ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НИУ «БелГУ)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

“Численное исследование эволюционных вариационных неравенств”

Магистерская диссертация
обучающегося по направлению подготовки 01.04.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001534
Скучас Дмитрия Андреевича

Научный руководитель
к.ф.м.н., доцент
Некрасова И.В.

Рецензент:

БЕЛГОРОД 2017

Содержание

Введение

Многие задачи математической физики допускают естественную вариационную постановку. В этой постановке задача сводится к отысканию экстремума некоторого функционала, т.е. к решению экстремальной задачи. Вариационный подход позволяет снять ограничения гладкости искомого решения, не вызванные физической природой изучаемого явления (рассматривается так называемое обобщенное или слабое решение). Условно вариационные задачи можно разделить на задачи оптимизации (задачи оптимального управления) и задачи, приводящие к вариационным неравенствам.

В математике, физике, экономике часто приходится иметь дело с более общим классом задач, которые также приводят к экстремальным, но на более узком множестве функций, чем традиционные, причем соответствующие функционалы могут не обладать гладкостью, необходимой для применения классических методов вариационного исчисления. Для исследования такого рода задач с ограничениями были привлечены так называемые вариационные неравенства, и это позволило решить довольно сложные задачи механики и физики, до того не поддававшиеся решению.

Объект исследования

Простейшая задача вариационного исчисления.

Задача на нахождение допустимых экстремалей.

Предмет исследования

Решение вариационных задач при помощи среды MATLAB.

Цель работы

Решение вариационных задач в среде MATLAB.

Задачи работы:

Изучить литературу по проблеме исследования.

Разработать комплекс программ для решения вариационных предложенных задач в среде MATLAB.

Изучить аналитические и численные методы исследования вариационных задач.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием общепризнанных математических методов, сравнением с результатами других авторов, совпадением аналогичных результатов, сравнением теоретических результатов с экспериментальными.

Дипломная работа состоит из Введения, трех глав, Заключения. Она изложена на 57 страницах машинописного текста, включающего 4 рисунка, и список литературных источников из 15 наименования.

В первой главе «Основы классического вариационного исчисления» формулируются необходимые и достаточные условия слабого и сильного локального минимума простейшей задачи вариационного исчисления; приводятся необходимые условия экстремума для обобщений простейшей задачи, рассматривается задача со старшими производными.

В главе 2. «Обобщения простейшей задачи». Рассмотрена простейшая задача в случае вектор–функций, а так же задача со старшими производными. Решена задача на нахождение экстремалей и реализована в среде MATLAB.

В главе 3. «Задачи на условный экстремум» излагается идея и схема получения решения вариационных задач в различных постановках. Рассмотрена изометрическая задача, разобран пример этой задачи, который просчитан в среде MATLAB, результат сравнен с экспериментальным.

Глава1.

Основы классического вариационного исчисления

Частные задачи о поиске экстремумов функций и функционалов при тех или иных ограничениях ставились и нередко успешно решались еще в глубокой древности. Например, задача о замкнутой кривой заданной длины на плоскости, охватывающей максимальную площадь, или, что то же самое, о кривой минимальной длины на плоскости, охватывающей заданную площадь, ставилась еще в древней Греции. Однако решения каждой из конкретных задач искались всегда сугубо индивидуальным методом. И до середины XVIII века не было известно метода, который позволял бы решать какой-либо класс задач. Лишь после создания основ теории бесконечно малых стало возможным создание такого метода. Создание Ньютоном и Лейбницем в конце XVII века основ дифференциального исчисления и установление Лейбницем его связи с зарождавшимся интегральным исчислением открыло новую страницу в математике и заложило основы для создания вариационного исчисления как самостоятельной математической дисциплины. Становлению этой главы математики способствовали многочисленные попытки великих математиков XVII века – Галилео (1564–1642), Лейбница (1646–1716), Ньютона, братьев Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748) Бернулли и др. – решить задачу о брахистохроне, поставленную в 1696 г. в журнале «ActaEruditorum» Иоганном Бернулли и впервые решенную Якобом Бернулли.[3]

Задача о брахистохроне

В вертикальной плоскости материальная частица скользит без трения по некоторой кривой, соединяющей выше расположенную точку P_1 с ниже расположенной точкой P_2 . Предполагая, что на частицу не действуют никакие силы, кроме силы тяжести, требуется установить, какова должна быть кривая, чтобы время, нужное для спуска от P_1 к P_2 , было наименьшим. Примем точку P_1 за начало координат и направим ось y вертикально вниз. Пусть (a, A) – координаты точки P_2. Предполагается, что начальная скорость падающей точки равна нулю. К моменту, когда расстояние от начального положения точки *O* по вертикальной оси *Oy* прямоугольной системы координат *xOy* будет равно y, точка теряет потенциальную энергию, которая уменьшается на mgy. Кинетическая энергия при этом увеличивается на $\frac{mv^2}{2}$

В силу закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0$$

Откуда

$$v = \sqrt{2gy}$$

Пусть $y(x) \in C^{'}[0, a]$ – траектория движения. Тогда $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y}dx}{dt}$

поэтому

$$\sqrt{2gydt} = \sqrt{1 + y'^2\, dx}$$

Следовательно, задача состоит в нахождении гладкой функции y(x), для которой $y(0) = 0, y(a) = A$ и

$$T = \int_b^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \to \min$$

Таким образом, подлежащая минимизации величина зависит не от одной или нескольких (в конечном числе) числовых переменных, а от всей кривой в целом.[6]

Первые постановки вариационных задач – задач об экстремумах функционалов, а не функций – в том виде, как они ставятся в наше время, были даны Лейбницем, который вслед за братьями Бернулли иным методом решает в 1696 г. задачу о брахистохроне, а в 1697 г. – задачу о геодезических линиях на поверхности.

Проблема нахождения «геодезических линий» – это задача отыскания кратчайших дуг, соединяющих две заданные точки на некоторой поверхности.

Задача на плоскости

Начнем с элементарного вопроса: что представляет собой плоская кривая наименьшей длины, соединяющей две фиксированные точки плоскости?

Для математической формулировки фиксируем две точки $P_1(\alpha, A)$ и $P_2(\beta, B)$ $(a < b)$ на плоскости xOy и пусть $y = y(x), x \in [a, b]$- дуга кривой, соединяющая эти точки. Длина дуги кривой равна $l=\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$, так что задача сводится к выбору функции y(x), для которой функционал длины принимает минимальное значение. Известно, что искомая кривая, дающая минимум длины, есть прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_1 и P_2.

Пространственная задача

Предположим, что поверхность $\varphi(x,y,z)=0$ является гладкой, а искомая кривая может быть задана уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x\in[a,b]$ с помощью гладких функций $y(x)$, $z(x)$. Тогда длина l равна:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx$$

Задача свелась к определению таких гладких на отрезке $[a,b]$ функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, что $\varphi(x, y(x),z(x)) \equiv 0$, $y(a)= A1$, $y(b)= B1$, $z (a)= A2$, $z (b)= B2$, а интеграл длины принимает минимальное значение. В частности, известно, что на сфере геодезическими линиями являются дуги больших кругов.

Вариационные задачи, решавшиеся в конце XVII – начале XVIII веков, являлись лишь демонстрацией возможностей уже сформировавшегося, хотя и далекого пока что от строгой обоснованности, дифференциального и интегрального исчисления и требовали в каждом конкретном случае искусства и интуиции. Первый общий метод решения вариационных задач был создан Эйлером (1707–1783) в работах 1732–1744 годов, в которых он усовершенствовал метод своего учителя И. Бернулли и распространил его на задачи с ограничениями; при этом он вывел общее уравнение для экстремалей, получившее его имя. В 1744 г. Эйлер публикует первую в истории математики книгу по вариационному исчислению, в которой дается общее дифференциальное уравнение для экстремалей, получившее впоследствии его имя.[5] Вывод этого уравнения, однако, был строго обоснован лишь во второй половине XIX века. Для задачи о минимуме функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}\, dt \tag{1.1}$$

зависящего от любого числа производных от оптимизируемой функции x(t) Эйлер получает следующее необходимое условие экстремума (получившее имя «уравнения Эйлера»):

$$\frac{dF}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial \ddot{x}}\right) - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right) = o, t \in [t_0, t_1] \tag{1.2}$$

Метод формального выведения этого уравнения основан на методе И. Бернулли и на «принципе Лейбница-Бернулли»; утверждающего, что всякий бесконечно малый отрезок экстремали является экстремалью. Согласно методу И. Бернулли оптимизируемый интеграл следует аппроксимировать конечной суммой, что позволяет заменить функционал функцией конечного числа переменных (ординат определяемой экстремали); затем следует варьировать всего одну из этих ординат, приравнивая нулю вариацию минимизируемого интеграла.

Экстремаль x(t) заменяется ломаной с равными интервалами деления отрезка $[t_0, t_1]$, производные выражаются через ординаты угловых точек ломаной по формулам конечных разностей, а интеграл (1.1) заменяется суммой. В результате задача о минимуме функционала (1.1) сводится к задаче о минимуме функции конечного числа переменных. Варьирование этой функции в одной из угловых точек, так что варьированная кривая вновь оказывается ломаной, измененной лишь на двух соседних подинтервалах интервала (t_0,t_1) позволило Эйлеру вывести уравнение (1.2). Когда же интеграл (1.1) минимизируется при К интегральных ограничениях

$$\int_{t_0}^{t_1} g_i\big(t, x, \dot{x}, \dots x^{(n)}\big)dt = const, i = \overrightarrow{1,k} \qquad (1.3)$$

то, следуя «принципу Лейбница-Бернулли», Эйлер варьирует ломаную в (К+1) точке и получает уравнения для экстремали, содержащие (К+1) постоянных множителей (впоследствии не вполне справедливо названных множителями Лагранжа). Подобный же принцип варьирования он сначала пытался применить и для случая, когда функционал (1.1) минимизируется при связях в виде дифференциального уравнения (например, в задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде), однако варьировать в этом случае надо уже всю кривую, а не несколько ее точек, как это оказывается достаточным в изопериметрических задачах.[5]

В XVIII веке математический анализ находился лишь на стадии становления основных принципов дифференцирования и интегрирования, и строгое обоснование этих принципов в большинстве случаев не представлялось возможным на существовавшем уровне развития математики. Критерием верности теоретических результатов в основном служило решение прикладных задач. Так что вопросы законности и перестановочности предельных переходов, так же как и законности самой операции исходной конечномерной аппроксимации вариационной задачи, в то время еще не могли быть решены Эйлером.

Новый этап в истории вариационного исчисления начался с работ 18-летнего Ж. Лагранжа (1736–1813), который в 1755 г. написал Эйлеру о подученном им новом методе расчета вариаций с помощью интегрирования по частям. Подход Лагранжа позволял получать необходимые условия экстремума в «вариационных задачах» (этот термин был введен Эйлером в 1764 г.) с помощью формализмов дифференциального и интегрального исчисления, не прибегая к прямому методу аппроксимаций, которым пользовался Эйлер в своих ранних работах. Эйлер и сам был близок к подобному подходу и идеи молодого Лагранжа, высказанные в письме, позволили ему без знакомства с техникой вывода Лагранжа разработать аналогичную методику получения необходимых условий. В письме от 2 октября 1759 г. он пишет Лагранжу, что на основе высказанных им идей он сам получил простой способ вывода уравнений экстремалей, но не будет публиковать свои результаты, пока Лагранж не опубликует свои, чтобы не отнимать у него заслуженной им славы. Эйлер приостановил на несколько лет публикацию своих результатов, пока в 1762 г. работа Лагранжа не появилась в печати. Идея Лагранжа состояла в отказе от эйлеровской аппроксимации задачи, в представлении варьируемых кривых в виде $x(t) + \delta x(t)$ и применении интегрирования по частям с обоснованием законности перестановки операций дифференцирования и варьирования. Позднее Эйлер под влиянием идей Лагранжа (в 1771 г.) дает новый вывод необходимых условий экстремума, вводя в рассмотрение, как это и применяется до сих пор, параметрическое семейство кривых сравнения $x(t,b) = x(t) +\alpha\delta x(t)$, где $\delta x(t)$ – функции того же класса, что и функция $x(t)$, а $\alpha\to 0$– малый параметр.

Лагранж не только дал применяемый до сих пор метод вывода уравнений Эйлера, но и получил условия трансверсальности, которым удовлетворяет экстремаль с незакрепленными концами. В связи с этим следует отметить, что Эйлер во всех решаемых им задачах и при разработке общей теории умышленно игнорировал рассмотрение краевых условий, полагая, что более общие результаты можно получить, если сначала выводить дифференциальное уравнение для экстремалей, а затем уже оценивать класс краевых условий, которым это уравнение может удовлетворять. Однако подобный подход, как показала история развития вариационного исчисления, по существу так и не получил подтверждения (правда, он может быть оправдан в связи с решением вариационных задач прямыми численными методами, когда из всех не- обходимых условий используют лишь уравнения Эйлера). А вот подход Лагранжа, позволяющий получать необходимые условия экстремума с учетом всех краевых условий задачи, оказался перспективным.[9]

1.1 Необходимые и достаточные условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления

Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Рассматривается задача отыскания экстремума интегрального функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \quad (1.4)$$

на классе Σ гладких функций $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$:

Сформулированная задача называется простейшей задачей вариационного исчисления. Предполагаем, что подынтегральная функция $F(t,x,x_1)$ (интегрант функционала) – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных.[11]

Классификация экстремумов

Абсолютный экстремум

Функционал J[x] достигает абсолютного минимума на функции $x_0(t) \in \Sigma$, если для любой допустимой функции x(t) выполняется $J[x] \geq J[x_0]$. Аналогично определяется абсолютный максимум.

Сильный и слабый экстремум

Сильной ε-окрестностью функции $x_0(t) \in \Sigma$ называется множество всех таких допустимых x(t),

$$\|x - x_0\|_{C[t0,t1]} = \max |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

Слабая ε-окрестность функции $x_0(t) \in \Sigma$ – множество всех допустимых функций x(t), для которых

$$\|x - x_0\|_{C^1_{[t0,t1]}} = \max_{[t0,t1]} |x(t) - x_0(t)| + \max_{[t0,t1]} |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)| < \varepsilon$$

Функционал J (x(·)) достигает на функции $x_0(t) \in \Sigma$ сильного (слабого) минимума, если для всех допустимых функций x(t) из некоторой сильной (слабой) ε-окрестности функции $x_0(t)$ выполняется $J[x] \geq J[x_0]$.

Аналогично определяется сильный (слабый) максимум. Если неравенство является строгим для всех функций из сильной (слабой) ε-окрестности, отличных от функции $x_0(t)$, то соответствующий экстремум называют строгим. Строгий абсолютный экстремум определяется аналогичным образом. Всякий абсолютный экстремум есть в то же время и слабый, и сильный экстремум. Всякий сильный экстремум одновременно является и слабым. Однако слабый экстремум функционала не обязательно является сильным экстремумом, а сильный – абсолютным. Необходимые условия для слабого экстремума являются необходимыми и для сильного, и для абсолютного экстремумов. Между тем, необходимые условия для сильного и абсолютного экстремумов не будут, вообще говоря, являться необходимыми для слабого экстремума. Для достаточных условий соотношения будут обратными: так, достаточные условия абсолютного экстремума будут достаточными условиями для сильного и слабого экстремумов, но, в общем случае, не наоборот.Впервые термины «экстремум», «сильный (stark)» и «слабый (schwach) экстремумы», «экстремаль» ввел в вариационное исчисление Кнезер. В вариационном исчислении терминология Кнезера стала общепринятой.

Вариация функции и функционала

Пусть $x_0(t) \in t[t_0, t_1]$- некоторая функция из Σ и x(t)∈Σ – произвольная функция сравнения. Функция $\delta x = x(t) - x_0(t)$ называется вариацией функции $x_0(t)$.

Пусть h(t) – функция класса C^1 $[t_0, t_1]$ удовлетворяющая условиям $h(t_0) = h_1(t) = 0$

Определим семейство допустимых функций сравнения x(t) , полагая

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon h(t)$$

Рассмотрим приращение функционала J(x(·)) на допустимых функциях

$$x_0(t), x(t)\colon \Delta J = J[x] - J[x_0]$$

Нетрудно видеть, что

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_0 + \varepsilon h, x_0 \dot{+} \varepsilon h) - F(t, x_0, x_0\dot{)} dt$$

$$= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} F_x(t, x_0, x_0)h + F_{\dot{x}}(\dot{t}, x_0, \dot{x}_0)h)dt$$

$$+\varepsilon \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} F_{xx}(t, x_0, \dot{x}_0)h^2 + 2F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h\dot{h} + F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h^2)dt$$
$$+ o(\varepsilon^2)$$

Главная линейная часть приращения функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \{F_x(t, x_0\dot{x}_0)h + F_x(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}\}\, dt$$

носит название первой вариации функционала J и обозначается δ J . В рассматриваемом случае простейшей вариационной задачи можно определить первую вариацию и следующим эквивалентным образом

$$\delta J = \frac{d}{d\varepsilon} J(x_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon = 0} .$$

Величина

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_a^b F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h^2 + 2\, F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h\dot{h} + F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h^2\}dt$$

называется второй вариацией функционала. Таким образом,

$$\Delta J = \varepsilon\delta J + \varepsilon^2\delta^2 J + o(\varepsilon^2)$$

Теорема 1.1 (Необходимое условие слабого минимума в терминах вариаций).

Для того чтобы

$$x_0(t), t \in [t_0, t_1]$$

изΣ доставляла слабый минимум функционалу

$$J[x] = \int_{t0}^{t1} F(t, x, \dot{x}) dt$$

необходимо, чтобы на этой функции, удовлетворялись следующие условия:

1) условие стационарности δ J = 0;

2) неотрицательность второй вариации $J^2\delta \geq 0$ при любом выборе функции h(t) класса $C^1[t_0,t_1]$, для которой $h_0(t) = h_1(t) = 0$

1.2 Основные леммы вариационного исчисления

Для упрощения условия стационарности применяются следующие утверждения, которые часто называют основными леммами вариационного исчисления.[13]

Лемма 1.1 (лемма Лагранжа). Пусть непрерывная функция M(t) обладает тем свойством, что, какова бы ни была функция h(t) классаC$^1[t_0,t_1]$,обращающаяся в нуль в точках t_0 и t_1, всегда

$$\int_{t0}^{t1} M(t)h(t)dt = 0$$

Тогда $M(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_1]$.

Лемма 1.2 (лемма Дюбуа-Реймона).Если для непрерывной функции M(t) и любой $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$ обращающейся в нуль в точках t_0 и t_1, выполнено равенство $\int_{t0}^{t1} M(t)h(t)dt = 0$,то $M(t) \equiv const$ на $[t_0, t_1]$

Уравнение Эйлера

Основное необходимое условие слабого минимума для простейшей вариационной задачи выражается с помощью уравнения Эйлера. Для установления данного условия может применяться как лемма Лагранжа, так и лемма Дюбуа-Реймона. Между тем доказательство, основанное на применении леммы 1.1, потребует априорного предположения существования непрерывной второй производной функции $x_0(t)$. Применение же леммы 1.2 не требует такого ограничивающего предположения.

Введем следующее обозначение $N(t) = \int_{t0}^{t} F_X dx$,тогда интегрируя по частям и принимая во внимания свойства функции h(x), на основании теоремы 2.1 получаем

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \{\frac{dN}{dt} h + F_{\dot{x}} \dot{h}\} dt = Nh\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \{F_{\dot{x}} - N\} \dot{h}\, dt = 0$$

Применяя лемму Дюбуа-Реймона, имеем

$$F_{\dot{x}} - N \equiv const \text{ на } [t_0, t_1].$$

Учитывая введенное обозначение, получаем, что функция $x_0(t)$, доставляющая слабый минимум функционалу J $(x(\cdot))$, необходимо должна удовлетворять на $[t_0 , t_1]$ уравнению

$$F_{\dot{x}} - \int_{t_0}^{t} F_x dt \equiv const . \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется уравнением Эйлера в интегральной форме.

Дифференцируя по t тождество

$$F_{\dot{x}} = \int_{t0}^{t} F_x dt + const$$

устанавливаем следующую теорему:

Теорема 2.2. Для того чтобы функция $x_0(t)$, $x \in [t_0 ,t_1]$ из Σ доставляла слабый минимум функционалу

$$J[x] = \int_{t0}^{t1} F(t, x, \dot{x}) dt$$

необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \tag{1.6}$$

Гладкие решения уравнения Эйлера называются экстремалями. Таким образом, точки экстремума функционала следует искать среди его экстремалей. Уравнение (1.6) дает необходимое, но, вообще говоря, не достаточное условие экстремума. В ряде случаев, однако, уравнение Эйлера способно дать исчерпывающий ответ на поставленную вариационную задачу. Так, если из содержательного смысла задачи или иных соображений вытекает, что она имеет решение, а функционал имеет единственную экстремаль, удовлетворяющую условиям на концах, то эта экстремаль и будет искомым решением.

Если F_{xx}– функция, не равная нулю тождественно, то уравнение Эйлера для функционала (1.4) представляет собой уравнение второго порядка. Между тем, экстремаль может и не являться дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Следующая теорема формулирует условия на функцию F, при которых экстремаль принадлежит классу $C^2[t_0,t_1]$.

Теорема 1.3 (Гильберт). Пусть $x_0(t)$– решение уравнения Эйлера (1.6).Если функция F(t, x, x) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках t, в которых $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \neq 0$

$x_0(x)$ существует и непрерывна.

В предположении, что функция $x_0(t)$ является дважды дифференцируемой, уравнение Эйлера (1.6) может быть записано в следующем виде

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + F_{\dot{x}x}\dot{x} + F_{\dot{x}t} - F_x = 0$$

Если $F_{xx} \neq 0$ всюду, то решение уравнение Эйлера сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения вида $x = \varphi(t,x,x)$ с дополнительными условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Такую задачу в теории дифференциальных уравнений называют краевой. Вопрос о существовании решения уравнения $x = \varphi(t, x, x)$ при условиях $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$не сводится к обычным теоремам существования для дифференциальных уравнений (существования решения задачи Коши). Множество решений краевой задачи в зависимости от ее конкретных качеств может быть пустым, может быть бесконечным, но может быть конечным и в том числе содержать ровно одно решение. Исследование вопроса о существовании решений краевой задачи в общем случае может быть достаточно сложным. Однако имеется ряд частных ситуаций, когда уравнение Эйлера сводится к уравнению первого порядка или может быть полностью проинтегрировано. Эти ситуации связаны со спецификой структуры интегранта функционала (1.4).

1.3 Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера

I. F(t, x, x)= F(t, x).

В этом случае уравнение Эйлера приводится к виду $F_x'(t, x) = 0$ и представляет собой не дифференциальное уравнение, а конечное. Его решения, вообще говоря, могут не удовлетворять поставленным краевым условиям, так что в общем случае задача решения не имеет.

II. F(t, x, x) =M(t, x) +xN(t, x). Уравнение Эйлера приводится к виду

$$\frac{\delta}{\delta x} M(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} N(t, x) \tag{1.7}$$

Это соотношение выполняется либо тождественно, либо, как и в предыдущем случае, представляет собой не дифференциальное уравнение, а конечное. Его решения, вообще говоря, также не удовлетворяют краевым условиям, так что в этом последнем случае задача, вообще говоря, решения не имеет. Если же соотношение (1.7) выполняется тождественно, то выражение M(t, x)dt+ N(t, x)dx представляет собой полный дифференциал, так что функционал J (x(·)) не зависит от пути интегрирования (J[x] = const на всех допустимых кривых x(t)∈Σ). Задача не является вариационной.

III. F(t, x, x)= F(x)

Уравнение Эйлера имеет вид F_{xx}(x (t))x(t) = 0 . Экстремали – прямые линии.

IV. F(t, x, x) =F(t, x).

V. F(t, x, x) =F(x, x). Уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F(x(t),\dot{x}(t))-\dot{x}(t)F_{\dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))=const$$

Условия Лежандра и Якоби

В первых своих работах Эйлер еще полагал, что полученное им дифференциальное уравнение экстремалей есть уравнение, определяющее абсолютный экстремум – максимум или минимум. Однако позднее, из решения множества примеров, он понял, что это – уравнение, которому удовлетворяют все относительные экстремали, да и не только они. В связи с этим встала проблема выделения среди множества экстремалей таких кривых, которые доставляют функционалу хотя бы относительный минимум. Лежандр (1752–1833) был первым, нашедшим условия, позволяющие различать относительный минимум и относительный максимум, по крайней мере, в простейшей задаче вариационного исчисления (1.4). В 1786 г. А. Лежандр, исследуя методами математического анализа вторую вариацию функционала, получил условие относительного минимума, заключающееся в том, что всюду на минимали должно выполняться неравенство $F_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$. Однако вывод этого условия не был математически строго обоснован. Обоснование было получено лишь в середине XIX века. Следует отметить, что Лежандр вывел свое условие минимума также и для задачи с незакрепленными концами. Достаточное условие относительного минимума Лежандр получает, анализируя вторую вариацию функционала.[8]

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\{F_{xx}(t,x_0,\dot{x}_0)h^2+2F_{x\dot{x}}(t,x_0,\dot{x}_0)h\dot{h}+F_{\dot{x}\dot{x}}(t,x_0,\dot{x}_0)\dot{h}^2\}dt$$

Очевидно, целевой функционал задачи должен иметь минимум, если на любой кривой сравнения, кроме экстремали, $\Delta J > 0$, т.е. если $\delta^2 J > 0$.Лежандр стремится привести подынтегральное выражение в $\delta^2 J$ к виду, достаточно простому для анализа его знака. С этой целью он добавляет к подынтегральному выражению полный дифференциал

$$\frac{d}{dt}(vh^2) = \frac{dv}{dt}h^2 + 2vh\dot{h}$$

и вычитает из $\delta^2 J$ равное этому дифференциалу значение

$$[(vh^2)\big|_{t_1} - (vh^2)\big|_{t_0}]$$

где v – некоторая подлежащая определению функцию. Если v(t) выбрать как решение уравнения.

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\left(F_{xx} + \frac{dv}{dt}\right) = \left(F_{x\dot{x}} + v\right)^2, \tag{1.8}$$

то $\delta^2 J$приведется к виду

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}\dot{x}}\left(\dot{h} + \frac{F_{x\dot{x}} + v}{F_{\dot{x}\dot{x}}}h\right)^2 dt$$

откуда ясно, что если $F_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ на всей экстремали, то $\delta^2 J > 0$ и имеет место минимум целевого функционала, а если $F_{\dot{x}\dot{x}} < 0$, то – максимум. Условие $F_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$, как понимал еще сам Лежандр, является необходимым условием минимума.

Теорема 1.5 (Необходимое условие Якоби).

Если функционал J[x] в простейшей задаче вариационного исчисления достигает слабого минимума на функции $x_0(t) \in \Sigma$, удовлетворяющей усиленному условию Лежандра, то на интервале (t_0,t_1) нет точек сопряженных с точкой $t=t_0$.

Необходимость условия Якоби была строго обоснована лишь в 1878 г. Эрдманом. Необходимость была также доказана Вейерштрассом в его курсе лекций, читавшихся им с 1865 г. по 1889 г. Большинство своих оригинальных результатов Вейерштрасс не публиковал, а излагал в своих лекциях; и они стали известны, так же как и приблизительные даты их получения, лишь через его учеников. Вейерштрасс сделал неоценимый вклад в вариационное исчисление, заложив строгие основы теории и направив исследования в русло строгого обоснования как уже известных, так и новых результатов. Он строит теорию достаточных условий относительного минимума функционала (1.4) для гладких и негладких задач. На важность изучения негладких задач указывал еще Д. Бернулли. Введя в рассмотрение так называемые «игольчатые» или «ступенчатые» вариации, Вейерштрасс получил необходимое условие минимума простейшего функционала в классе негладких кривых. Это условие, получившее его имя, совместно с уравнениями Эйлера, условиями Лежандра и Якоби, позволило ему сформулировать совокупность условий, одновременное удовлетворение которых достаточно для констатации факта наличия относительного минимума функционала в классе гладких кривых.

Достаточные условия слабого минимума

Теорема 1.6. Функция $x_0(t) \in C^1[t_0,t_1]$ доставляет слабый минимум функционалу $J[x]$ в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются условия:

1) функция $x_0(t)$ является экстремалью функционала $J[x]$;

2) для этой функции выполняется усиленное условие Лежандра $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$

3) $[t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных точке t_0, (усиленное условие Якоби).[11]

Достаточные условия сильного минимума

Функция $x_0(t) \in C^1[t_0,t_1]$ доставляет сильный минимум функционалу $J[x]$ в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются условия:

1) функция $x_0(t)$ является экстремалью функционала $J[x]$;

2) для этой функции выполняется усиленное условие Лежандра $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$

3) $[t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных точке t_0, (усиленное условие Якоби).

4) вдоль экстремали $x_0(t)$ выполнено неравенство $E(t, x, p, \dot{x}) > 0$ при любых конечных $p \neq x$.

Пример и задачи

Пример 1.1. Решить простейшую задачу вариационного исчисления

$$J[x] = \int_1^e (t\dot{x}^2 - x)dt \to extr; \quad x(1) = 1, x(e) = 2.$$

Интегрантом функционала задачи является функции $F=tx^2$-x, для которой F_x=-1,F_x=2tx.

Уравнение Эйлера

$$-1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(2\mathrm{tx})=0$$

приведем к виду 2tx + 2x +1= 0.

Семейство экстремалей функционала задачи задается уравнением

$$x(t)=\frac{C_1}{2}\ln t-\frac{1}{2}t+C_2, t\in[1,e].$$

Их условий на концы, находим единственную экстремаль, подозрительную на решение.

$$x_0(t)=\frac{1}{2}((e+1)\ln t-t+3),\ t\in[1,e].$$

Продемонстрируем возможности системы программирования MATLAB для нахождения экстремали в данной примере. Для решения уравнения Эйлера будем использовать команду dsolve, которая позволяет находить как общее решение дифференциального уравнения, так и частное его решение, удовлетворяющее заданным начальным или граничным условиям. В командном окне записывается следующий командный код:

clearall % очищаем память

formatlong % формат отображения чисел с 14 знаками

disp('Исследование примера 1.1') % выводим заголовок задачи

syms t x Dx D2x % описали символические переменные

F=t*Dx^2–x; % вводим подынтегральную функцию

t1=1; % вводим граничные условия

```
x1=1;

t2=exp(1);

x2=2;

fprintf('Подынтегральная функция: F=%s\n',char(F))

fprintf('Граничные условия: x(%d)=%d; x(%d)=%d\n',t1,x1,t2,x2)

dFdx=diff(F,x) % вычисляем Fx

dFdx1=diff(F,Dx) % вычисляем Fx'

d_dFdx1_dt = diff(dFdx1,t) % ∂(Fx')/∂t

d_dFdx1_dx=diff(dFdx1,x) % ∂(Fx')/∂x

d_dFdx1_dx1 = diff(dFdx1,Dx) % ∂(Fx')/∂x'=Fx'x' – условиеЛежандра

dFx1dt = d_dFdx1_dt + d_dFdx1_dx*Dx + d_dFdx1_dx1*D2x % d(Fx')/dt

Euler = simple(dFdx–dFx1dt) % леваячастьуравненияЭйлера

deqEuler = [ char(Euler) '=0' ]; % составилиуравнение

fprintf('УравнениеЭйлера: %s\n',deqEuler)

Sol = dsolve(deqEuler,'t') % решаемуравнениеЭйлера

iflength(Sol)~=1 % решений нет или более одного

error('Нет решений или более одного решения!');

end

SolLeft = subs(Sol,t,sym(t1)); % подставляем t1

SolRight = subs(Sol,t,sym(t2)); % подставляем t2

EqLeft = [char(SolLeft) '=' char(sym(x1))] % приравняли x1

EqRight = [char(SolRight) '=' char(sym(x2))] % приравняли x2

Con = solve(EqLeft,EqRight); % решаемсистемууравнений

C1=Con.C1 % присваиваем полученные решения

C2=Con.C2 % символическим константам C1 и C2
```

```
Sol1a = vpa(eval(Sol),14); % подставляем C1, C2, вычисляем с 14 знаками

fprintf('Уравнение экстремали:\n%s\n',char(Sol1a))

tpl = linspace(t1,t2); % задаём массив абсцисс

x1a = subs(Sol1a,t,tpl); % вычислилиординаты

plot ( tpl, x1a, '–r' ) % рисуемграфик

title ( '\bfExample 2.1' ) % заголовок

xlabel('t') % меткаоси OT

ylabel('x(t)') % меткаоси OX
```

В качестве результата получаем следующее:

```
Исследование примера 1.1

Подынтегральная функция: F=t*Dx^2–x

Граничные условия: x(1)=1; x(2.718282e+000)=2

dFdx = –1

dFdx1 = 2*t*Dx

d_dFdx1_dt = 2*Dx

d_dFdx1_dx = 0

d_dFdx1_dx1 = 2*t

dFx1dt = 2*Dx+2*t*D2x

Euler = –1–2*Dx–2*t*D2x

Уравнение Эйлера: –1–2*Dx–2*t*D2x=0

Sol = C1*log(t)–1/2*t+C2

EqLeft =–1/2+C2=1

EqRight =C1*log(3060513257434037/1125899906842624)–
3060513257434037/2251799813685248+C2=2
```

C1 =4186413164276661/2251799813685248/log(3060513257434037/1125899906842624)

C2 =3/2

Уравнение экстремали: 1.8591409142295*log(t)–.50000000000000*t+1.5000000000000

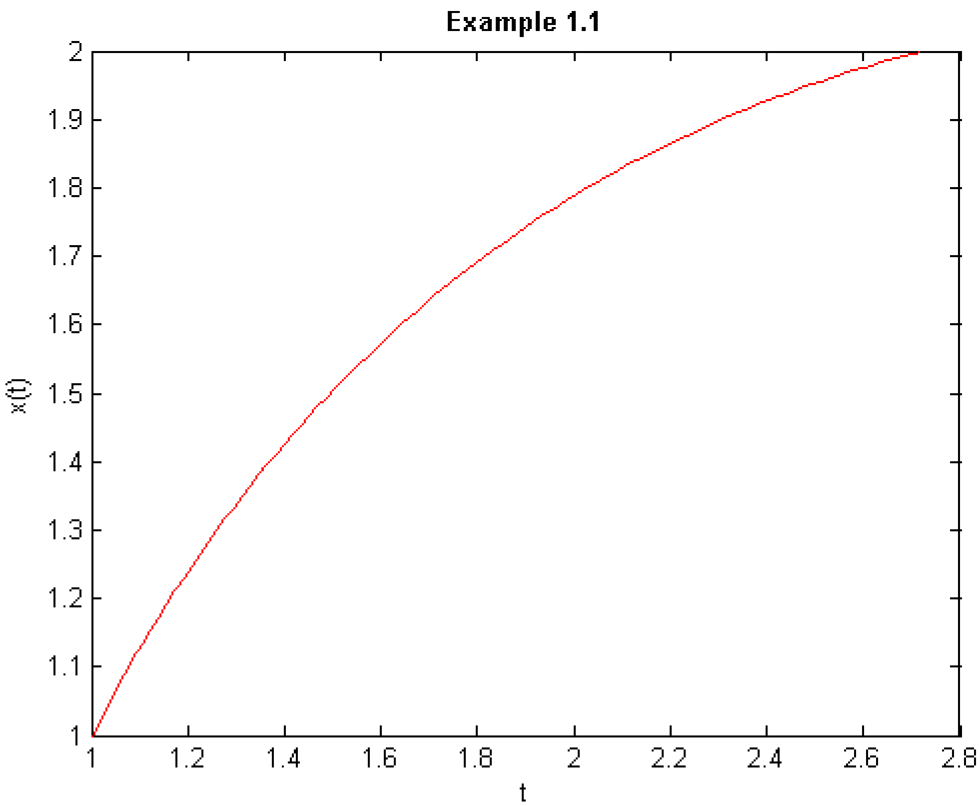

Рисунок №1. Нахождение экстримали

Продолжим исследование примера на основе необходимых условий второго порядка.

Так как F_X=2t>0, t∈[1,e], то выполняется усиленное условие Лежандра.

Уравнение Якоби имеет вид [3]

$$-\frac{d}{dt}(th) = 0$$

Единственной кривой удовлетворяющей условиям h(1)=0,h(1)=1, является h(t)=lnt,а значит выполняется усиленное условие Якоби.

На основе теоремы о достаточных условиях экстремума, можем утверждать, что $y_0(x)$ доставляет сильный минимум функционалу (а, соответственно, и слабый).

Глава2. Обобщения простейшей задачи

2.1 Простейшая задача в случае вектор–функций

Задача состоит в отыскании экстремума функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_m(t))dt \to extr \tag{1.11}$$

на классе гладких вектор-функций

$$x(t) = col\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\},\ x_i(t) \in C^1[t_0, t_1],\ \ i = 1,2,\ldots,m, \tag{1.12}$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$x_i(t_0) = A_i,\ x_i(t_1) = B_i,\ \ i = 1,2,\ldots,m. \tag{1.13}$$

Предполагается, что интегрант вариационной задачи F – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих переменных.

Теорема 1.9 (необходимые условия экстремума). Для того чтобы допустимая вектор–функция $x_0(t)$ была решением вариационной задачи (1.11) – (1.13), необходимо, чтобы она удовлетворяла системе уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dx} F_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m. \tag{1.14}$$

Система (1.14) состоит из n уравнений второго порядка, следовательно, ее общее решение содержит 2n произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий (1.13). Любое гладкое решение системы (1.13) называется экстремалью функционала J[x].[1]

Пример 1.2. Найти допустимые экстремали задачи

$$\int_0^1 (\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2 - 2x_1x_2)dt \to extr,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = sh1,\ x_2(1) = -sh1.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$-2x_2 - 2\ddot{x}_1 = 0,$$
$$-2x_1 - 2\ddot{x}_2 = 0.$$

Отсюда

$$x_1^{(\mathrm{IV})} - x_1 = 0$$

Отсюда

$$x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3\sin t + C_4\cos t$$

Следовательно,

$$x_2 = \dot{x}_1 = -C_1e^{-t} - C_2e^{t} + C_3\sin t + C_4\cos t$$

Удовлетворяя условиям на концы, получаем, что

$$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = C_4 = 0$$

Таким образом, получаем единственную допустимую экстремаль , $x_1 = \mathrm{sh}t$ $x_2 = -\mathrm{sh}t$.

Решим данную задачу, используя систему MATLAB. Для удобства переобозначим x_1 через y, x_2 через z. В командном окне записывается следующий код:

```
clear all
format long
disp('Исследованиепримера 1.2')
syms t y z Dy D2y Dz D2z % описали переменные
F=Dy^2+Dz^2–2*y*z; % подынтегральная функция
t1=0;
y1=0;
z1=0;
t2=1;
```

```
y2=sinh(1);

z2=–sinh(1);

fprintf('Подынтегральнаяфункция: F=%s\n',char(F))

fprintf('Граничные условия слева: y(%d)=%d; z(%d)=%d\n',t1,y1,t1,z1)

fprintf('Граничные условия справа: y(%d)=%d; z(%d)=%d\n',t2,y2,t2,z2)

dFdy = diff(F,y)

dFdy1 = diff(F,Dy);

d_dFdy1_dt = diff(dFdy1,t);

d_dFdy1_dy = diff(dFdy1,y);

d_dFdy1_dy1 = diff(dFdy1,Dy);

d_dFdy1_dz = diff(dFdy1,z);

d_dFdy1_dz1 = diff(dFdy1,Dz);

dFy1dt = d_dFdy1_dt + d_dFdy1_dy*Dy + d_dFdy1_dy1*D2y + d_dFdy1_dz*Dz +
d_dFdy1_dz1*D2z

dFdz=diff(F,z) dFdz1 = diff(F,Dz);

d_dFdz1_dt = diff(dFdz1,t); d_dFdz1_dy = diff(dFdz1,y); d_dFdz1_dy1 = diff(dFdz1,Dy);
d_dFdz1_dz = diff(dFdz1,z);

d_dFdz1_dz1 = diff(dFdz1,Dz); dFz1dt = d_dFdz1_dt + d_dFdz1_dy*Dy + d_dFdz1_dy1*D2y +
d_dFdz1_dz*Dz + d_dFdz1_dz1*D2z

EulerY = simple(dFdy–dFy1dt)

EulerZ = simple(dFdz–dFz1dt)

deqEulerY = [char(EulerY) '=0']; % уравнение Y

deqEulerZ = [char(EulerZ) '=0']; % уравнение Z

fprintf('СистемауравненийЭйлера:\n%s\n%s\n',deqEulerY,deqEulerZ)

Sol = dsolve(deqEulerY,deqEulerZ,'t'); % решаем
```

if length(Sol)~=1 % решений нет или более одного error('Нет решений или более одного решения!');

end

В результате получаем:

Исследование примера 1.2

Подынтегральная функция: F=Dy^2+Dz^2–2*y*z

Граничные условия слева: y(0)=0; z(0)=0

Граничные условия справа: y(1)=1.175201e+000; z(1)=–1.175201e+000

dFdy = –2*z

dFy1dt = 2*D2y

dFdz = –2*y

dFz1dt = 2*D2z

EulerY = –2*z–2*D2y

EulerZ = –2*y–2*D2z

Система уравнений Эйлера:

–2*z–2*D2y=0

–2*y–2*D2z=0

SolY = –C1*exp(–t)–C2*exp(t)+C3*sin(t)+C4*cos(t) SolZ =C1*exp(–t)+C2*exp(t)+C3*sin(t)+C4*cos(t)

EqLeftY =–1.*C1–1.*C2+C4=0 EqLeftZ =C1+C2+C4=0

EqRightY = –.36787944117144*C1–2.7182818284590*C2+.84147098480790*C3+.54030230586814*C4=5292635657779586*2 ^(–52)

C1 = .50000000000000909562795547492785 C2 = –.50000000000000909562795547492785

C3 = 0. C4 = 0

Уравнения экстремали:

28 y(t)=–.50000000000001*exp(–1.*t)+.50000000000001*exp(t) z(t)=.50000000000001*exp(–1.*t)–.50000000000001*exp(t)

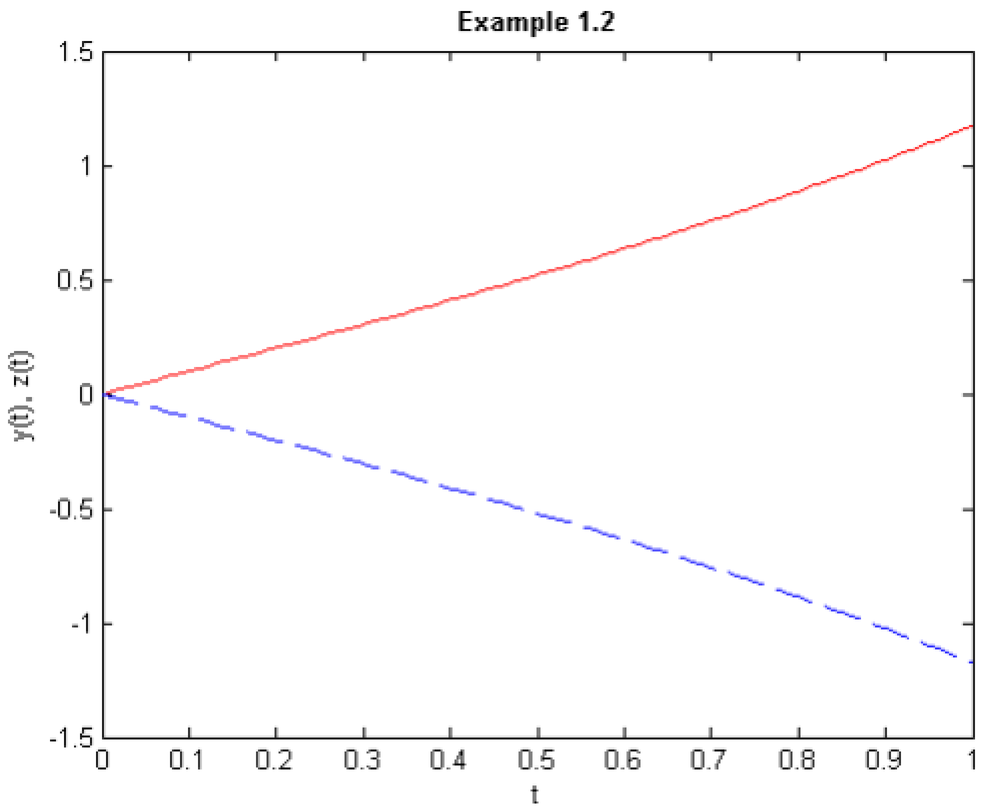

Рисунок №2 Нахождение допустимой экстримали

Задача со старшими производными

Исследуется на экстремум функционал

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\ldots,x^{(m)}(t))dt \qquad (1.15)$$

на классе Σm функций

$$x(t) \in C^m[t_0,t_1]$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$x^{(q)}(t_0)=A_q,\ x^{(q)}(t_1)=B_q,\ q=0,1,\ldots,m-1.$$

Теорема 1.10 (необходимые условия экстремума). Пусть F является непрерывной функцией вместе со своими производными по $x, x \dots x^m$. Для того, чтобы функционал (1.15) на множестве Σm достигал экстремума на допустимой функции $x_0(t)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению

$$F_x - \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}} - \frac{d}{dt}(F_{\ddot{x}} - (\dots - \frac{d}{dt}(F_{x^{(m-1)}} - \frac{d}{dt}F_{x^{(m)}})\dots))) = 0.$$

Если $F_{x^{(k)}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ddot{x}_0(t), \dots, x_0^{(m)}(t)) \in C^k[t_0, t_1]$, $k = 0, 1, \dots, m$, то экстремальная функция необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}F_{\ddot{x}} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}F_{x^{(m)}} = 0.$$

Пример 1.3. Найти допустимые экстремали задачи

$$\int_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)dt \to extr, \ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, x(1) = sh1, \dot{x}(1) = ch1.$$

Уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) + \frac{d^2}{dt^2}(2\ddot{x}) = 0,$$

т.е.

$$x^{(IV)} - \ddot{x} = 0.$$

Семейство экстремалей функционала задачи задается уравнением

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^t$$

Из условий на концы имеем,

$$C_1 = C_2 = 0, C_3 = -\frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{2}$$

Таким образом, единственной допустимой экстремалью является x =sht.

2.2Подвижные концы в простейшей вариационной задаче

Задача со свободными концами

Рассмотрим задачу нахождения экстремума функционала[1]

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

областью определения которого является класс всевозможных гладких функций $x(t) \in C^m[t_0, t_1]$. Краевые условия отсутствуют, т.е. концы графиков допустимых функций лежат на вертикальных прямых $t = t_0$ и $t_1 = t$.

Теорема 1.11. Если функция $x=x_0(t)$ доставляет экстремум интегралу

$$J[x] = \int_{t_2}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x(t)})dt$$

то она есть экстремаль, а на концах выполняются условия:

$$F_{\dot{x}}\big|_{t=t_0} = 0, \quad F_{\dot{x}}\big|_{t=t_1} = 0. \tag{1.16}$$

Условия (1.16) называют естественными краевыми условиями. Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, когда один конец закреплен, а другой свободен. Для определения экстремали в такой задаче необходимо использовать только одно из условий (1.16), соответствующее свободному концу.

Задача с подвижными концами

Пусть задан функционал

$$J[x]=\int_{\tau_0}^{\tau_1} F(t,x(t),\dot{x}(t))dt\,,$$

определенный на гладких кривых, концы которых лежат на фиксированных линиях $y_0 : x = \varphi(t)$ и $y_1 : x = \psi(t)$. Требуется найти экстремум такого функционала.

Теорема 1.12. Если функция y = y_0(x) доставляет экстремум интегралу

$$J[x]=\int_{\tau_0}^{\tau_1} F(t,x(t),\dot{x(t)})dt$$

среди всех гладких функций класса, соединяющих произвольные точки двух кривых y_1,y_0 то она является экстремалью, а на концах удовлетворяет условиям трансверсальности:

$$[\bar{F}+(\dot{\varphi}-\dot{x})\bar{F}_{\dot{x}}]\big|_{t=\tau_0}\bar{=}0,\quad [F+(\dot{\psi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]\big|_{t=\tau_1}=0. \tag{1.17}$$

Условия минимума в классе кусочно-гладких функций

Простейшая вариационная задача может не иметь решения в классе гладких допустимых функций. В этом случае естественно исследовать, не достигается ли экстремум на функциях более общего класса. В качестве такого класса рассмотрим совокупность кусочно гладких на [t_0,t_1] функций x = x(t). Таким образом, рассмотрим задачу отыскания минимума функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на классе функций

$$x(t) \in D^1[t_0, t_1]$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$x(t_0) = A,\ x(t_1) = B.$$

2.3 Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных

Интегральный функционал J, зависящий от функций нескольких переменных, определяется формулой [2]

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u'_x, u'_y)dxdy,$$

здесь D – фиксированное множество в R^2, $F(x, y, u, u'_x, u'_y)$

заданная на вещественнозначная функция и u – функция на D со значениями в R^1 .

На подобные функционалы без существенных изменений переносится основная идея, которая развивалась выше для функционалов простейшей вариационной задачи, а именно идея связи между точками экстремума интегрального функционала и решениями некоторого дифференциального уравнения. На этот раз соответствующее дифференциальное уравнение оказывается уравнением в частных производных.

В 1770 г. Эйлер сумел решить задачу об экстремуме двойного интеграла с закрепленными границами. В 1831 г. Пуассон доложил Парижской Академии наук решение задачи об экстремуме двойного интеграла с переменными границами. В работе 1838 г. Остроградский указал на то, что формулы Пуассона справедливы, вывел их другим путем и нашел выражение для первой вариации в общей задаче об экстремуме интеграла любой кратности с переменными границами.

Рассмотрим задачу минимизации функционала J с закрепленными границами. Предполагается, что основная область D – это ограниченное замкнутое множество в пространстве R^2, которое является замыканием некоторой области D' (т. е. открытого связного множества), граница ∂D является достаточно гладким множеством.

В качестве допустимых функций рассматриваются те, которые на границе ∂D принимают заданное значение:

$$u(x,y)\big|_{\partial D} = \varphi(x,y).$$

Как и в случае простейшей задачи, необходимое условие экстремума можно в терминах вариаций записать в форме

$$\delta J[z, \delta z] = 0,$$

где допустимые вариации $\delta z(x, y)$ являются функциями класса C^2, обращающимися в нуль на границе ∂D. Если $F \in C^2$ и $u \in C^2$, то, используя формулу Грина, первая вариация функционала J может быть приведена к виду

$$\delta J[z,\delta z]=\iint_D\left(F'_z-\frac{\partial F'_{z_x}}{\partial x}-\frac{\partial F'_{z_y}}{\partial y}\right)\delta z\,dxdy\,.$$

Применяя многомерный вариант обобщенной леммы Лагранжа, получаем, что минималь необходимо должна являться решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial F'_{z_x}}{\partial x}+\frac{\partial F'_{z_y}}{\partial y}-F'_z=0,$$

которое называют уравнением Эйлера-Остроградского, а любое гладкое решение этого уравнения – экстремалью. Составляя уравнение Эйлера-Остроградского для функционала Дирихле

$$J[z]=\frac{1}{2}\iint_D\left((z'_x)^2+(z'_y)^2\right)dxdy,$$

приходим к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\,.$$

Утверждение, которое гласит, что точка минимума функционала Дирихле является решением задачи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u(x,y)\big|_{\partial D}=\varphi(x,y),$$

известно под названием принципа Дирихле. Благодаря многочисленным приложениям уравнения Лапласа принцип Дирихле является важным утверждением. С принципом Дирихле связаны два непростых вопроса: существует ли при данных D и ∂D точка минимума и принадлежит ли точка минимума классу C^2? Ответы на оба эти вопроса при подходящих D и ∂D положительны, их исследование сыграло важную роль в развитии вариационного исчисления.[13]

Глава 3. Задачи на условный экстримом

Ранее были рассмотрены случаи вариационных задач, когда в качестве класса допустимых кривых принималась совокупность кривых, соединяющих или две заданные точки, или точки заданных линий. Однако существуют задачи, в которых на допустимые функции накладываются помимо краевых условий некоторые дополнительные – так называемые условия связи. Подобные задачи принято называть задачами на условный экстремум. Примером может служить задача Дидоны, где в качестве такого «дополнительного» условия выступает требование, что длины графиков допустимых функций имеют заданное значение. Для решения задач на условный экстремум обычно используется метод множителей Лагранжа. Это правило было впервые сформулировано им для исследования вариационных задач с ограничениями, и только потом – для конечномерных экстремальных задач.[7]

Простейшая изопериметрическая задача

Древнейшей из известных экстремальных задач является классическая изопериметрическая задача. Постановка данной задачи содержится в легенде о Дидоне («Энеида» Вергилий). События легенды относятся к IX в. до н.э. Финикийская царевна Дидона с небольшим отрядом сторонников бежала из г.Тира, спасаясь от преследований. Выбрав на африканском берегу Средиземного моря удобное место, Дидона и ее спутники решили основать поселение. Дидоне удалось уговорить правителя тех мест отдать в ее распоряжение участок земли, который можно окружить бычьей шкурой. Не поняв хитрость финикиянки, правитель дал согласие. Дидона же после заключения соглашения разрезала шкуру быка на тонкие полоски, связала их в длинный ремень и, окружив им значительную территорию, заложила на ней город Карфаген. Анализируя ситуацию, можно поставить несколько различных задач оптимизации. Рассмотрим следующую:

Среди гладких кривых длины l, соединяющих две заданные точки P_1 иP_2 (l >P_1P_2), найти ту, которая вместе с отрезком P_1P_2ограничивает наибольшую площадь.

Примем за ось Ox прямую, проходящую через точки P_1и P_2, тогда площадь ограниченная кривой y = y(x) , которую всегда можно считать расположенной над осью Ox, выразится интегралом

$$J[y] = \int_a^b y dx$$

где a, b – абсциссы точек P_1и P_2 . Таким образом, задача состоит в отыскании максимума функционала J при условиях

$$y(a) = y(b) = 0, \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$$

Данная постановка допускает обобщения, когда точки P_1и P_2 не являются фиксированными и берег не является прямой линией.

3.1 Изопериметрическая задача

Изопериметрической задачей вариационного исчисления называется следующая:

Среди всех функций класса

$$\Sigma = \{x(t) \in C^1[t_0, t_1]: x(t_0) = A, x(t_1) = B\}$$

на которых функционал

$$K[x] = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

равен заданному значению l , найти ту, для которой функционал

$$\mathrm{J}[\mathrm{x}] = \int_{\mathrm{t}_2}^{\mathrm{t}_1} \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{x}(\mathrm{t})})\mathrm{dt}$$

принимает экстремальное значение.

Первоначально под изопериметрической задачей понималась следующая частная задача: среди всех замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти ту, которая охватывает наибольшую площадь. Отсюда произошло и название «изопериметрическая задача», т.е. задача с фиксированным периметром. Предполагаем, что функции F и G имеют непрерывные производные первого и второго порядков при $[t_0,t_1] \in t$ и при произвольных значениях x и x. Далее предположим, что искомая кривая не является экстремалью функционала K(x(·)). Подход к исследованию поставленной задачи дает следующая

Теорема 1.14 Если кривая $x_0(t) \in \Sigma$ дает экстремум функционалу

$$J[x]=\int_{t_2}^{t_1}F(t,x(t),x(\dot{t}))dt$$

при условии $K[x]=\int_{t0}^{t1}G\big(t,x(t),x(t)\big)dt=l$и не является экстремалью функционала k[x], то существует постоянная λ такая, что $x_0(t)$ является экстремалью функционала

$$\int_{t0}^{t1}(F+\lambda G)dt$$

Таким образом, решение изопериметрической задачи находится либо среди стационарных точек функционала J[x]+λk[x],либо среди экстремалей функционала k[x].

Пример и задачи

Пример 1.4.Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$\int_0^1 x^2dt \underset{1}{\rightarrow}$ extr, $\int_0^1 xdt=0$,x(0)=0, x(1)=1

Составим функцию

$$H=\lambda_0x^2+\lambda_1x$$

Уравнение $H_x-\frac{d}{dt}H_X=0$имеет вид$-2\lambda_0\ddot{x}+\lambda_1=0.$ $\lambda_0\neq 0$так как в противном случае оба множителя одновременно обращаются в нуль.Пусть λ_0=1/2, тогда $x=\lambda_1$ Общее решение есть

$$x=\frac{\lambda_1}{2}t^2+C_1t+C_2$$

Постоянные $C_1 C_2, \lambda_1$ находим из условий на концы и изопериметрического условия:

$$C_2 = 0$$

$$\frac{\lambda}{2} + C_1 = 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda_1}{2} t^2 + C_1 t\right) dt = \frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_1}{2} = 0$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 6, C_1 = -2, C_2 = 0$$

Т.е. единственной допустимой экстремалью является $x = 3t^2 - 2t$. Применим для решения этой задачи пакет MATLAB, при этом помимо нахождения экстремали данной задачи определим экстремаль целевого функционала и сравним их.

```
clear all
format long
syms x y Dy D2y lambda
F=Dy^2;
x1=0;
y1=0;
x2=1;
y2=1;
F1=y;
J1=0;
```

```
fprintf('Интегрант целевого функционала: F=%s\n', char(F))

fprintf('Граничные условия: y(%d)=%d, y(%d)=%d\n',x1,y1,x2,y2)

fprintf('Изопериметрическое условие:Int(%s,"x",%d,%d)=%d\n', char(F1),x1,x2,J1)

dFdy=diff(F,y); dFdy1=diff(F,Dy)

d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x); d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);

dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y; Euler=simple(dFdy–dFy1dx);

degEuler=strcat(char(Euler),'=0'); Sol=dsolve(degEuler,'x');

if length(Sol)~=1 error('Resheniyboleeodnogo, RESHENIY NET!');

end

SolLeft=subs(Sol,x,sym(x1)); SolRight=subs(Sol,x,sym(x2));

EqLeft=strcat(char(vpa(SolLeft,14)),  '=',    char(sym(y1)));  EqRight=strcat(char(vpa(SolRight,14)),  '=',
char(sym(y2)));

Con=solve(EqLeft,EqRight); C1=Con.C1; C2=Con.C2;

SolOsn=vpa(eval(Sol),14); xpl=linspace(x1,x2);

yOsn=subs(SolOsn, x, xpl); fprintf('Экстремальцелевогофункционала: %s\n', char(SolOsn))

L=F+lambda*F1; dLdy=diff(L,y); dLdy1=diff(L,Dy);

d_dLdy1_dx=diff(dLdy1,x); d_dLdy1_dy=diff(dLdy1,y); d_dLdy1_dy1=diff(dLdy1,Dy);

dLy1dx=d_dLdy1_dx+d_dLdy1_dy*Dy+d_dLdy1_dy1*D2y; EulerL=simple(dLdy–dLy1dx);

SolL=dsolve(degEulerL,'x'); if length(SolL)~=1

error('Resheniyboleeodnogo, RESHENIY NET!')

end

dydx=diff(SolL,x); F1_y=subs(F1,{y,Dy},{SolL,dydx});

intF1=vpa(int(F1_y,x,x1,x2),14) SolLleft=vpa(subs(SolL,x,sym(x1)),14);

SolLright=vpa(subs(SolL,x,sym(x2)),14); LeftL=strcat(char(SolLleft), '=', char(sym(y1)));
```

```
RightL=strcat(char(SolLright), '=', char(sym(y2))); intF1J1=strcat(char(intF1), '=', char(sym(J1)));

ConL=solve(LeftL, RightL, intF1J1); C1=vpa(ConL.C1,14); C2=vpa(ConL.C2,14);

lambda=vpa(ConL.lambda,14); SolItog=vpa(eval(SolL),14);

fprintf('Экстремаль изопериметрической задачи: %s\n', char(SolItog))

yItog=subs(SolItog,x,xpl);   plot(xpl,yOsn,'g',xpl,yItog,'r')   title('\bfEXTREMALI')   legend('yFunkzionala',
'yZadachi', 0) xlabel('x') ylabel('y(x)')
```

В результате получаем:

Интегрант целевого функционала: F=Dy^2

Граничные условия: y(0)=0, y(1)=1

Изопериметрическое условие: Int(y,"x",0,1)=0

Экстремаль целевого функционала: x

intF1 = .83333333333333e–1*lambda+.50000000000000*C1+C2

Экстремаль изопериметрической задачи: 3.0000000000000*x^2–2.0000000000000*x

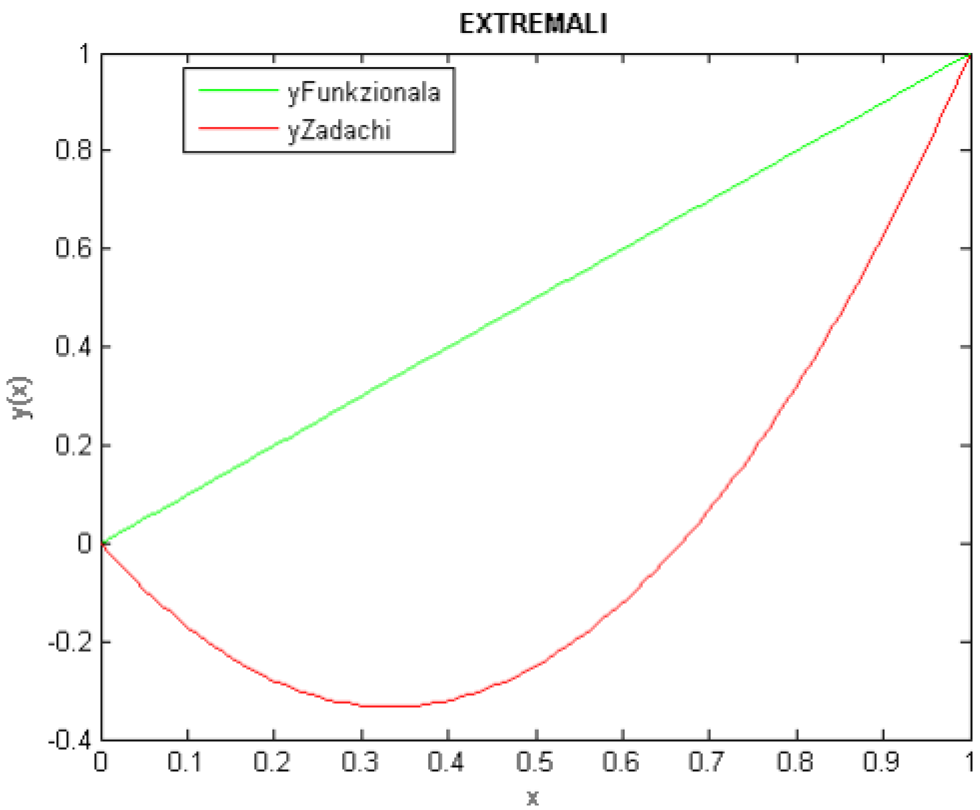

Рисунок №3 Определение экстремали целевого функционала

3.2Прямые методы вариационного исчисления

Понятие о прямых методах

Основным вопросом, возникающим в связи с любой вариационной проблемой, является вопрос о существовании решения. Классические методы вариационного исчисления приводят этот вопрос в первую очередь к вопросу о существовании решения дифференциального уравнения. При этом ищется решение не в окрестности какой-либо точки, а во всей области − при определѐнных краевых условиях (решение в целом). Доказательство существования таких решений теория дифференциальных уравнений даѐт лишь в редких случаях. Это обстоятельство заставило искать другие подходы к вариационным проблемам и привело к созданию так называемых прямых методов.[24]

Прямые методы вариационного исчисления оказались полезными и для теории дифференциальных уравнений. Действительно, если некоторое дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера для некоторого функционала и если каким-то приѐмом установлено, что этот функционал имеет экстремум в классе достаточное число раз дифференцируемых функций, то тем самым доказано, что исходное дифференциальное уравнение имеет решение в целом при рассматриваемых краевых условиях. Так как прямой метод состоит в построении последовательности функций, сходящейся к искомой функции, то с помощью прямого метода не только устанавливается существование решения в целом, но и даѐтся некоторый способ для приближѐнного построения этого решения.

Впервые широко и систематически идея перехода от краевой проблемы для дифференциального уравнения к вариационной краевой проблеме была использована Риманом. Его теоретико-функциональные исследования нуждались в доказательстве разрешимости проблемы Дирихле для любой плоской области, ограниченной одним контуром, то есть в доказательстве существования функции u(x, y) , имеющей внутри области непрерывные производные второго порядка по x и по y и удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.16(1}$$

а на границе этой области совпадающей с заданной непрерывной функцией. Уравнение Лапласа (2.1) является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала

$$D[u] = \iint_S \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} dxdy$$

который принимает только неотрицательные значения. В силу этого последнего обстоятельства Риман считал очевидным существование у этого функционала минимума, а значит, у уравнения (1.16(1) решения, удовлетворяющего упомянутому краевому условию. С этой аргументацией, восходящей к Гауссу и Томсону, Риман познакомился ещѐ в бытность студентом на лекциях Дирихле и назвал еѐ принципом Дирихле.

Однако умозаключение Римана подверглось критике со стороны Вейерштрасса. Эта критика сводится к следующему: из того, что функционал ограничен снизу, вытекает лишь, что он имеет конечную точную нижнюю грань; утверждать же, что эта грань достигается на функции рассматриваемого класса, то есть что эта нижняя грань есть минимум, вообще говоря, нельзя. Вейерштрасс привѐл пример неразрешимой вариационной задачи этого рода. Поэтому для спасения замечательных результатов, полученных Риманом с помощью принципа Дирихле, началась усиленная разработка других методов. Однако из критики Вейерштрасса, носящей общий характер, вовсе, не вытекало, что принцип Дирихле, который касается специального функционала, не может быть обоснован. Поэтому время от времени делались попытки такого обоснования. Существенный сдвиг в этом направлении принадлежит Гильберту, исследования которого были продолжены целой плеядой математиков. Эти исследования привели не только к обоснованию принципа Дирихле в несколько модифицированной форме, но и к созданию вообще прямых методов в вариационном исчислении. Большой вклад в разработку этих методов внесли советские математики Н.Н. Боголюбов, Н.М. Крылов, М.А. Лаврентьев и Л.А. Люстерник. Переходя к описанию основных этапов, из которых слагается прямой метод, примем для определѐнности, что речь идѐт о минимуме функционала J[C], где C пробегает некоторую совокупность M кривых линий. Чтобы задача имела смысл, необходимо предположить, что в совокупности M есть кривые, на которых функционал J[C] конечен, а также, что[13]

$$\inf_{C\in M} J[C] = \mu > -\infty .$$

В таком случае, по определению нижней границы, существует такая последовательность (Σ) кривых

$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$$

из M (минимизирующая последовательность), что

$$\lim_{n\to\infty} J[C_n] = \mu .$$

Первый вопрос, который здесь возникает, – это вопрос о существовании у последовательности (Σ) предельной кривой. Некоторые условия, при выполнении которых предельная кривая существует, установил впервые Гильберт.

Пусть предельная кривая (назовѐмеѐ С) существует и принадлежит M. Если окажется, что предельный переход

$$J[\overline{C}] = \lim_{n\to\infty} J[C_n]$$

законен, то

$$J[\overline{C}] = \mu \tag{1.17}$$

и, значит, кривая С даѐт абсолютный минимум.

Равенство (1.17) наверно имело бы место, если бы функционал J[C] был непрерывной функцией линии всюду в M или хотя бы на C , то есть если бы неравенство

$$| J[C] - J[\overline{C}] | < \varepsilon$$

выполнялось для всякой кривой C ∈M из некоторой зависящей от ε окрестности кривой C . Однако J[C], вообще говоря, не является непрерывной функцией линии. К счастью, для доказательства равенства (1.17), как впервые заметил Лебег, непрерывность функционала вовсе не необходима, а вполне достаточна полунепрерывность снизу.

В самом деле, пусть функционал J[C] полунепрерывен снизу и пусть (Σ) есть минимизирующая последовательность, а C – еѐ предельная кривая, принадлежащая совокупности M . Тогда, с одной стороны, по определению μ

$$\mu \le J[\overline{C}] \tag{1.18}$$

а с другой стороны, в силу полунепрерывности снизу функционала J[C]

$$J[C_n] \ge J[\overline{C}] - \varepsilon,$$

если C_n лежит в достаточно малой окрестности кривой C . А так как

$$\lim_{n\to\infty} J[C_n] = \mu,$$

то при любом ε′> 0

$$\mu \geq J[\overline{C}] - \varepsilon' \tag{1.18}$$

Сравнение (1.18) и (1.17) приводит к равенству

$$J[\overline{C}] = \mu,$$

которое и выражает, что кривая C доставляет функционалу J[C] минимум.

Таким образом, прямой метод состоит из:

1)построения минимизирующей последовательности,

2) доказательства существования у этой последовательности предельной кривой,

3) доказательства получены непрерывности функционала на предельной кривой.

3.3 Построение минимизирующих последовательностей. Метод Ритца

Одним из важнейших практических методов для построения минимизирующих последовательностей является метод, предложенный в 1908 году Вальтером Ритца. Состоит он в следующем. Вычисляется n -ое приближение к минимизируемой функции $x_0(t)$ ввиде

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t), \tag{1.19}$$

то есть значения функционала J (x(·)) рассматривается не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях (2.8) с постоянными коэффициентами, составленных из n первых функций некоторой выбранной последовательности функций

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t),\ldots$$

Последовательность функций должна удовлетворять следующему

Определение 2.1Пусть J – данный функционал и пусть элементы данной последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежат DJ . Будем говорить, что функционал минимизируется на линейной оболочке последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, если выполняются следующие условия:

1. существует такое линейное нормированное пространство S , что DJ $\subset$ S и последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в S ;

2. любая конечная линейная комбинация элементов последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит DJ ;

3. для каждого n$\in$N существует минимальный элемент n х сужения функционала J , обозначенного n J , то есть элемент $x_n \in Lin(\varphi_1, \varphi_n$, удовлетворяющий равенству

$$J_n[x_n] = \min_{x\in Lin(\varphi_1,\ldots\varphi_n)} J_n[x]. \tag{1.20}$$

Далее последовательно решаются задачи (1.20). На линейных комбинациях (1.19) функционал $J[x_n]$ превращается в функцию $\varphi(\alpha_1,\alpha_n)$ коэффициентов (α_1,α_n) Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция достигала

экстремума; следовательно(α_1,α_n) должны быть определены из условий стационарности, то есть из системы

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_i} = 0, \ i = 1,\ldots,n. \tag{1.21}$$

Получающаяся в результате последовательность функций x_1, x_2 сходится к минимуму по функционалу. Заканчивая процесс вычислений на некотором k -ом шаге, получают значение J $[k_x]$ *, приближённо равное глобальному минимуму (при этом сама функция x_kможет сильно отличаться от оптимальной).

Для оценки точности результатов на практике, вычислив $x_n(t)$и $x_{n+1}(t)$, сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка$[t_0, t_1]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно

x_n. Если же значения $x_{n+2}(t)$и $X_{n+k}(t)$, хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют $x_{n+2}(t)$и сравнивают значение с $X_{n+k=1}(t)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения $X_{n+k}(t)$ и $X_{n+k=1}(t)$, не совпадут в пределах заданной точности.

Заключение

В настоящее время вариационные методы являются одним из мощных средств анализа самых разнообразных задач. Наиболее интенсивно вариационные подходы использовались в задачах об упругом поведении конструкций, особенно в задачах оптимального проектирования. Интерес к этим задачам усилился в связи с быстрым развитием авиационной и космической техники, судостроения, где чрезвычайно важно решение проблемы снижения веса конструкции без ущерба для ее прочности и аэродинамических свойств.

Вариационный подход к решению задач об устойчивости, равновесии и колебаниях упругих конструкций позволил сформулировать ряд прикладных теорий, позволяющих с успехом осуществлять расчет самых разнообразных конструкций.

Задача об отыскании экстремума некоторого функционала сводится к решению дифференциального уравнения. Отметим, что некоторые задачи математической физики могут быть сведены к задачам об отыскании минимума некоторого функционала.

Для решения этих проблем в магистерской диссертационной работе были проанализированы цели и задачи в методах вариационных неравенств, основные методы решения. Также в работе были изучены основные понятия о методах решения вариационных неравенств, были определенны основные цели и задачи, которые рассмотрены в магистерской диссертационной работе.

Написан и разработан комплекс решения этих методов при помощи комплекса Matlab.

Список литературы

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

2. Андреева Е.А., Цирулиева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учеб. Пособие для университетов. М.: Высш. шк., 2006г.

3. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

4. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955.

5. БернштейнС.Н. Sur la nature analytique des solutions de certaines equations aux derives partielles du second ordre // Math. Ann. 1904.V.59. P. 20- 76.

6. Бернштейн С.Н. Об уравнениях вариационного исчисления // Успехи матем. наук. 1940. T.VIII. C. 32-74.

7. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т.3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

8. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.

9. БоголюбовН.Н. Sur quelquesmethodesnouvellesdans le Calcul des Variations // Ann. Math. PuraAppl. Ser. 4. 1930. V.7. P.243 - 272.

10. Боголюбов Н.Н. Новые методы в вариационном исчислении. Изб.труды в 3 томах. Т.1. Киев: Наукова думка, 1969.

11. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

12. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М: Наука, 1977.

13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

14. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

15. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

16. Глебский Ю.В. О характеристических свойствах решений регулярных и квазирегулярных задач вариационного исчисления // ДАН СССР. 1957. Т.16. № 6. С.910-912.

17. Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А. Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980.

18. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. М.–Л.: ОГИЗ, 1941.

19. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB. – СПб.: БХВ–Петербург, 2005.

20. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 66

21. Казимиров В.И. О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления // Успехи матем. наук. 1956. Т.XI. №3. С.125-129.

22. Керимов М.К. К теории разрывных вариационных задач с подвижными концами // ДАН СССР. 1961. Т.136. № 3.

23. Керимов М.К. О двумерных разрывных задачах вариационного исчисления // Тр. Матем. ин-та АН ГрузССР. 1951. Т.23. С.209-219.

24. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Достаточные условия существования разрывных решений для простейшего интеграла вариационного исчисления, I // Изв.вузов. Математика. 1967. № 11. С.21-30.

25. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Достаточные условия существования разрывных решений для простейшего интеграла вариационного исчисления, II // Изв.вузов. Математика. 1967. № 12. С.38-46.

26. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. О необходимых условиях экстремума вариационных задач в непараметрической форме на совокупности разрывных функций // Изв.вузов. Математика. 1970. №12. С.37-46.

27. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений в простейших полуопределенных задачах // Матем. заметки. 1970. Т.7. №.1. С.69-78.

28. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений для одного класса квазирегулярных вариационных задач в непараметрической форме // Изв.вузов. Математика. 1972. №2. С.54-62.

29. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Разрывные задачи вариационного исчисления со старшими производными // Изв.вузов. Математика. 1975. №10. С.23-32.

30. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Теоремы существования разрывных решений в пространственных вариационных задачах. II // Изв.вузов. Математика. 1977. №2. С.49-59.

31. Кошелев В.Н.. Морозов С.Ф. Теоремы существования разрывных решений в пространственных вариационных задачах // Изв.вузов. Математика. 1970. №5. С.47-52.

32. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление (Задачи и упражнения). М.: Наука, 1973.

33. Кротов В.Ф. О разрывных решениях в вариационных задачах // Изв. Вузов. Математика. 1961. № 2. С.75 - 89.

34. Кротов В.Ф. Разрывные решения вариационных задач // Изв.вузов Математика. 1960. № 5. С.86 - 98.

35. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.-Л.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938.

36. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

37. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. О вариационной задаче в квазилинейных эллиптических уравнениях со многими независимыми переменными // ДАН СССР. 1960. Т.135. №6 С.1330-1333.

38. Морозов С.Ф. Введение в теорию разрывных задач вариационного 67 исчисления. Н. Новгород: изд-во ННГУ, 1996.

39. Морозов С.Ф. Многомерные разрывные задачи вариационного исчисления. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999.

40. Морозов С.Ф. О необходимых условиях экстремума двумерных вариационных задач на совокупности разрывных функций // Изв.вузов. Математика. 1972. №1. С.55-63.

41. Морозов С.Ф. О разрывных решениях двумерных задач вариационного исчисления в непараметрической форме // Изв.вузов. Математика. 1969. №9. С.56-64.

42. Морозов С.Ф. О разрывных решениях одного класса квазирегулярных вариационных задач // Матем.заметки. 1974. Т.16. №2. С.305-315.

43. Морозов С.Ф. О существовании абсолютно непрерывного решения пространственной задачи вариационного исчисления для предельного показателя // Изв.вузов. Математика. 1994. №10. С.42-47.

44. Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений для одного класса квазирегулярных вариационных задач в непараметрической форме // Изв.вузов. Математика. 1972. №2. С.54-62.

45. Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений для одного класса многомерных квазирегулярных вариационных задач // Матем.сб. 1974. Т.93. №1. С.18-28.

46. Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений многомерных вариационных задач // Изв.вузов. Математика. 1975. №11. С.93-97.

47. Морозов С.Ф. Разрывные задачи вариационного исчисления. Н. Новгород: изд-во ННГУ, 1991.

48. Морозов С.Ф., Петров В.В. Модификация метода Н.И.Боголюбова для случая пространственных нерегулярных разрывных вариационных задач // Укр. мат. журн. 1982. Т.32. №1. С.50-58

49. Морозов С.Ф., Петров В.В. О разрывных решениях нерегулярных вариационных задач // Изв.вузов. Математика. 1979. № 11. С.40-47.

50. Морозов С.Ф., Петров В.В. Об одной n-мерной нерегулярной задачи вариационного исчисления // Изв.вузов. Математика. 1962. №2. С.54-62.

51. Морозов С.Ф., Петров В.В. Обобщение условий Дрездена для разрывных решений вариационных задач // Изв.вузов. Математика. 1976. №10. С.56-64.

52. Морозов С.Ф., Петров В.В. Применение метода Н.И. Боголюбова для решения нерегулярных задач вариационного исчисления // Укр. мат. журн. 1976. Т.28. №4. С.537-540.

53. Морозов С.Ф., Плотников В.И. О необходимых и достаточных условиях непрерывности и полунепрерывности функционалов вариационного исчисления // Метем.сб. 1962. Т 57(99). №3. С.265-280.