УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.23

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВЕСОВОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. Глушак

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрена весовая задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Установлено необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи, которое формулируется в терминах оценки нормы дробной степени резольвенты, входящего в уравнение оператора и ее производных. Введена в рассмотрение операторная функция Бесселя с отрицательным индексом и установлены свойства этой функции.

Пусть $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E с плотной в нем областью определения $D(A)$. При $k < 0$ рассмотрим начальную задачу для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} t^k u'(t) = u_1, \tag{2}$$

которую из-за наличия множителя перед производной во втором начальном условии будем называть весовой задачей Коши.

В работе [1] для уравнения (1) при значениях параметра $k > 0$ исследована разрешимость задачи Коши с условиями

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0 \tag{3}$$

и установлен критерий равномерной корректности этой задачи, который формулируется в терминах оценки нормы дробной степени резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A и ее производных, I — единичный оператор. Множество операторов A, для которых при $k > 0$ равномерно корректна задача Коши (1), (3) обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор, который называется операторной функцией Бесселя, будем обозначать $Y_k(t)$.

Случай $k = 0$ подробно рассмотрен в классических работах [2], [3]. В них установлено, что задача (1), (3) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором косинус-оператор-функции.

Корректная постановка начальных условий в зависимости от параметра $k \in \mathbb{R}$ для уравнения ЭПД (1), а также решение соответствующих начальных задач в случае, когда A — оператор Лапласа по пространственным переменным, приводится в гл. 1 из [4], а постановка начальных условий для абстрактного уравнения ЭПД рассмотрена в [5]. Отметим лишь, что при $k < 0$ задача Коши для уравнения ЭПД (1) с условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = u_1$$

не является корректной ввиду потери единственности (см. [6]).

В последнее время изучению дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами методами теории операторов посвящен ряд работ, см., например, [7], [8] и приводимый в них обзор публикаций. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1], [9]. В ней мы укажем критерий равномерной корректности весовой задачи Коши (1), (2) именно при $k < 0$ и всюду далее, если не указано другое, параметр k удовлетворяет этому условию.

Обозначим через $C^n(J, E_0)$ линейное пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in J \subset [0, \infty)$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t \geq 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, при каждом $t > 0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, так что $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, а также удовлетворяет уравнению (1).

Если $Z_k(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ — операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$, то в дальнейшем будем использовать обозначение $Z_k'(t)u_1 = (Z_k(t)u_1)'$.

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существует коммутирующая на $D(A)$ с оператором A операторная функция $Z_k(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ и числа $M \geq 1$, $\omega \geq 0$, такие, что для любого $u_1 \in D(A)$ функция $Z_k(t)u_1$ является ее единственным решением и при этом

$$\|Z_k(t)\| \leq M\ t^{1-k} \exp(\omega t), \tag{4}$$

$$\|Z_k'(t)u_1\| \leq M\ t^{-k} \exp(\omega t) \left(\|u_1\| + t\|Au_1\|\right). \tag{5}$$

Операторную функцию $Z_k(t)$ при $k < 0$ назовем операторной функцией Бесселя с отрицательным индексом задачи (1), (2), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через H_k. Кроме того, обозначим $H_0 = G_2$ и $Z_0(t) = tY_2(t)$.

Приведем доказательства некоторых свойств решений задачи (1), (2), которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна, т.е., $A \in H_k$ и $u_1 \in D(A)$. Тогда эта задача равномерно корректна и для $m < k \leq 0$, т.е., $A \in H_m$, при этом соответствующая операторная функция Бесселя с отрицательным индексом $Z_m(t)$ имеет вид*

$$Z_m(t)u_1 = \mu_{k,m}\ t^{k-m} \int\limits_0^1\ s(1-s^2)^{(k-m)/2-1}\ Z_k(ts)u_1\ ds, \tag{6}$$

$$\mu_{k,m} = \frac{2(1-k)}{(1-m)\ B(3/2-k/2, k/2-m/2)},$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера.

Доказательство. Проверим вначале, что определяемая равенством (6) функция $Z_m(t)u_1$ удовлетворяет задаче

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) = Au(t), \tag{7}$$

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} t^m u'(t) = u_1. \tag{8}$$

Для этого заметим, что если $u_k(t)$ является решением уравнения ЭПД (1), то непосредственной подстановкой проверяется, что функция $u_{2-k}(t) = t^{k-1}u_k(t)$ будет решением этого же уравнения, но с параметром $2 - k$ вместо k.

Введем в рассмотрение операторную функцию $W_{2-m}(t)=t^{m-1}Z_m(t)$ и, учитывая приведенное замечание, нам достаточно проверить, что функция $W_{2-m}(t)u_1$ удовлетворяет уравнению ЭПД с параметром $2-m$, если $W_{2-k}(t)u_1$ является его решением с параметром $2-k$. Действительно, проделывая элементарные преобразования, получим

$$W''_{2-m}(t)u_1+\frac{2-m}{t}W'_{2-m}(t)u_1-AW_{2-m}(t)u_1=\mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{4-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}W''_{2-k}(ts)u_1\,ds+$$

$$+\frac{\mu_{k,m}(2-m)}{t}\int\limits_0^1 s^{3-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}W'_{2-k}(ts)u_1\,ds-$$

$$-\mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{2-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}W''_{2-k}(ts)u_1\,ds-$$

$$-\frac{\mu_{k,m}(2-k)}{t}\int\limits_0^1 s^{1-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}\,W'_{2-k}(ts)u_1\,ds-$$

$$=-\mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{2-k}(1-s^2)^{(k-m)/2}W''_{2-k}(ts)u_1\,ds-$$

$$-\frac{\mu_{k,m}(2-k)}{t}\int\limits_0^1 s^{1-k}(1-s^2)^{(k-m)/2}\,W'_{2-k}(ts)u_1\,ds+$$

$$+\frac{\mu_{k,m}(k-m)}{t}\int\limits_0^1 s^{3-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}\,W'_{2-k}(ts)u_1\,ds=$$

$$=\mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{2-k}(1-s^2)^{(k-m)/2}\left(-AW_{2-k}(ts)+W''_{2-k}(ts)+\frac{2-k}{ts}W'_{2-k}(ts)\right)u_1\,ds=0,$$

следовательно, $Z_m(t)u_1$ удовлетворяет уравнению ЭПД (7).

Первое из начальных условий (8) очевидно. А для проверки второго после интегрирования по частям запишем

$$t^mZ'_m(t)u_1=\mu_{k,m}(k-m)t^{k-1}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{(k-m)/2-1}Z_k(ts)u_1\,ds+$$

$$+\mu_{k,m}\,t^k\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{(k-m)/2-1}Z'_k(ts)u_1\,ds=$$

$$=\mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{-k}(1-s^2)^{(k-m)/2}(ts)^kZ'_k(ts)u_1\,ds+\mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{2-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}(ts)^kZ'_k(ts)u_1\,ds,$$

поэтому

$$\lim_{t\to 0+} t^m Z'_m(t)u_1 = \mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{-k}(1-s^2)^{(k-m)/2}u_1\,ds + \mu_{k,m}\int\limits_0^1 s^{2-k}(1-s^2)^{(k-m)/2-1}u_1\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_{k,m}\left(B\left(\frac{1-k}{2}, \frac{k-m}{2}+1\right) + B\left(\frac{3-k}{2}, \frac{k-m}{2}\right)\right)u_1 = u_1.$$

Требуемые в определении 2 оценки

$$\|Z_m(t)\| \le M\ t^{1-m}\exp(\omega t), \tag{9}$$

$$\|Z'_m(t)u_1\| \le M\ t^{-m}\exp(\omega t)\left(\|u_1\| + t\|Au_1\|\right). \tag{10}$$

для $Z_m(t)$, очевидно, вытекают из (4) и (5) и определения операторной функции $Z_m(t)$ по формуле (6).

Доказательство единственности решения задачи (7), (8) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи (7), (8). Рассмотрим функцию двух переменных $w(t,s) = f\left(Z_m(s)\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right)$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \ge 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2} + \frac{m}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2} + \frac{m}{s}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}, \quad t, s > 0 \tag{11}$$

и условиям

$$w(0,s) = 0, \quad \lim_{t\to 0+}\left(t^m\ \frac{\partial w(t,s)}{\partial t}\right) = 0, \quad \lim_{s\to 0+}\left(s^m\ \frac{\partial w(t,s)}{\partial s}\right) = 0. \tag{12}$$

После замены $w(t,s) = s^{m+1}v(t,s)$ задача (11), (12) превратится в задачу

$$\frac{\partial^2 v(t,s)}{\partial t^2} + \frac{m}{t}\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t,s)}{\partial s^2} + \frac{2-m}{s}\frac{\partial v(t,s)}{\partial s}, \quad t, s > 0, \tag{13}$$

$$v(0,s) = 0, \quad \lim_{t\to 0+}\left(t^m\ \frac{\partial v(t,s)}{\partial t}\right) = 0, \quad \lim_{s\to 0+}\ \frac{\partial v(t,s)}{\partial s} = 0. \tag{14}$$

Подобно тому, как это было сделано в [10], интерпретируем $v(t,s)$ как обобщенную функцию умеренного роста и по переменной s применим преобразование Фурье-Бесселя

$$\hat{v}(t,\lambda) = \int\limits_0^\infty s^{2p+1}\ j_p(\lambda s)\ v(t,s)\ ds, \quad v(t,s) = \gamma_p\int\limits_0^\infty \lambda^{2p+1}\ j_p(\lambda s)\ \hat{v}(t,\lambda)\ d\lambda,$$

$$p = \frac{m-1}{2}, \quad \gamma_p = \frac{1}{2^{2p}\ \Gamma^2(p+1)}, \quad j_p(s) = \frac{2^p\ \Gamma(p+1)}{s^p}\ J_p(s),$$

где $J_p(\cdot)$ — функция Бесселя.

Из (13), (14) для образа $\hat{v}(t,\lambda)$ получим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(t,\lambda)}{\partial t^2} + \frac{m}{t}\frac{\partial \hat{v}(t,\lambda)}{\partial t} = -\lambda^2\ \hat{v}(t,\lambda), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$\hat v(0,\lambda)=0,\quad \lim_{t\to 0+}\left(t^m\ \frac{\partial \hat v(t,\lambda)}{\partial t}\right)=0. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$\hat v(t,\lambda)=t^{(1-m)/2}\left(d_1(\lambda)\ J_{(1-m)/2}(\lambda t)+d_2(\lambda)\ N_{(1-m)/2}(\lambda t)\right),$$

где $N_{-p}(\cdot)$ — функция Неймана.

Поскольку функция Неймана $N_{(1-m)/2}(\lambda t)$ при $t\to 0$ имеет порядок $t^{(m-1)/2}$, то из первого условия в (16) следует $d_2(\lambda)=0$. Функция Бесселя $J_{(1-m)/2}(\lambda t)$ при $t\to 0$ имеет порядок $t^{(1-m)/2}$, поэтому из второго условия в (16) вытекает $d_1(\lambda)=0$. Стало быть, $\hat v(t,\lambda)=v(t,s)=0$ для любого $s\geq 0$. В силу произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи (7), (8) установлена.

Таким образом, операторная функция $Z_m(t)$ удовлетворяет неравенствам (9), (10), а функция $Z_m(t)u_1$ является единственным решением весовой задачи Коши (7), (8). Следовательно, задача (7), (8) равномерно корректна, $Z_m(t)$ — ее операторная функция Бесселя с отрицательным индексом и $A\in H_m$. Теорема доказана.

Пусть $K_\nu(\cdot)$ — функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка ν, далее всегда $\nu=(1-k)/2$.

Теорема 2. *Если задача (1), (2) равномерно корректна и* $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega$, *то* λ^2 *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *и для любого* $x\in E$ *справедливо представление*

$$\lambda^{(k-1)/2}R(\lambda^2)x=\frac{2^{(k-1)/2}(1-k)}{\Gamma(3/2-k/2)}\int\limits_0^\infty K_\nu(\lambda t)t^{(k+1)/2}Z_k(t)x\ dt. \tag{17}$$

Доказательство. Заметим, что интеграл в правой части (17) можно рассматривать как K-преобразование (или преобразование Мейера) функции $t^{k/2}Z_k(t)x$, а сходимость этого интеграла вытекает из оценки (4) и асимптотического поведения функции $K_\nu(z)$ при $z\to 0$ и $z\to\infty$ (см. [11], с. 217).

Правую часть равенства (17) умноженную на $\lambda^{(1-k)/2}$ обозначим через $Q(\lambda)$ и проверим, что справедливы равенства

$$(\lambda^2 I-A)Q(\lambda)x=x,\quad x\in E,$$

$$Q(\lambda)(\lambda^2 I-A)x=x,\quad x\in D(A).$$

Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega$ и $x\in D(A)$. Тогда

$$(\lambda^2 I-A)Q(\lambda)x=\frac{\nu\lambda^{2+\nu}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)}\int\limits_0^\infty K_\nu(\lambda t)t^{\nu+1}Z_k(t)x\ dt-$$

$$-\frac{\nu\lambda^{\nu}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)}\int\limits_0^\infty K_\nu(\lambda t)t^{1-\nu}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{k}{t}\frac{d}{dt}\right)Z_k(t)x\ dt. \tag{18}$$

Учитывая экспоненциальный рост операторной функции Бесселя $Y_k(t)$, интегрированием по частям установим соотношение

$$\int_0^\infty t^{1-\nu} K_\nu(\lambda t)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{k}{t}\frac{d}{dt}\right) Z_k(t)x\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left(-\nu t^\nu K_\nu(\lambda t) - t^{1-\nu}\frac{d}{dt}K_\nu(\lambda t)\right) Z_k'(t)x\,dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{1-\nu}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{d}{dt}-\left(\frac{\nu}{t}\right)^2\right) K_\nu(\lambda t)Z_k(t)x\,dt -$$

$$-\lim_{t\to 0+}\left(\nu t^{-\nu}K_\nu(\lambda t)+\lambda t^{1-\nu}K_\nu'(\lambda t)\right)x. \qquad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает равенство

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = \frac{\lambda^\nu \nu}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)}\lim_{t\to 0+}\left(\nu t^{-\nu}K_\nu(\lambda t)+t^{1-\nu}\lambda K_\nu'(\lambda t)\right)x. \qquad (20)$$

Используя определение функции $K_\nu(\cdot)$, вычислим предел в правой части равенства (20) и получим равенство

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = x \quad x \in D(A).$$

Поскольку в определении равномерной корректности задачи (1), (2) входит требование коммутирования операторов A и $Z_k(\cdot)$, то равенство $Q(\lambda)(\lambda^2 I - A)x = x$, $x \in D(A)$ доказывается аналогично.

Из оценки (4) вытекает ограниченность оператора $Q(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Таким образом, при $x \in D(A)$ имеем $Q(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x$.

Если $x \in E$, то в силу плотности $D(A)$ в E возьмем последовательность $x_n \in D(A)$, такую, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда по доказанному при $n \to \infty$ будем иметь

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)(x_n - x) \to x - (\lambda^2 I - A)Q(\lambda),$$

и требуемое равенство $Q(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x$ для любого $x \in E$ вытекает из замкнутости оператора A. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и пусть $Z_k(t)$ — операторная функция Бесселя с отрицательным индексом для этой задачи. Тогда оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$ и для этой полугруппы справедливо представление*

$$T(t)x = \frac{1-k}{2^{2-k}\,\Gamma(3/2-k/2)\,t^{3/2-k/2}}\int_0^\infty s\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Z_k(s)x\,ds, \quad x \in E. \qquad (21)$$

Доказательство. Проверим, что резольвента $R(\mu)$ оператора A удовлетворяет условиям теоремы Хилле-Иосиды. Из равенства (17) следует, что при $\mu > \omega^2$

$$R^n(\mu)x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}R(\mu)x =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(1-k)2^{(k-1)/2}}{(n-1)!\,\Gamma(3/2-k/2)}\int_0^\infty \frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}(\mu^{1/4-k/4}K_\nu(\sqrt{\mu}t))t^{1-\nu}Z_k(t)x\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(1-k)2^{2-\nu-n}\nu}{(n-1)!\,\Gamma(\nu+1)} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z^\nu K_\nu(z)) t^{2n-2\nu-1} Z_k(t)x\; dt,$$

где $z = t\sqrt{\mu}$. Учитывая известную формулу

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z^\nu K_\nu(z)) = (-1)^{n-1} z^{\nu-n+1} K_{\nu-n+1}(z),$$

выведем оценку для $R^n(\mu)x$. Имеем

$$\|R^n(\mu)x\| \le \frac{\nu}{2^{n+\nu-2}(n-1)!\,\Gamma(\nu+1)\mu^{n-\nu}} \int\limits_0^\infty \xi^{n-\nu} K_{\nu-n+1}(\xi)\, \|Z_k(\xi/\sqrt{\mu})x\|\; d\xi.$$

Стоящий в правой части интеграл разобьем на два и каждый оценим, используя асимптотику функции $K_{\nu-n+1}(\xi)$ при $\xi \to 0$ и при $\xi \to \infty$, а также неравенство (4). После элементарных преобразований, учитывая асимптотическое поведение гамма-функции при больших значениях аргумента, получим

$$\|R^n(\mu)x\| \le \frac{M_1\|x\|}{2^n(n-1)!\;\mu^n} \int\limits_0^1 \xi^n \exp\left(\frac{\omega\xi}{\sqrt{\mu}}\right)\; d\xi\; +$$

$$+ \frac{M_1\|x\|}{2^n(n-1)!\;\mu^n} \int\limits_1^\infty \xi^{n-k/2} \exp\left(\frac{\omega\xi}{\sqrt{\mu}} - \xi\right)\; d\xi \le$$

$$\le \frac{M_1\|x\|}{2^n(n-1)!\;\mu^n} \int\limits_0^1 \exp\left(\frac{\omega\xi}{\sqrt{\mu}}\right)\; d\xi + \frac{M_1\|x\|}{2^n(n-1)!\;\mu^n} \int\limits_0^\infty \xi^{n-k/2} \exp\left(\frac{\omega\xi}{\sqrt{\mu}} - \xi\right)\; d\xi =$$

$$= \frac{M_1\|x\|}{2^n(n-1)!\;\mu^n} \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\omega} \exp\frac{\omega}{\sqrt{\mu}} - \frac{\sqrt{\mu}}{\omega} + \Gamma(n-k/2+1) \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}-\omega}\right)^{n-k/2+1} \right) \le$$

$$\le \frac{M_2\Gamma(n-k/2+1)\|x\|}{2^n(n-1)!\left(\sqrt{\mu}-\omega\right)^{n-k/2+1} \mu^{n/2+k/4-1/2}}. \tag{22}$$

С учетом предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty} (n^{k/2} B(n, k/2)) = \Gamma(k/2),$$

из (22) выводим

$$\|R^n(\mu)\| \le \frac{M_3(k) n^{2-k}}{2^n\left(\sqrt{\mu}-\omega\right)^{n-k/2+1}\; \mu^{n/2+k/4-1/2}} \le \frac{M(k)}{(\mu-\omega_1)^n}, \quad \mu > \omega_1 = \frac{9\omega^2}{8}, \quad M(k) > 0.$$

Следовательно, в силу теоремы Хилле-Иосиды, оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$.

Непосредственной проверкой, используя тот факт, что функция $Z_k(t)x$ удовлетворяет уравнению (1), можно убедиться в том, что правая часть равенства (21) является решением следующей задачи Коши

$$w'(t) = Aw(t), \quad w(0) = x, \quad x \in D(A).$$

Действительно,

$$AT(t)x = \frac{1-k}{2^{2-k}\ \Gamma(3/2-k/2)\ t^{3/2-k/2}} \int\limits_0^\infty s \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) AZ_k(s)x\ ds =$$

$$= \frac{1}{2^{2-k}\ \Gamma(3/2-k/2)\ t^{3/2-k/2}} \int\limits_0^\infty s^{2-k} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) AW_{2-k}(s)xds,$$

где $W_{2-k}(s) = (1-k)s^{k-1}Z_k(s)$.

Повторяя соответствующие выкладки теоремы 3 [1], получим равенства

$$T'(t)x = AT(t)x, \quad T(0)x = x.$$

Отсюда, в силу теоремы единственности для решения задачи (16), и следует представление (21).

Кроме того, также как и в [1] полугруппа $T(t)$ может быть продолжена в операторную функцию, аналитическую в некотором секторе

$$\Xi_\varphi = \{z : |\arg z| < \varphi, \ \ 0 < |z| < \infty\}, \quad 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

и для нее справедливо представление

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda)\ d\lambda,$$

где $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ — контур, состоящий из лучей $\lambda = \sigma + \rho\exp(-i\varphi)$, $0 \le \rho < \infty$ и $\lambda = \sigma + \rho\exp(i\varphi)$, $0 \le \rho < \infty$, $\sigma \ge \omega_0$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{M_0(k)}$. Теорема доказана.

В работе [12] установлена формула, связывающая решение задачи Коши (16) с решением задачи Дирихле для уравнения

$$v''(t) + \frac{m}{t}v'(t) = -Av(t), \quad t > 0. \tag{23}$$

Поэтому в силу теоремы 3 справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $v_0 \in D(A)$, $A \in H_k$ и $Z_k(t)$ — соответствующая операторная функция Бесселя с отрицательным индексом, причем в неравенстве (4) постоянная $\omega = 0$. Тогда при $m < 1$ функция*

$$v(t) = \frac{2t^{1-m}}{B(3/2-k/2, 1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty \frac{\tau Z_k(\tau)v_0\ d\tau}{(t^2+\tau^2)^{2-k/2-m/2}}$$

является единственным ограниченным решением уравнения (23), удовлетворяющим условию $v(0) = v_0$.

Множество операторов, являющихся генераторами аналитических C_0-полугрупп $T(t)$, обозначим через G. В работе [13] показано, что если $A \in G$, то при $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ для $\alpha > 0$ существует дробная степень резольвенты $R(\lambda)$, которая имеет вид

$$R^\alpha(\lambda)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t) T(t)x\ dt, \quad x \in E. \tag{24}$$

Докажем далее еще одно необходимое условие равномерной корректности весовой задачи Коши (1), (2).

Теорема 4. *Если задача (1), (2) равномерно корректна и* $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$, *то* λ^2 *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *оператора* A, *для дробной степени резольвенты справедливо представление*

$$R^{2-k/2}(\lambda^2)x = \frac{1-k}{\Gamma(3-k)\ \lambda} \int\limits_0^\infty t \exp(-\lambda t) Z_k(t)x\ dt, \quad x \in E. \tag{25}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{2-k/2} \left(\lambda^2 \right) \right) \right\| \le \frac{M\ \Gamma(n-k+3)}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{n-k+3}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{26}$$

Доказательство. Если задача (1), (2) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$, то в теореме 2 установлено, что λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Воспользовавшись равенствами (24) и (21), при действительном $\lambda > \omega$ запишем представление

$$R^\alpha(\lambda^2)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-\lambda^2 t) T(t)x\ dt =$$

$$= \frac{1-k}{\Gamma(\alpha)\Gamma((3-k)/2)2^{2-k}} \int\limits_0^\infty s Z_k(s)x \left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha+k/2-5/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t} - \lambda^2 t \right) dt \right) ds =$$

$$= \frac{(1-k)2^{(k+1)/2-\alpha}\lambda^{(3-k)/2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma((3-k)/2)} \int\limits_0^\infty s^{\alpha+(k-1)/2} K_{\alpha+(k-3)/2}(s\lambda) Z_k(s)x\ ds, \quad x \in E.$$

Следовательно, в силу формулы удвоения для гамма-функций получим

$$R^{2-k/2}(\lambda^2)x = \frac{(1-k)\sqrt{\pi}\ 2^{k-2}}{\Gamma(2-k/2)\Gamma(3/2-k/2)\lambda} \int\limits_0^\infty s \exp(-\lambda s) Z_k(s)x\ ds =$$

$$= \frac{1-k}{\Gamma(3-k)\lambda} \int\limits_0^\infty t \exp(-\lambda t) Z_k(t)x\ dt. \tag{27}$$

Равенство (27) в силу принципа аналитичности можно распространить на область аналитичности по λ левой и правой частей, т.е. на область $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$. Таким образом, представление (25) установлено.

Учитывая оценку (4) и формулу удвоения для гамма-функций, из (25) получим

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{2-k/2} \left(\lambda^2 \right) \right) \right\| \le \frac{1-k}{\Gamma(3-k)} \int\limits_0^\infty t^{n+1} \exp(-\mathrm{Re}\lambda\ t) \left\| Z_k(t) \right\|\ dt \le$$

$$\le \frac{M(1-k)}{\Gamma(3-k)} \int\limits_0^\infty t^{n-k+2} \exp(-\mathrm{Re}\lambda\ t + \omega t)\ dt = \frac{M(1-k)\ \Gamma(n-k+3)}{\Gamma(3-k)\ (\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{n-k+3}},$$

что и устанавливает справедливость неравенств вида (26). Теорема доказана.

Чтобы показать, что оценки (26) будут являться и достаточным условием равномерной корректности весовой задачи Коши (1), (2), воспользуемся доказанной в [1] теоремой 5.

Теорема 5. *Пусть $A \in G$ и выполнены оценки (26). Тогда задача Коши*

$$u''(t) + \frac{2-k}{t} u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{28}$$

$$u(0) = u_1, \quad u'(0) = 0 \tag{29}$$

равномерно корректна и операторная функция Бесселя $Y_{2-k}(t)$ определяется равенством

$$Y_{2-k}(t)u_1 = \lim_{n \to \infty} Y_{2-k,n}(t)u_1,$$

где

$$Y_{2-k,n}(t) = e^{-nt} \left(I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^{2m-k+4}}{m!\ \Gamma(m-k+4)}\ t^{m+1} F_{2-k}^{(m)}(n) \right),$$

$$F_{2-k}(\lambda) = \Gamma(3-k) \lambda R^{2-k/2}(\lambda^2).$$

При этом на элементах u_1 из области определения оператора A операторная функция Бесселя $Y_{2-k}(t)$ имеет вид

$$Y_{2-k}(t)u_1 = \frac{\Gamma(3-k)}{2\pi i\ t^{2-k}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \lambda R^{2-k/2}(\lambda^2) u_1\ d\lambda, \quad u_1 \in D(A), \quad \sigma > \omega,$$

и справедливы оценки

$$\|Y_{2-k}(t)\| \leq M \exp(\omega t), \tag{30}$$

$$\left\| Y'_{2-k}(t) u_1 \right\| \leq Mt\ \exp(\omega t) \left\| Au_1 \right\|. \tag{31}$$

Теоремы 4 и 5 позволяют установить следующий критерий.

Теорема 6 (критерий равномерной корректности весовой задачи Коши). *Пусть оператор A является генератором аналитической C_0-полугруппы. Для того чтобы задача (1), (2) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ число λ^2 с $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ принадлежало резольвентному множеству оператора A и для дробной степени резольвенты оператора A были выполнены оценки*

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{2-k/2} \left(\lambda^2 \right) \right) \right\| \leq \frac{M\ \Gamma(n-k+3)}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{n-k+3}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Доказательство. Необходимость сформулированных условий доказана в теореме 4 и нам осталось построить операторную функцию $Z_k(t)$, удовлетворяющую требованиям определения 2.

Покажем, что при выполнении условий теоремы искомой операторной функцией будет

$$Z_k(t) = \frac{1}{1-k} t^{1-k} Y_{2-k}(t). \tag{32}$$

Действительно, поскольку функция $Y_{2-k}(t)u_1$ является решением задачи (28), (29), то непосредственная проверка показывает, что $Z_k(t)u_1$ является решением задачи (1), (2).

Единственность же построенного решения задачи (1), (2) фактически доказана в теореме 1. Операторная функция $Z_k(t)$ коммутирует на $D(A)$ с оператором A, так как с ним коммутирует $Y_{2-k}(t)$ (лемма 4 [1]). Наконец, оценки (4), (5) вытекают из (30), (31).

Следовательно, операторная функция $Z_k(t)$ является операторной функцией Бесселя с отрицательным индексом для задачи (1), (2), а задача (1), (2) равномерно корректна. Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 6 одновременно равномерно корректны задачи (1), (2) и (28), (29), а также имеет место соотношение (32).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 6, тогда при $k \le 0$ справедливо равенство $H_k = G_{2-k}$.*

Отметим, что примеры операторов, принадлежащих G_{2-k}, а, стало быть, и H_k, приведены в [1]. В частности, если A — оператор умножения на число, то $A \in H_k$ и

$$Z_k(t) = \frac{t^{1-k}}{1-k}\,\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t^2A/4)^j}{j!\,\Gamma(j+3/2-k/2)} =$$

$$= \frac{t^{1-k}}{1-k}\,\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\left(\frac{t\sqrt{A}}{2}\right)^{k/2-1/2} I_{1/2-k/2}\left(t\sqrt{A}\right),$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя (см. [14], с. 139).

В работах [15], [16] установлены формулы, связывающие проинтегрированную косинус оператор-функцию с операторной функцией Бесселя $Y_{2-k}(t)$. Пусть $P_\nu(\cdot)$ — сферическая функция Лежандра (см. [14], с. 205). Учитывая соотношение (32), получим следующие представления для операторной функцией Бесселя с отрицательным индексом $Z_k(t)$.

Следствие 3. *Пусть $\alpha < 0$ и оператор A является генератором $1-\alpha$ раз проинтегрированной косинус оператор-функции $C_{1-\alpha}(t)$. Тогда $A \in H_{2\alpha}$, при этом соответствующая операторная функция Бесселя с отрицательным индексом $Z_{2\alpha}(t)$ имеет вид*

$$Z_{2\alpha}(t) = \frac{2^{1-\alpha}\Gamma(3/2-\alpha)}{\sqrt{\pi}(1-2\alpha)t^{\alpha}}\left(C_{1-\alpha}(t) - \int\limits_0^1 P'_{-\alpha}(\tau)C_{1-\alpha}(t\tau)\,d\tau\right).$$

Если оператор A является генератором $(-\alpha)$ раз проинтегрированной косинус оператор-функции $C_{-\alpha}(t)$, то

$$Z_{2\alpha}(t) = \frac{2^{-\alpha}\Gamma(1/2-\alpha)t^{1-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 P_{-\alpha}(\tau)C_{-\alpha}(t\tau)\,d\tau.$$

В заключение заметим, что в настоящей работе рассмотрен случай комплексного банахова пространства E. Возможность комплексификации вещественного банахова пространства E устанавливается методами работы [17].

Список литературы

[1] *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 52. №1. С. 41 – 59.

[2] *Fattorini H.O.* Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. 1969. V. 6. P. 50 – 70.

[3] *Sova M.* Cosine operator functions // Rozpr. mat. 1966. № 49. P. 1 – 47.

[4] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. НГУ. Новосибирск, 1973.

[5] *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Матем. 1986. №6. С. 55 – 56.

[6] *Bresters D.W.* On the Euler-Poisson-Darboux equation // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4, № 1. P. 31 – 41.

[7] *Баскаков А.Г., Кабанцова Л.Ю., Коструб И.Д., Смагина Т.И.* Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. №1. С. 10 – 19.

[8] *Баскаков А.Г., Кацаран Т.К., Смагина Т.И.* Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Изв. вузов. Матем. 2017. №10. С. 38 – 49.

[9] *Глушак А.В.* Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя-Струве // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. №7. С. 891 – 905.

[10] *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. 1955. Т. 36, №2. С. 299 – 310.

[11] *Земанян А.Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1974.

[12] *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 4. С. 433 – 437.

[13] *Fattorini H.O.* A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions // Pacific J. Math. 1983. V.109, № 2. P. 335 – 347.

[14] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз. 1963.

[15] *Глушак А.В.* О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, №5. С. 583 – 589.

[16] *Глушак А.В.* Задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с генератором проинтегрированной косинус-оператор-функции // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-матем. науки. 2007. №6(37), вып. 13. С. 3 – 8.

[17] *Баскаков А.Г., Загорский А.С.* К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 1. С. 17 – 31.

Автореферат

УДК 517.983 Глушак А.В. **Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу** // Дифференц. уравнения.

В банаховом пространстве для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при $k < 0$ рассмотрена весовая задача Коши

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0,$$

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t \to 0+} t^k u'(t) = u_1.$$

Установлено необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи, которое формулируется в терминах оценки нормы резольвенты дробной степени резольвенты и ее производных. Введена в рассмотрение операторная функция Бесселя с отрицательным индексом — разрешающий оператор рассматриваемой задачи, и установлен ряд свойств этой функции.

Библиогр. 17 назв.