемент, включающий идеальный импульсный квантователь (идеальный ключ) и формирователь импульсов (фиксатор)  $W_{\phi}(s)$ . Таким образом получают импульсную модель. Для этой импульсной модели известными методами вычисляют дискретную передаточную функцию  $W(z)$ . Возможно использование различных формирователей импульсов. Чаще всего это формирователь импульсов нулевого или первого порядка соответственно

$$W_{00}(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s}, \quad W_{01}(s) = \frac{e^{T_0 s} + e^{-T_0 s} - 2}{T_0 s^2}.$$

Здесь  $T_0$  - период квантования.

2. Суть метода состоит в замене передаточной функции интегратора передаточной функцией дигратора, которая формируется на основе того или иного метода интегрирования. Предварительно передаточная функция непрерывной системы записывается относительно переменной  $s^{-1}$ . После

преобразований получают дискретную передаточную функцию  $W(z)$ . Наиболее часто используемые передаточные функции диграторов приведены в табл. 1.

Построение временных процессов на ЦВМ по передаточной функции дискретной системы  $W(z)$  не вызывает никаких трудностей, т.к. разностные уравнения, полученные из  $W(z)$ , представляют собой программы рекуррентного вычислительного процесса.

Т а б л и ц а 1

Метод интегрирования	ПФ интегратора	ПФ дигратора
Левых прямоугольников	$\frac{1}{s}$	$\frac{T_0}{z-1}$
Правых прямоугольников	$\frac{1}{s}$	$\frac{T_0 z}{z-1}$
Трапеций	$\frac{1}{s}$	$\frac{T_0 z - 1}{2 z + 1}$

При переходе к собственно цифровому моделированию (второй этап) необходимо решить два взаимосвязанных вопроса. Во-первых, это выбор периода квантования  $T_0$ . Значение  $T_0$  существенно влияет на точность и время, необходимое для цифрового моделирования. Во-вторых, - вопрос устойчивости. Хорошо известно, что если непрерывная система устойчива, то ее дискретная модель обязательно будет устойчивой. Свойство устойчивости дискретной модели также будет зависеть от величины периода квантования  $T_0$ .

Рассмотрим задачу построения переходного процесса апериодического звена  $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$  при  $k = 1$  и  $T = 0,25$ . Цель исследования - сопоставление точности и времени, затраченного на моделирование, при фиксированном  $T_0$  и различных методах дискретизации.

### Порядок выполнения работы

1. Выполните дискретизацию непрерывной передаточной функции  $W(s)$  по методу введения фиктивного квантователя и фиксатора (с формирователем нулевого и первого порядков), методом правого, левого прямоугольников и методом трапеции.

2. Для каждой из дискретной передаточной функции вычислите критическое значение периода квантования  $T_0$  из условия устойчивости дискретной системы.

3. Задайтесь периодом квантования  $T_0$  и постройте переходные процессы, фиксируя при этом время вычисления, максимальную и суммарную квадратичную ошибку относительно переходного процесса аperiodического звена, вычисленного аналитически.

4. По результатам п.3 составьте таблицу и сделайте выводы.

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: необходимые расчеты для определения дискретных передаточных функций и критического периода квантования; конечно-разностные уравнения и графики переходных процессов, включая вычисленный аналитически; таблицу по п.3; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Что называется цифровым моделированием непрерывных объектов и систем управления?

2. Поясните общую методику цифрового моделирования непрерывных передаточных функций.

3. Выведите передаточную функцию диграторов для интегрирования по методам правых, левых прямоугольников и трапеции.

4. Получите передаточную функцию фиксатора нулевого порядка.

5. Как определить критический период квантования дискретных систем?

### Лабораторная работа № 3

#### Моделирование систем многокритериального управления

**Цель работы:** знакомство с инженерной практикой проектирования оптимальных систем управления; изучение типовых задач моделирования оптимальных систем управления.

#### Содержание работы

Постановка задачи оптимального управления включает: модель объекта управления, ограничения на управление и состояние, начальное и конечное

состояния, функционал качества управления. Требуется найти управление, переводящее объект из начального состояния в конечное и минимизирующее функционал качества (критерий управления).

По виду функционала качества различают системы: а) оптимальные по быстродействию; б) оптимальные по расходу ресурсов; в) с минимальной энергией управления; г) с минимальными потерями управления. Могут применяться комбинированные функционалы качества. «Конструирование» таких функционалов является сложной и во многом неопределенной задачей, эффективный метод решения которой состоит в применении моделирования.

Рассмотрим двухкритериальную задачу оптимального управления объектом с двойным интегрированием [4].

Пусть уравнение объекта имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

где  $x_1, x_2$  - переменные состояния;  $u$  - управление.

Заданы начальное состояние  $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$ ; конечное состояние  $x_1(T) = x_2(T) = 0$ , где  $T$  - неизвестное время перехода; ограничение на управление  $|u(t)| \leq 1$ . Функционал качества представляет собой взвешенную сумму двух функционалов

$$J = k \int_0^T dt + \int_0^T |u(t)| dt = kJ_1 + J_2,$$

где  $J_1$  - функционал качества систем оптимальных по быстродействию;  $J_2$  - функционал качества систем оптимальных по расходу ресурсов;  $k$  - в общем случае неизвестный положительный весовой коэффициент.

Известно, что сформулированная задача имеет решение в замкнутом виде. Структурная схема системы оптимального управления представлена на рис.2.

Коэффициент  $q_1$  определяется по формуле

$$q_1 = \frac{k+4}{2k}.$$

Цель дальнейших исследований - выбор такого значения  $k$ , при котором достигается компромисс между быстродействием системы и потерями на управление. Действительно, если принять  $k=0$ , то  $J=J_2$  и система становится оптимальной по расходу ресурсов, причем  $J_1$  в этом случае может быть сколь угодно большим; если принять  $k \rightarrow \infty$ , то «вес» функционала качества  $J_1$



$x_1^0 = const$ ,  $x_2^0 = 0$  проведите вычислительные эксперименты с различными  $k$  и постройте точки зависимостей  $J_1(k)$  и  $J_2(k)$ . Сформулируйте методические рекомендации по выбору коэффициента  $k$ , исходя из компромиссных требований к быстродействию и потерям на управление.

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: постановку задачи; структурную схему системы оптимального управления; фазовый портрет свободного движения, оптимальные фазовые траектории и процессы, численные значения функционалов качества; экспериментальные зависимости  $J_1(k)$  и  $J_2(k)$ ; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Поясните постановку задачи синтеза оптимального управления.
2. Запишите вид функционалов качества для систем а, б, в, г (см. содержание работы).
3. Сформулируйте принцип максимума Понтрягина.
4. Поясните методику теоретического синтеза оптимального управления в общем виде и для двухкритериальной задачи оптимального управления объектом с двойным интегрированием.

### Лабораторная работа № 4

#### Исследование чувствительности оптимальных законов управления

**Цель работы:** изучение влияния изменения параметров объекта управления на длительность переходных процессов в системе автоматического управления оптимальной по быстродействию.

#### Содержание работы

Задача теоретического синтеза оптимального закона управления решается с обязательным использованием математической модели объекта управления. Поскольку реальный объект всегда в той или иной степени отличается от его

идеальной математической модели, реальные процессы управления также будут отличаться от расчетных оптимальных. Для того чтобы создать реальную систему, близкую к оптимальной, нужно знать характер и величину отклонений движения реальной системы от идеальной.

В системе оптимальной по быстродействию время переходного процесса минимально. Степень оптимальности движения целесообразно определять по относительной длительности переходных процессов в реальной и оптимальной системах. Зависимость относительной длительности переходного процесса от параметров объекта характеризует чувствительность закона управления.

Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление объектом с двойным интегрированием [5]. Структурная схема оптимальной системы показана на рис.3.

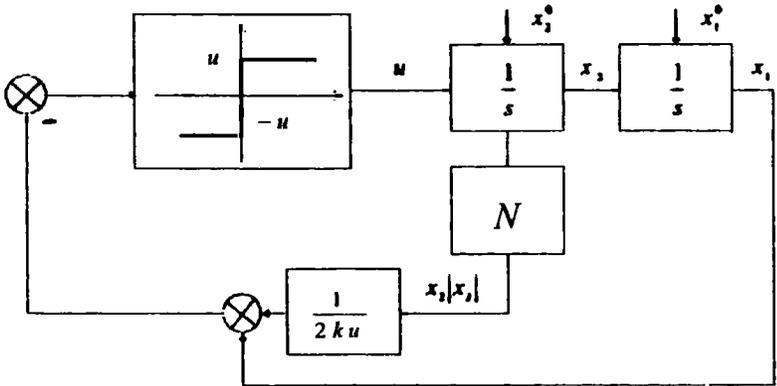


Рис. 3

Введем относительный коэффициент объекта управления

$$\lambda = \frac{ku}{k^0 u^0}.$$

где  $k^0$  и  $u^0$  - расчетные значения параметров, по которым формируется оптимальный закон управления.

Исследование фазовых траекторий свободного движения показывает, что при любых отклонениях параметров  $k^0$  и  $u^0$  от расчетных значений, т.е. при  $\lambda \neq 1$ , движение системы перестает быть оптимальным по быстродействию.

Для определения чувствительности оптимального закона управления к изменению параметров введем величину относительной длительности переходных

процессов  $\tau$  в зависимости от параметра  $\lambda$  при одних и тех же начальных условиях  $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$ :

$$\tau = \frac{1}{T^0} T(\lambda),$$

где  $T(\lambda)$ - длительность переходного процесса при  $\lambda \neq 1$ ;  $T^0$ - оптимальная длительность переходного процесса при  $\lambda = 1$ .

Функциональная зависимость  $\tau(\lambda)$  позволяет дать количественную оценку чувствительности и в общем случае может быть исследована путем моделирования.

### Порядок выполнения работы

1. Постройте качественно фазовый портрет свободного движения оптимальной по быстродействию системы управления объектом с двойным интегрированием. Сделайте вывод о влиянии параметров объекта управления на вид фазового портрета.

2. Задавшись значениями  $k^0$  и  $u^0$ , а также значением  $x_1^0(x_2^0 = 0)$ , получите путем моделирования фазовые траектории и процессы по переменным состояния  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , а также по управлению  $u(t)$  в оптимальной системе. По переходным процессам определите их оптимальную длительность  $T^0$ .

3. Варьируя значения коэффициента объекта  $k = 0,25k_0; 0,5k_0; 1,5k_0; 2k_0; 2,5k_0$ , постройте фазовые траектории и переходные процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при заданном фиксированном начальном отклонении  $x_1^0(x_2^0 = 0)$  для «реальной» системы. Определите длительность переходных процессов  $T_i$  для каждого из значений  $k$ .

4. Постройте график зависимости относительной длительности переходного процесса  $\tau = \frac{T_i}{T^0}$  от значений коэффициента усиления объекта  $k$ .

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: фазовый портрет системы, фазовые траектории и процессы по пп. 2 и 3; график зависимости относительной длительности переходных процессов; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Как синтезировать оптимальный по быстродействию закон управления объектом с двойным интегрированием?
2. Чем определяется чувствительность оптимальных законов управления?
3. Как количественно определить степень оптимальности движения системы?
4. Объясните разный характер движения в «реальной» системе управления объектом с двойным интегрированием при  $k > k_0$  и  $k < k_0$ .

### Лабораторная работа № 5

#### Идентификация статических моделей объектов управления

**Цель работы:** изучение методики построения статических характеристик объектов управления методом наименьших квадратов; исследование свойств МНК-оценок.

#### Содержание работы

Задача идентификации статической модели объекта управления предполагает определение статической характеристики по результатам обработки экспериментальных данных. При наличии существенных внешних возмущений и помех эффективным методом решения данной задачи является метод наименьших квадратов (МНК) [6].

Рассмотрим химический процесс, протекающий в реакторе. Входными воздействиями являются время реакции  $\tau$  и температура реакции  $T$ , выходной величиной - процентное содержание полезного продукта химической реакции  $y$ . Известен вид статической характеристики:

$$y = \beta_1 + \beta_2 \tau + \beta_3 T + \beta_4 \tau T + \beta_5 \tau^2 + \beta_6 T^2.$$

Необходимо определить неизвестные коэффициенты  $\beta_i$ ,  $i = 1, 6$ .

Для решения поставленной задачи проведены эксперименты. Значения входных воздействий задавались на одном из трех уровней каждый, выход реакций измерялся для каждого эксперимента. Результаты экспериментов представлены в табл. 2.

Таблица 2

№ эксперимента	$\tau$ , ч	$T$ , °C	$y$ , %
1	6	145	72
2	6	70	63
3	1	145	57
4	1	70	49
5	3,5	107,5	61
6	3,5	145	67
7	6	107,5	64
8	3,5	70	56
9	1	107,5	52

В соответствии с общей процедурой классического МНК введем следующие обозначения:

$$\tau = x_1; \quad T = x_2,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  - факторы эксперимента,

$$f_1 = 1; \quad f_2 = x_1; \quad f_3 = x_2; \quad f_4 = x_1 x_2; \quad f_5 = x_1^2; \quad f_6 = x_2^2,$$

где  $f_i$ ,  $i = 1, 6$  - регрессоры,

$$b_i = \beta_i, \quad i = \overline{1, 6},$$

где  $b_i$  - оценка коэффициентов регрессии  $\beta_i$ .

Сформируем матрицу регрессоров  $F$  и вектор измерений  $y$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{26} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ f_{91} & f_{92} & \dots & f_{96} \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_9 \end{bmatrix},$$

где  $f_{ij}$  - значение  $j$ -го фактора в  $i$ -м эксперименте;  $y_i$  - значение выхода в  $i$ -м эксперименте.

Тогда вектор МНК-оценки коэффициентов регрессии  $b = [b_1, \dots, b_6]^T$  определяется по формуле

$$b = (F^T F)^{-1} F^T y.$$

Можно показать, что при равенстве ранга матрицы  $F$  числу коэффициентов регрессии, вычисленные оценки коэффициентов минимизируют сумму квадратов ошибки:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

где  $N=9$ - число экспериментов;  $y_i$ - измеренное значение выхода в  $i$ -м эксперименте;  $\hat{y}_i$ - вычисленное по полученной модели значение выхода в  $i$ -м эксперименте.

### Порядок выполнения работы

1. Сформируйте матрицу регрессов и вектор измерений. Проверьте ранг  $F$ .
2. Вычислите вектор МНК-оценок  $b$  и сумму квадратов ошибки  $Q$
3. Варьируя отдельно каждый коэффициент  $\beta_i$  относительно  $b_i$ , постройте зависимости  $Q$  от  $\beta_i$ . Сделайте выводы о свойствах коэффициентов  $b_i$ .
4. Выполните пп. 1-3 для задачи построения линейной статической модели по результатам эксперимента, представленным в табл. 3.

Таблица 3

№ эксперимента	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	252,36	96,67	8,37	140,28
2	262,54	100,07	9,07	142,00
3	285,70	96,78	9,35	149,90
4	277,52	101,30	9,67	147,12
5	307,95	100,35	9,45	163,20
6	322,44	104,8	10,12	173,40
7	334,88	106,17	10,35	178,86
8	350,11	109,2	11,03	186,26
9	346,10	104,48	10,38	183,53
10	374,91	106,88	12,15	198,76
11	378,49	113,14	12,98	205,30
12	397,48	112,38	11,34	206,77
13	378,39	109,07	10,95	198,42
14	393,33	114,45	12,89	216,48
15	403,84	115,23	13,71	222,45

## Содержание отчета

Отчет должен содержать: вектор МНК-оценок; значение минимальной суммы квадратов ошибок; результаты вычислительного эксперимента по п.3; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Что называется идентификацией статических характеристик объектов управления?
2. Поясните методику применения МНК для построения статических характеристик объектов управления.
3. Выведите формулу вычисления МНК-оценок коэффициентов управления регрессии.
4. Сформулируйте основные гипотезы классического регрессионного анализа и свойств МНК-оценок.
5. Докажите свойство несмещенности МНК-оценок.

### Лабораторная работа № 6

#### Идентификация динамических моделей объектов и систем управления

**Цель работы:** изучение особенностей применения регрессионного анализа для идентификации передаточных функций непрерывных объектов и систем управления по временным характеристикам.

#### Содержание работы

Одной из основных динамических моделей линейных объектов и систем управления является передаточная функция. При идентификации передаточной функции необходимо определить порядок полиномов числителя и знаменателя и их коэффициенты по результатам экспериментальных исследований различных частотных или временных характеристик. В дальнейшем будем полагать, что порядок полиномов передаточной функции задан, а экспериментальные данные представляют собой входной и выходной сигналы системы во времени.

Таким образом, задача идентификации состоит в следующем.

Задана передаточная функция в виде:

$$W(s) = \frac{\sum_{s'=0}^n b_s s'^n}{\sum_{s'=0}^m a_s s'^m} = \frac{Y(s)}{G(s)},$$

где  $n$  и  $m$  - известные натуральные числа,  $n \geq m$ ;  $Y(s)$  и  $G(s)$  - изображение по Лапласу входного и выходного сигналов;  $a_i$  и  $b_i$  - неизвестные коэффициенты, причем  $a_n = 1$ .

Пусть экспериментальным путем получены дискретные выборки входного  $g[kT_0]$  и выходного  $y[kT_0]$  сигналов, где  $T_0$  - известный период квантования. Каковы значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ , наилучшим образом удовлетворяющие экспериментальным данным?

Если в качестве критерия идентификации, т.е. меры, отражающей степень соответствия модели и экспериментальных данных, выбран минимум суммы квадратов ошибки, то решение задачи идентификации получают с помощью МНК.

Методика применения МНК включает 4 этапа.

### 1. Дискретизация исходной передаточной функции

Дискретизация может быть выполнена различными методами, например, методом правых (левых) прямоугольников, методом трапеций и т.д. В результате формируется дискретная передаточная функция, аппроксимирующая исходную непрерывную:

$$W(z) = \frac{\sum_{s'=0}^n d_s z'^n}{\sum_{s'=0}^m c_s z'^m} = \frac{Y(z)}{G(z)},$$

где  $Y(z)$  и  $G(z)$  - соответственно  $z$ -преобразование выходного и входного сигналов;  $c_i$  и  $d_i$  - коэффициенты дискретной модели, зависящие от коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  исходной непрерывной модели ( $c_0 = 1$ ).

### 2. Получение уравнения регрессии

Для этого от передаточной функции  $W(z)$  необходимо перейти к конечно-разностному уравнению

$$y[kT_0] = -\sum_{i=1}^m c_i y[(k-i)T_0] + \sum_{i=0}^{n-1} d_i g[(k-i)T_0].$$

Теперь, введя обозначения.

$$y[kT_0] = y,$$

$$\beta_1 = -c_1; \beta_2 = -c_2; \dots \beta_n = -c_n,$$

$$\beta_{n+1} = d_0; \beta_{n+2} = d_1; \dots \beta_{2n+1} = d_{n-1};$$

$$f_1 = y[(k-1)T_0]; f_2 = y[(k-2)T_0]; \dots f_n = y[(k-n)T_0];$$

$$f_{n+1} = g[kT_0]; f_{n+2} = g[(k-1)T_0]; \dots f_{n+1} = g[(k-n)T_0],$$

запишем уравнение регрессии в стандартном виде

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i f_i,$$

где  $\beta_i$  - коэффициенты регрессии;  $f_i$  - регрессоры.

### 3. Применение основной формулы МНК

С этой целью по результатам эксперимента требуется сформировать вектор измерений  $y = [y_{k+1}]^T$ ,  $y_{k+1} = y[kT_0]$  и матрицу регрессоров  $F = [f_{k+1,j}]$ .  $f_{k+1,j}$  - значение  $j$ -го регрессора для  $k+1$ -го измерения,  $k = \overline{0, N}$ , где  $N+1$  - число измерений в выборке входного  $g[kT_0]$  и выходного  $y[kT_0]$  сигналов.

Оценка коэффициентов регрессии вычисляется по формуле

$$\beta = (F^T F)^{-1} F y.$$

### 4. Определение коэффициентов исходной непрерывной переходной функции

Функциональная связь между коэффициентами регрессии и коэффициентами исходной непрерывной переходной функции определяется выбранным методом дискретизации. Применение обратного функционального преобразования позволяет вычислять оценку коэффициентов  $a$  и  $b$  передаточной функции  $W(s)$ .

Рассмотрим задачу идентификации передаточной функции апериодического звена  $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ , описывающей процесс относительного изменения содержания СаО в смеси при производстве цемента [7].

Результаты измерений  $y[kT_0]$  содержащего СаО в выходном потоке и  $g[kT_0]$  - во входном потоке приведены в табл. 4,  $T_0 = 60$  с.

Таблица 4

$k$	$g[kT_0]$ , кг	$y[kT_0]$ , кг
0	491	446
1	501	452
2	499	466
3	501	471
4	496	479
5	460	478
6	452	469
7	449	462
8	451	455

Необходимо определить коэффициенты  $k$  и  $T$ , а также исследовать зависимость результатов идентификации от метода дискретизации передаточной функции.

### Порядок выполнения работы

1. Выполните дискретизацию передаточной функции по методам введения фиктивного квантователя и фиксатора, правых прямоугольников, левых прямоугольников и трапеции.
2. Составьте уравнение регрессии, вектор измерения и матрицу регрессов и вычислите оценку коэффициентов дискретной модели.
3. Определите функциональную связь между коэффициентами дискретной и непрерывной моделей для применения методов дискретизации.
4. Вычислите искомые коэффициенты  $k$  и  $T$ , сделайте вывод о степени зависимости результатов идентификации от выбранного метода дискретизации.

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: необходимые расчеты по п.п. 1 и 3; вектор измерений; матрицу регрессоров и оценку коэффициентов дискретной модели; коэффициенты непрерывной модели для различных методов дискретизации; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Что называется идентификацией динамических моделей объектов и систем управления?
2. Какие гипотезы классического МНК нарушаются или могут нарушаться при его использовании для идентификации динамических моделей?
3. Поясните алгоритм формирования матрицы регрессоров.
4. Сформулируйте рекомендации по выбору метода дискретизации непрерывных моделей в задачах идентификации.

## Лабораторная работа № 7

## Моделирование систем с распределенными параметрами

**Цель работы:** изучение методики моделирования объектов и систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

## Содержание работы

Задача моделирования систем с распределенными параметрами имеет место в тех случаях, когда адекватное математическое описание исследуемых процессов может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, граничных и начальных условий. Разработка модели системы с распределенными параметрами включает следующие основные этапы:

1. Определение состава переменных, представляющих собой, как правило, функции пространственных координат и времени, достаточного для описания динамики системы.
2. Описание процессов взаимодействия между переменными с использованием базовых законов и эмпирических соотношений.
3. Составление системы уравнений энергетического и материального баланса системы, запись граничных и начальных условий.

Рассмотрим поэтапно описанную методику разработки модели на примере задачи моделирования несимметричного конвективно-кондуктивного нагрева плоской тонкой пластины толщиной  $d$  в газовой среде (рис. 4).

*Этап 1.* Для описания динамики системы в данном случае необходимы следующие переменные: температура газовой среды у верхней поверхности пластины  $T_{\text{в}}(x, y, t)$ , температура газовой среды у нижней поверхности пластины  $T_{\text{н}}(x, y, t)$ , температура внутри пластины  $T(x, y, z, t)$ . Далее делается допущение о неизменности температур по координатам  $x$  и  $y$ , т.е.  $T_{\text{в}}(x, y, t) = T_{\text{в}}(t)$ ,  $T_{\text{н}}(x, y, t) = T_{\text{н}}(t)$ ,  $T(x, y, z, t) = T(z, t)$ .

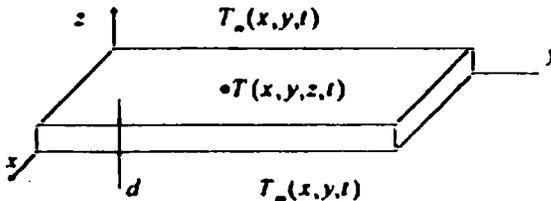


Рис. 4

*Этап 2.* Передача тепла поверхностям пластины от газовой среды производится путем конвективного теплообмена. Мощность, передаваемая через единичную площадь поверхности тела, определяется разностью температур газовой среды и поверхности тела, а также коэффициентом теплоотдачи, зависящим от условий конвекции у поверхности:

$$q_n(t) = h_n(T_n(t) - T(d, t)), \quad q_n(t) = h_n(T_n(t) - T(0, t)),$$

где  $h_n$  и  $h_n$  - коэффициенты теплоотдачи верхней и нижней поверхности соответственно. Перенос теплоты внутри пластины осуществляется за счет кондуктивного теплообмена в соответствии с законом Фурье:

$$q_n(z, t) = -\lambda \text{grad}T(z, t) = -\lambda \frac{\partial T(z, t)}{\partial z},$$

где  $q_n(z, t)$  - мощность, передаваемая через единичную площадь;  $\lambda$  - теплопроводность материала пластины. Тепловым взаимодействием боковых поверхностей пластины с газовой средой пренебрегаем ввиду малости толщины пластины  $d$ .

*Этап 3.* В соответствии с законом сохранения энергии, при отсутствии внутри тела источников тепла, мощность, поглощаемая в элементарном объеме тела, равна мощности, затрачиваемой на изменение температуры этого объема:

$$c\rho \frac{dT(z, t)}{dt} = -\text{div}q_n(z, t),$$

где  $c$  - теплоемкость материала пластины;  $\rho$  - плотность материала пластины. На поверхностях пластины должен выполняться баланс тепловых потоков конвективной и кондуктивной составляющих теплообмена:

$$q_n(t) = -q_n(d, t), \quad q_n(t) = q_n(0, t).$$

В результате запишем систему уравнений, описывающих динамику несимметричного конвективно-кондуктивного нагрева плоской тонкой пластины с учетом сделанных допущений.

$$\begin{aligned} \frac{dT(z, t)}{dt} &= \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial T(d, t)}{\partial x} &= \frac{h_n}{\lambda} (T(d, t) - T_n(t)), \\ \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} &= \frac{h_n}{\lambda} (T_n(t) - T(0, t)). \end{aligned}$$

Первое из записанных выражений называют уравнением теплопроводности, два последних представляют собой граничные условия третьего рода. Полученная

система уравнений позволяет найти распределение температуры по толщине пластины  $T(z,t)$  для любого момента времени при заданных законах изменения температуры газовой среды у поверхностей пластины  $T_н(t)$ ,  $T_к(t)$ , и известном начальном распределении температуры  $T(z,0)$ .

### Порядок выполнения работы

1. Произведите дискретизацию модели процесса по пространственной координате с применением метода сеток путем деления пластины на  $n$  слоев толщиной  $\Delta z = \frac{d}{n}$ .

2. Произведите дискретизацию модели процесса по времени с применением метода Эйлера. Шаг дискретизации по времени  $\Delta t$  выберите из условия минимизации ошибки аппроксимации разностной схемы [8].

3. Постройте кривые нагрева для поверхностей и центрального слоя пластины при  $T(z,0) = T_0$ ,  $T_н(t) = T_к(t) = T_s$ ,  $h_к < h_н$ .

4. Исследуйте путем моделирования влияние на точность аппроксимации изменения параметров модели  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $h_к$ ,  $h_н$  при неизменных значениях  $\Delta z, \Delta t$ . Для этого поочередно изменяйте каждый параметр модели, зафиксировав при этом значения остальных параметров в соответствии с п.3. Для сравнения можно использовать результаты моделирования при тех же значениях параметров, но с уменьшенным шагом дискретизации по времени  $\Delta t' \ll \Delta t$ .

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: структурную схему модели; кривые нагрева, мгновенные распределения температуры по толщине пластины в процессе нагрева; зависимости ошибки аппроксимации от параметров модели; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение системы с распределенными параметрами.
2. Укажите основные элементы математического описания системы с распределенными параметрами.
3. Запишите в общем виде граничные условия первого, второго и третьего рода.

4. Поясните сущность метода сеток.

5. Приведите условие устойчивости разностной схемы решения одномерного уравнения теплопроводности.

### Лабораторная работа № 8

#### Исследование одноконтурных систем автоматического регулирования

**Цель работы:** исследование путем моделирования влияния изменения параметров объекта управления на качество переходных процессов в одноконтурных системах автоматического регулирования.

#### Содержание работы

При проектировании одноконтурных систем регулирования синтез закона управления регулирующего устройства осуществляется на основе заданной модели объекта управления, структура и параметры которой предполагаются точно известными. В качестве критерия оптимальности для синтеза систем стабилизации, как правило, используются интегральные показатели качества или их дискретные аналоги. Однако в процессе эксплуатации системы параметры модели объекта управления могут существенно отличаться от расчетных номинальных значений, в результате чего качество регулирования в системе с законом управления, обеспечивающим экстремум выбранного критерия при номинальных значениях параметров объекта, может оказаться неудовлетворительным в реальных условиях. В связи с этим целесообразно синтез закона управления сопровождать исследованием качества регулирования в системе при изменении параметров объекта в заданных пределах неопределенности.

Рассмотрим одноконтурную цифровую систему стабилизации (рис.5) объекта регулирования с интервальной параметрической неопределенностью [9], описываемого непрерывной передаточной функцией вида:

$$W_o(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m_o} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_o} a_i s^i},$$

где  $s$  - переменная преобразования Лапласа;  $m_o$ ,  $n_o$  - соответственно степени полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта;  $a_i$ ,  $b_j$  -

коэффициенты, заданные с точностью до принадлежности некоторой области неопределенности.

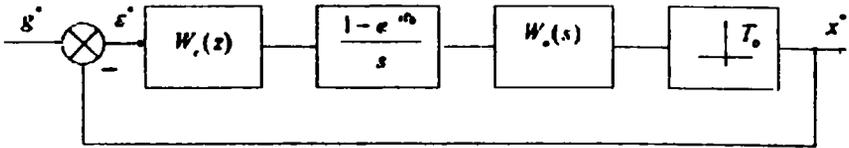


Рис.5

Система включает: аналого-цифровой преобразователь (на схеме представлен в виде идеального квантователя с периодом  $T_0$ ), цифро-аналоговый преобразователь (представлен фиксатором нулевого порядка) и цифровой регулятор, алгоритм управления которого задается дискретной передаточной функцией

$$W_c(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n_c} b_j z^j}{\sum_{i=0}^{m_c} a_i z^i},$$

где  $z$  - оператор опережения;  $m_c$ ,  $n_c$  - соответственно степени полиномов числителя и знаменателя передаточной функции регулятора;  $a_i$ ,  $b_j$  - параметры регулятора.

### Порядок выполнения работы

1. Используя один из методов численной оптимизации, на основе суммарного квадратичного критерия

$$J_{21} = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon^2(kT_0) + \frac{\tau^2}{T^2} (\varepsilon(kT_0) - \varepsilon((k-1)T_0)))^2,$$

где  $\tau$  - заданная константа, произведите структурно-параметрический синтез цифрового регулятора для объекта регулирования, представляющего собой инерционное звено второго порядка:

$$W_o(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Для этого, последовательно изменяя структуру регулятора (задавая различные комбинации степеней  $m_c$  и  $n_c$ ), осуществите оптимизацию параметров регулятора по выбранному критерию. Для каждой структуры регулятора зафиксируйте

наилучшее значение показателя качества и соответствующие значения параметров регулятора.

2. Постройте область неопределенности в пространстве коэффициентов передаточной функции объекта  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , соответствующую 50%-ной интервальной неопределенности параметров  $k$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ .

3. Проанализируйте для каждой структуры регулятора с оптимальными настройками параметров из п.1 изменение суммарного квадратичного критерия при варьировании коэффициентов передаточной функции объекта в пределах заданной области неопределенности, зафиксируйте наихудшее значение показателя качества и соответствующие значения параметров объекта.

4. Для зафиксированных в п.3 параметров объекта повторно произведите структурно-параметрический синтез цифрового регулятора. Для каждой структуры регулятора зафиксируйте наилучшее значение показателя качества и соответствующие значения параметров регулятора. Сравните полученные значения показателя качества со значениями из п.1.

5. Проанализируйте для каждой структуры регулятора с оптимальными настройками параметров из п.4 изменение суммарного квадратичного критерия при варьировании коэффициентов передаточной функции объекта в пределах заданной области неопределенности, зафиксируйте наихудшее значение показателя качества и соответствующие значения параметров объекта. Сравните полученные результаты с п.3.

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: зависимость оптимального значения суммарного квадратичного критерия от степени числителя и знаменателя регулятора для п.1; область неопределенности в пространстве коэффициентов передаточной функции объекта; зависимость наихудшего значения суммарного квадратичного критерия при варьировании параметров объекта от степени числителя и знаменателя регулятора для п.3; зависимость оптимального значения суммарного квадратичного критерия от степени числителя и знаменателя регулятора для п.4; зависимость наихудшего значения суммарного квадратичного критерия при варьировании параметров объекта от степени числителя и знаменателя регулятора для п.3; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Перечислите показатели качества, используемые при синтезе одноконтурных систем стабилизации в качестве критериев и ограничений.
2. Запишите передаточные функции пропорционально-интегрально-дифференциального и пропорционально-суммарно-разностного регуляторов.
3. Назовите основные методы синтеза одноконтурных систем регулирования.
4. Назовите источники и основные виды неопределенности моделей объектов управления.
5. Дайте определение робастной устойчивости системы автоматического регулирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А. А. В о р о н о в а - М.: Высшая школа, 1986.
2. К у о Б. Теория и проектирование цифровых систем управления.- М.: Машиностроение, 1986.
3. Цы п к и н Я. З. Основы теории автоматических систем.- М.: Наука, 1977.
4. И в а щ е н к о Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. - М.: Машиностроение, 1973.
5. А л е к с а н д р о в А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. - М.: Высшая школа, 1989.
6. В у ч к о в И., Б о я д ж и е в а Л., С о л а к о в Е. Прикладной линейный регрессионный анализ.- М.: Финансы и статистика, 1987.
7. Т о п ч е е в Ю. И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования.- М.: Машиностроение, 1989.
8. Д е м и д о в и ч Б. П. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1967.
9. М а м а т о в А. В., П о д л е с н ы й В. Н., Р у б а н о в В. Г. Робастная устойчивость линейных систем автоматического управления: Учеб. пособие. - Белгород: Изд-во БелГТАСМ, 1997.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа №1. Оценка качества переходных процессов линейных объектов и систем управления .....	3
Лабораторная работа №2. Цифровое моделирование процессов в системах управления .....	6
Лабораторная работа №3. Моделирование систем многокритериального управления .....	8
Лабораторная работа №4. Исследование чувствительности оптимальных законов управления .....	11
Лабораторная работа №5. Идентификация статических моделей объектов управления .....	14
Лабораторная работа №6. Идентификация динамических моделей объектов и систем управления .....	17
Лабораторная работа №7. Моделирование систем с распределенными параметрами .....	21
Лабораторная работа №8. Исследование одноконтурных систем автоматического регулирования .....	24
Список литературы .....	28

**Маматов Александр Васильевич  
Подлесный Владимир Николаевич**

**ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

**Методические указания к выполнению лабораторных работ  
по курсу «Моделирование объектов и систем управления»  
для студентов специальности 210200 - Автоматизация  
технологических процессов и производств**

**Редактор В. И. Пустовая  
Корректор Т. В. Кучеренко**

**Подписано в печать 29.03.99. Формат 60×84/16. Усл.п.л. 1,8. Уч.-изд.л. 1,5.  
Тираж 100 экз. Заказ 57 Цена 2,02 руб.**

**Отпечатано в Белгородской государственной технологической академии  
строительных материалов.**

**308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.**