

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)**

**ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
Кафедра теоретической и математической физики**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА**

Выпускная квалификационная работа

**студентки очной формы обучения
направления подготовки 03.03.02 Физика
4 курса группы 07001210
Кондрашовой Юлии Александровны**

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор,
Кулумбаев Э.Б.

БЕЛГОРОД 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Классическая теория теплопроводности.....	7
1.1. Уравнение баланса энергии.....	8
1.2. Локально-равновесное уравнение теплопроводности.....	9
1.3. Парадокс классической теории теплопроводности.....	10
2. Локально-неравновесная модель переноса тепла.....	12
2.1. Волновое уравнение теплопроводности.....	13
2.2. Механическая аналогия локально-неравновесной теплопроводности...	15
2.3. Численный метод решения.....	17
3. Возможности использования механической модели для анализа закономерностей волнового теплопереноса.....	19
3.1. Интерпретация динамики цепочки осцилляторов в терминах теплопереноса.....	20
3.2. Визуализация конечности скорости распространения тепла.....	25
3.3. Влияние параметров модели на скорость распространения тепла.....	27
Заключение.....	34
Список использованной литературы.....	35

ВВЕДЕНИЕ

Перенос энергии и вещества широко наблюдается в природе, технике и технологиях. Поэтому изучение процессов переноса энергии и вещества с целью построения теории переноса и установления закономерностей их протекания имеет исключительно важное и фундаментальное, и прикладное значение.

Феноменологическая теория процессов переноса строится на основе классической термодинамики необратимых процессов [1]. Общеизвестно, что опираясь на принцип локального термодинамического равновесия и принцип локальности, классическая термодинамика необратимых процессов приводит к структурно идентичным уравнениям теплопереноса и диффузии параболического типа, которые локальны как во времени, так и в пространстве, поскольку эти уравнения не содержат каких-либо характерных пространственных и временных масштабов. Поэтому классическая теория процессов переноса является локально-равновесной. Несмотря на то, что эта теория находит самое широкое применение в научной, инженерной и расчетной практике [2 – 3], она приводит к ряду известных парадоксов, например, к бесконечно большой скорости распространения тепла по теплопроводящей среде.

Полемика о характере распространения возмущений температуры ведется уже давно – с середины прошлого столетия.

В большом цикле работ разных авторов (см., например, [4 – 6] и цитированные в них литературные источники) показано, что, оставаясь в рамках параболического приближения уравнения теплопереноса, устранить парадокс о бесконечно большой скорости распространения тепла можно введением определенных (степенных) зависимостей коэффициента теплопроводности теплопроводящей среды от температуры. При этом перенос тепла в нелинейных

средах по-прежнему исследуется на основе локального градиентного закона теплопроводности Фурье. Такой подход позволил получить ряд интересных результатов. В [4] показано, например, что распространение тепла в полупространство при заданной на его границе температуре имеет вид бегущей волны, распространяющейся от границы вглубь вещества не с бесконечной, а с конечной скоростью. Однако это свойство реализуется лишь при распространении тепла в холодную среду и теряется в случае отличной от нуля температуры вещества [6], что является существенным недостатком такого подхода. Другой интересный результат – это явление локализации тепла, состоящее в том, что температура от границы с заданным законом возрастания температуры распространяется в теплопроводящую среду только на конечную глубину, даже если в граничной точке имеет место неограниченный рост температуры так, что в предельный момент времени температура становится равной бесконечности [5]. В [6] локализация тепла интерпретируется как остановившаяся тепловая волна.

Другой подход к устранению парадокса о бесконечно большой скорости распространения тепла состоит в отказе от локальности во времени и введении гипотезы о релаксации плотности потока тепла, выраженной уравнением Максвелла – Катанео [2, 7 – 8]. Этот подход приводит к гиперболической форме уравнения теплопроводности, описывающего распространение возмущения с конечной скоростью. Возможность такого описания теплопереноса обсуждается, например, в [2] (см. также приведенные там ссылки на более ранние работы). В рамках этого направления наиболее полно волновой перенос тепла рассмотрен в монографии [7]. В работах [8 – 9] проведён анализ волнового переноса субстанции с учетом релаксационных явлений в неравновесных средах на основе, так называемой, расширенной необратимой термодинамики и высказано предположение о существовании ударных тепловых волн в нелинейных средах. Необходимо отметить, что в цитированной литературе уравнение

Максвелла – Катанео предлагается феноменологически, на основе качественных соображений, то есть без строгого обоснования и без вывода выражения для скорости распространения теплового возмущения. Эти недостатки успешно преодолены в [10], где в результате решения уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энскога по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат показано, что уравнения переноса дополняются вкладками от релаксационных процессов. В частности, учет релаксационных эффектов в уравнении баланса энергии приводит к гиперболическому уравнению теплопроводности и к конечной скорости распространения теплоты.

Математическому моделированию процессов волнового переноса тепла посвящено незначительное число работ. Отчасти это объясняется сложностью постановки и решения подобных задач, так как фронт тепловой волны математически представляет собой сильный или слабый разрыв температурного поля. Кроме этого, с помощью численного моделирования сложно точно выделить фронт волны, а, следовательно, и решение до и после фронта. Поэтому волновой перенос тепла представляет еще недостаточно изученную область.

Цель данной работы: установить механическую аналогию волнового теплопереноса и оценить возможности использования механической модели при ее численной реализации для анализа закономерностей волнового теплопереноса.

Постановка такой цели обоснована тем, что уравнения гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний [11] и, в частности, описывают процессы распространения возмущений состояния дискретных и непрерывных механических систем.

Для достижения цели ставятся и решаются задачи:

- изучить состояние современной теории теплопроводности;

- выявить механическую модель волнового теплопереноса на основе принципа “одинаковые уравнения – одинаковые решения”;
- интерпретировать численную реализацию механической модели в терминах теплопереноса;
- рассмотреть возможности использования механической модели при ее численной реализации для анализа закономерностей волнового теплопереноса.

Структурно работа состоит из Введения, Трех глав, Заключения и Списка использованной литературы. В Первой главе излагается классическая теория теплопроводности, и отмечается ее главный недостаток – бесконечно большая скорость распространения тепла по теплопроводящей среде. Во Второй главе рассматривается локально-неравновесная модель теплопроводности, выявляется наиболее простая механическая аналогия локально-неравновесной теплопроводности, осуществляется математическая постановка задачи и описывается метод ее численной реализации. В Третьей главе на основе численных расчетов динамика механической системы интерпретируется в терминах теплопереноса и исследуется влияние параметров модели на скорость распространения тепла. В Заключении кратко формулируются основные выводы работы и рекомендации по ее возможному дальнейшему развитию.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Классическая теория процессов переноса является локально-равновесной, поскольку основана на принципе локального термодинамического равновесия и принципе локальности [1 – 2, 8].

Принцип локального термодинамического равновесия заключается в допущении, что равновесные термодинамические соотношения справедливы для термодинамических переменных, определенных в физически бесконечно малом – элементарном объеме термодинамической системы. Тогда термодинамическая система, которая в целом не находится в состоянии полного равновесия, может быть представлена совокупностью таких элементарных объемов, достаточно больших, чтобы рассматривать их как макроскопические системы, но в то же время достаточно малых для того, чтобы состояние каждой из них было близко к состоянию равновесия. При таком представлении состояние неравновесной системы описывается локальными термодинамическими потенциалами, которые зависят от пространственных координат и времени только через термодинамические параметры и подчиняются уравнениям термостатики. С физической точки зрения приближение локального термодинамического равновесия применимо, если время релаксации намного меньше характерного времени рассматриваемого процесса. Это означает, что скорость изменения макропараметров за счет внешних воздействий на систему должна быть много меньше скорости релаксации.

Принцип локальности в пространстве допускает, что основные законы механики сплошных сред справедливы не только для системы в целом, но и для каждой из ее частей, какой бы малой она не была. Поэтому предельным переходом в интегральных законах сохранения для таких систем при стремлении объема интегрирования к нулю можно получать эквивалентные законы сохранения в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

1.1. Уравнение баланса энергии

В соответствии с принципом локального термодинамического равновесия первое начало термодинамики, выражающее закон сохранения энергии для элементарного термодинамического процесса, может быть записано для всей системы в целом или для любого элементарного объема этой системы в идентичном виде:

$$\frac{dU + \delta A}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} \quad (1.1)$$

где dU – приращение внутренней энергии; δQ – количество сообщенного тепла; δA – произведенная работа за физически бесконечно малый промежуток времени dt .

Поток тепла $\frac{\delta Q}{dt}$ вычисляется как поток плотности потока тепла \vec{q} сквозь ограничивающую рассматриваемый объем замкнутую поверхность Σ :

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \oint_{\Sigma} \vec{q} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (1.2)$$

$d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$ – векторный элемент поверхности; \vec{n} – орт внешней нормали к элементу $d\sigma$ поверхности. Знак минус показывает, что $\delta Q > 0$, если сквозь замкнутую поверхность Σ тепла больше втекает, чем вытекает, то есть при $\oint_{\Sigma} \vec{q} \cdot d\vec{\sigma} < 0$.

Для элементарного объема dV системы поток тепла (1.2) в соответствии с принципом локальности в пространстве и на основании теоремы Остроградского – Гаусса равен

$$\oint_{\Sigma} \vec{q} \cdot d\vec{\sigma} = -\nabla \cdot \vec{q} dV, \quad (1.3)$$

где дивергенция плотности потока тепла вычисляется в некоторой внутренней точке объема dV .

Тогда первое начало термодинамики (1.1) для элементарного объема с учетом (1.2) и (1.3) приобретет вид локального в пространстве уравнения баланса энергии

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}, \quad (1.4)$$

где T – температура; ρ – плотность; $C = \{C_v; C_p\}$ – удельная изохорная или изобарная теплоемкость в зависимости от свойств рассматриваемой системы (обычно C_v для твердых и жидких тел, C_p – для газа).

1.2. Локально-равновесное уравнение теплопроводности

В классической теории теплопроводности при допущении об отсутствии конвекции и излучения уравнение баланса энергии (1.4) дополняется соотношением, связывающим плотность потока тепла и температуру, которое называется законом теплопроводности Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T, \quad (1.5)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, количественно характеризующий теплопроводящую способность вещества, осуществляемую хаотически движущимися частицами вещества.

Минус в правой части показывает, что тепловой поток направлен противоположно вектору градиента температуры, то есть в сторону наискорейшего убывания температуры. Поэтому движение теплоты всегда выравнивает пространственную неоднородность температуры.

Необходимо отметить, что подтверждаемый опытом при установившемся теплопереносе закон теплопроводности Фурье в нестационарных режимах устанавливает мгновенную (то есть в данный момент времени) связь плотности

потока тепла и градиента температуры. Другими словами, это означает, что закон Фурье постулирует локальность такой связи во времени.

Классическое уравнение теплопроводности следует из уравнения баланса энергии (1.4) после подстановки в него выражения (1.5):

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \lambda \nabla T. \quad (1.6)$$

Это уравнение параболического типа, локальное в пространстве и во времени.

В одномерном случае при допущении, что объемная теплоемкость ρC и коэффициент теплопроводности λ изотропной среды не зависят от температуры, уравнение (1.6) запишется в простейшем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.7)$$

где $\chi = \frac{\lambda}{\rho C}$ – коэффициент температуропроводности (или коэффициент диффузии температуры) теплопроводящей среды.

1.3. Парадокс классической теории теплопроводности

Применение классической теории теплопроводности приводит к парадоксальному результату, не имеющему физического смысла, но, как оказывается, характерного для всех уравнений параболического типа.

Так, например, в задаче о мгновенном источнике тепла ищется распределение $T(x, t)$ температуры, удовлетворяющее уравнению (1.7) во всем пространстве $-\infty < x < \infty$ при всех $t > 0$, обусловленное выделением в момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$ некоторого количества тепла Q_0 . Начальная температура

полагается равной нулю: $T(x,0)=0$, $-\infty < x < \infty$. Решение поставленной таким образом задачи дается в [11] формулой:

$$T(x,t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\chi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right), t > 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.8)$$

Симметричная функция (1.8) в силу известного равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ обеспечивает выполнение закона сохранения энергии:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x,t) dx = Q_0, \quad t > 0.$$

В это же время согласно (1.8) температура в любой точке пространства в любой момент $t > 0$ отлична от нуля. Поэтому локально-равновесная модель (1.7) теплопроводности описывает процесс с бесконечно большой скоростью распространения возмущений, так как при $t=0$ температура была нулевой для всех x .

В явном виде этот результат подтверждается, например, в [7] вычислением среднего квадрата смещения температуры за время t от начального положения x_0 :

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{\int (x-x_0)^2 T(x,t) dx}{\int T(x,t) dx} = 2\chi t$$

и скорости смещения температуры

$$c_q = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\chi}{2t}}.$$

Откуда и следует, что $c_q \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, то есть в начальный момент времени температурная неоднородность распространяется мгновенно.

2. ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

Как отмечено выше, закон теплопроводности Фурье постулирует локальность во времени связи плотности потока тепла и градиента температуры. Это приводит к эффекту бесконечно большой скорости распространения тепла. В локально-неравновесной модели переноса тепла этот парадокс устраняется введением инерции тепла как конечности времени релаксации плотности потока тепла, описываемой уравнением Максвелла – Катанео [2, 7 – 10]:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\bar{q} - \bar{q}_0}{\tau}, \quad (2.1)$$

τ – время релаксации; $\bar{q}_0 = -\lambda \nabla T$ – плотность потока по закону Фурье, которая при кинетической трактовке (2.1) имеет смысл равновесной – локальной стационарной величины \bar{q} .

Из уравнения Максвелла – Катанео, записанного в виде:

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T - \tau \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

явно видно, что при $\tau = 0$ (мгновенности релаксации плотности потока тепла) $\bar{q} = -\lambda \nabla T$, как это следует из закона Фурье (1.5). Поэтому уравнение (2.2) Максвелла – Катанео часто называется обобщенным законом Фурье [8, 10].

Оценки показывают, что величина времени релаксации мала: например, для твердых тел $\tau \sim 10^{-13} \div 10^{-10}$ с [2], для газов $\tau \sim 10^{-10}$ с [10]. На основе этих оценок возможна интерпретация выражения $\bar{q}(\vec{r}, t) + \tau \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$ как неполного разложения в ряд Тейлора функции $\bar{q}(\vec{r}, t + \tau)$ по степеням малой величины τ до членов первого порядка малости. Тогда в общем случае $\bar{q}(\vec{r}, t + \tau) = -\lambda \nabla T$. Введением новой переменной $t' = t + \tau$ и последующей заменой t' на t , последнее соотношение преобразовывается к виду:

$$\bar{q}(\vec{r}, t) = -\lambda \nabla T(\vec{r}, t - \tau), \quad (2.3)$$

что физически означает отставание вектора плотности потока тепла от градиента температуры по времени на τ .

Таким образом, локально-неравновесная модель переноса тепла основывается на уравнениях (1.4) и (2.2) или (2.3).

2.1. Волновое уравнение теплопроводности

После дифференцирования (1.4) по времени, умножения результата на τ и сложения его с (1.4) следует соотношение:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\vec{q} + \tau \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \right),$$

подставляя в которое обобщенный закон Фурье (2.2), получается искомое волновое уравнение теплопроводности:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T). \quad (2.4)$$

В одномерном случае при допущении, что объемная теплоемкость ρC и коэффициент теплопроводности λ изотропной среды не зависят от температуры, уравнение (2.4) запишется в простейшем виде:

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Здесь, в отличие от (1.7), наряду с коэффициентом температуропроводности χ присутствует второй параметр: время релаксации τ . Формально при $\tau = 0$ (2.5) переходит в уравнение параболического типа (1.7).

Уравнение (2.5) – это уравнение гиперболического типа. Оно описывает распространение тепловых возмущений с конечной скоростью.

В [7] считается, что если $\tau \rightarrow \infty$, а отношение $\chi/\tau \rightarrow c_q^2$, то (2.5) становится волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c_q^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

описывающим незатухающие тепловые волны, распространяющиеся с конечной скоростью

$$c_q = \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}. \quad (2.7)$$

При $\tau = 0$ скорость распространения теплового возмущения (2.7) становится бесконечно большой.

Форма теплового возмущения в процессе распространения, описываемого уравнением (2.5), будет изменяться из-за дисперсии скорости его распространения, определяемой в (2.5) слагаемым, содержащим первую производную температуры по времени [10].

Волновое уравнение теплопереноса (2.5) удобно преобразовать к однопараметрическому виду обезразмериванием времени с масштабом τ , то есть введением безразмерного времени $t' = t/\tau$. Тогда

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t'^2} + \frac{\partial T}{\partial t'} = \tau \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.8)$$

где комплекс $\tau \chi$ имеет размерность площади.

2.2. Механическая аналогия локально-неравновесной теплопроводности

Как отмечалось во Введении, уравнения гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний [11]. Поэтому для выявления механической аналогии волнового теплопереноса

рассмотрим наиболее простую механическую систему – цепочку связанных осцилляторов: систему связанных осцилляторов, в которой они упорядочены так, что каждый из осцилляторов связан только с двумя соседями, за исключением, может быть, двух крайних. Необходимо отметить, что исследование динамики цепочки связанных осцилляторов имеет большое значение и в теоретическом плане, и с точки зрения практических приложений (см., например, [12 – 14] и цитированные там источники).

Обычно динамика цепочки связанных осцилляторов исследуется при отсутствии диссипативных сил [12 – 14]. В рассматриваемой проблеме волнового теплопереноса наличие в (2.5) слагаемого, содержащего первую производную по времени, обуславливает необходимость допущения, что цепочка осцилляторов находится в среде, которая оказывает сопротивление движению осцилляторов с силой, пропорциональной скорости осцилляторов.

Тогда движение однородной цепочки линейных n осцилляторов с учетом сил трения описывается системой уравнений движения Ньютона:

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) - m\gamma \frac{du_i}{dt}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (2.9)$$

где u_i – смещение i -го внутреннего осциллятора из положения его равновесия $x_{0i} = (i-1)\delta$ (в равновесных положениях n осцилляторов равномерно покрывают отрезок $0 \leq x \leq L$); γ – удвоенный декремент затухания; m – масса осциллятора; k – коэффициент жесткости одинаковых пружин, связывающих осцилляторы.

Поскольку здесь и далее считается, что законы движения $u_1 = u_1(t)$ и $u_n = u_n(t)$ крайних осцилляторов известны, то система уравнений (2.9) дополняется начальными условиями только для внутренних осцилляторов:

$$u_i = U_i, \dot{u}_i = \dot{U}_i, i = 2, \dots, n-1. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) тождественным образом переписывается в виде

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \gamma \frac{du_i}{dt} = (\omega_0 \delta)^2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\delta^2}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (2.11)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота отдельного осциллятора; δ – расстояние между равновесными положениями осцилляторов.

Поскольку выражение $\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\delta^2} = \frac{(u_{i+1} - u_i)/\delta - (u_i - u_{i-1})/\delta}{\delta}$ является конечно-разностной аппроксимацией $\frac{d^2 u_i}{dt^2}$ второго порядка точности на трехточечном шаблоне с постоянным шагом δ [15], то в результате предельного перехода $\delta \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$) из (2.11) при отсутствии трения ($\gamma = 0$) осуществляется общеизвестный переход [16] от цепочки связанных осцилляторов к одномерной сплошной среде, распространение возмущений в которой описывается гиперболическим уравнением вида (2.6).

При наличии трения ($\gamma \neq 0$) удобно сначала обезразмерить время в уравнении (2.11) введением масштаба γ^{-1} так, что $t' = \gamma t$. Тогда

$$\frac{d^2 u_i}{dt'^2} + \frac{du_i}{dt'} = \left(\frac{\omega_0 \delta}{\gamma} \right)^2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\delta^2}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (2.12)$$

Предельный переход $\delta \rightarrow 0$ в последнем уравнении дает

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} + \frac{\partial u}{\partial t'} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

Здесь $u = u(x, t)$ – поле возмущения состояния сплошной среды; $\alpha = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\omega_0 \delta}{\gamma} \right)^2$ – параметр модели.

Структуры уравнений (2.8) и (2.13) полностью идентичны. Поэтому имеет место аналогия: поле температуры – поле возмущения $T(x, t) \leftrightarrow u(x, t)$, эволюция которых во времени происходит с разными масштабами τ и γ^{-1} соответственно.

2.3 ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сохранение дискретности механической аналогии локально-неравновесной теплопроводности (2.8) достигается при ее численной реализации методом прямых [15], согласно которому исходное дифференциальное уравнение в частных производных путем дискретизации пространственных производных на задаваемой в пространстве сетке преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для значений зависимой переменной в узлах сетки. Решение полудискретной формы исходного уравнения может проводиться различными методами решения систем ОДУ.

Полудискретизация уравнения (2.8) по пространственной переменной x производится интегро-интерполяционным методом [15] на равномерном трехточечном шаблоне с шагом δ :

$$\frac{d^2 T_i}{dt'^2} + \frac{dT_i}{dt'} = \tau \chi \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\delta^2}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (2.14)$$

Здесь считается, что i – номер внутреннего узла, совокупность которых с граничными узлами $i=1$ и $i=n$ равномерно покрывает рассматриваемую область пространства $0 \leq x \leq L$, а на границах ставятся условия заданного режима, то есть законы $T_1 = T_1(t)$ и $T_n = T_n(t)$ известны.

Структура уравнений (2.12) и (2.14) позволяет записать их в унифицированном виде:

$$\frac{d^2 f_i}{dt'^2} + \frac{df_i}{dt'} = \alpha (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (2.15)$$

Здесь $f_i = \begin{Bmatrix} T_i \\ u_i \end{Bmatrix}$; $\alpha = \begin{Bmatrix} \tau \chi / \delta^2 \\ k / m \gamma^2 \end{Bmatrix}$; $t' = \begin{Bmatrix} t / \tau \\ t \gamma \end{Bmatrix}$ – безразмерное время.

Смысл параметра α в модели (2.15) определяется из выражений

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \tau \chi / \delta^2 \\ k / m \gamma^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau / (\delta^2 / \chi) \\ \omega_0^2 / \gamma^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau / (\delta^2 / \chi) \\ (\gamma^{-1} / \omega_0^{-1})^2 \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

то есть для теплопереноса параметр α есть отношение времени τ релаксации плотности потока тепла и характерного времени δ^2/χ диффузии тепла, а для цепочки связанных осцилляторов – квадрат отношения времени γ^{-1} релаксации (затухания) и характерного времени ω_0^{-1} колебания осциллятора.

Отметим также, что из-за разных масштабов времени безразмерному времени соответствуют различные физические времена для тепловой и механической задач.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.15), дополненная начальными условиями:

$$f_i = F_i, \quad \dot{f}_i = \dot{F}_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (2.17)$$

решается методом Рунге – Кутты 4-го и 5-го порядка точности с заданной точностью [15], реализованного в функции ODE45 в пакете прикладных программ MATLAB[17].

3. ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ВОЛНОВОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Оценим возможности численной реализации механической модели для анализа закономерностей волнового теплопереноса в рамках первой краевой задачи теплопроводности [11] в терминах линейной цепочки связанных осцилляторов.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.15) задаются число n осцилляторов, параметр α модели (2.16), начальные условия:

$$t = 0: \quad f_i = 0, \quad \dot{f}_i = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.1)$$

и законы движения крайних шариков:

$$f_1(t) = \begin{cases} f_* t / t_*, & t < t_* \\ f_*, & t \geq t_* \end{cases}, \quad f_n(t) = 0. \quad (3.2)$$

В силу линейности и однородности решение уравнения (2.15) определено с точностью до постоянного множителя, поэтому далее полагается, что $f_* = 1$.

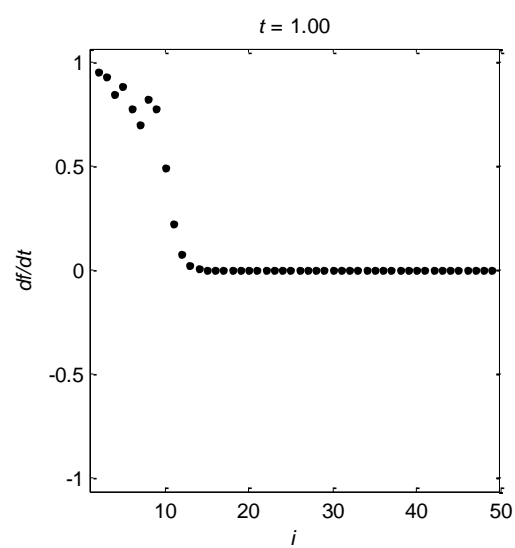
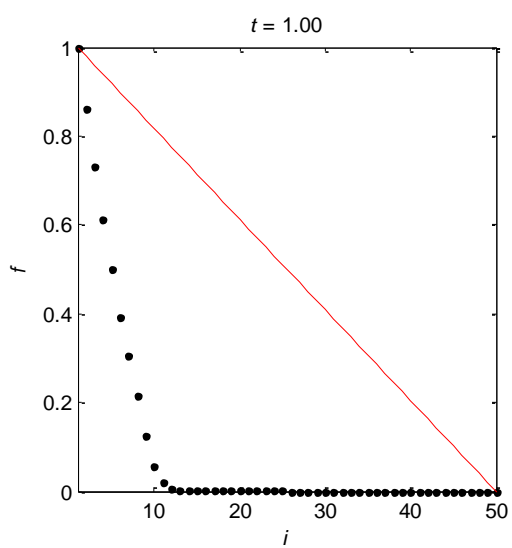
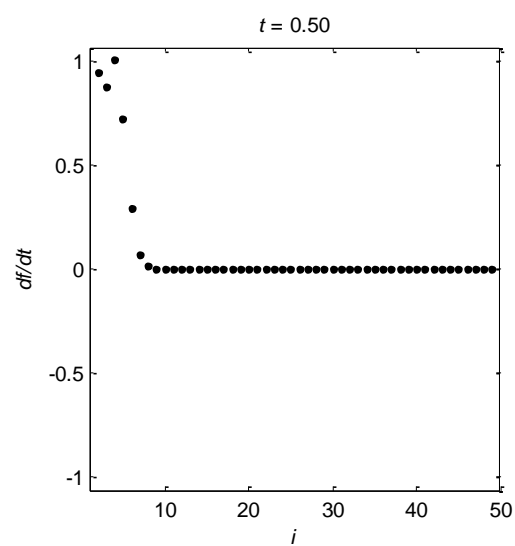
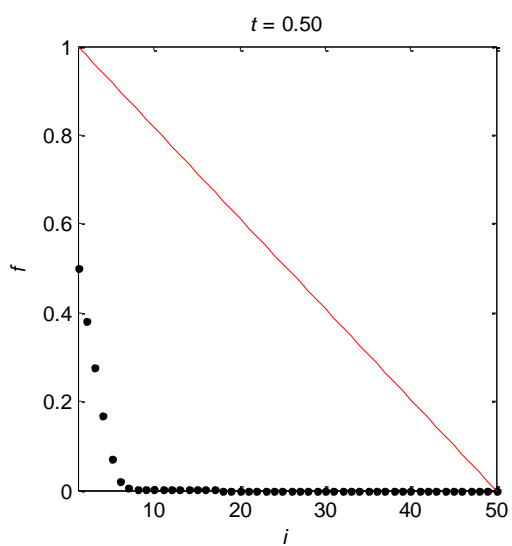
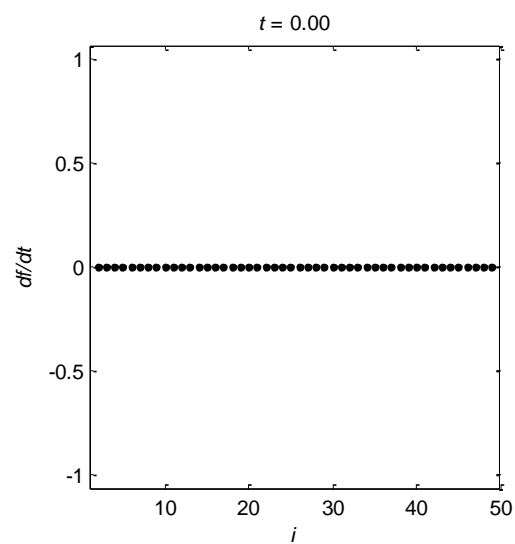
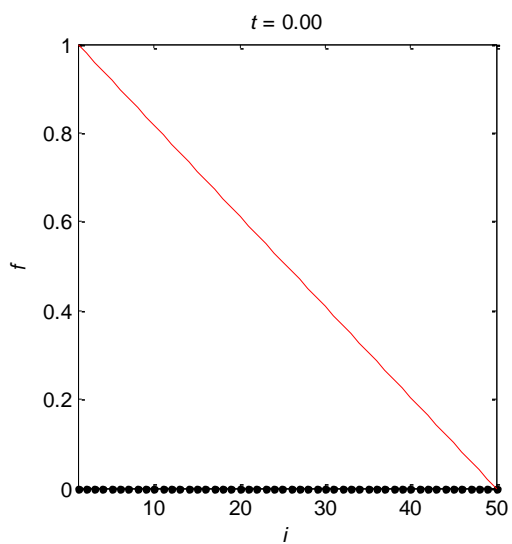
Отметим, что наличие трения в (2.12), приводящего к диссипации механической энергии, и заданные в (3.2) законы движения крайних шариков приведут, в конце концов, к состоянию покоя цепочки осцилляторов с установившимся распределением смещений:

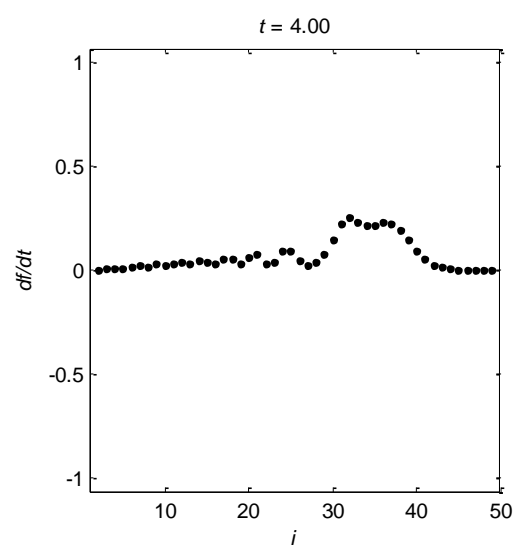
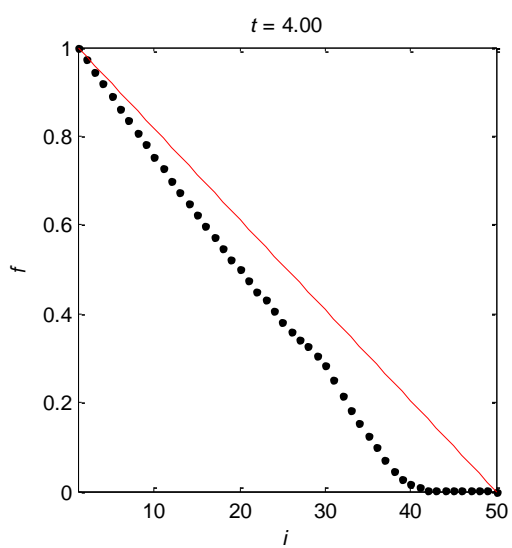
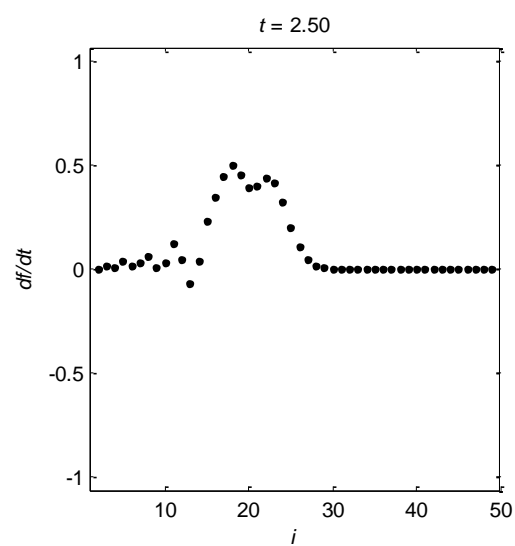
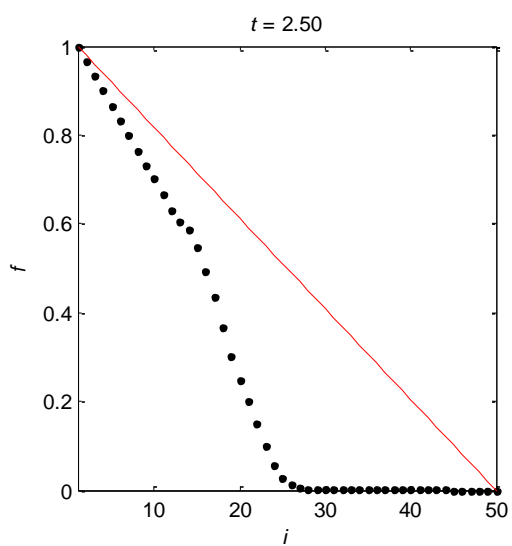
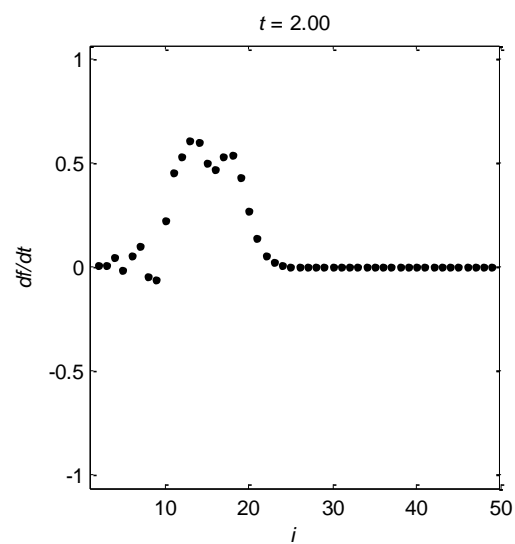
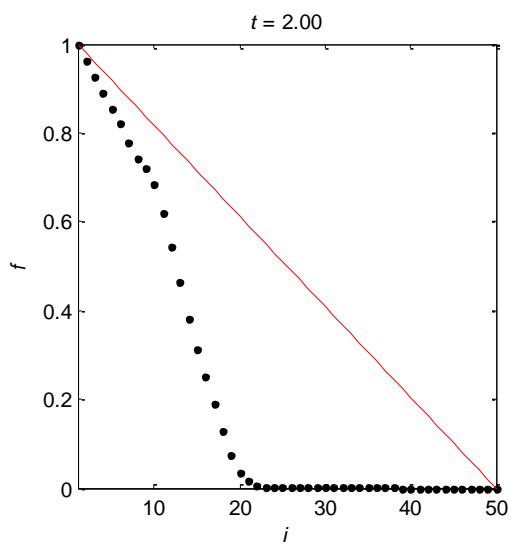
$$f_i = \frac{n-i}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

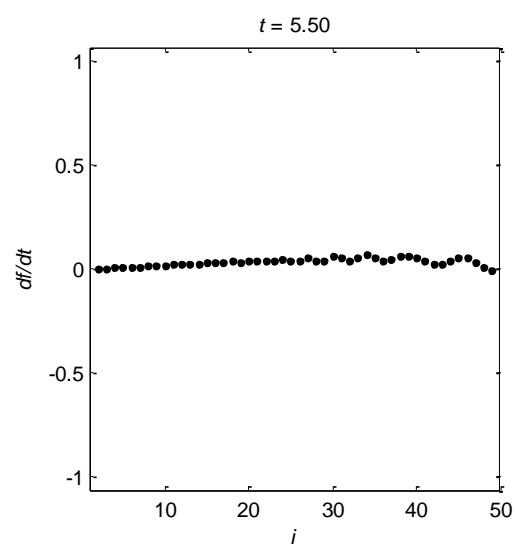
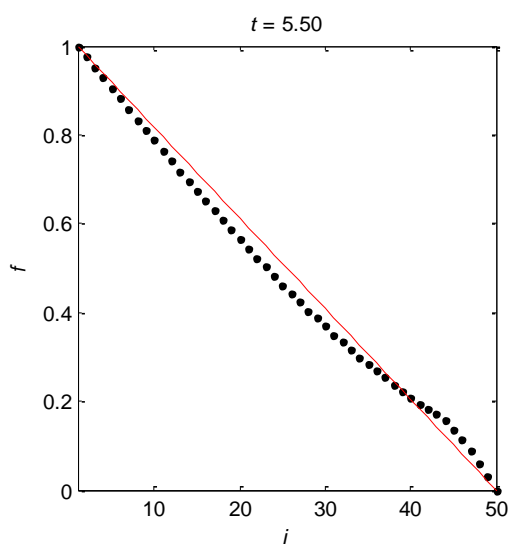
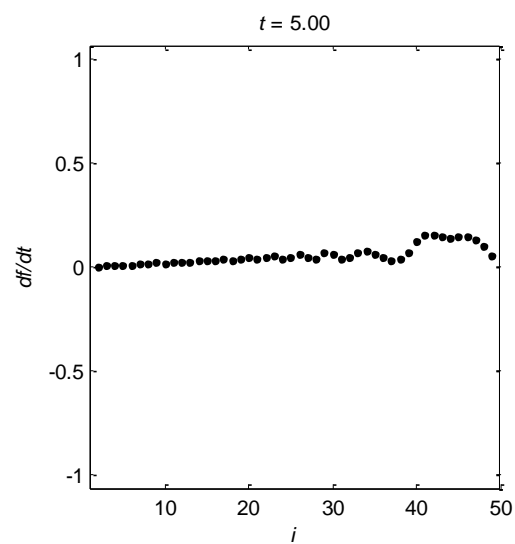
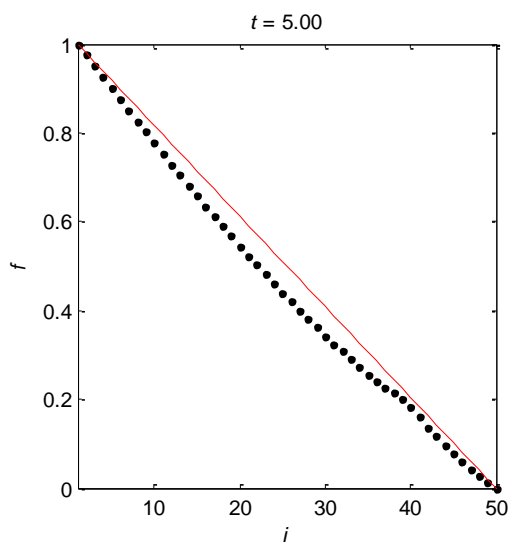
3.1. Интерпретация динамики цепочки осцилляторов в терминах теплопереноса

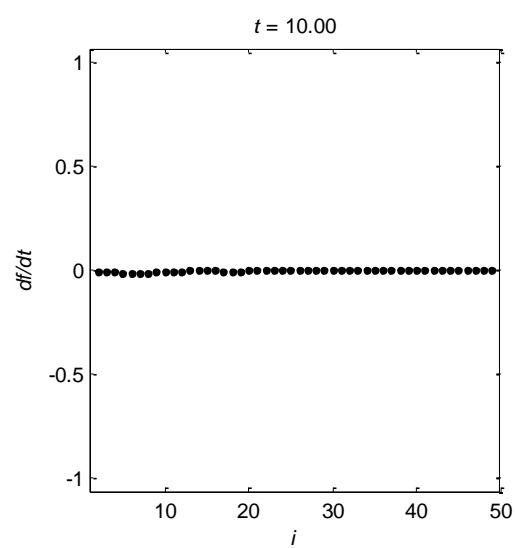
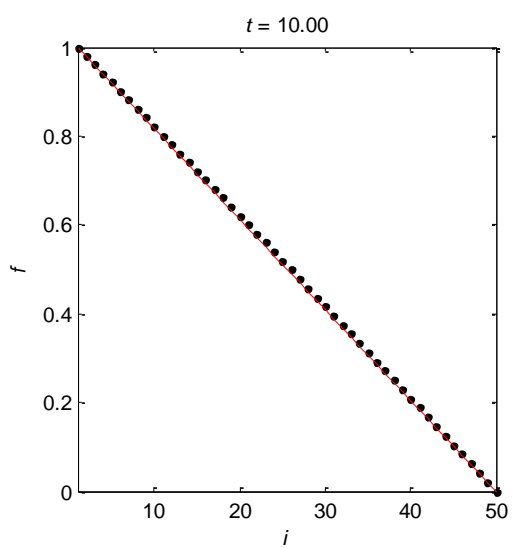
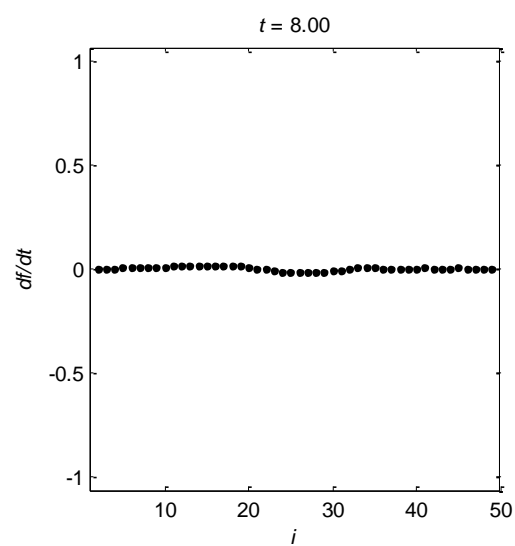
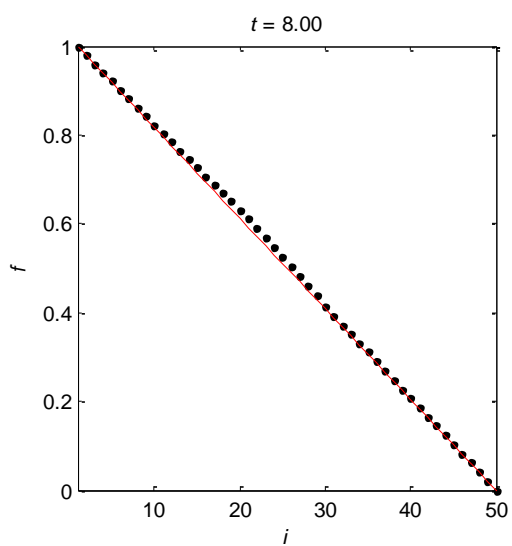
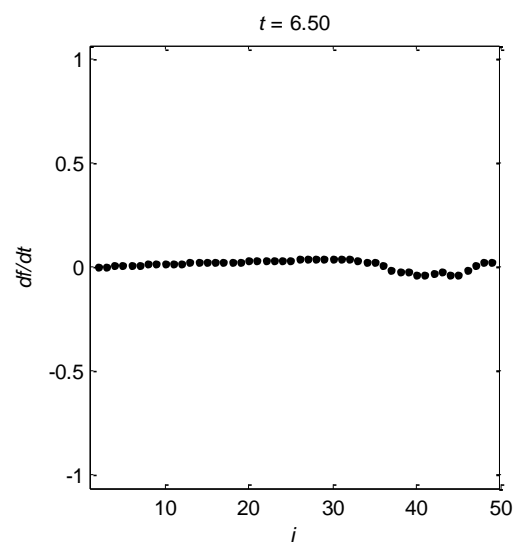
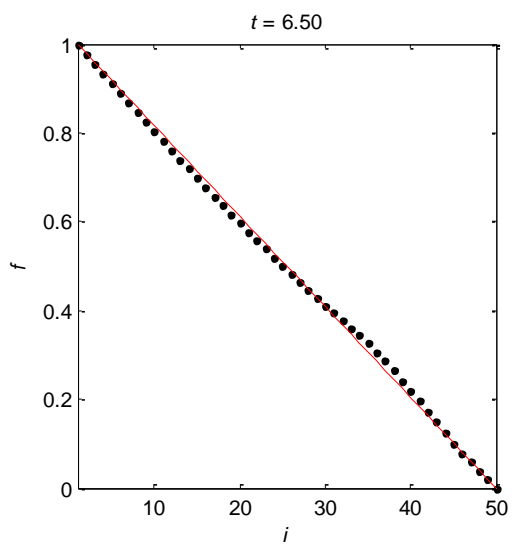
В терминах теплопереноса соотношения (3.1) и (3.2) являются краевыми условиями первой краевой задачи для уравнения (2.8) при распространении тепла в плоском слое, заполненным “холодной” теплопроводящей средой, при заданном законе изменения температуры на его левой границе и фиксированной температуре – на правой. Установившееся распределение смещений (3.3) соответствует стационарному режиму теплопереноса с линейным распределением температуры.

Результаты численного решения задачи (2.15) с условиями (3.1) и (3.2) при $n = 50$, $\alpha = 100$, $t_* = 1$ представлены на рис. 3.1.









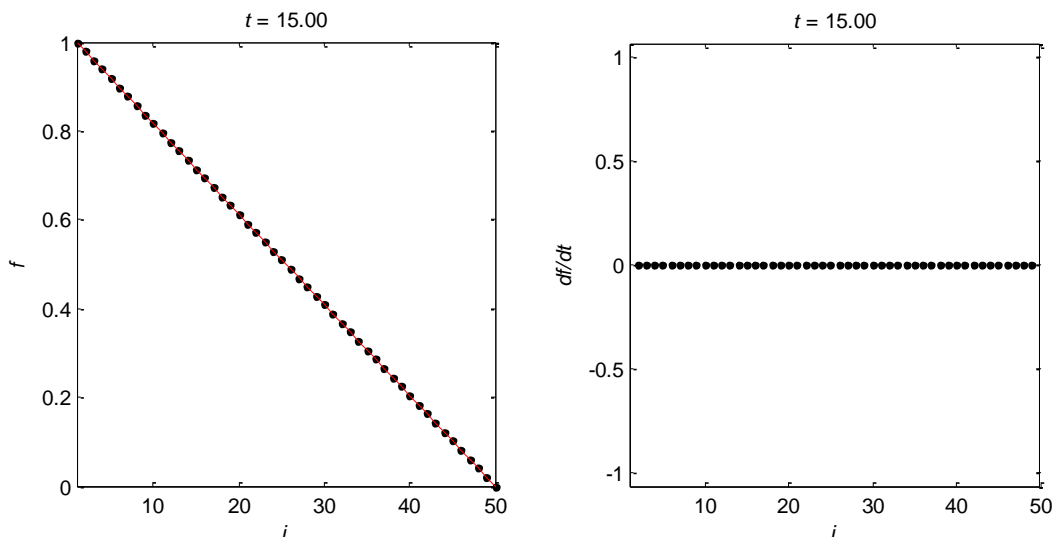


Рис. 3.1. Распределения смещений (слева: точечные кривые; прямая – установившееся распределение смещений) и скоростей (справа) осцилляторов в различные моменты времени при $n = 50$; $\alpha = 100$; $t_* = 1$.

Видно, что смещение первого осциллятора вызывает за счет сил упругости движение второго, смещение второго – третьего и так далее. В результате возмущение состояния осцилляторов распространяется в сторону возрастания номера осциллятора или, что то же самое, пространственной координаты. При этом формируется разрыв в зависимости смещения от номера осциллятора, ассоциируемый с фронтом возмущения.

Действительно, на рис. 3.1 на части мгновенных (в данный момент времени) картин f_i прослеживается наличие двух групп осцилляторов, смещения в каждой из которых примерно “ложатся” на свою линейную зависимость f_i от i , а между группами происходит скачкообразное изменение угла наклона номерной зависимости f_i .

Смещения и скорости осцилляторов изменяются немонотонно не только во времени, но и с номером осциллятора. В конце концов устанавливается равновесное распределение (3.3) смещений и состояние покоя.

В терминах теплопереноса рассчитанной динамике осцилляторов соответствует теплоперенос с образованием теплового фронта – разрыва градиента температуры. Из-за использованной конечно-разностной аппроксимации $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ фронт “размазан” в пространстве, то есть имеет конечную ширину. Наблюдается отражение тепловой волны от правой границы. В результате в процессе релаксации реализуются температуры, превышающие равновесные значения.

3.2. Визуализация конечности скорости распространения тепла

На рис. 3.2 а приведены временные зависимости смещений осцилляторов при $n = 50$; $\alpha = 100$; $t_* = 1$ в виде отдельных кривых.

Видно, что имеет место временная задержка начала смещения осциллятора из положения равновесия, которая растет с номером осциллятора. Тогда безразмерную скорость распространения тепла можно оценить отношением номера осциллятора и времени начала его движения. Однако такая оценка затруднена, так как выбор времен начала движения осцилляторов должен осуществляться по полученным в численном виде законам их движения.

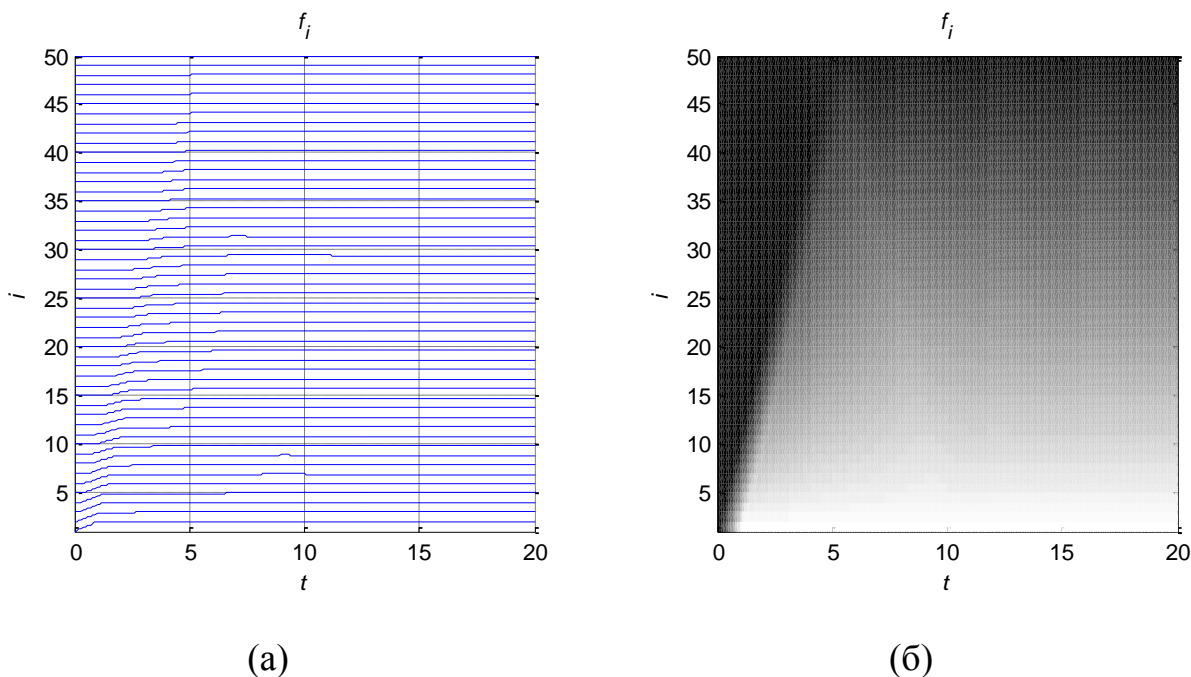


Рис. 3.2. Временная зависимость смещений осцилляторов при $n = 50$; $\alpha = 100$; $t_* = 1$ в виде (а) отдельных кривых $f_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ и (б) непрерывного поля $f(t, n)$.

Для улучшения качества визуализации конечности скорости распространения тепла совокупность $f_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ временных зависимостей смещений осцилляторов в виде отдельных кривых (см. рис. 3.2 а) интерпретируется как непрерывное двумерное поле $f(t, n)$, изображенное на рис. 3.2 б. Видно, что граница между невозмущенными и возмущенными состояниями осцилляторов несколько размыта. Однако наклон границ “размытости” практически одинаков, что упрощает оценку величины безразмерной скорости распространения тепла.

3.3. Влияние параметров модели на скорость распространения тепла

Параметры модели n – число осцилляторов; t_* – время, обратная величина которого численно равна неизменной скорости нарастания смещения первого осциллятора (граничной температуры) от нуля до единицы; $\alpha = \left\{ \frac{\tau / (\delta^2 / \chi)}{(\gamma^{-1} / \omega_0^{-1})^2} \right\}$ – отношение характерных времен процессов релаксации и диффузии тепла или квадрат отношения характерных времен процессов затухания и колебания для осциллятора. Далее приводятся данные, демонстрирующие влияние этих параметров на результаты расчета.

Влияние числа осцилляторов. При увеличении числа осцилляторов в два раза скорость распространения тепла практически не изменилась, как видно из сравнения рис. 3.3 и рис. 3.2 б.

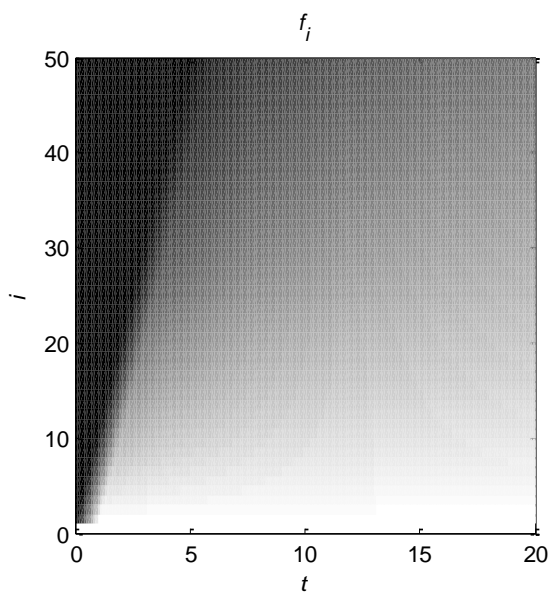


Рис. 3.3. Временная зависимость смещений осцилляторов при $n = 100$; $\alpha = 100$; $t_* = 1$ в виде непрерывного поля $f(t, n)$.

Влияние скорости роста граничной температуры. Как видно из сравнения рис. 3.2 б и рис. 3.4 при уменьшении скорости роста в два раза ($t_* = 2$) или увеличении ее в два раза ($t_* = 0,5$) скорость распространения тепла практически не изменяется. Этот результат согласовывается с физическими соображениями,

поскольку в рамках рассматриваемой линейной модели скорость тепла не должна зависеть от граничной температуры.

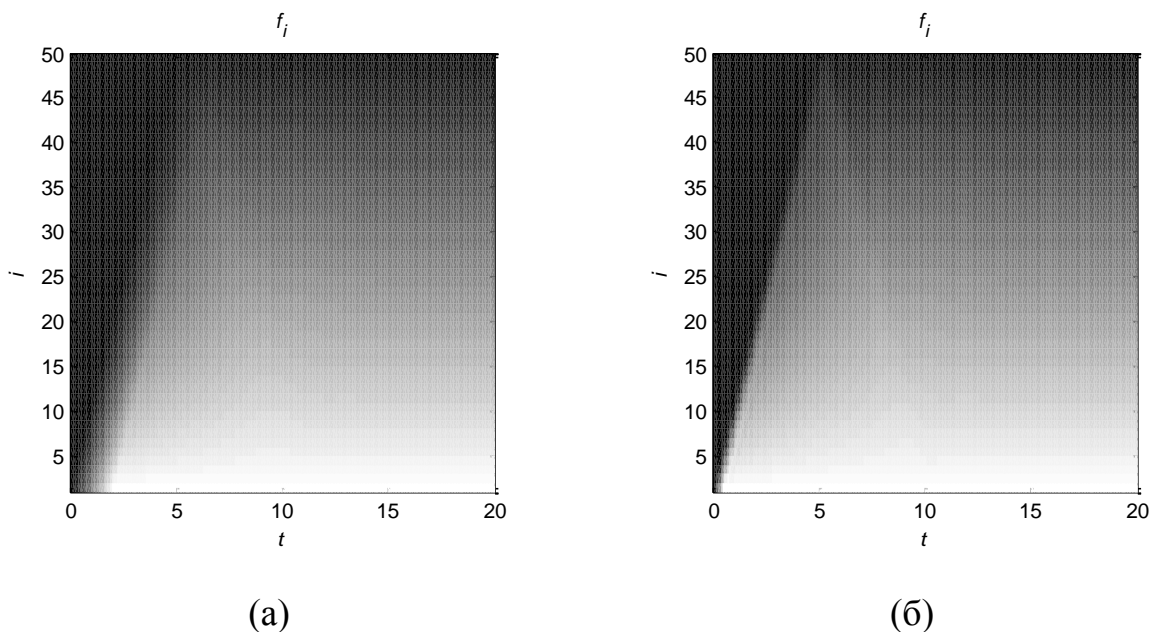


Рис. 3.4. Влияние скорости роста граничной температуры при $n = 50$; $\alpha = 100$; (а) $t_* = 2$ и (б) $t_* = 0,5$.

Необходимо отметить, что при увеличении темпа роста граничной температуры размытость границы между невозмущенными и возмущенными состояниями осцилляторов в плоскости (t, n) уменьшается (рис. 3.4 а и б). Однако распределение смещений по номерам осцилляторов в различные моменты может становиться “пилообразным”, как показано на рис. 3.5. Этот результат естественным образом объясняется в рамках механической модели инерцией осцилляторов. В теории и практике численных методов [15] “пилообразность” численного решения трактуется как проявление неустойчивости.

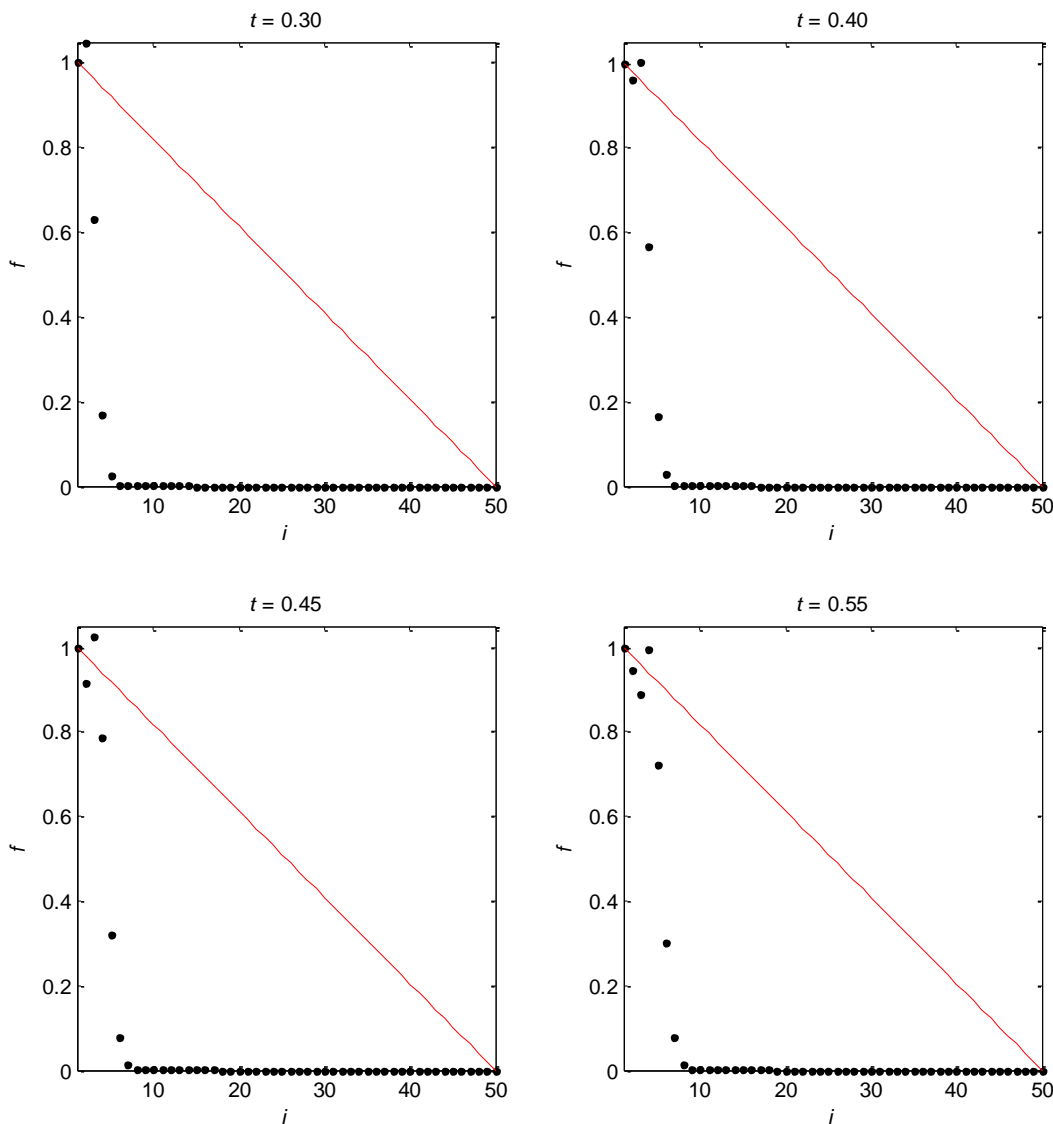


Рис. 3.5. Распределения смещений (точечные кривые) в различные моменты времени с установившимся распределением смещений (сплошная прямая) осцилляторов при $n = 50$; $\alpha = 100$; $t_* = 0,1$.

Влияние параметра α модели. Как видно из сравнения рис. 3.2 б и рис. 3.6 скорость распространения тепла сильно изменяется в зависимости от значения параметра α .

При уменьшении α скорость уменьшается, а при увеличении — увеличивается (рис. 3.6). В результате при $\alpha = 10$ наблюдается медленное монотонное изменение смещений осцилляторов (рис. 3.7). Поэтому возмущение

состояния системы к моменту времени $t = 1$ достигает только 5-го осциллятора, при $t = 4$ – 15-го осциллятора. При $\alpha = 1000$ возмущение распространяется так быстро, что при $t = 1$ возмущение достигает уже 35-го осциллятора. Далее, после отражения возмущения от правой границы, реализуется затухающий колебательный режим изменения смещений осцилляторов, иллюстрируемый картинками смещений при $t = 2$ и $t = 4$ на рис. 3.7.

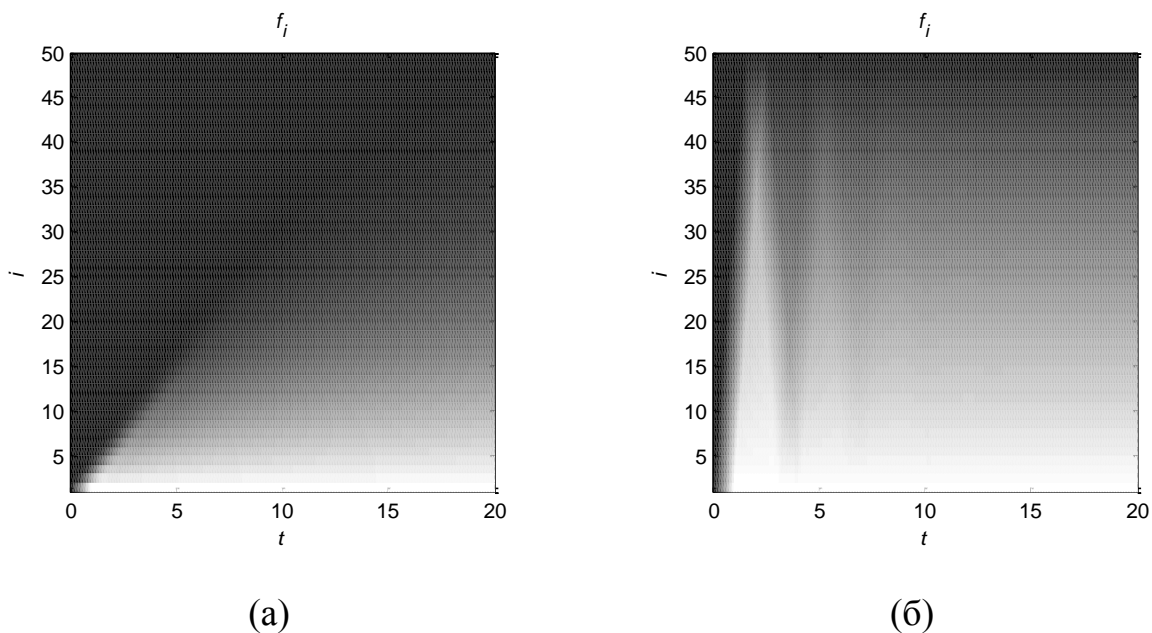
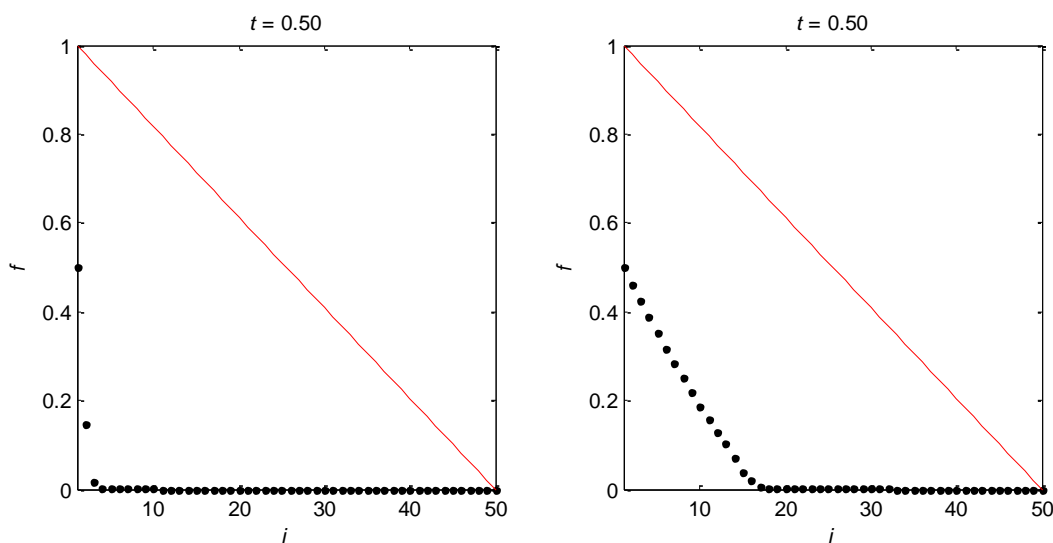


Рис. 3.6. Поле смещений осцилляторов при $n = 50$; $t_* = 1$
; (а) $\alpha = 10$ и (б) $\alpha = 1000$.



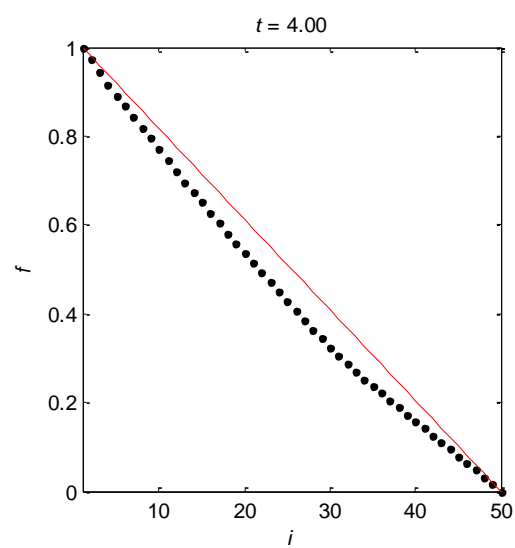
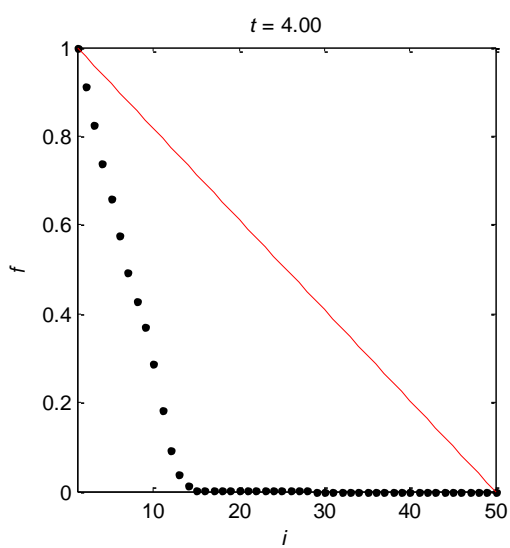
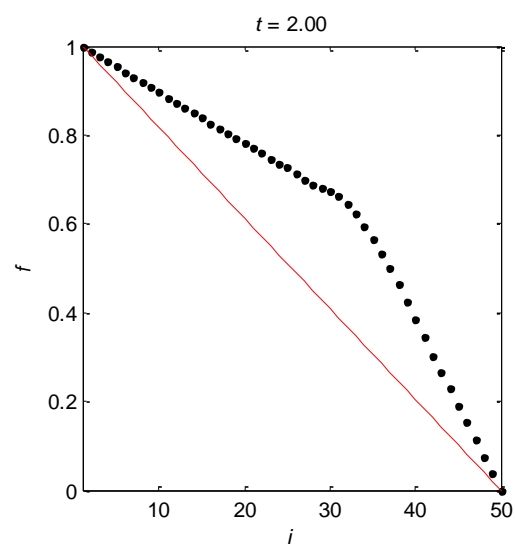
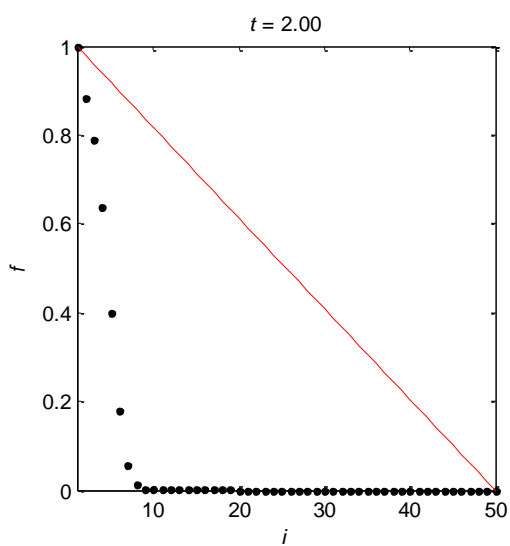
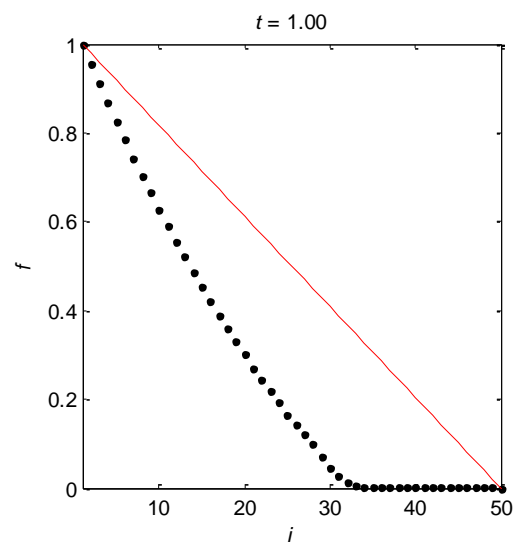
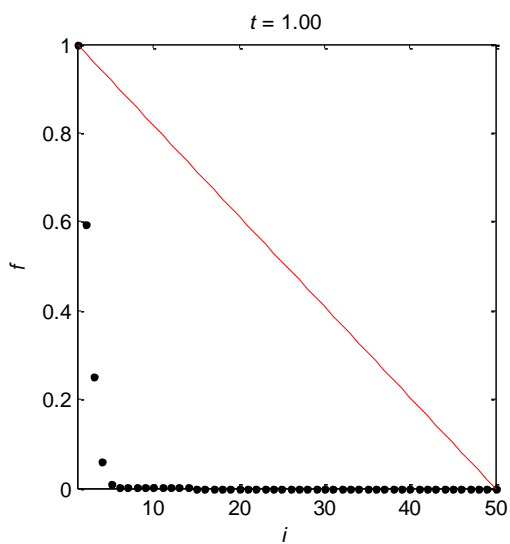


Рис. 3.7. Распределения смещений (точечные кривые) в различные моменты времени с установившимся распределением смещений (сплошная прямая) осцилляторов при $n = 50$; $t_* = 1$; $\alpha = 10$ (слева) и $\alpha = 1000$ (справа).

Как следует из (2.16), увеличение (уменьшение) α для цепочки связанных осцилляторов при неизменных ее физических свойствах (частота ω_0 фиксирована) реализуется при уменьшении (увеличении) γ , характеризующего сопротивление со стороны среды движению осцилляторов. Поэтому увеличением или уменьшением роли диссипативных сил объясняется зависимость скорости распространения возмущения по цепочке связанных осцилляторов.

Для теплопереноса ситуация обстоит сложнее. Действительно, при формально фиксированном характерном времени δ^2 / χ диффузии температуры увеличение (уменьшение) α обеспечивается увеличением (уменьшением) времени τ релаксации плотности потока тепла. Поскольку при $\tau \rightarrow 0$ волновое уравнение теплопереноса (2.5) с конечной скоростью распространения теплового возмущения переходит в уравнение параболического типа (1.7), описывающее распространение теплового возмущения с бесконечной скоростью, то следует ожидать тогда, что при уменьшении α (или τ) скорость распространения тепла должна увеличиваться от конечного значения (2.7) до бесконечности, что противоречит результатам расчета. Поэтому изменение α означает изменение всего комплекса параметров $\tau \chi / \delta^2$, который пропорционален квадрату скорости распространения теплового возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенного математического моделирования локально-неравновесного переноса тепла:

- выявлена механическая модель волнового теплопереноса в виде цепочки связанных осцилляторов, законы движения которых в среде с трением соответствуют законам изменения температуры в узлах пространственной сетки;
- интерпретирован разрыв в зависимости смещений от номера осциллятора как теплоперенос с образованием теплового фронта – разрыва градиента температур;
- при расчетах были обнаружены температуры, превышающие равновесные значения, из-за отражения тепловой волны от правой границы;
- при визуализации конечности скорости распространения тепла установлена временная задержка начала смещения осциллятора из положения равновесия, которая растет с номером осциллятора;
- установлено, что скорость распространения тепла:
 - практически не изменяется от числа осцилляторов;
 - не зависит от скорости роста граничной температуры в рассматриваемой модели;
 - увеличивается (уменьшается) при увеличении (уменьшении) комплекса параметров $\tau\chi/\delta^2$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
2. Лыков А.В. Теплообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 479 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
4. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 688 с.
5. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Эффект метастабильной локализации тепла // ДАН. – 1975.– Т. 233, № 6. – С. 1344 – 1347.
6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
7. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный анализ. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.
8. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН. – 1997.– Т. 167, № 10. – С. 1095 – 1106.
9. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // УФН. – 1991.– Т. 161, № 3. – С. 5 – 29.
10. Синкевич О.А., Семенов А.М. Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энского по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат // ЖТФ. – 2003.– Т. 73, Вып. 10. – С. 1 – 5.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: МГУ, 2004. – 798 с.

12. Медведев Д.А., Куперштох А.Л., Прууэл Э.Р., Сатонкина Н.П., Карпов Д.И. Моделирование физических процессов на ПК: Учеб. пособие. – Новосибирск: НГУ, 2010. – 101 с.
13. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2001. – 416 с.
14. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. – М.: Мир, 1990. – 349 с.
15. Калиткин Н.Н. Численные методы: Учеб. пособие. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
16. Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
17. <http://www.mathworks.com/>(MATLAB 7.0.1.24704 (R14) Service pack 1 (License number: 235093)).