Известия вузов. Математика
2018, № 7, с. 3–15

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. ГЛУШАК

ОДНОЗНАЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕЖАНДРА

Аннотация. Для нагруженного абстрактного уравнения Лежандра найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши и граничной задачи управления. Рассмотрена также нелокальная задача, содержащая дробный интеграл от функции по функции.

Ключевые слова: абстрактное уравнение Лежандра, задача Коши, однозначная разрешимость, нелокальное условие, дробный интеграл от функции по функции.

УДК: 517.983

Исследование ряда физических процессов опирается на решение уравнений, содержащих оператор Лапласа, которые путем разделения переменных в системах криволинейных координат приводят к дифференциальным уравнениям, содержащим сингулярность. При наличии определенной симметрии эти уравнения превращаются в уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) и Лежандра.

Начальные задачи для классического и абстрактного уравнения ЭПД были исследованы в ряде работ, а результаты этих исследований приведены в ([1], гл. 1). Дальнейшие результаты в этом направлении были получены в работах автора [2], [3].

В данной работе рассмотрим постановку дополнительных условий и разрешимость соответствующих задач еще для одного абстрактного сингулярного уравнения — уравнения Лежандра.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k > 0$ рассмотрим уравнение Лежандра

$$L_k u(t) \equiv u''(t) + k \operatorname{cth} t \; u'(t) + (k/2)^2 u(t) = Au(t), \quad t > 0. \tag{1}$$

Дифференциальный оператор L_k в левой части уравнения (1) возникает при решении уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения ([4], с. 138). Если A — оператор умножения на скаляр, то уравнению (1) при $k = 2$ удовлетворяют сферические функции, рассматриваемые в ([5], с. 53). Отметим также работы [6]–[11], в которых изучались уравнения в частных производных, содержащие сингулярный оператор рассматриваемого типа.

Как следует из результатов работы [12], корректная постановка начальных условий для абстрактного уравнения Лежандра (1) состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \tag{2}$$

Поступила 15.04.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197 А-2016.

при этом, если $k \geq 1$, то начальное условие $u'(0) = 0$ снимается, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t = 0$.

Задача (1), (2) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A — генератор косинус-оператор-функции (КОФ) $C(t)$ и этот факт будем записывать в виде $A \in G_0$ (терминологию см. в [13], [14]).

В работе [12] приведены условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (2). Множество операторов A, с которыми задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а разрешающий оператор этой задачи — через $P_k(t)$ и назовем операторной функцией Лежандра (ОФЛ).

Введенная в [12] ОФЛ $P_k(t)$ была использована автором в [15] при установлении критерия стабилизации решения задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка. Она также может быть использована и при решении весовой задачи Коши для уравнения Лежандра. Если $0 < k < 1$, то корректна более общая чем в (2) постановка начальных условий. Рассмотрим начальные условия вида

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right)^k u'(t) = u_1. \tag{3}$$

При $u_0, u_1 \in D(A)$ и $A \in G_k \subset G_{2-k}$ единственное решение задачи Коши (1), (3) имеет вид [12]

$$u(t) = P_k(t)u_0 + \frac{1}{1-k}\left(\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right)^{1-k} P_{2-k}(t)u_1.$$

Заметим, что если $A \in G_k$ и $k \geq 1$, то задача (1), (3) корректной не является. В последующих разделах работы для нагруженного уравнения Лежандра исследуются другие постановки дополнительных условий, позволяющие установить однозначную разрешимость соответствующих задач.

1. Задача Коши для слабо нагруженного уравнения Лежандра. Рассмотрим уравнение

$$u''(t) + k \operatorname{cth} t \left(u'(t) - \frac{\operatorname{ch}^{2-k}(t/2)}{\operatorname{ch} t} u'(0)\right) + \frac{k^2}{4} u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

которое, в отличие от уравнения (1), содержит значение производной неизвестной функции в точке $t = 0$. Уравнение (4) будем называть слабо нагруженным уравнением Лежандра (терминологию см. во введениях к монографиям [16], [17]). Растущий интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется расширяющимся объемом их приложений и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс функционально-дифференциальных уравнений со своими специфическими задачами. Обзор публикаций по нагруженным дифференциальным уравнениям также можно найти в [16], [17].

Важно отметить, что наличие в уравнении (4) заданной при $t = 0$ нагрузки меняет постановку начальной задачи. В отличие от весовой задачи (1), (3) при $k > 0$ установим корректность задачи Коши

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{5}$$

для слабо нагруженного уравнения (4) и укажем явный вид разрешающего оператора.

Всюду в дальнейшем будем предполагать $g(t) = \operatorname{ch} t$. Рассмотрим дробный интеграл от функции $f(t)$ по функции $g(t) = \operatorname{ch} t$ ([18], с. 248)

$$I_g^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s)^{\alpha-1} \operatorname{sh} s \; f(s) \; ds.$$

Пусть также $\mu_k = \frac{2^{k/2}\Gamma(k/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(k/2)}$, а для компактности будем использовать запись $P'_k(t)u_0 = (P_k(t)u_0)'$.

Теорема 1 ([12]). *Пусть оператор A является генератором КОФ $C(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда задача (1), (2) равномерно корректна, т. е. $A \in G_k$, и соответствующая ОФЛ представима в виде*

$$P_k(t)u_0 = \mu_k \operatorname{sh}^{1-k} t \int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s)^{k/2-1} C(s)u_0\ ds = \mu_k\ \Gamma(k/2)\ \operatorname{sh}^{1-k} t\, I_g^{k/2}\left[\frac{C(t)}{\operatorname{sh} t}\right] u_0, \quad (6)$$

при этом

$$P'_k(t)u_0 = \frac{\operatorname{sh} t}{k+1}\ P_{k+2}(t)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right)u_0. \quad (7)$$

Согласно теореме 1, если $u_1 = 0$, то определяемая равенством (6) функция $u(t) = P_k(t)u_0$ является единственным решением задачи Коши (4), (5).

В частном случае, когда оператор $A = (\delta+1/2)^2$, $\delta \in \mathbb{R}$, является оператором умножения на число, ОФЛ $P_k(t)$ выражается через присоединенную функцию Лежандра первого рода $P_\delta^\beta(\cdot)$ ([19], с. 661)

$$P_k(t) = \Gamma(1-\beta)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} t\right)^\beta P_\delta^\beta(\operatorname{ch} t), \quad \beta = \frac{1-k}{2}.$$

В дальнейшем понадобятся следующие равенства [12], которые были использованы при доказательстве теоремы 1:

$$L_k\left(\operatorname{sh}^{1-k} t\ u(t)\right) = \operatorname{sh}^{1-k} t\ L_{2-k}u(t), \quad (8)$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s)^{\alpha-1}\operatorname{sh} s\ u(s)\,ds = I_g^\alpha u(t), \quad \alpha > 0, \quad (9)$$

— это определение отрицательной дробной степени оператора весового дифференцирования, которое, учитывая связь с дробным интегралом по функции $g(t) = \operatorname{ch} t$, можно распространить ([18], с. 248) на все $\alpha \in \mathbb{R}$; если $u(0) = 0$, то

$$L_{k+2\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^\alpha u(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^\alpha L_k u(t), \quad (10)$$

заметим, что при $\alpha \in \mathbb{N}$ условие $u(0) = 0$ не накладывается.

Отметим, что равенство (10) означает, что и к рассматриваемым в данной статье задачам примени́м метод операторов преобразования, который используется в ([1], гл. 2) и является основным в работах [7], [11].

Из (8)–(10) вытекает

$$L_k\left(\operatorname{sh}^{1-k} t\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{-k/2}\frac{u(t)}{\operatorname{sh} t}\right) = \operatorname{sh}^{1-k} t\ L_{2-k}\left(\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{-k/2}\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\int_0^t u(\tau)\ d\tau\right) =$$
$$= \operatorname{sh}^{1-k} t\ L_{2-k}\left(\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}\int_0^t u(\tau)\ d\tau\right) = \operatorname{sh}^{1-k} t\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t u(\tau)\,d\tau =$$
$$= \operatorname{sh}^{1-k} t\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}\left(\int_0^t u''(\tau)\,d\tau + u'(0)\right) =$$
$$= \operatorname{sh}^{1-k} t\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{-k/2}\frac{u''(t)}{\operatorname{sh} t} + \operatorname{sh}^{1-k} t\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}u'(0). \quad (11)$$

Вычислим далее входящее в (11) выражение $\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}u'(0)$. Если $0<k<2$, то в силу (9) получим

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}u'(0)=\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{-k/2}u'(0)=$$
$$=\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^t(\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} s)^{k/2-1}\operatorname{sh} s\ u'(0)\,ds\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k/2+1)\ \operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\left((\operatorname{ch} t-1)^{k/2}\right)u'(0)=\frac{1}{\Gamma(k/2)}(\operatorname{ch} t-1)^{k/2-1}u'(0).$$

Если $k=2$, то $\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}u'(0)=u'(0)$, наконец, если $k>2$, то в силу (9)

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1-k/2}u'(0)=\frac{1}{\Gamma(k/2)}(\operatorname{ch} t-1)^{k/2-1}u'(0).$$

Таким образом, (11) можно переписать в виде

$$L_k\left(\operatorname{sh}^{1-k} t\ I_g^{k/2}\left[\frac{u(t)}{\operatorname{sh} t}\right]\right)=\operatorname{sh}^{1-k} t\ I_g^{k/2}\left[\frac{u''(t)}{\operatorname{sh} t}\right]+\frac{\operatorname{sh}^{1-k} t}{\Gamma(k/2)}(\operatorname{ch} t-1)^{k/2-1}u'(0). \qquad (12)$$

Отметим, что равенство (12), записанное для функции $u(t)=C(t)u_0$, $u''(t)=AC(t)u_0$, $u'(0)=0$, и было использовано при доказательстве теоремы 1. Как увидим в дальнейшем, это же равенство определяет множитель при нагрузке $u'(0)$ в уравнении (4).

Далее рассмотрим задачу Коши (4), (5) в случае, когда $u_0=0$. Пусть $\nu_k=k2^{k/2-1}$. Введем синус-оператор-функцию (СОФ) $S(t)=\int\limits_0^t C(s)\,ds$.

Теорема 2. *Если $u_0=0$, $u_1\in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t)$, то функция $u(t)=Q_k(t)u_1$, где*

$$Q_k(t)u_1=\nu_k\operatorname{sh}^{1-k} t\int_0^t(\operatorname{ch} t-\operatorname{ch}\tau)^{k/2-1}S(\tau)u_1\,d\tau=\nu_k\,\Gamma(k/2)\ \operatorname{sh}^{1-k} t\,I_g^{k/2}\left[\frac{S(t)}{\operatorname{sh} t}\right]u_1 \qquad (13)$$

является решением задачи (4), (5), *при этом*

$$Q_k'(t)u_1=\frac{\operatorname{sh} t}{k+2}Q_{k+2}(t)\left(A-\frac{k^2}{4}I\right)u_1+\frac{u_1}{\operatorname{ch}^k(t/2)}. \qquad (14)$$

Доказательство. Проверим, что функция $Q_k(t)u_1$ удовлетворяет уравнению (4). Для этого в (11) подставим функцию $u(t)=S(t)u_1$, $u''(t)=AS(t)u_1$, $u'(0)=u_1$. После элементарных преобразований получим

$$L_kQ_k(t)u_1=L_k\left(\nu_k\ \Gamma(k/2)\ \operatorname{sh}^{1-k} t\ I_g^{k/2}\left[\frac{S(t)}{\operatorname{sh} t}\right]u_1\right)=$$
$$=\nu_k\,\Gamma(k/2)\left(\operatorname{sh}^{1-k} t\,I_g^{k/2}\left[\frac{AS(t)}{\operatorname{sh} t}\right]u_1+\frac{\operatorname{sh}^{1-k} t}{\Gamma(k/2)}(\operatorname{ch} t-1)^{k/2-1}u_1\right)=$$
$$=AQ_k(t)u_1+\frac{k\ 2^k\ (2\operatorname{sh}^2(t/2))^{k/2-1}}{\operatorname{sh} t\big(2\operatorname{sh}(t/2)\ \operatorname{ch}(t/2)\big)^{k-2}}u_1=AQ_k(t)u_1+k\operatorname{cth} t\,\frac{\operatorname{ch}^{2-k}(t/2)}{\operatorname{ch} t}u_1$$

и, следовательно, функция $Q_k(t)u_1$ удовлетворяет уравнению (4).

Убедимся, что эта функция удовлетворяет начальным условиям (5) при $u_0 = 0$. Поскольку при малых t имеет место неравенство

$$\|S(t)\| \le M \operatorname{sh} t,$$

то, учитывая (13), при $t \to 0$ получаем

$$\|Q_k(t)\| \le M\nu_k\ \operatorname{sh}^{1-k} t \int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\tau)^{k/2-1} \operatorname{sh}\tau\, d\tau = M\nu_k\ \operatorname{sh}^{1-k} t \int_1^{\operatorname{ch} t} (\operatorname{ch} t - s)^{k/2-1}\, ds =$$
$$= M\, 2^k\ \operatorname{sh}^{1-k} t\, (\operatorname{ch} t - 1)^{k/2} = M\, 2^{3k/2}\ \operatorname{sh}^{1-k} t\ \operatorname{sh}^k (t/2) \le M_1 t \to 0,$$

поэтому функция $Q_k(t)u_1$ удовлетворяет первому условию из (5).

Чтобы проверить, что функция $Q_k(t)u_1$ удовлетворяет и второму условию из (5), выведем формулу (14) для ее производной. С этой целью перепишем (4) в виде

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^k t}(\operatorname{sh}^k t\ u'(t))' + \frac{k^2}{4}u(t) = Au(t) + \frac{k\ \operatorname{ch}^{2-k}(t/2)}{\operatorname{sh} t}u'(0).$$

Подставим в это уравнение функцию $Q_k(t)u_1$ и после умножения на $\operatorname{sh}^k t$ проинтегрируем:

$$\operatorname{sh}^k t\, Q_k'(t)u_1 = \int_0^t \operatorname{sh}^k s \left(A - \frac{k^2}{4}I\right) Q_k(t)u_1\, ds + k\int_0^t \operatorname{sh}^{k-1} s\ \operatorname{ch}^{2-k}(s/2)\, ds\, u_1 =$$
$$= \int_0^t \operatorname{sh}^k s \left(A - \frac{k^2}{4}I\right) Q_k(t)u_1\, ds + k2^{k-1}\int_0^t \operatorname{sh}^{k-1}(s/2)\ \operatorname{ch}(s/2)\, ds\, u_1 =$$
$$= \int_0^t \operatorname{sh}^k s \left(A - \frac{k^2}{4}I\right) Q_k(t)u_1\, ds + 2^k\ \operatorname{sh}^k(t/2)\, u_1.$$

Учитывая (13) и меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\operatorname{sh}^k t\, Q_k'(t)u_1 = \nu_k \int_0^t \operatorname{sh}\tau \int_0^\tau (\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} y)^{k/2-1} S(y)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right) u_1\, dy\, d\tau + 2^k\ \operatorname{sh}^k(t/2)\, u_1 =$$
$$= \nu_k \int_0^t S(y)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right) u_1 \int_y^t \operatorname{sh}\tau\, (\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} y)^{k/2-1} d\tau\, dy + 2^k\ \operatorname{sh}^k(t/2)\, u_1 =$$
$$= \frac{2\nu_k}{k}\int_0^t (\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} y)^{k/2} S(y)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right) u_1\, dy + 2^k\ \operatorname{sh}^k(t/2)\, u_1 =$$
$$= \frac{2\nu_k}{k\nu_{k+2}}\ \operatorname{sh}^{k+1} t\, Q_{k+2}(t)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right) u_1 + 2^k\ \operatorname{sh}^k(t/2)\, u_1.$$

Поэтому производная функции $Q_k(t)u_1$ имеет вид (14), а функция $Q_k(t)u_1$ удовлетворяет и второму условию из (5). □

Теорема 3. *Пусть $u_0, u_1 \in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t)$. Тогда функция $u(t) = P_k(t)u_0 + Q_k(t)u_1$ является единственным решением задачи Коши (4), (5).*

Доказательство. Тот факт, что функция $u(t) = P_k(t)u_0 + Q_k(t)u_1$ является решением задачи (4), (5), установлен в теоремах 1 и 2. Доказательство единственности решения задачи (4), (5) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи (4), (5). Тогда функция $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет уравнению (4) и условиям (5). В силу теоремы 1 $v(t) \equiv 0$, тем самым единственность решения, а вместе с нею и теорема доказаны. □

Как установлено в [12], при $u_0 \in E$ равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$,

$$\lim_{k \to 0} P_k(t) u_0 = C(t) u_0.$$

Аналогично для $u_1 \in E$ устанавливается равенство $\lim\limits_{k \to 0} Q_k(t) u_1 = S(t) u_1$, и следовательно, происходит "стыковка" полученного в теореме 3 решения с известным решением задачи Коши для абстрактного волнового уравнения

$$\lim_{k \to 0} \big(P_k(t) u_0 + Q_k(t) u_1 \big) = C(t) u_0 + S(t) u_1.$$

2. Задача граничного управления для слабо нагруженного уравнения Лежандра. Будем искать решение $u(t) \in C^2([0,1], E) \cap C((0,1], D(A))$ уравнения (4), удовлетворяющее двум финальным условиям, заданным для удобства в точке $t = 1$

$$u(1) = u_2, \quad u'(1) = u_3. \tag{15}$$

Как следует из теоремы 3, для обоснования разрешимости задачи (4), (15) достаточно определить неизвестные начальные элементы u_0, u_1 в условиях (5) по финальным условиям (15). Применяя условия (15) к функции $u(t) = P_k(t) u_0 + Q_k(t) u_1$ и используя равенства (6), (7), (13), (14), для нахождения начальных элементов u_0, u_1 получим систему

$$P_k(1) u_0 + Q_k(1) u_1 = u_2, \tag{16}$$

$$\frac{\operatorname{sh} 1}{k+1} P_{k+2}(1) \left(A - \frac{k^2}{4} I \right) u_0 + \frac{\operatorname{sh} 1}{k+2} Q_{k+2}(1) \left(A - \frac{k^2}{4} I \right) u_1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^k 1/2} u_1 = u_3. \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) удобно записать в виде матричного уравнения

$$Bv = w, \quad B : D(A) \times D(A) \longrightarrow E \times E, \tag{18}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k(1) & Q_k(1) \\ \frac{\operatorname{sh} 1}{k+1} P_{k+2}(1) \big(A - \frac{k^2}{4} I \big) & \frac{\operatorname{sh} 1}{k+2} Q_{k+2}(1) \big(A - \frac{k^2}{4} I \big) + \frac{1}{\operatorname{ch}^k 1/2} I \end{pmatrix}, \tag{19}$$

при этом все операторы B_1, B_2, B_3, B_4 коммутируют на $D(A)$.

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (4), (15) сводится к задаче о существовании у операторной матрицы $B : D(A) \times D(A) \to E \times E$, заданной соотношением (19), обратной операторной матрицы, определенной на некотором подмножестве из $E \times E$. Как и в скалярном случае важную роль при этом играет определитель операторной матрицы B, который обозначим через $\Delta = B_1 B_4 - B_2 B_3$.

Пусть $x \in D(A)$, учитывая (6) и (13), после элементарных преобразований получим

$$\Delta x = P_k(1) \left(\frac{\operatorname{sh} 1}{k+2} Q_{k+2}(1) \left(A - \frac{k^2}{4} I \right) x + \frac{1}{\operatorname{ch}^k 1/2} x \right) - \frac{\operatorname{sh} 1}{k+1} Q_k(1) P_{k+2}(1) \left(A - \frac{k^2}{4} I \right) x =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}^k 1} P_k(1) \int_0^1 \operatorname{sh}^k s \left(A - \frac{k^2}{4} I \right) Q_k(s) x \, ds + \frac{1}{\operatorname{ch}^k 1/2} P_k(1) x -$$

$$- \frac{1}{\operatorname{sh}^k 1} Q_k(1) \int_0^1 \operatorname{sh}^k s \left(A - \frac{k^2}{4} I \right) P_k(s) x \, ds =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}^k 1} P_k(1) \int_0^1 \operatorname{sh}^k s \left(Q_k''(s) + k \operatorname{cth} s \, Q_k'(s) - k \frac{\operatorname{ch}^{2-k}(s/2)}{\operatorname{sh} s} \right) x + \frac{1}{\operatorname{ch}^k 1/2} P_k(1) x -$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sh}^k 1}\, Q_k(1)\int_0^1 \operatorname{sh}^k s\Big(P_k''(s)+k\operatorname{cth} s\, P_k'(s)\Big)x =$$

$$= P_k(1)Q_k'(1)x - \frac{k}{\operatorname{sh}^k 1}\, P_k(1)x\int_0^1 \operatorname{sh}^{k-1} s\ \operatorname{ch}^{2-k}(s/2)\, ds + \frac{1}{\operatorname{ch}^k 1/2} P_k(1)x - Q_k(1)P_k'(1)x =$$

$$= P_k(1)Q_k'(1)x - Q_k(1)P_k'(1)x. \quad (20)$$

Далее введем

$$W_k(t)x = \begin{vmatrix} P_k(t) & Q_k(t) \\ P_k'(t) & Q_k'(t)\end{vmatrix} x = P_k(t)Q_k'(t)x - P_k'(t)Q_k(t)x$$

— операторный определитель Вронского, построенный по операторным функциям $P_k(t)$ и $Q_k(t)$.

Таким образом, в силу (20) вопрос о существовании оператора, обратного $\Delta = B_1B_4 - B_2B_3$, сводится к существованию оператора, обратного оператору определителя Вронского $W_k(1)$.

Лемма. *Пусть $k > 0$, $x \in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t)$. Тогда операторный определитель Вронского, построенный по определяемым соответственно равенствами* (6), (13) *операторным функциям $P_k(t)$ и $Q_k(t)$, равен*

$$W_k(t)x = \frac{k}{\operatorname{sh}^k t}\int_0^t \frac{\operatorname{sh}^{k-1}\tau}{\operatorname{ch}^{k-2}\tau/2} P_k(\tau)x\ d\tau. \quad (21)$$

Доказательство. Покажем, что функция $W_k(t)x$ удовлетворяет уравнению

$$W_k'(t)x + k\operatorname{cth} t\, W_k(t)x = \frac{k\operatorname{ch}^{2-k} t/2}{\operatorname{sh} t}\, P_k(t)x \quad (22)$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to 0} W_k(t)x = x. \quad (23)$$

Действительно,

$$W_k'(t)x = P_k'(t)Q_k'(t)x + P_k(t)Q_k''(t)x - P_k'(t)Q_k'(t)x - P_k''(t)Q_k(t)x =$$

$$= P_k(t)\left(Q_k''(t) + k\operatorname{cth} t\, Q_k'(t) - \frac{k\operatorname{ch}^{2-k} t/2}{\operatorname{sh} t} I + \frac{k^2}{4}Q_k(t)\right)x -$$

$$- P_k(t)\left(k\operatorname{cth} t\, Q_k'(t) - \frac{k\operatorname{ch}^{2-k} t/2}{\operatorname{sh} t} I + \frac{k^2}{4}Q_k(t)\right)x -$$

$$- Q_k(t)\left(P_k''(t) + k\operatorname{cth} t\ P_k'(t) + \frac{k^2}{4}P_k(t)\right)x + Q_k(t)\left(k\operatorname{cth} t\ P_k'(t) + \frac{k^2}{4}P_k(t)\right)x =$$

$$= P_k(t)AQ_k(t)x - Q_k(t)AP_k(t)x - k\operatorname{cth} t\, W_k(t)x + \frac{k\operatorname{ch}^{2-k} t/2}{\operatorname{sh} t}\, P_k(t)x =$$

$$= -k\operatorname{cth} t\, W_k(t)x + \frac{k\operatorname{ch}^{2-k} t/2}{\operatorname{sh} t}\, P_k(t)x,$$

поэтому функция $W_k(t)x$ удовлетворяет уравнению (22).

Поскольку $P_k(0)x = Q_k'(0)x = x$, $P_k'(0)x = Q_k(0)x = 0$, то функция $W_k(t)x$ удовлетворяет и начальному условию (23), а единственным решением задачи (22), (23) является функция, определяемая равенством (21). □

Учитывая лемму, предстоит исследовать обратимость ограниченного оператора

$$W_k(1)x = \frac{k}{\operatorname{sh}^k 1}\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^{k-1}\tau}{\operatorname{ch}^{k-2}\tau/2} P_k(\tau)x\, d\tau. \tag{24}$$

Заметим, что если $k = 0$, то $W_0(t)x = C(t)S'(t)x - C'(t)S(t)x = C^2(t)x - AS^2(t)x = x$ и оператор $W_0(t) = I$ обратим всегда, но в общем случае $k > 0$ это не так, и вопрос об обратимости оператора $W_k(t)$ весьма непрост. В дальнейшем важную роль будет играть целая функция

$$\chi_k(\lambda) = \frac{k\mu_k}{\operatorname{sh}^k 1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j(k)}{(2j)!}\lambda^j = \frac{k\mu_k}{\operatorname{sh}^k 1}\int_0^1 \operatorname{ch} s\sqrt{\lambda}\int_s^1 \operatorname{ch}^{2-k}\tau/2\,(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} s)^{k/2-1}\,d\tau\, ds, \tag{25}$$

где $a_j(k) = \int\limits_0^1 s^{2j}\int\limits_s^1 \operatorname{ch}^{2-k}\tau/2\,(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} s)^{k/2-1}\,d\tau\, ds$.

Теорема 4. *Пусть A — ограниченный оператор. Для того чтобы определяемый равенством (24) оператор $W_k(1)$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$$\chi_k(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A). \tag{26}$$

Доказательство. Подставив (6) в (24), после элементарных преобразований получим

$$W_k(1) = \frac{k\mu_k}{\operatorname{sh}^k 1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j)!}A^j\int_0^1 \operatorname{ch}^{2-k}\tau/2\int_0^{\tau} s^{2j}\,(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} s)^{k/2-1}\,ds\,d\tau = \chi_k(A). \tag{27}$$

Пусть Ω — открытое множество комплексной плоскости, содержащее спектр $\sigma(A)$ ограниченного оператора A, и граница которого $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда, записывая для оператора, стоящего в правой части (27), представление через резольвенту $R(\lambda)$ оператора A, получим

$$W_k(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\chi_k(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda. \tag{28}$$

Необходимым и достаточным условием обратимости оператора $W_k(1)$ является отсутствие в спектре $\sigma(W_k(1))$ оператора $W_k(1)$ точки $\lambda = 0$. Равенство (28) означает, что оператор $W_k(1)$ является аналитической функцией оператора A, $W_k(1) = \chi_k(A)$. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(W_k(1)) = \chi_k(\sigma(A))$. Таким образом, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора $W_k(1)$ только тогда, когда на спектре $\sigma(A)$ не обращается в нуль функция $\chi_k(\lambda)$ или, что тоже самое, выполнено условие (26),

$$W_k^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\chi_k(\lambda)}R(\lambda)\,d\lambda. \tag{29} \quad \square$$

Из теоремы 4 следует, что расположение нулей функции $\chi_k(\lambda)$ определяет обратимость оператора $W_k(1)$ в случае ограниченного оператора A. В случае неограниченного оператора A условие вида (26) уже не будет достаточным условием обратимости, хотя расположение нулей также будет играть важную роль.

Далее рассмотрим случай, когда в уравнении (4) параметр $k = 2$. В этом случае

$$\chi_2(\lambda) = \frac{2}{\operatorname{sh}^2 1}\frac{\operatorname{ch}\lambda - 1}{\lambda^2}, \tag{30}$$

нули функции $\chi_2(\lambda)$ вычисляются по формуле

$$\lambda_j = j\frac{\pi i}{2}, \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{31}$$

укажем достаточное условие обратимости оператора $W_k(1)$ и в случае неограниченного оператора A.

Обозначим через Υ_0 контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_0 > \omega$, ω — показатель роста КОФ $C(t)$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении $w = z^2$ $(z \in \Upsilon_0,\ w \in \Upsilon_0^2)$.

Слева от параболы Υ_0^2 может оказаться лишь конечное число нулей λ_j, множество которых обозначим через Λ, $\operatorname{card}(\Lambda) < \infty$.

Условие 1. Пусть $k = 2$, а каждый нуль λ_j, определяемой равенством (31), целой функции $\chi_2(\lambda)$, который лежит слева от параболы Υ_0^2, принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и существует такое $d > 0$, что $\max\limits_{j\in\Lambda}\|R(\lambda_j)\| \le d$.

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль $\lambda_j \in \Lambda$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $1/d$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим через γ_j и пусть

$$\Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup \bigcup_{j\in\Lambda} \gamma_j.$$

Наша задача сводится к задаче о существовании определенного на некотором подмножестве из $D(A)$ оператора, обратного ограниченному оператору, заданного соотношением (28) при $k = 2$ и продолженного по непрерывности на E. С этой целью при $x \in E$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ введем ограниченный оператор

$$Hx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi}\frac{R\big(z\big)x\ dz}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3}, \quad H : E \to E. \tag{32}$$

Покажем, что интеграл в (32) при выполнении условия 1 абсолютно сходится. Действительно, в силу выбора контура Υ_0^2, неравенства [13]

$$\|\lambda\ R(\lambda^2)\| \le \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega,$$

и ограниченности функции $\Big(\operatorname{ch}\lambda^2 - 1\Big)^{-1}$ интеграл

$$\int_{\Upsilon_0^2}\frac{R\big(z\big)\,dz}{\chi_2(z)\ (z-\lambda_0)^3} = 2\int_{\Upsilon_0}\frac{\lambda\ R(\lambda^2)\ d\lambda}{\chi_2(\lambda^2)\ \big(\lambda^2-\lambda_0\big)^3} = 2\int_{\Upsilon_0}\frac{\lambda^5\ R(\lambda^2)\ d\lambda}{\big(\operatorname{ch}\lambda^2 - 1\big)\ \big(\lambda^2-\lambda_0\big)^3}$$

абсолютно сходится.

Теорема 5. *Пусть оператор A является генератором КОФ $C(t)$, $x \in D(A^4)$ и выполнено условие 1. Тогда оператор $W_k(1)$ имеет обратный $W_k^{-1}(1) : D(A^3) \to E$.*

Доказательство. Пусть $x \in D\big(A\big)$, $\sigma_0 < \sigma < \operatorname{Re}\xi$. Тогда, подставляя определяемый равенством (28) оператор $W_k(1)$ в (32) и применяя тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2) = \frac{R(z) - R(\xi^2)}{\xi^2 - z},$$

получим равенство

$$HW_2(1)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi}\frac{R(z)}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3}\,\frac{1}{i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\chi_2(\xi^2)\xi R(\xi^2)x\;d\xi dz =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\Xi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi\chi_2(\xi^2)R(z)x}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3(\xi^2-z)} - \frac{\xi\chi_2(\xi^2)R(\xi^2)x}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3(\xi^2-z)}\right)d\xi\,dz. \quad (33)$$

Интеграл в (33) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HW_2(1)x = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\Xi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi\chi_2(\xi^2)R(z)x\;d\xi dz}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3(\xi^2-z)}+$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_2(\xi^2)R(\xi^2)x\int_{\Xi}\frac{dz}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3\;(\xi^2-z)}\,d\xi. \quad (34)$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup\limits_{j\in\Lambda}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (34) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (34) используем интегральную формулу Коши. Таким образом, имеем

$$HW_2(1)x = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\Xi}\int_{\Upsilon}\frac{\xi\chi_2(\xi^2)R(z)x\,d\xi\,dz}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3(\xi^2-z)} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Xi}\int_{\Upsilon^2}\frac{\chi_2(\lambda)R(z)x\;d\lambda dz}{\chi_2(z)(z-\lambda_0)^3(\lambda-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi}\frac{R(z)x\;dz}{(z-\lambda_0)^3} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)x\,dz}{(z-\lambda_0)^3} =$$
$$= -\frac{1}{2}R''(\lambda_0)x = -R^3(\lambda_0)x.$$

Коммутирующие операторы H, $W_2(1)$, $R^3(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $HW_2(1)x = -R^3(\lambda_0)x$ справедливо и для $x\in E$, при этом $HW_2(1): E\to D(A^3)$. Отсюда следует, что оператор

$$W_2^{-1}(1)x = -(\lambda_0 I\; -\; A)^3Hx,\;\; W_2^{-1}(1): D(A^3)\to E, \quad (35)$$

является обратным по отношению к $W_k(1)$. Действительно,

$$W_2(1)W_2^{-1}(1)x = -W_2(1)(\lambda_0 I - A)^3Hx = -W_2(1)H(\lambda_0 I - A)^3x =$$
$$= R^3(\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^3x = x,\;\; x\in D(A^3),$$

$$W_2^{-1}(1)W_2(1)x = -(\lambda_0 I - A)^3HW_2(1)x = (\lambda_0 I - A)^3R^3(\lambda_0)x = x,\;\; x\in E. \qquad \square$$

В теоремах 4 и 5 указано множество, на котором у оператора $W_k(1)$ существует обратный $W_k^{-1}(1)$, имеющий вид (29) в случае ограниченного оператора A и $k>0$ и вид (35) в случае неограниченного оператора A и $k=2$. Поэтому в силу равенства (20) доказано существование оператора, обратного Δ. Решая матричное уравнение (18), также как и в скалярном случае получим

$$\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix}B_4 & -B_3\\ -B_2 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2\\ u_3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу теорем 4 и 5 мы приходим к следующим утверждениям о разрешимости рассматриваемой в этом разделе задачи граничного управления, в которых важную роль играет функция $\chi_k(\lambda)$ из (25).

Теорема 6. *Пусть* $u_2, u_3 \in E$, A — *ограниченный оператор и на спектре* $\sigma(A)$ *оператора* A *выполнено условие* $\chi_k(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$. *Тогда задача* (4), (15) *имеет единственное решение* $u(t) = P_k(t)u_0 + Q_k(t)u_1$, *где*

$$u_0 = W_k^{-1}(1)\left(\frac{\operatorname{sh} 1}{k+2} Q_{k+2}(1)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right)u_2 + \frac{u_2}{\operatorname{ch}^k 1/2} - \frac{\operatorname{sh} 1}{k+1} P_{k+2}(1)\left(A - \frac{k^2}{4}I\right)u_3\right), \quad (36)$$

$$u_1 = W_k^{-1}(1)\big(-Q_k(1)u_2 + P_k(1)u_3\big), \quad (37)$$

а оператор $W_k^{-1}(1)$ *имеет вид* (29).

Теорема 7. *Пусть* $u_2, u_3 \in D(A^4)$ *и выполнено условие* 1. *Тогда задача* (4), (15) *имеет единственное решение* $u(t) = P_2(t)u_0 + Q_2(t)u_1$, *где начальные элементы* u_0, u_1 *определены в* (36), (37) *при* $k = 2$, *а*

$$W_2^{-1}(1)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi} \frac{R(z)(\lambda_0 I - A)^3 x \, dz}{\chi_2(z)\ (z-\lambda_0)^3}, \quad x \in D(A^3).$$

3. Нелокальная задача для уравнения Лежандра. Будем искать решение $u(t) \in C^2([0,1], E) \cap C((0,1], D(A))$ уравнения (1), удовлетворяющее нелокальному интегральному условию с дробным интегралом I_g^β, $\beta > 0$, по функции $g(t) = \operatorname{ch} t$,

$$\lim_{t \to 1} I_g^\beta\big(\operatorname{sh}^{k-1} t\ u(t)\big) = u_4, \quad (38)$$

и условию

$$u'(0) = 0. \quad (39)$$

Задача (1), (38), (39) с нелокальными условиями (38), (39), вообще говоря, не является корректной. Укажем условия, налагаемые на оператор A и элемент $u_4 \in E$, обеспечивающие ее однозначную разрешимость.

Среди публикаций, посвященных исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка, отметим работы [20] и [21]. Критерий единственности решения установлен в [22]. Нелокальная задача для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу исследована в [23].

Исследования, касающиеся разрешимости нелокальной задачи (1), (38), (39) основаны на нахождении начального элемента u_0 в условии (2) по нелокальному условию (38).

Применим дробный интеграл по функции $g(t) = \operatorname{ch} t$ к функции $u(t) = P_k(t)u_0$, умноженной на $\operatorname{sh}^{k-1} t$, где $P_k(t)$ определяется равенством (6). Учитывая полугрупповое свойство операции дробного интегрирования и условие (38), получим уравнение

$$\lim_{t \to 1} I_g^\beta\big(\operatorname{sh}^{k-1} t\ u(t)\big) = \mu_k\,\Gamma(k/2)\lim_{t \to 1} I_g^{k/2+\beta}\left[\frac{C(t)}{\operatorname{sh} t}\right]u_0 =$$
$$= \frac{\mu_k\,\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2+\beta)}\int_0^1 (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} s)^{k/2+\beta-1} C(s)u_0\,ds = u_4.$$

Как и в п. 2 при установлении разрешимости нелокальной задачи (1), (38), (39) важную роль будет играть целая функция

$$\psi_{k,\beta}(\lambda) = \frac{\mu_k\,\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2+\beta)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j(k,\beta)}{(2j)!}\lambda^j = \frac{\mu_k\,\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2+\beta)}\int_0^1 \operatorname{ch} s\sqrt{\lambda}\,(\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} s)^{k/2+\beta-1}\,ds,$$

где

$$b_j(k,\beta) = \int_0^1 s^{2j}(\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} s)^{k/2+\beta-1}\,ds.$$

Теорема 8. *Пусть A — ограниченный оператор и $u_4 \in E$. Для того чтобы задача* (1), (38), (39) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие $\psi_{k,\beta}(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$. При этом $u(t) = P_k(t)u_0$, где*

$$u_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\psi_{k,\beta}(\lambda)} R(\lambda) u_4 \, d\lambda.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Далее рассмотрим случай, когда $\beta = 1 - k/2$, $0 < k \leq 2$:

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\mu_k \; \Gamma(k/2) \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

нули λ_j функции $\psi_k(\lambda)$ явно вычисляются:

$$\lambda_j = -\pi^2 j^2, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Укажем достаточное условие разрешимости нелокальной задачи (1), (38), (39) и в случае неограниченного оператора A.

Условие 2. Пусть каждый нуль $\lambda_j = -\pi^2 j^2$, $j \in \mathbb{N}$, функции $\psi_k(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ и существует такое $d > 0$, что $\sup\limits_{j=1,2,\ldots} \|R(\lambda_j)\| \leq d$.

Поскольку каждый нуль λ_j, $j = 1, 2, \ldots$, функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $\frac{1}{d}$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим через γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_0 > \omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении $w = z^2$ ($z \in \Upsilon_0$, $w \in \Upsilon_0^2$), и $\Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup\limits_{j=1,2,\ldots} \gamma_j$.

Возьмем $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma > \sigma_0$, и введем ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi} \frac{R(z)v \; dz}{\psi_k(z)(z-\lambda_0)^2}, \quad H : E \to E. \tag{40}$$

Как и при доказательстве теоремы 5 устанавливается, что интеграл в (40) при выполнении условия 2 абсолютно сходится и справедлива

Теорема 9. *Пусть оператор A является генератором КОФ $C(t)$, $x \in D(A^3)$ и выполнено условие* 2. *Тогда задача* (1), (38), (39) *однозначно разрешима и решение имеет вид $u(t) = P_k(t)u_0$, где $u_0 = (\lambda_0 I - A)^2 H u_4$, а оператор H определен в* (40).

Литература

[1] Carroll R.W., Showalter R.E. *Singular and degenerate Cauchy problems* (Academic Press, N. Y., 1976).

[2] Глушак А.В., Покручин О.А. *Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу*, Дифференц. уравнения **52** (1), 41–59 (2016).

[3] Глушак А.В. *Операторная функция Бесселя*, Докл. РАН **352** (5), 587–589 (1997).

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 3 (Наука, М., 1967).

[5] Хелгасон С. *Группы и геометрический анализ* (Мир, М., 1987).

[6] Олевский М.Н. *О связях между решениями обобщенного волнового уравнения теплопроводности*, ДАН СССР **101** (1), 21–24 (1955).

[7] Ярославцева В.Я. *Об одном классе операторов преобразования и их приложениях к дифференциальным уравнениям*, ДАН СССР **227** (4), 816–819 (1976).

[8] Киприянов И.А., Иванов Л.А. *Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу в римановом пространстве*, ДАН СССР **260** (4), 790–794 (1981).

[9] Киприянов И.А., Иванов Л.А. *Задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в однородном симметрическом римановом пространстве.* I, Тр. МИАН СССР **170**, 139–147 (1984).
[10] Киприянов И.А., Иванов Л.А. *Задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в симметрическом пространстве*, Матем. сб. **124** (1), 45–55 (1984).
[11] Кононенко В.И., Хинкис Л.А. *Операторы преобразования, связанные с дифференциальным оператором Якоби*, ВИНИТИ, № 1604-В89 (Воронежск. ун-т, 1989).
[12] Глушак А.В. *Операторная функция Лежандра*, Изв. РАН. Сер. Матем. **65** (6), 3–14 (2001).
[13] Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. *Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения*, Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. ВИНИТИ **28**, 87–202 (1990).
[14] Васильев В.В., Пискарев С.И. *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* II. *Теория косинус оператор-функций*, http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf
[15] Глушак А.В. *О стабилизации решения задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка*, Изв. вузов. Матем., № 11, 3–13 (2001).
[16] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений* (FЫЛЫМ, Алматы, 2010).
[17] Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применение* (Наука, М., 2012).
[18] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техн., Минск, 1987).
[19] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы* (Наука, М., 2003).
[20] Тихонов И.В. *О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве*, Дифференц. уравнения **34** (6), 841–843 (1998).
[21] Сильченко Ю.Т. *Уравнение параболического типа с нелокальными условиями*, Современ. матем. Фундамент. напр. **17**, 5–10 (2006).
[22] Тихонов И.В. *Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений*, Изв. РАН. Сер. Матем. **67** (2), 133–166 (2003).
[23] Глушак А.В. *Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу*, Изв. вузов. Матем., № 6, 27–35 (2016).

Александр Васильевич Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия,

e-mail: aleglu@mail.ru

A.V. Glushak

Uniquely solvable problems for abstract Legendre equation

Abstract. For loaded abstract Legendre equation we find sufficient conditions of solvability of the Cauchy problem and the boundary control problem. We also consider nonlocal problem that contains fractional integral of a function with respect to another function.

Keywords: abstract Legendre abstract equation, Cauchy problem, unique solvability, nonlocal condition, fractional integral of a function with respect another function.

Aleksandr Vasil'evich Glushak

Belgorod State National Research University,
85 Pobedy str., Belgorod, 308015 Russia,

e-mail: aleglu@mail.ru