ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

СИСТЕМА НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041203
Кочуевой Марии Анатольевны

Научный руководитель
к. ф.- м. н., доцент
Бугаевская А.Н.

БЕЛГОРОД 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Важным условием качественного обновления общества является преумножение его интеллектуального потенциала. Решение этой задачи во многом зависит от построения образовательного процесса. Большая часть современных образовательных программ ориентирована на передачу обучающимся общественно необходимой суммы знаний, на их количественный прирост, на отработку того, что ребёнок уже умеет делать. Однако уровень развития логических приемов мышления, степень их оформления в систему, по большей мере и определяет умение использовать информацию. Потребность в целенаправленном формировании логического мышления в процессе изучения конкретных образовательных дисциплин уже осознаётся психологами и педагогами.

Работа над развитием логического мышления обучающихся идёт без осознания значимости психологических приёмов и средств в этом процессе. Это приводит к тому, что большинство учеников не овладевают приёмами систематизации знаний на основе логического мышления даже в старших классах школы.

Наиболее доступным средством решения этой проблемы будет введение в курс математики нестандартных задач. Нестандартные задачи формируют у школьников высокую математическую активность, качества, присущие творческой личности: гибкость, оригинальность, глубину, целенаправленность, критичность мышления. Нестандартные задачи всегда подаются в увлекательной форме, они прогоняют интеллектуальную лень, вырабатывают привычку к умственному труду, воспитывают настойчивость в преодолении трудностей [3].

Именно при решении нестандартных задач оттачивается, шлифуется мысль ребенка, мысль связанная, последовательная, доказательная. Решая задачи, представленные в продуманной математической системе, обучающиеся не только активно овладевают содержанием курса математики, но и приобретают умения мыслить творчески. Обучающиеся должны уметь решать не только стандартные задачи, но требующие известной независимости мышления, оригинальности, изобретательности.

Проблема исследования: Недостаточно полно используются возможности нестандартных задач для подготовки обучающихся 10 классов к развитию смысловой и образной памяти, успешной сдачи единого государственного экзамена и поступлению в ВУЗы.

Данная проблема позволила сформулировать тему исследования: **«Система нестандартных задач как средство развития логического мышления обучающихся на уроках математики».**

Объект исследования: является процесс обучения математике в 10 классах.

Предмет исследования: нестандартные задачи как средство развития логического мышления обучающихся на уроках математики в 10 классах.

Цель исследования: изучение роли нестандартных задач для развития логического мышления и систематизация нестандартных задач в элективный курс по математике для 10 классов.

Гипотеза исследования: развитие логического мышления обучающихся будет более эффективным, если в образовательный процесс включить элективный курс «Решение нестандартных задач» с использованием методических рекомендаций к нему.

В соответствии с целью, гипотезой, объектом и предметом исследования поставлены следующие **задачи:**

1) изучить и проанализировать психолого-педагогическую, научно-методическую, учебно-методическую литературу по теме: «Система нестандартных задач как средство развития логического мышления обучающихся на уроках математики»;

2) разработать программу элективного курса «Решение нестандартных задач»;

3) разработать методические рекомендации по содержанию занятий

данного элективного курса;

4) провести педагогический эксперимент и проанализировать его результаты.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы:

– теоретический анализ;

– педагогическое исследование.

Практическая значимость заключается в том, что выводы и результаты выпускной квалификационной работы могут быть использованы в учебно-воспитательном процессе общеобразовательных учреждений.

Базой проведения исследования стала МОУ-СОШ № 8 г. Клин, Московской области. В проведении участвовали обучающиеся 10 класса.

На защиту выносятся:

– элективный курс «Решение нестандартных задач» для обучающихся 10 класса;

– методические рекомендации по использованию составленной программы элективного курса;

– результаты педагогического эксперимента.

Структура выпускной квалификационной работы включает в себя введение, 2 главы, заключение, список использованной литературы и приложения.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10 КЛАССОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

1.1Сущность развития логического мышления детей старшего школьного возраста

Прежде чем рассмотреть развитие логического мышления старших школьников, определим понятие мышления как психического познавательного процесса в целом.

В процессе восприятия окружающего мира человек познает его в результате непосредственного, чувственного отражения. Однако не все свойства и сущности вещей могут отразиться в нашем сознании непосредственно. Например, выглянув в окно и увидев лужи на асфальте и мокрые крыши, мы определяем, что прошел дождь. В данном случае мы сопоставили факты и отразили связи между объектами опосредованно, т.е. совершили мыслительный процесс.

Основываясь на мышлении человек, может связывать отдельные события и явления воедино, с помощью логических связей. При этом он обобщает результаты чувственного опыта, отражает общие свойства вещей. На этой обобщенной основе человек решает конкретные познавательные задачи.

Мышление — это опосредованное и обобщённое отражение действительности, вид умственной деятельности, заключающейся в познании сущности вещей и явлений, закономерных связей и отношений между ними [17].

Главными особенностями протекания процесса мышления являются:

1. Обобщенное и опосредованное отражение действительности.
2. Связь с практической деятельностью.
3. Неразрывная связь с речью.
4. Наличие проблемной ситуации и отсутствие готового ответа.

Обобщенное отражение действительности означает, что в процессе познания общего и существенного в объектах действительности мы обращаемся к тому, что объединяет сходный ряд предметов и явлений. Например, когда мы говорим о канцтоварах, то подразумеваем под этим словом ручки, карандаши, линейки и т. д.

Опосредованное отражение действительности можно увидеть на примере арифметической задачи на сложение нескольких слив или на определение скорости двух автомобилей, движущихся навстречу друг другу. «Сливы», «Автомобили» — это лишь символы, условные образы, за которыми вовсе не должны стоять конкретные фрукты или машины.

Мышление возникает из чувственного познания на основе практической деятельности, но по мере своего развития выходит далеко за пределы практических действий. Практическая деятельность является основным условием возникновения и развития мышления. А также критерием истинности мышления [1].

Мышление неразрывно связано с речью. Оно использует понятия, которые по своей форме являются словами, а по сути — результатом умственных операций. В свою очередь, в результате мышления может происходить разъяснение словесных понятий.

Мышление имеет место только тогда, когда имеется проблемная ситуация, решая которую необходимо отвлечься от чувственного опыта и сделать определенные практические или теоретические выводы, расширив границы познания.

По мнению Е.Г. Ревиной, мышление — высшая ступень познания человеком действительности. Чувственной основой мышления являются ощущения, восприятия и представления. Через органы чувств - эти единственные каналы связи организма с окружающим миром - поступает в мозг информация. Содержание информации перерабатывается мозгом. Наиболее сложной (логической) формой переработки информации является деятельность мышления. Решая мыслительные задачи, которые перед человеком ставит жизнь, он размышляет, делает выводы и тем самым познаёт сущность вещей и явлений, открывает законы их связи, а затем на этой основе преобразует мир [15].

Мышление не только тесно связано с ощущениями и восприятиями, но и формируется на их основе. Переход от ощущения к мысли представляет собой сложный процесс, который состоит, прежде всего, в выделении и обособлении предмета или его признака, в абстрагировании от конкретного, единичного и установлении существенного, общего для многих предметов.

Ж. Пиаже считает, что мыслительная деятельность человека представляет собой решение различных мыслительных задач, направленных на выявление сущности чего-либо. Мыслительная операция — это один из способов мыслительной деятельности, с помощью которого человек решает мыслительные задачи [5].

Мыслительные операции разнообразны. Это — анализ и синтез, сравнение, абстрагирование, конкретизация, обобщение, классификация. Выбор логической операции будет зависеть от задачи и от характера информации, которую человек подвергает мыслительной переработке.

Мыслительная деятельность всегда нацелена по получение некоторого результата. Человек анализирует предметы, сравнивает их, выделяет отдельные свойства, чтобы обнаружить общее в них, раскрыть законы, регулирующие их развитие и овладеть ими.

Мышление человека происходит в форме суждений и умозаключений. Суждение — это форма мышления, отражающая предметы реальности в их связях и отношениях. Каждое суждение это отдельная мысль о чём-либо. Согласованная логическая связь нескольких суждений, необходимая для решения какой-либо мыслительной задачи, чтобы понять что-нибудь, найти ответ на вопрос, называется рассуждением. Рассуждение имеет практическое значение только тогда, когда оно приводит к определённому выводу, умозаключению. Умозаключение — это вывод из нескольких суждений, дающий нам новые знания о предметах и явлениях реального мира [17].

Результаты познавательной деятельности людей фиксируют в форме понятий. Познать предмет — значит, раскрыть его сущность. Понятие является отражением существенных особенностей предмета. Чтобы выявить эти признаки и особенности, необходимо тщательно изучить предмет, установить его связи с другими предметами. Понятие о предмете возникает на основе многих суждений и умозаключений о нём.

В зависимости от того, какое место в процессе мышления занимают слово, образ и действие, как они соотносятся между собой, различают три вида мышления: наглядно-действенное, наглядно-образное и абстрактное.

Наглядно-действенное мышление — вид мышления, основанный на непосредственном восприятие предметов в процессе действий с ними. Это мышление является наиболее элементарным видом мышления, возникающим в процессе практической деятельности и являющимся основой для формирования более сложных типов мышления.

Наглядно-образное мышление — вид мышления, характеризующийся опорой на представления и образы. При конкретно-образном мышлении ситуация воплощается в плане образа или представления.

Абстрактное, или словесно-логическое, мышление направлено главным образом на нахождение общих закономерностей в природе и человеческом обществе. Абстрактное, теоретическое мышление отражает общие отношения и связи. Оно использует в основном понятия, широкие категории, а образы, представления в нём играют вспомогательную роль.

При рождении ребенок не обладает мышлением. Чтобы мыслить, необходимо иметь некоторый практический и чувственный опыт, подкреплённый памятью. К концу первого года жизни у ребёнка можно наблюдать проявления элементарного мышления [12].

Основным условием развития мышления у детей является целенаправленное воспитание и обучение их. В процессе воспитания ребёнок овладевает предметными действиями и речью, самостоятельно учится решать сначала простые, затем и сложные задачи, а также понимать требования взрослых и действовать в соответствии с ними.

Развитие мышления выражается в постепенном расширении содержания мысли, в последовательном возникновении форм и методов мыслительной деятельности и их изменении пропорционально общему развитию личности. В то же время у ребёнка повышаются и побуждения к мыслительной деятельности — познавательные интересы [12].

Мышление развивается на протяжении всей жизни человека в процессе его деятельности. На каждом возрастном этапе мышление имеет свои особенности.

Мышление ребёнка раннего возраста заключается в виде действий, направленных на решение конкретных задач: получить какой-нибудь предмет, находящийся в поле зрения, надеть кольца на стержень игрушечной пирамиды, закрыть или открыть коробку, найти спрятанную вещь, влезть на стул, принести игрушку и т.п. Выполняя эти действия, ребёнок думает. Он мыслит, действуя, его мышление наглядно-действенное.

Освоение речи окружающих людей вызывает сдвиг в развитии наглядно-действенного мышления ребёнка. Благодаря языку дети начинают думать обобщённо.

Дальнейшее развитие мышления выражается в изменении соотношения между действием, образом и словом. В решении задач слово играет всё большую роль.

Существует определённая последовательность в развитии видов мышления в дошкольном возрасте. Вначале идёт развитие наглядно-действенного мышления, вслед за ним формируется наглядно-образное и, наконец, словесное мышление.

Мышление средних школьников (11-15 лет) использует знания, усвоенные в основном словесно. При изучении различных учебных дисциплин — математики, физики, химии, истории, грамматики и др. — обучающиеся имеют дело не только с фактами, но и с закономерными отношениями, общими связями между ними [17].

В старшем школьном возрасте мышление становится абстрактным. Вместе с тем наблюдается и развитие конкретно-образного мышления.

Логическое мышление — высший уровень умственного развития ребенка, проходит длинный путь развития. Оно характеризуется тем, что совершается в форме абстрактных понятий и рассуждений. В сложных умственных действиях взрослого имеются элементы всех трех видов мышления, но какой-то один из них обычно преобладает. Например, при доказательстве теорем, решении задач доминирует, конечно, теоретический тип мышления, хотя там присутствуют и элементы наглядного действенного и наглядно-образного мышления (построение чертежей, схем, мысленные и практические их преобразования и т.п.) [14].

В кратком словаре системы психологических понятий логическое мышление определяется как «вид мышления, сущность которого заключается в оперировании понятиями, суждениями и умозаключениями с использованием законов логики». Здесь имеется в виду классическая двузначная формальная логика, хотя мышление людей вовсе не обязано быть основано исключительно на ней.

Классическая формальная логика рассматривает понятие, суждение, умозаключение как основные формы мышления. Их действие отражает суть логического мышления. Механизм логического мышления заключается в операциях логического мышления, опирающиеся на четыре закона логики: тождества, непротиворечия, исключённого третьего, достаточного основания. Неклассические формальные логики предполагают иные формулировки основных логических законов, однако, и в рамках этих логических систем продолжают действовать основные логические операции. И, с точки зрения любой формальной логики «логическое мышление — это мышление, соответствующее определенным принципам (законам, правилам, предписаниям), выработка которых и составляет одну из главных задач логики».

Логическое мышление, в отличие от практического, осуществляется только словесными средствами. Обучение ребенка доказательству требует от него умения правильно рассуждать. Что непосредственно обнаруживается через правильность математической речи ребенка. Математическая речь и умение правильно рассуждать тесно связаны друг с другом.

О человеке, который имеет хорошо развитое логическое мышление, говорят, что он основательно мыслит, дисциплинированно рассуждает. Такой человек, как правило, не допускает ошибок в своих рассуждениях и выводах. Хорошо развитое логическое мышление предостерегает человека от промахов и ошибок в практической деятельности. И это качество развивается главным образом в процессе изучения математики, ибо математика — это практическая логика, в ней каждое новое положение получено с помощью строго обоснованных рассуждений на основе ранее известных положений, т.е. строго доказывается. Математика приучает к логическому мышлению. В математике ученик с наибольшей полнотой, наиболее выпукло и зримо может увидеть демонстрацию почти всех основных законов элементарной логики [22].

Решение всякой задачи по математике — это, прежде всего, цепь рассуждений. Вычисления, преобразования, построения, которыми так часто приходится пользоваться для решения задач, невозможны без логических рассуждений: они направляются рассуждениями. Значит, в математике невозможно обойтись без логики. Для успешного изучения математики надо настойчиво учиться правильно рассуждать.

Развитие логического мышления ребёнка — это процесс перехода мышления с эмпирического уровня познания (наглядно-действенное мышление) на научно-теоретический уровень (логическое мышление), с последующим оформлением структуры взаимосвязанных компонентов, где компонентами выступают приёмы логического мышления, которые обеспечивают целостное функционирование логического мышления [13].

Учёными указывается, что большое значение в развитии логического мышления детей имеет развитие мыслительных операций.

Особое место занимают мыслительные операции, такие как выделение и абстрагирование свойств предметов, их сравнение и классификация.

Педагогическими условиями развития логического мышления у детей является, прежде всего, использование различных средств и методов. Учитывая, что всё-таки большинство учителей работают по традиционным программам, возникает потребность педагогов практиков в методическом материале, направленном на развитие логического мышления, мыслительных операций, которые можно было бы использовать на уроках.

1.2 Обучение обучающихся решению нестандартных задач на уроках математики

Одним из способов развития логического мышления школьников является решение нестандартных задач.

Понятие «нестандартная задача» используется многими методистами. Так, Ю. М. Колягин раскрывает это понятие следующим образом: «Под нестандартной понимается задача, при предъявлении которой обучающиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение» [10].

Определение нестандартной задачи приведено также в книге «Как научиться решать задачи» авторов Л.М. Фридмана, Е.Н. Турецкого: «Нестандартные задачи — это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [24].

Нестандартная задача в отличие от традиционной не может быть напрямую (в том виде, в котором она предъявлена) решена с помощью какого-либо алгоритма. Такие задачи не загоняют ученика в жесткие рамки только одного решения. Необходимо найти решение с помощью творческой работы логического мышления и способствующее его развитию. Такая задача даже может быть простой, но иметь необычное содержание, что потребует от школьника напряжения ума и логического мышления.

Решение нестандартных задач подразумевает развитие воображения, памяти и интереса, внимания и гибкости мышления. Ум школьника становится острее, формируются умения наблюдать, проводить анализ явлений, сравнивать и сопоставлять, обобщать факты и делать выводы. Рассуждения обучающихся становятся последовательными, доказательными, логичными, а речь — точной, убедительной и аргументированной.

При решении такого рода задач расширяется математический кругозор обучающихся, формируется нестандартное мышление, умение использовать знания в нетипичных ситуациях, развивается настойчивость в достижении поставленных целей, прививается интерес к изучению предмета. Воспитывается самостоятельность, любознательность, инициативность, активность. Все это помогает в развитии творческого и логического мышления школьников.

Решение нестандартных задач не является «прерогативой» только лишь математики, ведь все человеческое познание состоит в процессе постановки все новых и новых задач и вопросов, а также их разрешении.

При классическом обучении математики школьники сталкиваются лишь с задачами, которые формируют у них определённые операционные навыки по стандарту-образцу. Поэтому встречаясь с нестандартной задачей, обучающиеся зачастую не знают, как её решать, даже не пытаясь найти это решение. Участие в математических олимпиадах дает понимание того, что только лишь понятие «нестандартная задача» еще не означает сложность и недоступность в ее решении; изучение приемов и накопление опыта в решении нестандартных задач помогает школьникам успешно с ними справляться [27].

Можно сделать вывод, что нестандартная задача — это задача, решение которой для отдельного ученика не является известной последовательностью конкретных действий. Поэтому понятие нестандартной задачи является относительным. При изучении учебников и учебных пособий по математике можно обратить внимание на то, что любая текстовая задача в определенных условиях может быть нестандартной, а в других — обычной, стандартной. Стандартная задача одного курса математики может быть нестандартной в другом курсе.

Хороший результат в решении зависит не только от того, решал ли школьник раньше подобные задачи, но и от опыта их решения вообще, от количества полностью разобранных вместе с учителем заданий и подробным анализом всех нюансов задачи. Нерешённые задачи расстраивают учеников, подрывают у них уверенность в собственных силах и знаниях, негативно влияет на развитие интереса к решению задач в целом, поэтому учитель должен проконтролировать, чтобы поставленные перед школьниками нестандартные задачи были решены. Но наряду с этим решение нестандартных задач с помощью учителя — это совсем не то к чего следует стремиться. Цель постановки в школе нестандартных задач — научить школьников справляться с ними самостоятельно [22].

Основываясь на результате анализа теории и практики использования нестандартных задач в процессе обучения математике, можно выделить их общую и специфическую роль. Нестандартные задачи:

– учат детей использовать не только готовые шаблоны действий, но и самостоятельно искать новые способы решения задач, т.е. способствуют умению находить оригинальные способы решения задач;

– оказывают влияние на развитие сообразительности и смекалки обучающихся;

– мешают выработке вредных штампов при решении задач, разрушают неправильные ассоциации в знаниях и умениях обучающихся, предполагают не столько усвоение алгоритмических приемов, сколько нахождение новых связей в знаниях, к переносу знаний в новые условия, к овладению разнообразными приемами умственной деятельности;

– создают подходящие условия с целью повышения прочности и глубины познаний обучающихся, обеспечивают осознанное усвоение математических понятий.

Нестандартные задачи:

– не должны решаться с помощью готовых, заученных школьниками алгоритмов;

– должны быть доступны по содержанию всем обучающимся;

– содержание задач должно быть интересно школьникам;

– знаний, усвоенных обучающимися по программе, должно хватать для решения нестандартных задач.

Решение нестандартных задач активизирует деятельность школьников. Обучающиеся учатся сравнивать, классифицировать, обобщать, анализировать, а это способствует более прочному и сознательному усвоению знаний.

Опыт показал, что нестандартные задачи весьма полезны не только для уроков, но и для внеклассных занятий, для олимпиадных заданий, так как при этом открывается возможность по-настоящему дифференцировать результаты каждого участника. Такие задачи могут с успехом использоваться и в качестве индивидуальных заданий для тех учеников, которые легко и быстро справляются с основной частью самостоятельной работы на уроке, или для желающих в качестве дополнительных заданий. В результате обучающиеся получают интеллектуальное развитие и подготовку к активной практической деятельности [18].

Общепринятой классификации нестандартных задач нет, но Б.А. Кордемский выделяет следующие виды таких задач:

– Задачи, примыкающие к школьному курсу математики, но повышенной трудности — типа задач математических олимпиад. Предназначаются в основном для школьников с определившимся интересом к математике; тематически эти задачи обычно связаны с тем или иным определённым разделом школьной программы. Относящиеся сюда упражнения углубляют учебный материал, дополняют и обобщают отдельные положения школьного курса, расширяют математический кругозор, развивают навыки в решении трудных задач.

– Задачи типа математических развлечений. Прямого отношения к школьной программе не имеют и, как правило, не предполагают большой математической подготовки. Это не значит, однако, что во вторую категорию задач входят только лёгкие упражнения. Здесь есть задачи с очень трудным решением и такие задачи, решение которых до сих пор не получено. «Нестандартные задачи, поданные в увлекательной форме, вносят эмоциональный момент в умственные занятия. Не связанные с необходимостью всякий раз применять для их решения заученные правила и приёмы, они требуют мобилизации всех накопленных знаний, приучают к поискам своеобразных, не шаблонных способов решения, обогащают искусство решения красивыми примерами, заставляют восхищаться силой разума» [24].

Нахождение искомого при решении нестандартных математических задач предполагает открытие не известных ребёнку признаков, существенных для решения проблемы отношений, закономерных связей между признаками, тех способов, с помощью которых они могут быть найдены. Ребёнок при этом вынужден действовать в условиях неопределенности, намечать и проверять ряд возможных решений, осуществлять выбор между ними, подчас не имея к тому достаточных оснований. Он ищет ключ к решению на основе выдвижения гипотез и их проверки, т. е. способы опираются на известное предвидение того, что может быть получено в результате преобразований. Существенную роль в этом играют обобщения, позволяющие сокращать количество той информации, на основе анализа которой он приходит к открытию новых знаний, уменьшать число проводимых при этом операций, «шагов» к достижению цели.

Как подчеркивает Л.Л. Гурова, весьма плодотворным в поиске пути решения проблемы оказывается ее содержательный, семантический анализ, направленный на раскрытие натуральных отношений объектов, о которых говорится в нестандартной задаче. В нем существенную роль играют образные компоненты мышления, которые позволяют непосредственно оперировать этими натуральными отношениями объектов. Они представляют собой особую, образную логику, дающую возможность устанавливать связи не с двумя, как при словесном рассуждении, а со многими звеньями анализируемой ситуации, действовать, по словам Л.Л. Гуровой, в многомерном пространстве [13].

В исследованиях проведенных под руководством С.Л. Рубинштейна (Л.И. Анцыферовой, Л.В. Брушинским, А.М. Матюшкиным, К.А. Славской и др.), в качестве эффективного приема, используемого в логическом мышлении, выдвигается «анализ через синтез». На основе такого анализа искомое свойство объекта выявляется при включении объекта в ту систему связей и отношений, в которой он более явно обнаруживает данное свойство. Найденное свойство открывает новый круг связей и отношений объекта, с которыми это свойство может быть соотнесено. Такова диалектика логического познания действительности. Реально такое решение подготовлено прошлым опытом, зависит от предшествующей аналитико-синтетической деятельности и прежде всего — от достигнутого решающим уровня словесно-логического понятийного обобщения. Однако, сам процесс поисков решения в значительной своей части осуществляется интуитивно, под порогом сознания, не находя своего адекватного отражения в слове, и именно потому его результат решения нестандартной задачи является сложным процессом и требует планомерного развития [13].

Применив метод введения нестандартных задач, Я.А. Пономарев выявил ряд закономерностей их влияния на процесс развития логического мышления обучающихся. Наибольший эффект достигается тогда, когда школьник на основе логического анализа уже убедился в том, что не может решить испробованными им способами задачу, но еще не потерял веры в возможность успеха. При этом нестандартная задача сама по себе должна быть интересной, чтобы полностью поглотить сознание решающего, и не столь легкой, чтобы ее решение могло быть выполнено автоматически. Чем меньше автоматизирован способ решения, тем легче его перенос на решение задачи [24].

Логическое мышление предполагает не только широкое использование усвоенных знаний, но и преодоление барьера прошлого опыта, отхода от привычных ходов мысли, разрешение противоречий между актуализированными знаниями и требованиями учебной ситуации, оригинальность решений, их своеобразие. Эту сторону логического мышления чаще всего обозначают как гибкость ума, динамичность, подвижность и т.д. Наиболее удачен первый термин (два других чаще употребляются в контексте психофизиологических работ).

При гибком уме ученик легко переходит от прямых связей к обратным, от одной системы действий к другой, если этого требует решаемая задача, он может отказаться от привычных действий и т.д. Инертность ума проявляется в противоположном: в склонности к шаблону, в трудности переключения от одних действий к другим, в длительной задержке на уже известных действиях, несмотря на наличие отрицательного подкрепления и т.д [25].

Г.П. Антонова, исследуя гибкость мышления при решении разнообразных задач, отмечает устойчивость этого качества и наличие весьма существенных различий по суммарному «показателю гибкости» мышления школьников одного и того же возраста: для крайних групп - наиболее и наименее развитых и исследованных ею школьников этот показатель равен соответственно 12,5% и 89%, т.е. один показатель превышает второй более чем в 6 раз [16].

Однако значительная часть учителей, следуя методическим указаниям, предложенным задачам в учебнике, проводит работу над нестандартной задачей, которая недостаточно полно реализует как обучающие, так и развивающие функции. Чтобы усилить развивающий аспект обучения, полезно научить решать нестандартную задачу. Также помочь обучающимся осознать выбор действий, посредством которых решается нестандартная задача, сможет правильно выбранная наглядная интерпретация задачи.

Особого внимания в развитии мышления учащихся 10 классов требуют нестандартные задачи. Такие задачи стимулируют процесс обучения, так как при их решении у школьников проявляется умение применять различные приемы и методы решения задач, умение анализировать, рассуждать, предлагать и проверять эти предположения, делать соответствующие выводы. Поэтому при решении нестандартных задач учителю необходимо организовать работу таким образом, чтобы обучающиеся находили различные способы решения, сравнивали их и выбирали наиболее легкий и рациональный.

1.3 Требования к системе учебных заданий, направленных на развитие логического мышления

Для формирования логического мышления приоритетным является обучение, ориентированное на формирование учебной деятельности, приводящее к становлению теоретического мышления.

Основным средством развития математических способностей обучающихся являются задачи. Не случайно известный современный математик Д. Пойа пишет: «Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности» [19].

Одна из главных причин затруднений обучающихся, возникающих у них при решении задач, заключается в том, что математические задачи, которые содержатся в основных разделах школьных учебников, как правило, ограничены одной темой. Решение таких задач требует от обучающихся знаний, умений и навыков по какому-нибудь одному вопросу учебного материала и не предусматривает широких связей между различными разделами школьного курса математики. Значение и роль таких задач исчерпываются в течение того непродолжительного периода, в течении которого изучается (повторяется) тот или иной вопрос программы. Функция таких задач чаще всего заключается в разъяснении смысла изучаемого на уроках материала и его иллюстрации. Именно поэтому у школьников зачастую не вызывает труда поиск метода решения данной задачи. Подсказкой для обучающихся служат название раздела учебника или задачника, изучаемая на уроке тема, указания учителя и т. д.. Самостоятельный вклад в поиск метода решения школьником здесь минимален. Трудности у учеников возникают при решении задач на повторение, ведь они требуют наличие знаний по нескольким тем.

К сожалению, в практике обучения математике решение задач чаще всего рассматривается лишь как средство сознательного усвоения школьниками программного материала. И даже задачи повышенной трудности из специальных сборников, предназначенных для внеклассной работы, в основном имеют целью закрепление умений и навыков учеников в решении стандартных задач, задач определенного типа. А между тем функции задач очень разнообразны: обучающие, развивающие, воспитывающие, контролирующие.

Любая нестандартная задача, предлагаемая для решения обучающимся, может служить многим конкретным целям обучения. И все же главной целью нестандартных задач является развитие творческого мышления обучающихся, повышение интереса к изучаемому предмету, приведение к «открытию» математических фактов. Невозможно достичь этой цели с помощью лишь одних стандартных задач, хотя стандартные задачи, безусловно, необходимы и полезны, если они даны в нужном количестве и в нужное время. Как на уроке, так и во внеклассной работе, следует избегать большого числа стандартных задач, так как в этом случае сильные школьники могут потерять интерес к предмету. Обучение учеников лишь специальным способам решения отдельных типов задач создают, на наш взгляд, реальную опасность того, что обучающиеся ограничатся усвоением одних шаблонных приемов и не приобретут умения самостоятельно решать незнакомые задачи [21].

Безусловно, в системе задач школьного курса математики необходимы задачи, направленные на отработку того или иного математического навыка. Но не менее необходимы задачи, направленные на воспитание у обучающихся устойчивого интереса к изучению математики, творческого отношения к учебной деятельности математического характера. Необходимы специальные упражнения для обучения школьников способам самостоятельной деятельности, общим приемам решения задач, для овладения ими методов научного познания реальной действительности и приемам продуктивной умственной деятельности, которыми пользуются ученые-математики, решая ту или иную задачу. Осуществляя целенаправленное обучение школьников решению задач, с помощью специально подобранных нестандартных задач, можно учить их наблюдать, пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями, и делать соответствующие выводы [20].

На уроках необходимо систематически использовать нестандартные задачи, способствующие целенаправленному развитию логического мышления обучающихся, их математическому развитию, формированию у них познавательного интереса и самостоятельности. Такие задачи требуют от школьников смекалки, наблюдательности, творчества и оригинальности.

Эффективное развитие математических способностей у обучающихся невозможно без использования в учебном процессе нестандартных задач.

Нестандартные задачи многообразны, но их объединяет следующее:

– способ решения нестандартных задач заранее не известен. Для их решения характерно, броуновское движение мысли, т.е. к решению приводит метод проб и ошибок. В процессе поисковых проб решения могут возникнуть догадки, которые в отдельных случаях представляют собой нахождение пути искомого решения.

– нестандартные задачи способствуют повышению и поддержанию интереса к изучаемому предмету и играют роль мотива к деятельности обучающихся. Эмоциональный отклик у детей находят необычность сюжета, способа презентации задачи, тем самым, побуждая школьников на поиск ее решения;

– нестандартные задачи составлены на основе знаний законов мышления.

Систематическое применение нестандартных задач способствует развитию указанных мыслительных операций и формированию математических представлений детей. Для решения таких задач характерен процесс поисковых проб. Появление догадки свидетельствует о развитии у детей таких качеств умственной деятельности, как смекалка и сообразительность. Смекалка — это особый вид проявления творчества. Она выражается в результате анализа, сравнений, обобщений, установления связей, аналогии, выводов, умозаключений. О проявлениях сообразительности свидетельствует умение обдумывать конкретную ситуацию, устанавливать взаимосвязи, на основе которых решающий задачу ученик приходит к выводам, обобщениям. Сообразительность является показателем умения оперировать знаниями. Из этого следует, что смекалка, сообразительность, влекущие за собой догадку как результат поиска решения занимательной задачи, не есть что-то данное свыше. Эти качества умственной деятельности можно и нужно развивать в процессе обучения [7].

В любом случае догадке как способу решения задачи предшествует тщательный анализ: выделение в задаче существенных признаков, пространственного расположения и обобщения ряда фигур, их свойств, сходных признаков и т.п. Однако для решения нестандартных задач метод проб и ошибок ненадежен и нерационален. Гораздо более эффективный способ — вооружить детей теми приемами умственной деятельности, которые необходимы при этом: анализ и синтез, сравнение, аналогия, классификация. Предлагая обучающимся нестандартные задачи, мы формируем у них способность выполнять эти операции и одновременно развиваем их.

Безусловно, нельзя приучать обучающихся решать только те задачи, которые вызывают у них интерес. Но нельзя и забывать, что такие задачи ученики решают легче и свой интерес к решению одной или нескольких задач они могут в дальнейшем перенести и на «скучные» разделы, неизбежные при изучении любого предмета, в том числе и математики. Таким образом, учитель, желающий научить школьников решать задачи, должен вызвать у них интерес к нестандартной задаче, убедить, что от решения математической задачи можно получить такое же удовольствие, как от решения нестандартных задач.

Задачи не должны быть слишком легкими, но и не должны быть слишком трудными, так как обучающиеся, не решив задачу или не разобравшись в решении, предложенном учителем, могут потерять веру в свои силы. Не следует предлагать ученикам задачу, если нет уверенности, что они смогут ее решить. Ну а как же помочь обучающемуся научиться решать задачи, если интерес к решению задач у него есть и трудности решения его не пугают? В чем должна заключаться помощь учителя ученику, не сумевшего решить интересную для него задачу? Как эффективным образом направить усилия ученика, затрудняющегося самостоятельно начать или продолжить решение задачи?

Не следует идти по самому легкому в этом случае пути — знакомить ученика с готовым решением. Не следует и подсказывать, к какому разделу школьного курса математики относится предложенная задача, какие известные обучающимся свойства и теоремы нужно применить при решении. Решение нестандартной задачи — очень сложный процесс, для успешного осуществления которого обучающийся должен уметь думать, догадываться.

Для осуществления формирования логического мышления обучающихся 10 классов можно составить систему нестандартных заданий по темам:

– Вычисления
– Задачи на смекалку

– Текстовые задачи

– Уравнения, неравенства и системы

– Прикладная геометрия

Учитель, преподающий в 10 классах, может развивать логическое мышление обучающихся с помощью созданной системы нестандартных задач. Для этого необходимо учитывать следующее:

– Нестандартные задачи должны быть посильными для детей;

– Нестандартные задачи, отобранные для одного урока, должны быть разнообразными для воздействия на различные компоненты мышления;

– Если ученики не справляются с решением нестандартных задач, то целесообразно оставить его на обдумывание до следующего урока;

– Ученикам можно дать необязательное домашнее задание по составлению аналогичных нестандартных задач;

– Если на уроке время ограничено, то нестандартные задачи можно применять на занятиях математического кружка.

Обучающиеся хорошо воспринимают эти нестандартные задачи. Ребята видят в них отдых от утомительной, иногда однообразной часто арифметической тренировки. Это ненавязчивое средство обучения логическим приемам, которые применяются в каждом математическом рассуждении.

Система нестандартных задач позволяет привить интерес к предмету, дает более глубокое и полное понимание изучаемых тем, развивает логическое мышление обучающихся. В результате повышается успеваемость учеников.

Устойчивые положительные результаты можно получить при подборе нестандартных задач, имеющих отношение к заданной теме. Не следует предлагать нестандартные задачи как средство заполнения досуга или развлечения. Проблема включения задач подобного вида в учебный процесс должна решаться естественным образом. Воспитание культуры логического мышления должно проводиться повседневно. И.Л.Никольская, специально изучавшая данную проблему, установила экспериментально, что кратковременное обучение логическим понятиям не дает эффекта, его можно достичь только тогда, когда эти понятия органически вплетены в курс математики.

При отборе нестандартных задач исходили из следующих требований к системе нестандартных задач, направленных на развитие логического мышления:

– система нестандартных задач должна носить развивающую направленность, способствовать не только формированию определенных математических умений и навыков, но, в первую очередь, содействовать развитию логического мышления старших школьников, учить их определенным мыслительным приемам;

– в систему должны быть включены нестандартные задачи, которые помогут сформировать такие операции, как анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение и классификация, и тем самым реализовать цель исследования;

– система нестандартных задач должна учитывать возрастные психологические особенности обучающихся.

Система нестандартных задач поможет понять идею решения. Нужно стремиться к тому, чтобы ученик испытал радость от решения трудной для него задачи, полученного с помощью нестандартных задач предложенных учителем.

Таким образом, нестандартные задачи являются хорошим средством обучения решению задач, средством для нахождения плана решения.

2 ПРИМЕНЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10 КЛАССОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

2.1 Создание элективного курса «Решение нестандартных задач по математике», направленного на развитие логического мышления обучающихся 10 классов

Математику любят в основном те школьники, которые умеют решать задачи. Следовательно, если мы научим детей решать нестандартные задачи и задания, то окажем существенное влияние на их интерес к предмету, на развитие логического мышления. Помимо этого, нестандартные задачи являются мощным средством активизации познавательной деятельности, т. е. вызывают у школьников большой интерес и желание работать.

Для развития логического мышления школьников 10 классов нами был создан и предложен для реализации элективный курс «Решение нестандартных задач по математике».

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

элективного курса по математике

«Решение нестандартных задач»

в 10 классе

на 2016-2017 учебный год

Пояснительная записка

Содержание элективных курсов позволяет удовлетворить интересы обучающихся в соответствии с их собственными наклонностями и предпочтениями, которые реализуются за счет ученического компонента учебного плана.

Данная программа описывает элективный курс математики «Решение нестандартных задач», предназначенный для изучения в 10 классе.

Предполагаемый объем учебного времени для 10 класса — 1 час в неделю, 34 часа в год.

Актуальность элективного курса по математике

На современном этапе жизни общества важным является формирование творческой личности, владеющей математическим стилем мышления, умеющей обобщать, конкретизировать, анализировать, исследовать и др. Кроме того, в связи с итоговой аттестацией выпускников и вступительных экзаменов в форме тестирования, выбор пал на творческую, исследовательскую деятельность обучающихся по решению нестандартных задач.

При решении нестандартных задач развивается творческое, научно-исследовательское и логическое мышление, формируются способности нестандартно мыслить, проявляется самостоятельность, творчество, умение применять способы решения задач в практической деятельности и использовать полученные знания и умения при решении прикладных, практических и экономических задач.

Общие цели и задачи элективного курса по математике

В настоящее время ведётся интенсивная разработка и корректировка нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования в условиях современной образовательной среды общеобразовательных учреждений, повышении качества обучения предметам естественно-математического цикла с учётом запросов и потребностей общества. Частью этой разработки является создание методических материалов для организации и проведения элективных курсов по предметам естественно-математического цикла в условиях современной образовательной среды.

Основной целью изучения курса является развитие логического мышления школьников. Также данный курс помогает систематизировать и углубить знания, закрепить и упрочить умения, необходимые для продолжения обучения в вузах. Элективный курс позволяет показать существование различных нестандартных способов решения задач, которые отсутствуют на страницах учебников. Школьник должен научиться использовать любые способы решения задач и уметь делать выбор в пользу того или иного способа, исходя из собственного представления об эффективности принятого направления.

В тоже время курс направлен на выполнение следующих **задач:**

– формирование и развитие у старшеклассников аналитического и логического мышления при проектировании решения задачи;

– расширение и углубление курса математики;

– формирование опыта творческой деятельности обучающихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;

– развитие коммуникативных и общеучебных навыков работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т.д.

Информация о количестве учебных часов, на которое рассчитана рабочая программа.

Элективный курс рассчитан на 34 часа: по 1 часу в неделю.

Формы организации образовательного процесса.

Основной формой обучения при изучении элективного курса является урок. На уроке используются различные формы и методы работы с обучающимися:

– при знакомстве с новыми способами решения — работа учителя с демонстрацией примеров;

– при использовании традиционных способов — фронтальная работа обучающихся;

– индивидуальная работа;

– анализ готовых решений;

– самостоятельная работа с тестами.

Планируемые результаты обучения

В результате изучения данного курса обучающиеся должны уметь:

– выполнять вычисления с дробями, степенями, процентами;

– работать с формулами;

– решать задачи на смекалку;

– исследовать текстовые задачи, находить подходящее решение задач;

– проводить тождественные преобразования уравнений и неравенств

– решать линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения и неравенства.

– решать системы уравнений изученными методами.

– применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований, векторный, координатный) к решению геометрических задач.

Изучение данного курса дает обучающимся возможность:

– повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;

– освоить основные приемы решения задач;

– овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;

– познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;

– повысить уровень математической культуры, творческого развития, познавательной активности.

Содержание программы

1. **Вычисления (6 часов)**

   Действия с дробными выражениями. Действия со степенями. Проценты. Основные правила. Действия с формулами. Числа и их свойства. Цифровая запись числа. Решение нестандартных задач на применение признаков делимости.

2. **Задачи на смекалку (4 часа)**

   Анализ утверждений. Определение оптимального варианта. Задачи, требующие неординарного подхода к решению.

3. **Текстовые задачи (8 часов)**

   Задачи на смеси, сплавы и проценты (в том числе сложные проценты). Задачи с целочисленными неизвестными. Олимпиадные задачи.

4. **Уравнения, неравенства и системы (12 часов).**

   Основные принципы и методы решения алгебраических уравнений, неравенств, систем (линейные, квадратные, рациональные, дробно-рациональные, с модулем). Решение уравнений и неравенств нестандартными способами, решение уравнений и неравенств с параметрами.

5. **Прикладная геометрия (4 часа)**

   Применение геометрических теорем для нахождения площадей земельных участков. План местности. Нахождение реальных размеров объектов, изображенных на плане. Задачи прикладного содержания на основе нахождения объема тел. Задачи прикладного содержания на комбинацию геометрических тел.

№ урока	**Тема раздела, урока**	**Количество часов**	**Даты по плану**	**Даты по факту**
	Вычисления	**6 часов**		
1	Действия с дробными выражениями	1		
2	Действия со степенями	1		
3	Проценты. Основные правила.	1		
4	Действия с формулами.	1		
5	Числа и их свойства. Цифровая запись числа.	1		
6	Решение нестандартных задач на применение признаков делимости.	1		
	Задачи на смекалку	**4 часа**		
7	Анализ утверждений	**1**		
8	Определение оптимального варианта	1		
9	Задачи, требующие неординарного подхода к решению.	1		
10	Контрольная работа по темам «Вычисление» и «Задачи на смекалку»	1		
	Текстовые задачи	**8 часов**		
11	Классификация и методы решения текстовых	1		

	задач			
12	Задачи на концентрацию и процентное содержание	1		
13	Задачи на процентный прирост	1		
14-15	Задачи с целочисленными неизвестными	2		
16-17	Олимпиадные задачи	2		
18	Контрольная работа по теме «Текстовые задачи»	1		
	Уравнения, неравенства и системы	**12 часов**		
19	Общие сведения об уравнениях. Основные принципы решения уравнений: равносильные преобразования и преобразования, при которых возможно появление посторонних корней, и потеря корней.	1		
20	Основные методы решения уравнений: разложение на множители, замена переменной.	1		
21-22	Системы уравнений, общие принципы и основные методы решения.	1		
23	Алгебраические уравнения, сводящиеся к системам уравнений.	1		
24	Некоторые искусственные способы решения уравнений и неравенств уравнений	1		
25	Общие принципы решения неравенств. Основной метод решения неравенств — метод интервалов.	1		
26-27	Алгебраические уравнения и неравенства с модулями.	2		
28-29	Алгебраические уравнения и неравенства с параметрами.	2		
30	Контрольная работа по теме «Уравнения, неравенства и системы»	1		
	Прикладная геометрия	**4**		
31	План местности. Нахождение реальных размеров объектов, изображенных на плане.	1		
32	Задачи прикладного содержания на основе нахождения объема тел.	1		
33	Задачи прикладного содержания на комбинацию геометрических тел.	1		
34	Итоговая контрольная работа	1		

2.2 Методические рекомендации по использованию нестандартных задач на уроках элективного курса

Эффективность системы нестандартных задач в значительной мере зависит от степени творческой активности учеников при их решении.

Собственно, одно из основных назначений системы нестандартных задач и заключается в том, чтобы активизировать мыслительную деятельность учеников на уроке.

Нестандартные задачи должны, прежде всего, будить мысль обучающихся, заставлять ее работать, развиваться, совершенствоваться. Говоря об активизации логического мышления учеников, нельзя забывать, что при решении нестандартных задач обучающиеся не только выполняют построения, преобразования и запоминают формулировки, но и обучаются четкому логическому мышлению, умению рассуждать, сопоставлять и противопоставлять факты, находить в них общее и различное, делать правильные умозаключения [25].

Обучение на данных уроках ориентировано на развитие логического мышления школьника — он выступает в роли исследователя, творца, учитель — в роли невидимого руководителя. Обучая ребят по данному методу, можно выявить следующие изменения в личности школьника, а именно:

– у обучающихся (в соответствии с возможностями каждого) развивается логическое мышление, воображение;

– дети учатся творчески выполнять любую поставленную учебную задачу;

– проявляется интерес к математике.

Задача учителя во время любого этапа урока заинтересовать учеников к решению нестандартных задач. Развить логическое мышление, побудить их творчески мыслить, вызвать азарт решения нестандартной задачи; показать красоту именно сложного задания и, конечно же, обеспечить ситуацию успеха [18].

Занятия элективного курса предполагают решение различных учебных задач и заданий, в процессе выполнения которых обучающиеся учатся наблюдать, подмечать сходства и различия, замечать изменения, выявлять причины этих изменений, их характер и на этой основе делать выводы и обобщения [11].

Исходя из всего выше сказанного, разработаны методические рекомендации по использованию нестандартных задач на уроках математики с целью развития логического мышления обучающихся:

1) В целях совершенствования преподавания математики целесообразна дальнейшая разработка новых методик использования нестандартных задач на уроках математики;

2) Систематически использовать на уроках нестандартные задачи, способствующие у обучающихся развитие логического мышления.

3) Осуществляя целенаправленное обучение школьников решению нестандартных задач, с помощью специально подобранных систем задач, учить их наблюдать, пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями и делать соответствующие выводы.

4) Учитывать индивидуальные особенности школьника, дифференциацию познавательных процессов у каждого из них, используя нестандартные задачи различного типа.

5) Важно, чтобы обучающиеся решали не конкретную задачу, а искали общий принцип решения нестандартных задач данного вида.

6) На уроке необходима специальная деятельность школьников, направленная на выяснение сути встречаемых в условии нестандартных задач понятий и отношений. Экспериментальное обучение показало, что без понимания сути последних невозможно успешно решить нестандартную задачу.

7) При обучении необходимо так организовать учебную деятельность школьников, чтобы они сами “открывали” способы решения нестандартных задач и принципы их построения. При этом нужно

рассматривать с учащимися все предложенные ими идеи и отбрасывать лишь те, которые не имеют “рационального зерна”.

8) Необходимо, чтобы обучающиеся не только осознавали способ решения нестандартной задачи, но и понимали принцип его построения, а также старались осознавать основание своих действий.

На уроках математики следует уделять большое внимание решению системы нестандартных задач. Прежде всего, чтобы обучение решению нестандартных задач было успешным, учитель должен сам разобраться с задачей, изучить методику работы.

2.3 Методические рекомендации по содержанию уроков

Занятие 12. Задачи на концентрацию и процентное содержание

Первым делом необходимо повторить такие понятия, как:

1) концентрация (доля чистого вещества в смеси (сплаве));
2) масса смеси (сплава);
3) масса чистого вещества в смеси (сплаве).

При решении таких задач нужно использовать следующие понятия и формулы.

Пусть даны (например) три различных вещества A, B, C с массами M_A, M_B и M_C соответственно. *Массовой концентрацией* вещества A в смеси называется величина c_A , вычисляемая по формуле

$$c_A = \frac{M_A}{M_A+M_B+M_C}.$$

Соответственно определяются массовые концентрации веществ B и C в смеси.

Процентными содержаниями веществ A, B, C в данной смеси называются величины

$$p_A\% = c_A \cdot 100\%, p_B\% = c_B \cdot 100\%, p_C\% = c_C \cdot 100\%.$$

По аналогичным формулам вычисляются концентрации веществ в смеси для случаев, когда число различных смешиваемых веществ равно двум, четырем, пяти и т.д.

Объемные концентрации веществ в смеси определяются такими же формулами, как и массовые концентрации, только вместо масс компонент M_A, M_B и M_C в этих формулах будут стоять объемы компонент V_A, V_B и V_C. В тех случаях, когда речь идет об объемных концентрациях, обычно предполагается, что при смешивании веществ объем смеси будет равен сумме объемов компонент. Это предположение не является физическим законом, а представляет собой соглашение, принимаемое при решении задач на объемную концентрацию.

Пример 1. Имеются два сплава меди с разным содержанием меди. Число, выражающее в процентах содержания меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержания мели во втором сплаве. Оба эти сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определите процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором 12кг.

Решение:

Пусть $x\,\%$ - процентное содержание меди в первом сплаве, тогда $(x+40)\%$ - процентное содержание меди во втором сплаве

Занесем данные в таблицу:

	Масса меди (в кг)	Концентрация (%)	Масса сплавов
1 сплав	6	x	$\frac{6}{x}\cdot 100$
2 сплав	12	$x+40$	$\frac{12}{x+40}\cdot 100$
Смесь сплавов	18	36	$\frac{18}{36}\cdot 100 = 50$

Масса нового сплава состоит из масс двух старых, из чего следует уравнение: $\frac{6}{x}\cdot 100 + \frac{12}{x+40}\cdot 100 = 50$

Разделим обе части уравнения на 100:

$$\frac{6}{x}+\frac{12}{x+40}=\frac{1}{2}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$6\cdot 2\cdot (x+40)+12\cdot 2\cdot x=1\cdot x\cdot (x+40)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим уравнение:

$$x^2+4x-480=0$$

Данное квадратное уравнение имеет 2 корня: $x=20$, $x=-24$ – не удовлетворяет условию задачи.

Отсюда, 20% - процентное содержание меди в первом сплаве, тогда 20+40=60% - процентное содержание меди во 2-ом сплаве

Ответ: 20%, 60%.

Пример 2. Смешав 40%-й и 15%-й растворы поваренной соли, добавили 3 кг чистой воды и получили 20%-й раствор соли. Если бы вместо 3кг воды добавили 3кг раствора, содержащего 80% соли, то получили бы 50%-й раствор соли. Сколько килограммов 40%– го раствора соли было смешано?

Решение:

Пусть x - масса первого раствора (доля соли в нем: 0,4),

y - масса второго раствора (доля соли: 0,15),

доля соли в воде = 0%;

масса получившегося раствора и в первом, и во втором случае (3+x+y).

В первом случае:

$$0{,}4x+0{,}15y+0\cdot 3=0{,}2(x+y+3)$$

Во втором случае:

$$0{,}4x+0{,}15y+0{,}8\cdot 3=0{,}5(x+y+3)$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}0{,}4x+0{,}15y+0\cdot 3=0{,}2(x+y+3)\\0{,}4x+0{,}15y+0{,}8\cdot 3=0{,}5(x+y+3)\end{cases}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases}0{,}2x-0{,}05y=0{,}6\\0{,}1x+0{,}35y=0{,}9\end{cases}$$

Решим уравнение любым удобным способом и получим $x = 3{,}4$, $y = 1{,}6$.

40%– го раствора соли было 3,4 кг.

Ответ: 3,4 кг.

Пример 3. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70%-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90%-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился r%-ный раствор серной кислоты? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

Решение:

Обозначим через x л объем 90%-ного раствора серной кислоты, который переливается из второго сосуда в первый. В этом объеме содержится $\frac{90x}{100} = \frac{9x}{10}$ л чистой (100%-ной) серной кислоты. Первоначально в первом сосуде объем чистой серной кислоты был равен $\frac{70}{100} \cdot 4 = \frac{7}{10} \cdot 4$ л. После того как в первый сосуд долили x л 90%-ного раствора серной кислоты, в нем будет содержаться $\frac{7}{10} \cdot 4 + \frac{9}{10} \cdot x$ л чистой серной кислоты. Используя определение объемного процентного содержания, в соответствии с условием задачи получаем уравнение $\frac{\frac{7}{10} \cdot 4 + \frac{9}{10} \cdot x}{x+4} \cdot 100\% = r\%$

Решая это уравнение, находим величину x и перелитого объема:

$$x = \frac{4(r-70)}{90-r}$$

Остается выяснить, при каких значениях r задача имеет решение. Из условия задачи очевидно, что количество доливаемого раствора не может превысить 2 л, так как объем первого сосуда равен 6 л, т.е. $0 \leq x \leq 2$. Используя найденное значение для x, получим ограничения на r:

$$0 \leq \frac{4(r-70)}{90-r} \leq 2$$

Решая это неравенство (с учетом того, что $70 \leq r \leq 90$), получим $70 \leq r \leq 76\frac{2}{3}$.□

Ответ: $\frac{4(r-70)}{90-r}$ л; задача имеет решение при $70 \le r \le 76\frac{2}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Сплавили 2 кг сплава цинка и меди, содержащего 20% цинка, и 6 кг сплава цинка и меди, содержащего 40% цинка. Найдите процентную концентрацию меди в получившемся сплаве.

2. Сколько граммов 40% раствора азотной кислоты нужно прибавить к 120 г 5% раствора азотной кислоты, чтобы образовался 20% раствор?

3. Имеются два сплава меди с цинком. Если сплавить 1 килограмм первого сплава с 2 килограммами второго сплава, то получится сплав с 50% содержанием меди. Если же сплавить 4 килограмма первого сплава с 1 килограммом второго сплава, то получится сплав с 36% содержанием меди. Найти процентное содержание меди в первом и во втором сплавах.

Занятие 13. Задачи на процентный прирост

Существуют *три основных вида задач «на проценты»*:

1. Найти число a, составляющее n процентов от числа b.

Решение. $a = 0{,}01n \cdot b$

2. Обратная задача: найти число b, если n процентов от него равно a.

Решение. $b = a/0{,}01n$.

3. Найти, сколько процентов составляет число a от числа b.

Решение. $n = a/b \cdot 100$.

Понятия и формулы, используемые в задачах на проценты**.**

Пусть переменная величина A, зависящая от времени t, в начальный момент t=0 имеет значение A_0, а в некоторый момент времени t_1 имеет значение A_1. *Абсолютным приростом* величины A за время t_1 называется разность $A_1 - A_0$, *относительным приростом* величины A за время t_1 - $\frac{A_1-A_0}{A_0}$ и *процентным приростом* величины A- величину $\frac{A_1-A_0}{A_0} \cdot 100\%$.

Обозначая процентный прирост величины $p\%$, получаем следующую формулу, связывающую значения A_1 и A_0 и процентный прирост p:

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\% = p\%$$

Запись последней в виде $A_1 = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100}$, позволяет по известному значению A_0 и заданному значению p вычислять A_1, т.е. значение А в момент t_1.

Пусть теперь известно, что и далее при $t > t_1$ величина А имеет процентный прирост $p\%$. Тогда в момент времени $t_2 = 2t_1$, значение величины $A_2 = A(t_2)$ будет равно $A_2 = A_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A \cdot (1 + \frac{p}{100})^2$.

И вообще в момент времени в момент времени nt_1 значение $A_n = A(t_n)$ будет равно

$$A_n = A_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n \tag{1}$$

Если же на за время t_1(на первом этапе) величина А изменилась на $p_1\%$, на втором этапе (т.е. за время $t_2 - t_1 = t_1$) – на $p_2\%$, и т.д., то значение величины А в момент $t_n = nt_1$ вычисляется по формуле:

$$A_n = A_0 \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot (1 + \frac{p_2}{100}) \cdot (1 + \frac{p_3}{100}) \cdots (1 + \frac{p_n}{100}) \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называются формулами «сложных процентов».

Пример 1. Предприятие работало три года. Выработка продукции за второй год работы возросла на р %, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в предыдущий, определить, на сколько процентов увеличилась выработка за второй год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Решение:

Обозначим количество продукции, произведенной за первый, второй, третий годы работы предприятия, через A_1, A_2, A_3, соответственно. По условию задачи за второй год прирост составил $p\%$, а за третий год — $(p + 10)\%$. В соответствии с определением процентного прироста эти условия дают два уравнения $\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot 100 = p,\ \frac{A_3 - A_2}{A_2} \cdot 100 = p + 10.$

По условию задачи также известно, что за два года производительность возросла на 48,59 %, т.е. в третий год предприятие производило на 48,59 %

продукции больше, чем в первый год. Это условие можно записать в виде уравнения $\frac{A_3 - A_1}{A_1} \cdot 100 = 48{,}59$.

$$\begin{cases} A_2 = A_1 \cdot (1 + \frac{p}{100}) \\ A_3 = A_2 \cdot (1 + \frac{p + 10}{100}) \\ A_3 = A_1 \cdot (1 + \frac{48{,}59}{100}) \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на второе, получаем

$A_3 = A_1 \cdot (1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p+10}{100})$.

Из полученного уравнения и третьего уравнения системы получаем уравнение для отыскания неизвестной величины p:

$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+10}{100}\right) = (1 + \frac{48{,}59}{100})$,

т.е. $p^2 + 210p - 3859 = 0$

Корни последнего уравнения $p_1 = 17$, $p_2 = -227$. По смыслу задачи подходит только первый корень.

Ответ: 17 %.

Пример 2. Известно, что вклад, находящийся в банке в начале года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества рублей положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 рублям, к концу следующего года 749 рублям. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного капитала положили бы во второй банк, а оставшуюся часть — в первый, то по истечении года сумма вклада в эти банки стала бы равной 710 руб. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

Решение:

Если обозначить p_1% и p_2% годовые процентные приросты вкладов в первом и втором банке, то за год вклад умножится на коэффициенты $1 + \frac{p_1}{100}$

и $1+\frac{p_2}{100}$. В дальнейшем эти коэффициенты придется возводить в квадрат и уравнения станут довольно сложными. Но так как в уравнениях будут участвовать лишь сами эти коэффициенты, то их и нужно обозначить через x и y: $x=1+\frac{p_1}{100}$, $y=1+\frac{p_2}{100}$.

Тогда, если z — исходное количество денег, то из условия задачи получаем уравнения

$$\frac{5}{6}zx+\frac{1}{6}zy=670$$
$$\frac{5}{6}zx^2+\frac{1}{6}zy^2=749$$
$$\frac{1}{6}zx+\frac{5}{6}zy=710$$

из которых нужно найти величину zx^2.

Из первого и третьего уравнения находим величины $zx=660$ и $zy=720$. Затем отношение $\frac{x}{y}=\frac{zx}{zy}=\frac{11}{12}$

Третье уравнение после частичной zx, zy подстановки дает

$550x+120y=749$.

Тогда сами числа x = 1,1 и y = 1,2. Наконец, искомая величина $zx^2=zx\cdot x=726$.

Ответ: 726 рублей.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В банк поместили некоторую сумму и через два года она выросла на 512,5 рублей. Сколько денег положили в банк, если вкладчикам выплачивается 5% годовых?

2. Цену товара снизили сначала на 20%, потом на 5% и ещё на 10%. На сколько снизили цену?

3. Владелец автозаправки повысил цену на бензин на 10%. Заметив, что количество клиентов резко сократилось, он понизил цену на 10 %. Как после этого изменилась начальная цена на бензин? (повысилась или понизилась и на сколько % -ов?)

Занятие 14–15. Задачи с целочисленными неизвестными

Целочисленность неизвестного обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющим остальным условиям задачи. Уравнения с целочисленными коэффициентами и значениями неизвестных обычно называют *диофантовыми*.

Греческий математик Диофант из Александрии жил в конце III века до нашей эры. Он отошел от традиционных в греческой математике геометрических проблем и занимался алгеброй. Основное его произведение "Арифметика" Сохранилось лишь шесть томов из предполагаемых тринадцати. В них содержится 189 уравнений с решениями. В большинстве случаев это неопределенные уравнения, т.е. имеющие несколько решений. Автора интересуют только одни решения— положительные и целые (иногда рациональные).

Общих методов Диофант не приводит: они меняются от задачи к задаче.

Пример 1. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб.56 коп., а за альбомы-56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

Решение:

Пусть купили x книг, (x-6) -альбомов, Тогда цена одной книги $\frac{10,56}{x}$ (руб.), одного альбома $\frac{0,56}{x-6}$ (руб.). Т.к. цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома, то $\frac{10,56}{x}-\frac{0,56}{x-6}>1$,т.к. $\mathrm{x}>0$, $\mathrm{x}-6>0$,решая неравенство, получим: $10,56(\mathrm{x}-6)-0,56\mathrm{x}>x(\mathrm{x}-6)$ или $x^2-16x+63,36<0$. Решением квадратного неравенства является промежуток $(7,2;8,8)$.

Т.к. по условию задачи x - натуральное число, то x=8.Итак, было куплено 8 книг.

Ответ: 8 книг.

Пример 2. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших успеваемость, заключен в пределах от 2,9 до 3,1%.Найдите минимально возможное число учеников в классе.

Решение:

Пусть в классе n учеников, из них m-повысили успеваемость, тогда процент учеников, повысивших успеваемость, будет $\frac{m}{n} \cdot 100\%$, и по условию задачи, $2{,}9 < \frac{m}{n} \cdot 100\% < 3{,}1$. Заметим, что $m \neq 0$, т.е. $m \geq 1$.

$\frac{m}{n} \cdot 100\% < 3{,}1$, $n < \frac{100m}{3{,}1}$. Т.к. $m \geq 1$, то $\frac{100m}{3{,}1} \geq \frac{100}{3{,}1}$, $\frac{100m}{3{,}1} \geq 32\frac{8}{11}$.

Итак, наименьшее значение n, которое возможно, равно 33(с учетом целочисленности n). Проверим пару $m = 1, n = 33$:

$$2{,}9 < \frac{m}{n} \cdot 100\% < 3{,}1$$

$$2{,}9 < \frac{1}{33} \cdot 100\% < 3{,}1$$

$$2{,}9 < 3{,}0303 \ldots < 3{,}1$$

Минимальное число учащихся в классе 33.

Ответ: 33.

Пример 3. На стоянке находятся машины марок «Москвич» и «Волга». Общее их число менее 30. Если увеличить вдвое число «Волг», а число «Москвичей» увеличить на 27, то «Волг» станет больше. Если увеличить вдвое число «Москвичей», не изменяя числа «Волг», то «Москвичей» станет больше. Сколько «Москвичей» и «Волг» находится на стоянке?

Решение:

Пусть x- «Москвичей», а y-“Волг».

Запишем условия задачи:

$$\begin{cases} x + y < 30, \\ 2y > x + 27, \\ 2x > y. \end{cases}$$

Т.к. неравенства одного знака можно складывать, то

$2y+2x > x+y+27$, $x+y > 27$, т.к. x и y- натуральные числа, то имеем два варианта, учитывая получившиеся условия:

$$\begin{cases} x+y<30 \\ x+y>27 \end{cases}$$

$x+y=28$ или $x+y=29$. Рассмотрим оба случая:

а) $x+y=28$, то $y=28-x$

$$\begin{cases} 2(28-\mathrm{x}) > x+27, \\ 2\,\mathrm{x} > 28-x. \end{cases} <=> \begin{cases} -3\mathrm{x} > -29, \\ 3\mathrm{x} > 28. \end{cases} <=> \begin{cases} x < 9\frac{2}{3}, \\ x > 9\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Т.е. решением системы является промежуток $(9\frac{1}{3}; 9\frac{2}{3})$, но в этом промежутке нет натуральных чисел, поэтому решение этой системы нас не устраивает.

б) $x+y=29$, то $y=29-x$

$$\begin{cases} 2(29-\mathrm{x}) > x+27, \\ 2\,\mathrm{x} > 29-x. \end{cases} <=> \begin{cases} -3\mathrm{x} > -31, \\ 3\mathrm{x} > 29. \end{cases} <=> \begin{cases} x < 10\frac{1}{3}, \\ x > 9\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $(9\frac{2}{3}; 10\frac{1}{3})$, в котором находится единственное целое значение $x=10$,

тогда $y=29-10=19$. Итак, на стоянке находилось 10 «Москвичей» и 19 «Волг».

Ответ: 10 «Москвичей», 19 «Волг».

Пример 4. Группу людей пытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Когда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд, то все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы ещё на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

Решение:

Пусть N - число полных рядов по 7 человек, тогда всего человек было $7N$.

Если предположить, что все ряды и по 8, и по 5 чел. были бы полными, то число людей при таком заполнении было бы больше, поэтому справедливо, что:

$$\begin{cases} 7\mathrm{N} < 5 \cdot (\mathrm{N}+7), \\ 7\mathrm{N} < 8 \cdot (\mathrm{N}-2). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\mathrm{N} < 5 \cdot N + 35, \\ 7\mathrm{N} < 8 \cdot N - 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2N < 35, \\ N > 16. \end{cases} \Rightarrow$$

$N<17{,}5, N>16. \Rightarrow N=17$

Тогда число людей равно $7 \cdot 17 = 119$.

Ответ: 119 человек.

Пример 5. Как набрать сумму 146 руб. из 20 купюр достоинством 1, 3, 5, 10 рублей, если число “пятирублевок” больше числа “трехрублевок” и не больше “десятирублевок” (предполагается, что в набираемой сумме должны присутствовать купюры всех достоинств).

Решение:

Пусть x,y,z,t - число купюр достоинством 1б3б5б10 рублей соответственно.

Тогда, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, и имеет место система :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 20, \\ x + 3y + 5z + 10t = 146, \\ y < z \leq t. \end{cases} \tag{1}$$

Вычитая из 2-ого уравнения 1-ое, получим:

$$2y + 4z + 9t = 126\,, \tag{2}$$

откуда видим, что t- четное число. С другой стороны, применяя неравенство системы к уравнению (2) и учитывая, что $y \geq 0$ получаем $9t < 6y + 9t < 2y + 4z + 9t = 126 < 15t$

Таким образом, $8{,}5 < t < 14$. И т.к. t- целое, четное, то возможны лишь два случая t=10,12.

При t=10 система (1) принимает вид $\begin{cases} x + y + z = 10, \\ x + 3y + 5z = 46, \\ y < z \leq 10. \end{cases}$

Откуда, как и выше получаем: $3y < y + 2z = 18 < 3z$.

Следовательно, у- четное и $z > 6$, а $y < 6$, т.е. для у возможны лишь два случая $y = 2$, $y = 4$.

При $y = 2$ из уравнения $y + 2z = 18$ вытекает $z = 8$, что невозможно, т.к. $y + z$ должно быть меньше 10.

При $y = 4$ получаем $z = 7$, что невозможно, т.к. $y + z$ должно быть меньше 10.

Исследуем случай, когда $t = 12$. Имеем из системы (1):

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ x + 3y + 5z = 26, \end{cases} \quad <=> \quad y + 2z = 9$$

$$y < z \leq 12$$

Откуда видно, что у- нечетное, причем $3y < y + 2z = 9 < 3z$

т.е. $y < 3$ и значит у=1, но тогда $z = 4$, $x = 3$.

Ответ: купюр по 1 рублю- 3, по 3 рубля- 1, по 5 рублей- 4, по 10 рублей- 12.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 рублей. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, и каждому пришлось внести на 1 рубль больше. Сколько студентов участвовало в покупке?

2. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загруженным не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось ещё на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

3. При подведении итогов работы бригады за месяц вычислено, что процент числа членов бригады перевыполнивших намеченный план, составляет от 92,5 % до 93,5 %. Определить минимальное возможное число членов бригады.

4. Школьники, внеся одинаковую сумму, купили географическую карту, стоимость которой от 10 до 12 рублей. Если бы учеников в классе было на 3 меньше, то каждому пришлось заплатить на 0,5 руб. больше. Сколько учеников участвовали в покупке?

5. Группа абитуриентов из 30 человек получила на экзамене оценки “2”, “3”, “4” и “5”. Сумма полученных оценок равна 93, причем “3” больше “5” и меньше “4”. Кроме того, число “4” делится на 5, а число “5” четное. Сколько двоек получила группа?

6. Покупатель купил несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг куплено на 4 штуки больше, чем тетрадей. За все тетради он заплатил 72 коп., а за все книги -- 6 руб. 60 коп. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то покупатель истратил бы на покупку меньше, чем 4 руб. 44 коп. Сколько куплено тетрадей?

7. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в три раза, а красных - в два раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько было в каждом комплекте синих и красных карандашей?

2.4 Описание и результаты экспериментальной работы

Рассмотрим характеристику классного коллектива МОУ-СОШ № 8 г. Клин, Московской обл., в котором проходило наше исследование.

В 10 «А» классе учится 22 человек: из них 12 девочек и 10 мальчиков.

Обучающиеся из:

- многодетных семей – 2 человека;
- неполных семей – 6 человек.

Детей из неблагополучных семей, под опекой нет.

Большая часть класса — активные подростки, любят заниматься спортом, увлекаются танцами. Интересы у детей разносторонние: занимаются разными видами танцев, боксом, легкой атлетикой, спортивной акробатикой, игрой на музыкальных инструментах.

В целом класс дружный, общительный. Дети общаются не только с одноклассниками, но и классами постарше и помладше. Деления на микро группы нет.

Для осуществления формирования логического мышления обучающихся 10 класса был составлен элективный курс по математике «Решение нестандартных задач».

Исследование уровня развития логического мышления школьников проводилось во время изучения 3 раздела элективного курса: «Текстовые задачи».

Об уровне развития логического мышления обучающихся можно судить по их умению решать нестандартные задачи, исследовать текстовые задачи и подбирать подходящее решение.

Для того чтобы установить уровень развития умений, нами была разработана самостоятельная работа. Кроме того, проанализировав эти работы, можно выяснить решение какого вида задач вызывает у школьников затруднения.

Текст самостоятельной работы приведен в приложении А.

Нами было выделено три уровня умений:

– высокий – все задания выполнены верно. Возможно наличие мелких недочетов, не искажающие общую картину подбора правильного решения;

– средний – выполнено 67-34% заданий, т. е из 3 предложенных задач было решено 2 правильно;

– низкий – правильно решенных заданий ниже 33% (правильно решенных задач 1 или все решены неправильно).

После проведенного анализа самостоятельной работы были получены следующие результаты, которые представлены в таблице 1.

Таблица 1

Высокий уровень умений		Средний уровень умений		Низкий уровень умений	
%	Количество	%	Количество	%	Количество
9	2	41	9	50	11

Также, для подтверждения результатов исследования на примере темы «Текстовые задачи», со школьниками была проведена методика «Сложные аналогии». *Цель методики:* методика используется для выявления того, насколько испытуемому доступно понимание сложных логических отношений и выделение абстрактных связей. Предназначена для испытуемых подросткового, юношеского возраста и взрослых.

Описание: методика состоит из 20 пар слов — логических задач, которые предлагается решить испытуемому. Его задача выяснить какой из шести типов логической связи заключен в каждой паре слов. В этом ему поможет "шифр" — таблица, в которой приводятся образцы использующихся типов связи и их буквенное обозначение А, Б, В, Г, Д, Е.

Испытуемый должен определить отношение между словами в паре, затем найти "аналог", то есть выбрать в таблице "шифр" пару слов с такой же логической связью, а после этого отметить в ряду букв (А, Б, В, Г, Д, Е) ту, которая соответствует найденному аналогу из таблицы "шифр". Время выполнения задания ограничено пятью минутами.

Материал и ключ к методике представлены в приложении Б.

В таблице 2 представлена шкала оценок.

Таблица 2

Уровень развития вербально-логического мышления	Низкий	Средний	Высокий
Количество правильных ответов	менее 10	10-14	15-20

После проведенного анализа методики были получены следующие результаты, которые представлены в таблице 3.

Таблица 3

Высокий уровень		Средний уровень		Низкий уровень	
%	Количество	%	Количество	%	Количество
13	3	41	9	46	10

Результаты исследований практически идентичны. Данные отличают не более чем на 5 %. На рисунке 1 представлены результаты методики «Сложные аналогии» в виде диаграммы.

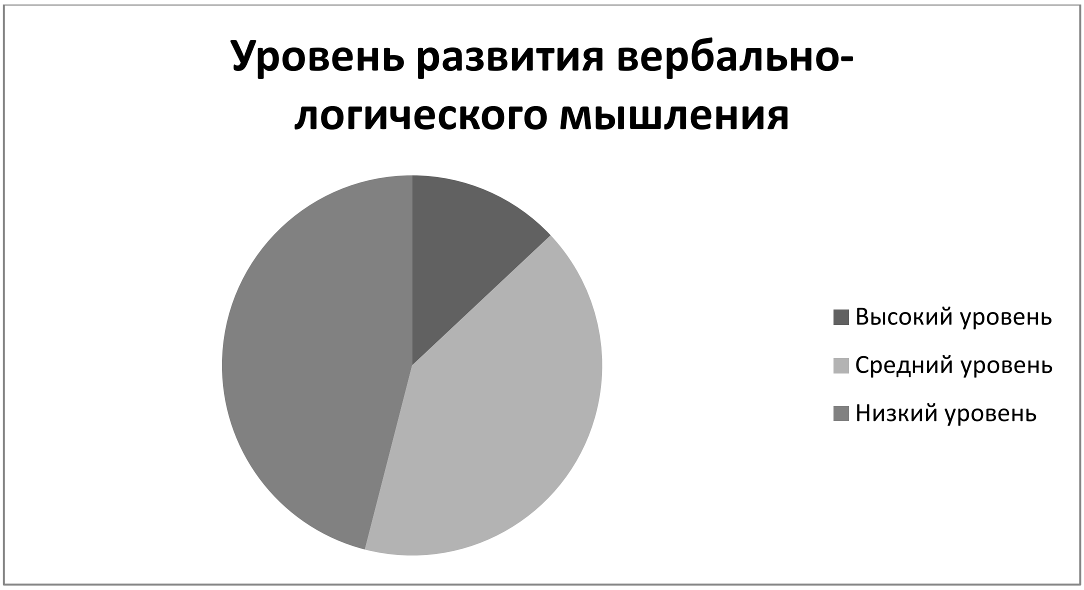

Рисунок 1

После получения результатов исследования с детьми со школьниками было проведено 6 занятий по теме «Текстовые задачи», на которых были разобраны и предложены для самостоятельного решения нестандартные задачи.

В процессе решения математических задач у школьников складывается стиль мышления, при котором они учатся соблюдать определенную схему рассуждений, четко разбивать на составляющие и выражать свои мысли, определять точность символики. Решение нестандартных заданий напрямую связано с творчеством личности, от этого зависит продуктивность учебной деятельности по становлению у школьников умения мыслить логически.

Развитие логического мышления при изучении математики состоит, в формировании у обучающихся характерных для этого предмета приемов мыслительной деятельности. При этом важно, чтобы в структуру умственной деятельности школьников помимо алгоритмических умений и навыков, фиксированных в стандартных правилах, формулах и способах действий, вошли эвристические приемы, которые необходимы для решения творческих задач, применение знаний в новых ситуациях, доказательства высказываемых утверждений [9].

Устойчивые положительные результаты в целенаправленном развитии логического мышления школьников можно получить при выполнении методических рекомендаций к содержанию занятий составленного нами элективного курса. Доказательством результативности опытно-экспериментальной работы явились данные контрольного этапа, который заключался в определении уровня сформированности логического мышления в целом, проведенного по тем же методикам, которые использовались в начале опытно-экспериментальной работы.

Для этого школьникам было предложено выполнить контрольную работу (приложение В), задания которой подобны заданиям самостоятельной работы (приложение А) и методику «Сложные аналогии».

Результаты контрольной работы представлены в таблице 4.

Таблица 4

Высокий уровень умений		Средний уровень умений		Низкий уровень умений	
%	Количество	%	Количество	%	Количество
18	4	55	12	27	6

Результаты выполнения методики «Сложные аналогии» представлены в таблице 5:

Таблица 5

Высокий уровень		Средний уровень		Низкий уровень	
%	Количество	%	Количество	%	Количество
18	4	50	11	32	7

Результаты исследований практически совпали. Данные отличаются не более чем на 5 %.

На рисунке 2 представлены результаты методики «Сложные аналогии» в виде диаграммы:

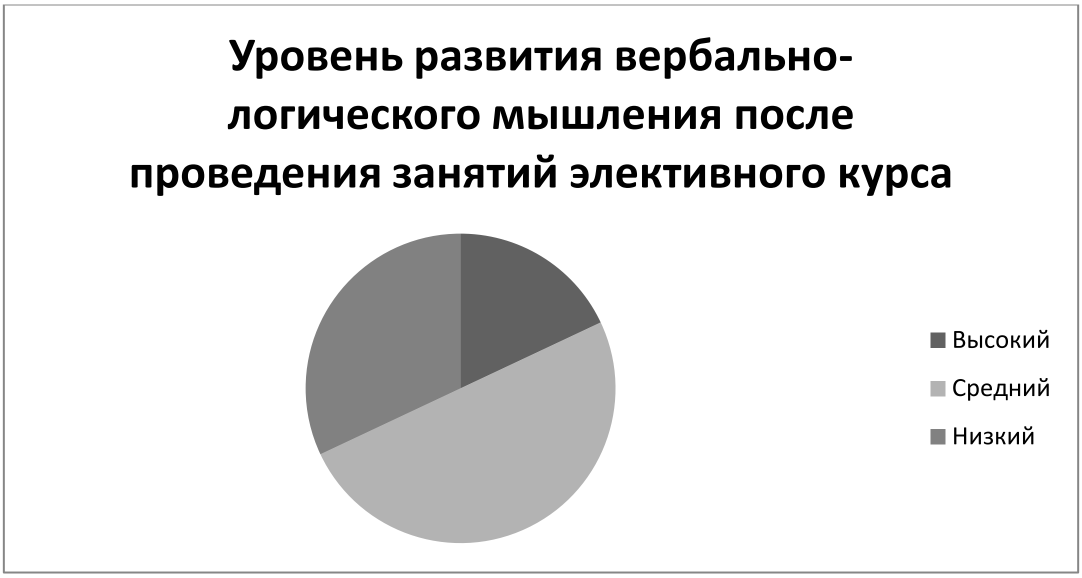

Рисунок 2

Сравнение результатов исследований уровня развития логического мышления до и после проведения занятий элективного курса представлены в таблице 6:

Таблица 6

	Высокий уровень		Средний уровень		Низкий уровень	
	%	Количество	%	Количество	%	Количество
до	13	3	41	9	46	10
после	18	4	50	11	32	7

На рисунке 3 представлены данные таблицы 6 в виде диаграммы.

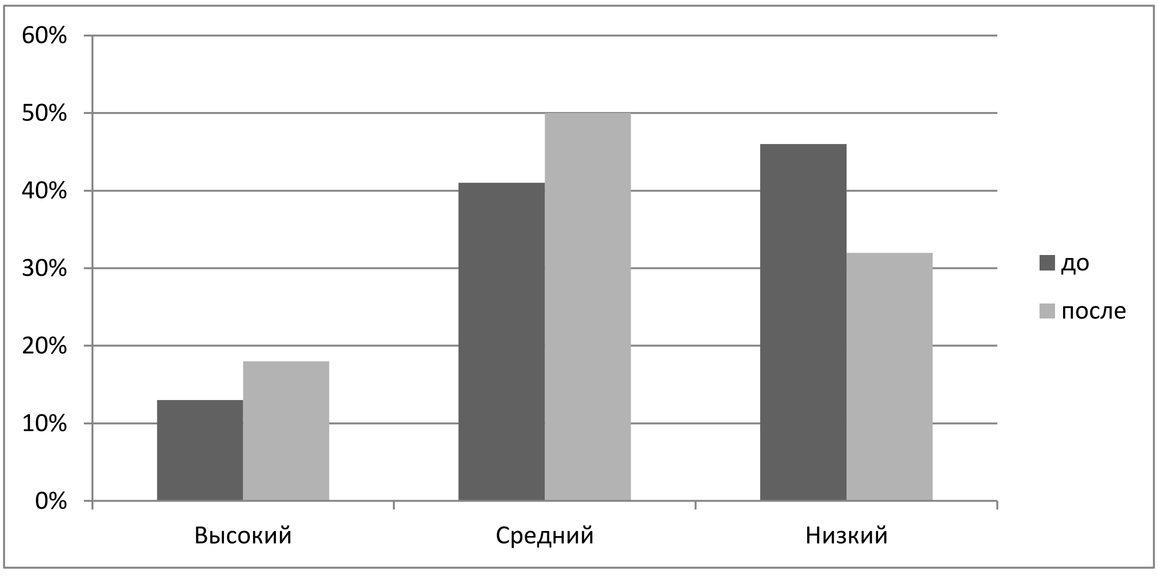

Рисунок 3

Сравнивая результаты исследований, мы отмечаем заметные изменения. Больший процент школьников стал обладать высоким и средним уровнем логического мышления, а число школьников, обладающих низким уровнем, наоборот, сократилось.

Как показывают данные таблицы, процент школьников, обладающих высоким уровнем развития логического мышления, увеличился на 5%, число школьников со среднем уровнем развития логического мышления возросло на 9%, число школьников с низким уровнем развития логического мышления уменьшилось на 14%.

Вывод: проведенный анализ подтвердил эффективность предлагаемой системы нестандартных задач, обеспечившей более высокий уровень развития логического мышления у школьников старших классов, показал эффективность использованных нами средств развития логического мышления обучающихся старшего школьного возраста. Так как наши исследования проходили в рамках изучения только одного раздела элективного курса и уже имеют заметные сдвиги в результатах, то мы предполагаем, что использование полного элективного курса поможет добиться значительных результатов в улучшении уровня развития логического мышления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы являлась систематизация нестандартных задач в элективный курс и применение его для развития логического мышления обучающихся на уроках математики.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

– проанализирована психолого-педагогическая, научно-методическая литература для раскрытия сущности развития логического мышления, особенностей развития логического мышления обучающихся при решении нестандартных задач.

– выявлены педагогические условия развития логического мышления у обучающихся 10 классов.

– разработаны методические рекомендации по содержанию составленного элективного курса «Решение нестандартных задач» и использованию нестандартных задач на его уроках для формирования и развития логического мышления.

– проведен педагогический эксперимент по теме исследования.

Педагогический эксперимент заключался в следующем:

– изучение проблемы развития логического мышления обучающихся старшего школьного возраста;

– определение уровня сформированности логического мышления до начала эксперимента;

– проверка эффективности условий развития логического мышления в процессе решения нестандартных задач;

– изучение состояния развития логического мышления у школьников после проведения занятий элективного курса.

В работе также представлены результаты изучения динамики развития логического мышления у школьников 10 класса. Анализ динамики на контрольном этапе эксперимента показал, что у испытуемых произошло повышение уровня развития логического мышления. Такие изменения могут рассматриваться как правильная организация процесса развития логического мышления у школьников старших классов в процессе внедрения элективного курса «Решения нестандартных задач». Это свидетельствуют о том, что система нестандартных задач, которая реализована в ходе нашего эксперимента, существенно влияет на эффективность процесса развития логического мышления у школьников старших классов.

Проведенное опытно-экспериментальное исследование показало наличие положительной динамики в развитии логического мышления школьников старших классов, за время эксперимента у 14% учеников экспериментального класса повысился уровень развития логического мышления, повышение интереса к занятиям и результатов в учебе. Данное обстоятельство позволяет признать проведение опытно-экспериментального исследования успешным, а целесообразность и эффективность средств развития логического мышления школьников старших классов подтвержденными.

Таким образом, задачи, поставленные в начале работы, были решены, цель исследования достигнута, гипотеза подтверждена. Проведенное позволило наметить направление дальнейшей работы в рамках проблемы развития логического мышления обучающихся старшего школьного возраста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басова, Н. В. Педагогика и практическая психология: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Н. В. Басова. — Ростов.: Феникс, 2010. – 414с.

2. Васькова И.Д. Организация элективных курсов. – Режим доступа: https://portalpedagoga.ru/servisy/publik/publ?id=10247. – Дата доступа: 10.11.2016. — Портал педагога

3. Вербицкий, А.А. Активное обучение в школе: контекстный подход /А.А. Вербицкий. — М.: Просвещение, 2011. – С. 41.

4. Воронина, Г.А. Элективные курсы: алгоритмы создания, примеры программ: практическое руководство для учителя. / Г.А. Воронина. — М.: Айрис-пресс, 2008. – 128 с.

5. Выготский, Л. С. Педагогическая психология / Л. С. Выготский. — М.: Издательство «Педагогика Пресс», 2010. – 536 с.

6. Гольдич, В. А. Алгебра. Решение уравнений и неравенств / В.А. Гольдич. — Спб.: Литера, 2004. 178 с.

7. Давыдов, В. В. Проблемы развивающего обучения /В.В. Давыдов. — М.: Издательство «Педагогика», 2011. – 240 с.

8. Егорова, А. М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе / А.М. Егорова. – СПб.: Реноме, 2012. – С. 173-179.

9. Запрудский, Н. И. Современные школьные технологии / Н.И. Запрудский. — М.: Сэр-Вит, 2013. – С. 56.

10. Колягин, Ю.М., Луканкин, Г.Л. и другие. Методика преподавания математики/ Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин. — М.: Просвещение, 1977. – 478 с.

11. Крутихина, М.В. Элективные курсы по математике: учебно-методические рекомендации. / М.В. Крутихина. — Киров: ВятГГУ, 2006. – 40 с.

12. Кулагина, И. Ю. Возрастная психология: Развитие ребёнка от рождения до 17 лет: Учебное пособие третье издание/ И.Ю. Кулагина. — М.: УРАО, 1997. – 176 с.

13. Левитес, В.В. О способах и средствах развития логического мышления / В.В. Левитес // Перспективы развития начального образования России: Материалы межвузовской научно-практической конференции 23-24 марта 2004 г. — Мурманск: МГПУ, 2004. – С. 54-58.

14. Левитес, В.В. Развитие логического и алгоритмического мышления / А.В. Белошистая, В.В Левитес // Начальная школа плюс до и после. — 2006. — №9. – С. 15-23.

15. Левитес, В.В. Развитие логического мышления детей / В.В. Левитес // Известия Российской академии образования. — 2006. — №3. – С. 34-37.

16. Медведев, Л.Г. Формирование логического мышления на занятиях по математике: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / Л.Г. Медведев. — М.: Просвещение, 1986.– 159 с.

17. Петровский, А.В. Психология: Учебник для студентов высших педагогических учебных заведений. — Второе издание, стереотип. / А.В. Петровский, М.Г. Ярошевский. — М.: Академия, 2001. – 512 с.

18. Платонова, Т.А. Роль мотивации в познавательной деятельности / Т.А. Платонова. — М.: Педагогика, 2013. – С. 21-30.

19. Пойа, Д. Математическое открытие/ Д. Пойа. — М.: Наука, 1970.– 83 с.

20. Ревина, Е.Г. О возможностях развития логического мышления школьников средних классов в условиях целенаправленного обучения / Е.Г. Ревина // Межвузовский сборник научно-технических статей. — Вольск: ВВВУТ (ВИ), 2007. – С. 141-145.

21. Столяр, А.А. Методы обучения математике / А.А. Столяр. — Минск: Высшая школа, 1966. – 191 с.

22. Сухомлинский, В. А. Сто советов учителю / В. А. Сухомлинский.— Москва: Просвещение, 2012. – 206 с.

23. Фарков, А.В. Олимпиадные задачи по математике и методы их решения / А.В. Фарков.— М.: Народное образование, 2003. – 110 с.

24. Фридман, Л. М., Турецкий, Е. Н. Как научиться решать задачи. Пособие для учащихся / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. — М.: Просвещение, 1984. – 97 с.

25. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л.М. Фридман. — М.: Просвещение, 1983. – 245 с.

26. Цыпкин, А.Г., Пинский, А.И. Справочник по методам решения задач по математике / А.Г. Цыпкин, А.Н. Пинский. — М.: Наука, 1989. – 267 с.

27. Яковлев, Н. М. Методика и техника урока / Н. М. Яковлев. — М.: Издательство «Просвещение», 2012. – 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Цена товара после последовательных двух понижений на один и тот же процент уменьшилась со 125 рублей до 80 рублей. На сколько процентов цена снижалась каждый раз?

2. Имеется два сплава меди и свинца. Один сплав содержит 15% меди, а другой 65% меди. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получилось 200г сплава, содержащего 30% меди?

3. Школьник переклеивает свои марки в новый альбом. Если он будет наклеивать на каждый лист по 20 марок, то ему не хватит этого альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же в дополнение к старому альбому он возьмет новый, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего станет 500 марок. Сколько листов в новом альбоме?

Вариант 2

1. Костюм стоил 600 руб. После того как цена была снижена дважды, он стал стоить 432 руб., Причем процент снижения второй был в 2 раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов каждый раз снижалась цена?

2. В 4кг сплава меди и олова содержится 40% олова. Сколько килограммов олова надо добавить к этому сплаву, чтобы его процентное содержание в новом сплаве стало равным 70%?

3. Возле дома запланировано посадить более 15 лип и берез. Если число лип увеличить вдвое, а число берез увеличить на 18, то берез станет больше. Если же число берез увеличить вдвое, не меняя число лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез планируется посадить возле дома?

Приложение Б

Методика изучения вербально-логического мышления (тест «Сложные аналогии»)

Цель работы: изучение индивидуальных особенностей вербально-логического мышления.

Экспериментальный материал: бланк, содержащий 20 пар слов, и шифр из 6 пар слов.

Описание работы: испытуемому предлагается на бланке 20 пар слов, отношения между которыми построены на абстрактных логических связях. На этом же бланке в квадрате «Шифр» расположены 6 пар слов, обозначенных соответствующими цифрами от 1 до 6. Испытуемому необходимо определить отношения между словами в паре, найти аналогичную пару слов в квадрате «шифр» и обвести кружком соответствующую цифру. Время работы 5 минут.

Инструкция: «В нижней части бланка расположены 20 пар слов, между которыми имеются абстрактные логические связи. В верхней части бланка в квадрате «шифр» содержатся 6 пар слов, обозначенных цифрами от 1 до 6. Определите логическую связь между словами в каждой паре, найдите аналогичную пару слов в шифре и обведите соответствующую ей цифру.

Время работы – 5 минут».

Фиксация результатов: фиксируются ответы испытуемого.

Обработка результатов: правильность ответов испытуемого проверяется по ключу. Подсчитывается количество правильных ответов и сравнивается с оценочной шкалой.

Стимульный материал к методике «Сложные аналогии»

Шифр	
1. Овца – стадо	4. Свет – темнота
2. Малина – ягода	5. Отравление – смерть
3. Море – океан	6. Враг – неприятель

1. Испуг – бегство…………………………………………………….1 2 3 4 5 6

2. Физика – наука…………………………………………………..1 2 3 4 5 6

3. Правильно – верно………………………………………… ..1 2 3 4 5 6

4. Грядка – огород……………………………………………….1 2 3 4 5 6

5. Пара – два…………………………………………...……….1 2 3 4 5 6

6. Слово – фраза…………………………………………………1 2 3 4 5 6

7. Бодрый – вялый………………………………………………1 2 3 4 5 6

8. Свобода – воля……………………………………………...…1 2 3 4 5 6

9. Страна – город…………………………………………...……1 2 3 4 5 6

10. Похвала – брань…………………………………………...…1 2 3 4 5 6

11. Месть – поджог…………………………………………...…1 2 3 4 5 6

12. Десять – число……………………………………………..…1 2 3 4 5 6

13. Плакать – реветь……………………………………………..1 2 3 4 5 6

14. Глава – роман…………………………………………...……1 2 3 4 5 6

15. Покой – дыхание…………………………………………..…1 2 3 4 5 6

16. Смелость – геройство……………………………………..…1 2 3 4 5 6

17. Прохлада – мороз…..……………………………………..…1 2 3 4 5 6

18. Обман – недоверие………………………………………..…1 2 3 4 5 6

19. Пение – искусство…………………………………………...…1 2 3 4 5 6

20. Тумбочка – шкаф……………………………………………1 2 3 4 5 6

Ключ к методике «Сложные аналогии»

1-5	6-1	11-5	16-6
2-2	7-4	12-2	17-3
3-6	8-6	13-6	18-5
4-1	9-3	14-1	19-2
5-6	10-4	15-4	20-3

Шкала оценок

Уровень развития вербально-логического мышления	Низкий	Средний	Высокий
Количество правильных ответов	менее 10	10-14	15-20

Вывод: на основе сравнения индивидуальных результатов с оценочной шкалой делается вывод об уровне развития вербально-логического мышления.

Приложение В

Контрольная работа

Вариант 1

1. Определенный товар стоил 200 руб. Сначала его цену повысили на несколько процентов, а затем снизили на столько же процентов, после чего стоимость его стала 192 руб. На сколько процентов каждый раз происходила смена цены товара?

2. Смешали 300 г 60%-ного раствора серной кислоты и 200 г 80%-ного раствора серной кислоты. Сколько процентов серной кислоты в получившемся растворе?

3. В автогонках принимают участие команды, имеющие одинаковое число автомобилей марки «Волга» и марки «Москвич», причем в каждой команде число всех автомобилей меньше 7. Если в каждой команде число автомобилей марки «Волга» оставить без изменения, а число автомобилей марки «Москвич» увеличить в 3 раза, то общее число «Москвичей», участвующих в гонках, будет на 50 больше общего числа «Волг», а число автомобилей в каждой команде превысит 12. Определить число команд, участвующих в гонках, и число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде.

Вариант 2

1. Вкладчик положил в банк 4000 руб. За первый год ему начислена определенный процент годовых, а второго года банковский процент увеличен на 4%. На конец второго года на счете стало 4664 руб. Сколько процентов составила банковская ставка в первый год?

2. Определите, сколько нужно взять 10% раствора соли и 30% раствора этой же соли для приготовления 500 г 20% раствора.

3. Рабочий изготовил некоторое количество деталей видов А и В, причем деталей А он изготовил больше, чем деталей В. Если он изготовит деталей А в 2 раза больше, то общее число деталей станет меньше 32, а если деталей В в 2 раза больше, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей А и сколько деталей В изготовил рабочий?