ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ СТЕПЕННОЙ MIN-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ С ЧЁТНЫМИ ПРОПУСКАМИ

Бугаевская А.Н.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Аннотация

Рассмотрено численное решение задачи быстродействия для линейной неавтономной системы. Алгоритм основан на сведении задачи быстродействия к степенной min-проблеме моментов с чётными пропусками.

THE NUMERICAL SOLUTION OF TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A LINEAR NON-AUTONOMOUS SYSTEM BASED ON POWER MOMENT MIN-PROBLEM WITH EVEN GAPS

Bugaevskaya A.N.

Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Abstract

The numerical solution of time-optimal control problem for a linear non-autonomous system is considered. This algorithm is based on the reduction of time-optimal control problem to the power moment min-problem with even gaps.

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия, в частности линейная задача быстродействия. Поскольку время быстродействия есть наиболее естественный критерий оптимальности, задача быстродействия является одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. Решение задач линейного быстродействия важно и с точки зрения нелинейных систем, поскольку решение таких задач может быть сведено к решению линейных систем.

Важным звеном, связывающим теоретические исследования с практикой, является разработка для решения задач быстродействия численных методов, ориентированных на компьютерное применение. Большой интерес представляет решение задач быстродействия для систем большой размерности. Трудность решения таких задач состоит в том, что в процессе вычислений приходится иметь дело с плохо обусловленными матрицами.

Таким образом, разработка численных методов и компьютерных программ для решения задач быстродействия является актуальной.

Рассмотрим задачу быстродействия для линейной неавтономной системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = Atx + bu, \quad |u| \le 1, \quad x \in E^n, \\ x(0) = x^0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min, \end{gathered} \tag{1}$$

где A – произвольная матрица размерности $n \times n$, b – n-мерный вектор-столбец, $u \in R$ – управление, Θ – время движения из точки x^0 в начало координат. Элементы матрицы A и вектора b являются действительными числами. Функция $u(t)$ в решении задачи быстродействия кусочно-постоянная и принимает значения ± 1 [1]. Пусть спектр матрицы A вещественный, тогда функция $u(t)$ имеет не более $n-1$ точек разрыва [1], [2], которые называются моментами переключения управления.

Пусть ранг матрицы $Q = (b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b)$ равен n, т.е. система (1) полностью управляема [2], и можно попасть из произвольной точки x^0 в начало координат.

Траектория системы (1), отвечающая управлению $u(t)$, определяется равенством

$$x(t) = e^{\frac{At^2}{2}} \left(x^0 + \int_0^t e^{-\frac{A\tau^2}{2}} b u(\tau) d\tau \right). \tag{2}$$

Из (2) при $t = \Theta$ получим соотношение

$$x^0 + \int_0^{\Theta} e^{-\frac{A\tau^2}{2}} b u(\tau) d\tau = 0. \tag{3}$$

Будем рассматривать начальные точки x^0, для которых управление $u(t)$ имеет ровно $n-1$ моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$.

Обозначим через $\tilde{u}$ управление на последнем промежутке $[T_{n-1}; \Theta]$. Если $\tilde{u} = -1$, то управление $u(t)$ будем называть управлением первого рода, если $\tilde{u} = +1$, то управлением второго рода.

Таким образом, решение задачи быстродействия (1) сводится к нахождению времени быстродействия Θ, рода управления $\tilde{u}$ и моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$.

Пусть матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда задача быстродействия (1) принимает вид

$$\begin{gathered} \dot{x} = u, \quad |u| \le 1, \quad x \in E^n, \\ \dot{x}_k = t x_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n, \\ x(0) = x^0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min. \end{gathered} \tag{4}$$

Задачу (4) будем называть задачей быстродействия для неавтономной канонической системы. В этом случае

$$e^{-\frac{A\tau^2}{2}} b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\tau^2}{2} \\ \dots \\ (-1)^{n-1} \frac{\tau^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!} \end{pmatrix},$$

и из равенства (3) получим

$$x_k^0 = \frac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!} \int_0^{\Theta} \tau^{2k-2} u(\tau)\, d\tau, \quad k = 1, \dots, n, \quad |u(t)| \le 1, \quad \Theta \to \min. \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи быстродействия для неавтономной канонической системы (4) сводится к решению степенной min-проблемы моментов с чётными пропусками (5). Решение min-проблемы моментов (5) подробно изложено в работах [3], [4], [5], [6], в которых получены уравнения для нахождения времени быстродействия и моментов переключения (точек разрыва) управления.

Для задачи быстродействия (1) предлагается численный метод ее решения. Для реализации численного решения задачи быстродействия для линейной неавтономной системы (1) составлена программа на встроенном в математический пакет Waterloo Maple 9 языке программирования высокого уровня. Для произвольного порядка n системы (1) с заданной точностью определяется время быстродействия и управление, которое является кусочно-постоянной функцией, имеющей $n-1$ точек разрыва (моментов переключения). На каждой итерации решается min-проблема моментов с чётными пропусками вида (5), которая эквивалентна задаче быстродействия для неавтономной канонической системы (4). При этом проводилась проверка точности попадания в начало координат с помощью полученного управления, т.е. проверялось равенство (3).

Подробное описание алгоритма программы (в виде последовательности шагов), реализующей численный метод решения задачи быстродействия для линейной неавтономной системы (1), подробно приведено в работе [7]. Этот алгоритм основан на существовании неподвижной точки отображения.

Приведём результаты численного решения задачи быстродействия (1). Точность вычислений выбрана равной 10^{-90}.

Пример 1. Пусть размерность системы (1) $n = 2$, матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

начальная точка $x^0 = (0.01,\, 0)$.

Приведём результаты первых шести итераций для времени быстродействия:

$\Theta_1 = 0.434324747331766118067388138079\ldots,$

$\Theta_2 = 0.402984688932949976298171997725\ldots,$

$\Theta_3 = 0.413634185296559428336548917966\ldots,$

$\Theta_4 = 0.410451348964185575837925228540\ldots,$

$\Theta_5 = 0.411445295907444937134516731682\ldots,$

$\Theta_6 = 0.411138939637566716982704881930\ldots.$

Данным методом было выполнено 176 итераций, получены следующие результаты: управление $\widetilde{u}$ на последнем промежутке $[T_1; \Theta]$ равно $+1$ (управление второго рода), время быстродействия

$\Theta = 0.411211368101634102111692987050\ldots,$

момент переключения (точка разрыва) управления

$T_1 = 0.210300886154757942393076145450\ldots.$

Пример 2. Пусть $n = 5$, матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

начальная точка $x^0 = (0.0000001,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)$.

Здесь выполнено 248 итераций, в результате получено, что управление $\widetilde{u}$ на последнем промежутке $[T_4; \Theta]$ равно -1 (управление первого рода), время быстродействия

$\Theta = 0.295442288057051069501093895584\ldots,$

моменты переключения (точки разрыва) управления

$$T_1 = 0.0521600646000583096010563040 75\ldots,$$

$$T_2 = 0.149612539299274381943552514510\ldots,$$

$$T_3 = 0.227896983655629440444334792135\ldots,$$

$$T_4 = 0.278165642441666683869059192195\ldots$$

Литература

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
2. Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления: пер. с англ. / Э.Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1971. – 574 с.
3. Коробов В.И. Метод порождающей функции в проблеме моментов с периодическими пропусками / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Докл. Акад. наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 1. – С. 32–35.
4. Korobov V.I. Markov Power Min-Moment Problem with Periodic Gaps / V.I. Korobov, G.M. Sklyar // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 80, No. 1. – P. 1559-1581.
5. Korobov V.I. The Solution of One Time-Optimal Problem on the Basis of the Markov Moment Min-Problem with Even Gaps / V.I. Korobov, A.N. Bugaevskaya // Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya. – 2003. – Vol. 10, No. 4. – P. 505-523.
6. Бугаевская А.Н. Решение задачи быстродействия на основе степенной min-проблемы моментов Маркова с чётными пропусками / А.Н. Бугаевская // Современные методы исследования в математике и механике. Труды XXIII Конференции молодых учёных механико-математического факультета МГУ / под ред. Д.В. Георгиевского, А.Н. Якивчик. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – С. 60–63.
7. Бугаевская А.Н. Компьютерное моделирование задачи быстродействия для неавтономной канонической системы / А.Н. Бугаевская // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – 2013. – № 2(46). – С. 47-53.

Сведения об авторах

Бугаевская Анна Николаевна; кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет E-mail: bugaevskaya@bsu.edu.ru область научных интересов: математическая теория оптимального управления, домашний адрес: Россия, г.Белгород, ул.Губкина 24, корп.1, кв.207.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ СРЕДСТВАМИ MAXIMA

Букушева А.В.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация

Рассматривается пример использования свободной распространяемой программы Maxima в решении задач дифференциальной геометрии.