ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЙ

СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ПЕРВАГО ПОРЯДКА

ОДНОЙ НЕИЗВѢСТНОЙ ФУНКЦІИ.

Сочиненіе Н. Н. Салтыкова.

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типографія и Литографія Зильбербергъ
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1899.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЙ

СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ПЕРВАГО ПОРЯДКА

ОДНОЙ НЕИЗВѢСТНОЙ ФУНКЦІИ.

Сочиненіе Н. Н. Салтыкова.

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типографія и Литографія Зильбербергъ
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1899.

На основанiи ст. 41 § 1 п. 4 и ст. 138 Унив. Устава выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, Мая 17 дня 1899 года.

Ректоръ Университета *М. Алексѣенко.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Теорія интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи излагалась много разъ различными учеными. Труды Лагранжа, Коши и Якоби относительно интегрированія разсматриваемыхъ уравненій были изложены съ большимъ искусствомъ В. Г. Имшенецкимъ [1]). Послѣ того наука обогатилась открытіями Майера и С. Ли, и разсматриваемая теорія достигла высокой степени совершенства. Интегрированіе уравненій съ частными производными приводится къ рѣшенію уравненій въ обыкновенныхъ или полныхъ дифференціалахъ. Интегралы ихъ, которые, съ точки зрѣнія Якоби, не имѣли значенія для интегрированія уравненій въ частныхъ производныхъ, въ настоящее время, благодаря работамъ С. Ли, всѣ служатъ къ уменьшенію трудностей рѣшаемой задачи. И если нѣкоторыя изъ открытій С. Ли не пользуются еще широкою извѣстностью, то это можно объяснить сложностью сопровождающихъ ихъ вычисленій [2]). Гурса, излагая ихъ въ своихъ извѣстныхъ лекціяхъ [3]), не ввелъ съ своей стороны существенныхъ упрощеній. Настоящее сочиненіе представляетъ опытъ упрощеннаго изложенія изслѣдованій С. Ли и даетъ очеркъ основныхъ положеній теоріи разсматриваемыхъ уравненій.

Читатель, знакомый съ литературой вопроса, легко замѣтитъ, гдѣ авторъ предлагаемаго сочиненія слѣдуетъ въ своемъ изложеніи за другими писателями тѣмъ болѣе, что всѣ эти мѣста, по возможности, отмѣчаются ссылками на первоисточники. Болѣе самостоятельныя мысли

---

[1]) Imschenetsky, Sur l'integration des equations aux derivées partielles du premier ordre. Traduit du russe par J. Hoüel. Paris, 1869.

[2]) См. по этому поводу указанія въ сочиненіяхъ самого С. Ли, „Mathematische Annalen“, Bd. VIII, SS. 216—217; Bd. IX, S. 246, и у Клейна, „Conférences sur les Mathematiques faites au Congrès de Mathematiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago“, французскій переводъ Логеля, стр. 9.

[3]) Goursat, Leçons sur l'integration des equations aux derivees partielles du premier ordre, Paris, 1891.

и соображенія автора были частью опубликованы въ „Comptes Rendus" Парижской Академіи Наукъ и „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества" [1]), частью являются впервые въ настоящемъ сочиненіи. Между ними можно назвать изложеніе теоріи линейныхъ уравненій съ частными производными и каноническихъ въ полныхъ дифференціалахъ, выраженіе условій замкнутости системъ уравненій съ частными производыми, доказательства существованія и единства ихъ интеграловъ, изложеніе способа Якоби и Майера интегрированія уравненій, заключающихъ явно неизвѣстную функцію, изученіе зависимости между задачами интегрированія уравненій съ частными производными и въ полныхъ дифференціалахъ, теорію ихъ главныхъ функцій, изложеніе усовершенствованія С. Ли способа интегрированія Якоби и Майера и критическія замѣчанія относительно изложенія этого усовершенствованія Майеромъ, рѣшеніе задачи С. Ли и другія болѣе незначительныя вещи, какъ доказательство извѣстнаго тождества Якоби, изложеніе теоріи послѣдняго множителя его и проч.

---

[1]) Comptes Rendus, t. CXXVIII, p. p. 166, 225, 274. Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, т. VI, Обобщеніе перваго способа Якоби интегрированія дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Оглавленіе.

ГЛАВА I.

Объ образованіи уравненій съ частными производными. Понятія объ ихъ интегралахъ.

Страницы.

ГЛАВА II.

Объ интегрированіи линейныхъ уравненій.

ГЛАВА III.

О существованіи интеграловъ уравненій съ частными производными.

ГЛАВА IV.

Объ интегрированіи уравненій съ частными производными.

ГЛАВА V.

О составленіи рѣшеній уравненій съ частными производными изъ общаго интеграла уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

ГЛАВА VI.

Теорія главныхъ функцій и ея приложенія.

ГЛАВА VII.

Рѣшеніе задачи С. Ли.

Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

ГЛАВА I.

Объ образованіи уравненій съ частными производными. Понятія объ ихъ интегралахъ.

1. Уравненія съ частными производными получаются при исключеніи изъ функціональныхъ уравненій и ихъ производныхъ входящихъ въ нихъ произвольныхъ постоянныхъ или произвольныхъ функцій.

Назовемъ черезъ z функцію независимыхъ перемѣнныхъ

$$x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n$$

и предположимъ, что существуетъ равенство

$$z = f(x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n\,,\ C_1\,,\ C_2\,,\ldots C_q)\,, \tag{1}$$

гдѣ $C_1\,,\ C_2\,,\ldots C_q$ — произвольныя постоянныя. Обозначимъ черезъ

$$p_1\,,\ p_2\,,\ldots p_n$$

частныя производныя перваго порядка функціи z соотвѣтственно по перемѣннымъ

$$x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n\,.$$

Уравненіе (1), дифференцируя его по всѣмъ x-амъ, даетъ n производныхъ

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial f}{\partial x_i}\,, \\ i &= 1\,,\ 2\,,\ldots n\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если число q меньше $n+1$, то всегда возможно исключить изъ равенствъ (1) и (2) всѣ произвольныя постоянныя, не дѣлая какихъ-либо частныхъ предположенiй относительно функцiи f. Такимъ образомъ получаются зависимости между перемѣнными x, z и производными p, или, какъ говорятъ, уравненiя съ частными производными перваго порядка функцiи z. Если равенство (1) не заключаетъ произвольныхъ постоянныхъ, то уравненiя въ частныхъ производныхъ представляются совокупностью равенствъ (1) и (2). Послѣднiй случяй мы исключаемъ изъ разсмотрѣнiя, и положимъ, что

$$q = n - m + 1,$$

при чемъ

$$n \geq m.$$

Наконецъ, предположимъ, что уравненiя (1) и послѣднiя $n-m$ системы (2) разрѣшаются относительно всѣхъ C, т. е., что функцiональный опредѣлитель *)

$$D\left(\frac{f, \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}}{C_1, C_2, C_3, \dots C_{n-m+1}}\right) \tag{3}$$

отличенъ отъ нуля. Результатъ исключенiя полученныхъ значенiй C изъ остальныхъ уравненiй (2) приводитъ къ уравненiямъ въ частныхъ производныхъ

$$\left.\begin{array}{c} p_k + H_k(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \dots m. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Если одна изъ постоянныхъ C совсѣмъ не заключается въ уравненiяхъ (2), то—(4) не зависятъ отъ z. Такъ послѣднiй случай имѣетъ мѣсто всякiй разъ, когда уравненiе (1) дается въ видѣ

$$z = f(x_1, x_2, \dots x_n, C_1, C_2, \dots C_{n-m}) + C_{n-m+1}. \tag{5}$$

---

*) Мы будемъ всегда обозначать функцiональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n}{y_1, y_2, \dots y_n}\right).$$

Впрочемъ всякая система уравненій (4) увеличеніемъ числа независимыхъ перемѣнныхъ на единицу приводится къ уравненіямъ, не заключающимъ явно неизвѣстной функціи. Дѣйствительно, если равенство

$$V(x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n\,,\ z)=0$$

опредѣляетъ рѣшеніе системы (4), то для этого достаточно принять V новой неизвѣстной функціей и всѣ x, z независимыми перемѣнными.

2. Изъ самого способа образованія уравненій (4) ясно, что значеніе (1) функціи z утождествляетъ ихъ, т. е. представляетъ ихъ рѣшеніе, или интегралъ.

Условимся называть полнымъ интеграломъ уравненій съ частными производными ихъ рѣшеніе, заключающее произвольныя постоянныя, которое не утождествляетъ уравненій меньшаго или одинаковаго порядка съ данными, но отличныхъ отъ нихъ.

Возвращаемся къ уравненіямъ (4). Чтобы рѣшеніе (1) было ихъ полнымъ интеграломъ для этого достаточно условія

$$D\left(\frac{f\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}}\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+2}}\,,\ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{C_1\,,\ C_2\,,\ C_3\,,\ldots C_{n-m+1}}\right)\gtrless 0\,,$$

ибо при этомъ предположеніи въ результатѣ исключенія всѣхъ C изъ равенствъ (1), (2) не могутъ получиться уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка, отличныя отъ (4). Вообще же необходимо, чтобы только $n-m+1$ какихъ-либо уравненій изъ (1), (2) разрѣшались относительно всѣхъ C.

Пусть уравненія (4) не зависятъ явно отъ z и равенство (5) представляетъ ихъ рѣшеніе. Это рѣшеніе—полный интегралъ, если

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}}\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+2}}\,,\ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{C_1\,,\ C_2\,,\ldots C_{n-m}}\right)\gtrless 0.$$

Наконецъ, функціональная зависимость между перемѣнными и произвольными постоянными можетъ быть дано въ видѣ

$$F(x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n\,,\ z\,,\ C_1\,,\ C_2\,,\ldots C_{n-m+1})=0. \tag{6}$$

Пусть $n-m$ послѣднихъ изъ производныхъ ея перваго порядка

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial z}p_i=0\,,$$

$$i=1\,,\ 2\,,\ldots n\,,$$

разрѣшаются совмѣстно съ (6) относительно всѣхъ C, и результатъ исключенія послѣднихъ изъ остальныхъ производныхъ уравненій представляетъ равенства (4). Обратно, чтобы уравненіе (6) было полнымъ интеграломъ (4)-ыхъ, для этого достаточно условія

$$D\left(\frac{F, \frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}}{C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n-m+1}}\right) \gtrless 0.$$

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ уравненіе (6) и его $n - m$ послѣднихъ производныхъ уравненій перваго порядка разрѣшаются *) относительно всѣхъ C, и результатъ исключенія ихъ изъ остальныхъ производныхъ уравненій даетъ только зависимости (4).

3. Дифференціальныя уравненія (4) получаются также изъ (1) въ предположеніи, что величины C представляютъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ x, удовлетворяющія условіямъ

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{s=1}^{n-m+1} \dfrac{\partial f}{\partial C_s}\dfrac{\partial C_s}{\partial x_i} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right| \qquad (7)$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) и его производныя перваго порядка сохраняютъ прежній видъ, въ силу равенствъ (7), слѣдовательно, и результатъ исключенія всѣхъ C — прежній. Мы приходимъ такимъ образомъ къ опредѣленію рѣшенія уравненій (4), выраженнаго совокупностью уравненій (1) и (7). Въ этихъ равенствахъ заключается нѣсколько рѣшеній различнаго вида.

Разсмотримъ систему $n - m + 1$ уравненій

$$\sum_{s=1}^{n-m+1} \frac{\partial f}{\partial C_s}\frac{\partial C_s}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n-m+1} \frac{\partial f}{\partial C_s}\frac{\partial C_s}{\partial x_{m+\nu}} = 0, \ldots$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n - m.$$

---

*) См. Jordan, Cours d'Analyse, t. I, 2-me éd., p. 85, n⁰ 94.
Cp. Jordan, Cours d'Analyse, t. III, 1-re éd., p. 327, n⁰ 255.

Каждая изъ этихъ системъ, соотвѣтствующая одному изъ значеній k отъ 1 до m, даетъ, или равенства

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial C_s} = 0, \\ s = 1, 2, \ldots n - m + 1, \end{array}\right\} \tag{8}$$

или условіе

$$D\left(\frac{C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}}{x_k, x_{m+1}, \ldots x_n}\right) = 0. \tag{9}$$

Въ первомъ случаѣ равенства (7) уничтожаются тождественно и результатъ исключенія всѣхъ C изъ уравненій (1), (8) представляетъ такъ называемый *особенный интегралъ* системы (4).

Во второмъ предположеніи условія (9), соотвѣтствующія m различнымъ значеніямъ k, показываютъ, что одна изъ величинъ C есть произвольная функція остальныхъ. Пусть

$$C_{n-m+1} = \varphi(C_1, C_2 \ldots C_{n-m}).$$

Поэтому равенства (7) принимаютъ видъ

$$\sum_{s=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f}{\partial C_s} + \frac{\partial f}{\partial C_{n-m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial C_s}\right) \frac{\partial C_s}{\partial x_i} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots n.$$

Называя

$$\frac{\partial f}{\partial C_s} + \frac{\partial f}{\partial C_{n-m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial C_s} = A_s,$$

разсмотримъ $m+1$ системъ

$$\sum_{s=1}^{n-m} A_s \frac{\partial C_s}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n-m} A_s \frac{\partial C_s}{\partial x_{m+1+\nu}} = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n - m - 1,$$

получающихся изъ послѣдней, давая k значенія отъ 1 до $m+1$.

Разсуждая какъ выше, мы получаемъ, или новый интегралъ уравненій (4), представляемый совокупностью уравненій

$$z = f(x_1\,,\; x_2\,, \ldots x_n\,,\; C_1\,,\; C_2\,, \ldots C_{n-m}\,,\; \varphi)\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_s} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial C_s} = 0\,,$$

$$s = 1\,,\; 2\,, \ldots n - m\,,$$

или заключаемъ о существованіи еще одной зависимости между C.

Продолжая тѣ же разсужденія, приходимъ къ опредѣленію интеграловъ вида

$$\left.\begin{aligned} &z = f(x_1\,,\; x_2\,, \ldots x_n\,,\; C_1\,,\; C_2\,, \ldots C_{n-m-p+1}\,,\; \varphi_1\,,\; \varphi_2\,, \;\ldots \varphi_p)\,,\\ &\frac{\partial f}{\partial C_s} + \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial \varphi_\nu}\,\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial C_s} = 0\,,\\ &s = 1\,,\; 2\,, \ldots n - m - p + 1\,, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

гдѣ C — перемѣнные параметры, φ — ихъ произвольныя функціи. Число произвольныхъ зависимостей p между функціями C можетъ быть любымъ отъ 1 до $n - m$. Если это число есть $n - m + 1$, то функціи C становятся произвольными постоянными и мы возвращается къ полному интегралу (1), изъ котораго исходили.

Назовемъ общимъ интеграломъ уравненій съ частными производными рѣшеніе ихъ, заключающее перемѣнные параметры и произвольныя функціи, результатъ исключенія которыхъ изъ интегральныхъ уравненій и ихъ производныхъ не даетъ дифференціальныхъ уравненій меньшаго порядка или одинаковаго съ данными, но отличныхъ отъ нихъ.

Уравненія (10) представляютъ общій интегралъ (4)-ыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференціальныя уравненія перваго порядка получаются исключеніемъ всѣхъ C и φ только изъ уравненій (10) и производныхъ перваго порядка перваго изъ нихъ. Но это уравненіе и его производныя, въ силу остальныхъ (10), имѣютъ видъ равенствъ (1) и (2), гдѣ величины $C_{n-m-p+2}\,,\; C_{n-m-p+3}\,, \ldots C_{n-m+1}$ обозначены черезъ $\varphi_1\,,\; \varphi_2\,, \ldots \varphi_p$. По предположенію рѣшеніе (1) разсматриваемой системы—полный интегралъ. Слѣдовательно, въ результатѣ нашего исключенія невозможно получить уравненій перваго порядка, отличныхъ отъ (4).

Такъ общій интегралъ системы уравненій

$$p_1 + z = 0,$$

$$p_2 + \frac{z^2}{p_3} = 0,$$

представляется совокупностью равенствъ

$$z = e^{-x_1 - Cx_2 + \frac{1}{C}x_3}\varphi(C),$$

$$x_2 + \frac{1}{C^2}x_3 = \varphi'(C),$$

гдѣ C — перемѣнный параметръ, φ — его произвольная функція.

Уравненіе

$$p_1 + p_2 p_3 = 0$$

имѣемъ общій интегралъ

$$z = x_3 C - \varphi(C, x_2 - Cx_1),$$

$$x_3 = \varphi_1 - x_1\varphi_2,$$

гдѣ C — перемѣнный параметръ, φ — произвольная функція C и аргумента $x_2 - Cx_3$, а φ_1, φ_2 обозначаютъ соотвѣтственно по нимъ ея частныя производныя перваго порядка. Послѣднее уравненіе имѣетъ также рѣшеніе

$$z = \frac{x_3(x_2 - C)}{x_1} - \varphi(C),$$

$$x_3 + x_1\varphi'(C) = 0,$$

которое, по исключеніи C, можно представить однимъ уравненіемъ

$$z = \frac{x_2 x_3}{x_1} + \psi\left(\frac{x_3}{x_1}\right),$$

гдѣ ψ — произвольная функція. Результатъ исключенія C, φ и ψ соотвѣтственно изъ этихъ рѣшеній и ихъ производныхъ даетъ, кромѣ исходнаго уравненія, еще отличныя отъ него.

Такіе интегралы называются *частными*.

Напримѣръ, система уравненій

$$p_1 + \frac{z}{x_1} = 0,$$

$$p_2 + \frac{z}{x_2} + \frac{x_3}{x_1 x_2 p_4}(z + x_3 p_3 - x_4 p_4) = 0$$

имѣетъ частное рѣшеніе

$$z = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \psi(x_3 x_4),$$

гдѣ ψ — произвольная функція.

4. Изложенная теорія полныхъ, особенныхъ и общихъ интеграловъ принадлежитъ Лагранжу. Якоби сдѣлалъ къ ней существенное прибавленіе, доказавъ, что всякое рѣшеніе

$$z = \theta(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$$

уравненій (4) получается изъ ихъ полнаго интеграла и заключается въ одномъ изъ рѣшеній, только что опредѣленныхъ *).

Пусть уравненіе (1) есть полный интегралъ, для котораго опредѣлитель (3) отличенъ отъ нуля. Опредѣлимъ изъ условій

$$f = \theta,\ \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial \theta}{\partial x_n}, \tag{11}$$

всѣ C въ функціяхъ перемѣнныхъ x, что всегда возможно, въ силу сдѣланнаго предположенія относительно опредѣлителя (3).

По условію мы имѣемъ тождества

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_k} + H_k\left(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ \theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial \theta}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + H_k\left(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ f,\ \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0,$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Второй рядъ равенствъ справедливъ и для значеній C, опредѣленныхъ условіями (11). Поэтому для нихъ находимъ тождественно

*) Jacobi, Gesamelte Werhe, Bd. V, S. 397. Въ § 4 этого мемуара Якоби разсматриваемъ случай одного уравненія съ частными производными.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial \theta}{\partial x_k}, \\ &k = 1, 2, \ldots m. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Дифференцируя по всѣмъ x тождество, полученное изъ перваго равенства (11), въ силу опредѣленныхъ значенiй C, заключаемъ, на основанiи остальныхъ тождествъ (11) и (12), что функцiи C удовлетворяютъ условiямъ (7)

$$\sum_{s=1}^{n-m+1} \frac{\partial f}{\partial C_s} \frac{\partial C_s}{\partial x_i} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

которыя содержатъ въ себѣ опредѣленiе всѣхъ указанныхъ выше интеграловъ.

Возвращаемся къ послѣднему примѣру предыдущаго n^0.

Полный интегралъ разсматриваемыхъ уравненiй есть

$$z = \frac{(x_3^2 x_4 - C_2)^2}{4 C_1 x_1 x_2 x_3^3} - \frac{C_2 x_2 + C_3}{x_1 x_2 x_3},$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — произвольныя постоянныя. Указанный выше частный интегралъ нашихъ уравненiй получается изъ этого полнаго, давая C функцiональныя значенiя

$$C_1 = \frac{x_3 x_4}{2\varphi'(x_3 x_4)}, \quad C_2 = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{2} x_3 x_4 \varphi'(x_3 x_4) - \varphi(x_3 x_4).$$

Между послѣдними существуетъ одна произвольная зависимость, ибо C_1, C_3 являются функцiями одного только аргумента $x_3 x_4$. Слѣдовательно, нашъ частный интегралъ находится въ общемъ, заключающемъ два перемѣнныхъ параметра и ихъ одну произвольную функцiю.

Уравненiя (4) могутъ имѣть еще такъ называемые интегралы Коши, которые, для данныхъ значенiй независимыхъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_m$, принимаютъ выраженiя опредѣленныхъ функцiй отъ x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots x_n$. Если такiя рѣшенiя существуютъ, то по доказанному они получаются изъ полнаго интеграла. Но во всякомъ случаѣ вопросъ о существованiи интеграловъ Коши требуетъ особаго разсмотрѣнiя.

5. До сихъ поръ мы изучали происхожденіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Все дальнѣйшее изложеніе посвящается рѣшенію обратнаго вопроса—интегрированію этихъ уравненій. Какъ было указано, изслѣдуемыя уравненія образуются изъ одного функціональнаго черезъ исключеніе произвольныхъ функцій и перемѣнныхъ аргументовъ, опредѣленныхъ системой уравненій. Простѣйшій случай—тотъ, когда данная функціональная зависимость заключаетъ только одну произвольную функцію и при томъ опредѣленныхъ, данныхъ аргументовъ. Если число послѣднихъ меньше числа независимыхъ перемѣнныхъ, то получаемыя дифференціальныя уравненія линейны относительно частныхъ производныхъ перваго порядка неизвѣстной функціи. Когда числа аргументовъ и независимыхъ перемѣнныхъ разнятся на единицу, то получаемъ одно уравненіе, въ остальныхъ случаяхъ—систему линейныхъ уравненій. Вопросъ интегрированія такихъ уравненій составляетъ содержаніе слѣдующей главы. Эта теорія заслуживаетъ тѣмъ болѣе вниманія, что задача интегрированія всѣхъ разсматриваемыхъ здѣсь уравненій приводится къ интегрированію линейныхъ.

ГЛАВА II.

Объ интегрированіи линейныхъ уравненій.

1. Теорія интегрированія линейныхъ уравненій создана трудами Лагранжа, Коши и Якоби. Развитіемъ своимъ она обязана Майеру, установившему связь между задачами интегрированія совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными и уравненій въ полныхъ и обыкновенныхъ дифференціалахъ. Наконецъ, С. Ли изучалъ случаи, когда интегрированіе разсматриваемыхъ уравненій совершается при помощи квадратуръ *). Лагранжъ и Якоби дали два способа изложенія для приведенія интегрированія линейнаго уравненія къ разсмотрѣнію обыкновенныхъ дифференціальныхъ. Они указаны во второй главѣ извѣстнаго сочиненія В. Г. Имшенецкаго. Изслѣдованія Майера и изложеніе ихъ Жорданомъ заключаютъ въ себѣ дальнѣйшее развитіе идей Лагранжа и Якоби **). На послѣдующихъ строкахъ теорія линейныхъ уравненій разсматривается съ нѣсколько иной точки зрѣнія. Руководящая мысль приводимаго изложенія состоитъ въ томъ, чтобы *по характернымъ свойствамъ функцій, рѣшающихъ задачу интегрированія уравненій въ частныхъ производныхъ, построить для вычисленія ихъ систему уравненій въ обыкновенныхъ или полныхъ дифференціалахъ.*

2. Пусть имѣемъ линейное уравненіе

$$p_1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu p_{\nu+1} = X, \tag{1}$$

гдѣ X_ν, X — функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots x_n$ и z.

---

*) Mathematische Annalen, Bd. 5, 448 (французскій переводъ этого мемуара Майера находится въ „Bulletin des Sciences Math. est Astron.“, t. 11, pp. 87, 125).

Mathematische An., Bd. 11, S. 464.

**) Imschenentsky, Sur l'integration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Jordan. Cours d'Analyse, t. III, 1-re éd., p. 45.

Предположимъ, что зависимость

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, z) = C, \tag{2}$$

гдѣ C — произвольная постоянная, даетъ рѣшеніе уравненія (1).

Въ силу производныхъ равенства (2)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i = 0,$$

получаемъ тождество

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{\partial f}{\partial x_{\nu+1}} + X \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Обратно, если разсматривать f какъ функцію независимыхъ перемѣнныхъ x и z, представляющую рѣшеніе уравненія (3), то равенство (2) даетъ рѣшеніе уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ мы имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial z} p_i.$$

то тождество (3) становится

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(p_1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu p_{\nu+1} - X\right) = 0.$$

По положенію функція f зависитъ явно отъ z, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial z} \gtrless 0,$$

слѣдовательно, значеніе z, опредѣляемое равенствомъ (2), есть рѣшеніе уравненія (1).

Пусть $f_1, f_2, \dots f_n$ различныя частныя рѣшенія уравненія (3), такъ что получаемъ тождественно

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}} + X \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \\ &i = 1, 2, \dots n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Уравненіе (3) не имѣетъ рѣшеній, отличныхъ отъ послѣднихъ.

Дѣйствительно, если f_{n+1} — рѣшеніе нашего уравненія, то имѣемъ тождество

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}+\sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}}+X\frac{\partial f_{n+1}}{\partial z}=0,$$

и результатъ исключенія X_ν, X изъ послѣдняго и (4) даетъ

$$D\left(\frac{f_1,\ f_2,\cdots f_{n+1}}{x_1,\ x_2,\cdots\ z}\right)=0,$$

т. е. f_{n+1} является функціей остальныхъ рѣшеній.

Если f_1, $f_2, \cdots f_m$ суть рѣшенія (3), то, называя черезъ Π ихъ произвольную функцію, составляемъ тождество *)

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \Pi}{\partial f_i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}}+X\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)=0,$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}+\sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{\partial \Pi}{\partial x_{\nu+1}}+X\frac{\partial \Pi}{\partial z}=0.$$

Поэтому произвольная функція интеграловъ уравненія (3) есть также его рѣшеніе. Приравнявъ послѣднее нулю (произвольная постоянная относится подъ обозначеніе произвольной функціи), получаемъ интегралъ уравненія (1) съ произвольной функціей.

Когда число извѣстныхъ различныхъ рѣшеній f_i есть n, то уравненіе

$$\Pi(f_1,\ f_2,\cdots f_n)=0 \tag{5}$$

представляетъ общій интегралъ уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, результатъ исключенія произвольной функціи Π изъ уравненія (5) и его производныхъ перваго порядка даетъ одно только дифференціальное уравненіе

---

*) Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 30, 31.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p_1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial z}p_1 & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\frac{\partial f_n}{\partial z}p_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial z}p_2 & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}+\frac{\partial f_n}{\partial z}p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p_n & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}+\frac{\partial f_2}{\partial z}p_n & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}+\frac{\partial f_n}{\partial z}p_n \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$D\left(\frac{f_1,\ f_2,\ \ldots f_n}{x_1,\ x_2,\ \ldots x_n}\right)+\sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{f_1,\ f_2,\ldots f_i,\ldots f_n}{x_1,\ x_2,\ldots\ z\ ,\ldots x_n}\right)p_i=0.$$

Легко видѣть, что всѣ функціи f_i независимы между собой относительно перемѣнныхъ

$$x_2,\ x_3,\ \ldots x_n,\ z.$$

Дѣйствительно, предположивъ существованіе зависимости вида

$$F(x_1,\ f_1,\ f_2,\ \ldots f_n)=0,$$

получаемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_1}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial z}=0,$$

$$\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots n-1.$$

Отсюда, въ силу тождествъ (4), находимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,$$

т. е. функціи f_i зависимы между собой, что противно положенію.

Поэтому

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \cdots f_n}{z, x_2, \cdots x_n}\right) \gtrless 0,$$

и полученное выше равенство тождественно съ уравненіемъ (1), въ силу выраженій коэффиціентовъ X_ν, X, которыя слѣдуютъ изъ (4).

Когда уравненіе (1) однородно, т. е. $X = 0$, то одно изъ его рѣшеній есть очевидно

$$z = \text{пост.}$$

Поэтому общій интегралъ его представляется въ видѣ

$$z = \Pi(f_1, f_2, \cdots f_{n-1}).$$

Такъ общій интегралъ однороднаго уравненія (3) есть

$$f = \Pi(f_1, f_2, \cdots f_n).$$

Такимъ образомъ интегрированіе линейнаго уравненія общаго вида (1) приводится къ разысканію рѣшеній линейнаго, однороднаго уравненія (3).

3. Слѣдуя Якоби *), докажемъ, что, *если уравненія вида (3) интегрируемы (т. е. имѣютъ рѣшеніе, отличное отъ произвольной постоянной), то существуетъ n различныхъ ихъ частныхъ интеграловъ.*

Условимся, когда число перемѣнныхъ x и z больше единицы, не считать между разсматриваемыми рѣшеніями произвольную постоянную величину. Если же дается уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$

то единственное его рѣшеніе есть

$$f = \text{пост.}$$

Предположимъ, что линейныя, однородныя уравненія интегрируемы и уравненіе (3) имѣетъ m различныхъ рѣшеній

$$f_1, f_2, \cdots f_m,$$

гдѣ $m < n$.

Всегда возможно принять вмѣсто перемѣнныхъ

$$x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \cdots x_n,$$

*) Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. IV, S. 172, n⁰ 5.

за новыя независимыя перемѣнныя $f_1, f_2, \cdots f_m$. Уравненіе (3) становится

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{\nu=1}^{n-m-1} (X_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_{\nu+1}} + (X) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 ,$$

гдѣ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ представляютъ частныя производныя, взятыя въ новомъ предположеніи, а скобки обозначаютъ результатъ замѣны прежнихъ перемѣнныхъ новыми. Преобразованное уравненіе есть линейное, однородное. Его извѣстное рѣшеніе — произвольная постоянная величина является въ настоящемъ случаѣ произвольной функціей всѣхъ f_i, которыя при интегрированіи преобразованнаго уравненія остаются постоянными. Однако, согласно сдѣланному предположенію, преобразованное уравненіе должно имѣть рѣшеніе f_{m+1}, выраженное функціей

$$x_1 , x_2 , \cdots x_{n-m} , z ,$$

$$f_1 , f_2 , \cdots f_m$$

и зависящее явно отъ перемѣнныхъ первой строки. Слѣдовательно, уравненіе (3) имѣетъ новое рѣшеніе, отличное отъ прежнихъ f_i. Такимъ образомъ, если существуетъ m его различныхъ рѣшеній, гдѣ $m < n$, то непремѣнно существуетъ новое $m+1$-ое рѣшеніе. Если $m+1 < n$, то существуетъ $m+2$ различныхъ рѣшеній уравненія (3) и т. д. Мы въ состояніи продолжать тѣ же разсужденія до тѣхъ поръ, пока число рѣшеній не станетъ равнымъ n. Въ послѣднемъ случаѣ уравненіе (3) преобразовывается въ слѣдующее

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 ,$$

которое не даетъ новыхъ рѣшеній, отличныхъ отъ извѣстныхъ $f_1, f_2, \cdots f_n$.

Если такъ, то *существуетъ n различныхъ рѣшеній уравненія (1), опредѣленныхъ равенствами*

$$\left. \begin{array}{c} f_i(x_1 , x_2 , \cdots x_n , z) = C_i , \\ i = 1 , 2 , \ldots n , \end{array} \right| \qquad (6)$$

гдѣ C_i — произвольныя постоянныя.

4. Предположимъ, что уравненіе (3) интегрируемо и, стало-быть, уравненія (6) существуютъ въ дѣйствительности.

Такъ какъ функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots f_n}{x_2, x_3, \ldots z}\right) \tag{7}$$

неравенъ нулю, то уравненія (6) разрѣшаются относительно перемѣнныхъ $x_2, x_3, \ldots z$ и даютъ ихъ значенія въ функціяхъ x_1 и произвольныхъ постоянныхъ C_i. Слѣдовательно, возможно разсматривать равенства (6) какъ интегралы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_{\nu+1}}{dx_1} = Z_\nu, \qquad \frac{dz}{dx_1} = Z,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n-1,$$

гдѣ Z_ν, Z — искомыя функціи. Поэтому, въ силу этихъ уравненій, полныя производныя по x_1 уравненій (6) должны давать тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}} Z_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots n.$$

Послѣднихъ достаточно для опредѣленія Z_ν, Z въ функціяхъ f_i. Но принимая во вниманіе тождества (4), находимъ

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}} (Z_\nu - X_\nu) + \frac{\partial f_i}{\partial z} (Z - X) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots n.$$

Отсюда, въ силу неравенства нулю опредѣлителя (7), слѣдуютъ равенства

$$Z_\nu = X_\nu, \qquad Z = X.$$

Такимъ образомъ если уравненіе (3) интегрируемо, то n различныхъ частныхъ рѣшеній уравненія (1) являются интегралами системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx_{\nu+1}}{dx_1} = X_\nu, \qquad \dfrac{dz}{dx_1} = X, \\ \nu = 1, 2, \ldots n-1. \end{array}\right| \tag{8}$$

Обратно, всякій интегралъ послѣдней системы

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = C$$

есть рѣшеніе уравненія (1), такъ какъ функція f_i утождествляетъ уравненіе (3).

Поэтому уравненіе (3) интегрируемо, коль скоро существуютъ интегралы уравненій (8). Пусть перемѣнныя x и z принимаютъ всѣ возможныя значенія, для которыхъ функціи X_ν, X непрерывны и имѣютъ конечныя частныя производныя перваго порядка по перемѣннымъ $x_2, x_3, \ldots x_n, z$. Извѣстно, что внутри разсматриваемой области измѣненія перемѣнныхъ существуютъ для системы (8) n различныхъ интеграловъ вида (6)-го, при чемъ функціи f_i имѣютъ непрерывныя и опредѣленныя частныя производныя перваго порядка по всѣмъ перемѣннымъ x и z *). Слѣдовательно, *въ области, гдѣ коэффиціенты X_ν, X уравненія (1) обладаютъ указанными свойствами, это уравненіе имѣетъ n различныхъ частныхъ рѣшеній (6), опредѣляемыхъ интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (8). Общій интегралъ уравненія (1) въ той же области представляется формулой (5), гдѣ Π—произвольная функція съ непрерывными и опредѣленными частными производными перваго порядка по всѣмъ f_i.*

Изложенныя разсужденія велись въ предположеніи, что функціи f_i содержатъ перемѣнную z. Поэтому слѣдуетъ разсмотрѣть особо случай, когда уравненія (8) имѣютъ интегралы, независящіе отъ z. Пусть число такихъ интеграловъ есть l и они представляются уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = C_i, \\ i = 1, 2, \ldots l; \quad l < n, \end{array}\right| \qquad (9)$$

такъ что существуютъ тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu+1}} = 0$$

для всѣхъ указанныхъ значеній i. Пусть уравненія (9) разрѣшаются относительно $x_{n-l+1}, x_{n-l+2}, \ldots x_n$. Если принять вмѣсто нихъ за независимыя перемѣнныя $f_1, f_2, \ldots f_l$, то уравненіе (1) становится

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + \sum_{\nu=1}^{n-l-1} (X_\nu) \frac{\partial z}{\partial x_{\nu+1}} = (X).$$

---

*) Picard, Traité d'Analyse, t. II, Chapitre XI.

Соотвѣтствующая ему система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_{\nu+1}}{dx_1}=(X_\nu), \quad \frac{dz}{dx_1}=(X),$$

$$\nu=1, 2, \dots n-l-1,$$

получается изъ (8)-й, въ силу интеграловъ ея (9). Поэтому, по сдѣланному предположенію, всѣ интегралы преобразованной системы

$$f_j(x_1, x_2, \dots x_{n-l}, z, f_1, f_2, \dots f_l)=C_j,$$

$$j=l+1, l+2, \dots n,$$

зависятъ отъ z. Общій интегралъ преобразованнаго уравненія въ частныхъ производныхъ представляется равенствомъ

$$\Pi(f_{l+1}, f_{l+2}, \dots f_n, f_1, f_2, \dots f_l)=0,$$

гдѣ Π-произвольная функція. Разсуждая, какъ въ n°2, легко видѣть, что общій интегралъ уравненія (1) получается изъ предыдущаго интеграла, если вмѣсто f_1, f_2, $\dots$ f_l подставить ихъ значенія въ функціяхъ перемѣнныхъ x.

Разсмотрѣнный случай имѣемъ, напримѣръ, мѣсто, когда X_ν, X не зависятъ отъ z. Тогда функціи f_i принимаютъ видъ

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}, z-\varphi_n,$$

гдѣ φ заключаютъ только x_1, x_2, $\dots$ x_n *).

5. Въ указанной выше области измѣненія перемѣнныхъ, гдѣ равенство (5) опредѣляетъ общій интегралъ уравненія (1), онъ обладаетъ свойствомъ *заключать въ себѣ всякое рѣшеніе разсматриваемаго уравненія при условіи, что функціи* X_ν, X *остаются непрерывными и имѣютъ конечныя частныя производныя перваго порядка по перемѣннымъ* x_2, x_3 $\dots$ x_n, z.

Излагаемое здѣсь доказательство послѣдняго предложенія было указано мнѣ А. М. Ляпуновымъ. Пусть

$$z=\psi(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{10}$$

*) Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. IV, S. 176, n° 6.

любое изъ рѣшеній, подлежащихъ разсмотрѣнію. Для него имѣютъ мѣсто тождественно какъ уравненіе (1), такъ и равенства (4). Исключая X изъ этихъ $n+1$ равенствъ, находимъ

$$\frac{df_i}{dx_1}+\sum_{\nu=1}^{n-1} X_\nu \frac{df_i}{dx_{\nu+1}}=0\,,$$

$$i=1\,,\ 2\,,\ldots n\,,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$\frac{df_i}{dx_s}=\frac{\partial f_i}{\partial x_s}+\frac{\partial f_i}{\partial z}\,p_s\,.$$

Результатъ исключенія всѣхъ X_ν изъ полученныхъ уравненій есть

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \cdots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}=0\,.$$

Лѣвая часть послѣдняго равенства представляетъ функціональный опредѣлитель, составленный изъ функцій f_1, f_2, $\ldots f_n$ въ предположеніи, что z замѣнена ея значеніемъ (10). Равенство нулю этого опредѣлителя показываетъ, что полученныя выраженія функцій f_i связаны между собой произвольной зависимостью. Слѣдовательно, рѣшеніе (10) заключается въ формулѣ (5)-ой общаго интеграла уравненія (1).

6. Переходимъ къ разсмотрѣнію системъ линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} p+\sum\limits_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu p_{m+\nu}=X_k\,, \\ k=1\,,\ 2\,,\ldots m\,, \end{array}\right| \qquad (11)$$

гдѣ коэффиціенты X суть функціи всѣхъ x и z, имѣющія по нимъ конечныя и опредѣленныя частныя производныя перваго порядка. Къ послѣднему виду (11) приводится всякая система линейныхъ уравненій разрѣшеніемъ ихъ относительно производныхъ.

Предположимъ, что система (11) интегрируема и рѣшеніе ея опредѣляется уравненіемъ

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = C, \tag{12}$$

гдѣ C — произвольная постоянная. Очевидно имѣемъ рядъ тождествъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu \frac{\partial f}{\partial x_{m+\nu}} + X_k \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ &k = 1, 2, \ldots m, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

которыя обыкновенно обозначаются слѣдующимъ образомъ

$$X^k(f) = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots m.$$

Обратно, пусть f, разсматриваемая функціей независимыхъ перемѣнныхъ x и z, есть рѣшеніе линейныхъ уравненій (13). Равенство (12) даетъ рѣшеніе уравненій (11), ибо имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(p_k + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu p_{m+\nu} - X_k\right) = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots m,$$

при чемъ производная

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

отлична отъ нуля.

Число различныхъ частныхъ рѣшеній уравненій (13) не можетъ быть больше $n - m + 1$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $f_1, f_2, \ldots f_{n-m+1}$ — эти рѣшенія, такъ что существуютъ тождества

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+\nu}} + X_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \\ &i = 1, 2, \ldots n - m + 1, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Если f_{n-m+2} есть также рѣшеніе уравненій (13), т. е.

$$\frac{\partial f_{n-m+2}}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu \frac{\partial f_{n-m+2}}{\partial x_{m+\nu}} + X_k \frac{\partial f_{n-m+2}}{\partial z} = 0$$

при значеніяхъ k отъ 1 до m, то результатъ исключенія всѣхъ X изъ послѣднихъ равенствъ и (14) даетъ

$$D\left(\frac{f_1\ f_2\ \ \cdots f_{n-m+1},\ f_{n-m+2}}{x_k\ x_{m+1},\cdots\ \ x_n\ \ ,\ \ z}\right)=0$$

$$k=1\,,\ 2\,,\ldots m.$$

Слѣдовательно, рѣшеніе f_{n-m+2} есть функція остальныхъ интеграловъ.

Произвольная функція нѣсколькихъ рѣшеній уравненій (13) представляетъ интегралъ той же системы. Приравнявъ послѣдній нулю, получаемъ рѣшеніе уравненій (11).

Наконецъ, если извѣстны всѣ $n-m+1$ различныхъ рѣшеній f_i, то равенство

$$\Pi(f_1\,,\ f_2\,,\cdots f_{n-m+1})=0\,, \tag{15}$$

гдѣ Π — произвольная функція, есть общій интегралъ системы (11). Дѣйствительно, результатъ исключенія произвольной функціи изъ (15) и его производныхъ уравненій перваго порядка представляется (ср. n⁰ 2) m различными равенствами

$$\Delta_k+\Delta p_k+\sum_{\nu=1}^{n-m}\Delta_k^{\nu}p_{m+\nu}=0\,,$$

гдѣ

$$\Delta=D\left(\frac{f_1,\ f_2\ \ \cdots f_{n-m+1}}{z,\ x_{m+1},\cdots\ \ x_n}\right),$$

$$\Delta_k=D\left(\frac{f_1,\ f_2\ \ \cdots f_{n-m+1}}{x_k,\ x_{m+1},\cdots\ \ x_n}\right),$$

$$\Delta_k^{\nu}=D\left(\frac{f_1,\ f_2\ \ ,\cdots f_{\nu+1},\cdots f_{n-m+1}}{x_k,\ x_{m+1},\cdots\ \ z\ \ ,\cdots\ \ x_n}\right).$$

Изъ равенствъ (14) находимъ тождественно

$$X_k^{\nu}\Delta=\Delta_k^{\nu}\,,\qquad X_k\Delta=-\Delta_k. \tag{16}$$

Функціи f_i различны между собой и относительно перемѣнныхъ z, x_{m+1}, x_{m+2}, $\ldots x_n$. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, придемъ, какъ въ n⁰ 3, къ заключенію, что f_i зависимы между собой, что противно положенію. Поэтому функціональный опредѣлитель Δ отличенъ отъ нуля. Стало-быть, въ силу равенствъ (16), уравненія, полученныя въ результатѣ исключенія функціи Π, тождественны съ (11)-ми.

Когда разсматриваемыя уравненія (11) однородны, то одно изъ ихъ рѣшеній есть очевидно

$$z = \text{пост.},$$

слѣдовательно, ихъ общій интегралъ выражается равенствомъ

$$z = \Pi(f_1, f \ldots f_{n-m}),$$

гдѣ Π — произвольная функція.

7. Если система (13) имѣетъ рѣшеніе, то, называя его черезъ f, получаемъ тождества

$$X^k(f) = 0,$$

$$X^h[X^k(f)] = X^h(0) = 0.$$

Поэтому должны также утождествляться равенства

$$X^h[X^k(f)] - X^k[X^h(f)] = 0 \tag{17}$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до m. Обыкновенно ограничиваются разсмотрѣніемъ только такихъ рѣшеній изслѣдуемыхъ уравненій, первыя и вторыя частныя производныя которыхъ непрерывны и, слѣдовательно, не измѣняютъ своей величины въ зависимости отъ порядка дифференцированія. При этомъ условіи равенства (17) становятся

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} [X^h(X_k^\nu) - X^k(X_h^\nu)] \frac{\partial f}{\partial x_{m+\nu}} + [X^h(X_k) - X^k(X_h)] \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Чтобы они уничтожались тождественно, необходимо положить

$$\left.\begin{aligned} &X^h(X_k^\nu) - X^k(X_h^\nu) = 0, \\ &X^h(X_k) - X^k(X_h) = 0, \\ &v = 1, 2 \ldots n - m, \end{aligned}\right| \tag{18}$$

для всѣхъ различныхъ значеній h, k отъ 1 до m.

Впрочемъ, если эти условія не удовлетворяются, то отсюда еще не слѣдуетъ, что уравненія (13) не имѣютъ рѣшенія. Въ самомъ дѣлѣ, когда число различныхъ не уничтожающихся равенствъ (17) совмѣстно съ уравненіями (13) не превосходитъ $n+1$, то, разрѣшая ихъ относительно производныхъ, получимъ систему прежняго вида, съ которой поступимъ какъ съ первоначальной и т. д. Если, наконецъ, число полученныхъ уравненій больше $n+1$, то, исключая изъ нихъ всѣ производныя, получаемъ зависимости между независимыми перемѣнными. Въ этомъ случаѣ система (13) не имѣетъ рѣшенія, отличнаго отъ произвольной постоянной. Однако уравненія (11) имѣютъ интегралъ, если получается одна только зависимость, опредѣляющая z функціей x-овъ.

Когда условія (18) имѣютъ мѣсто, то будемъ называть уравненія (13) и (11) *якобіевскими системами* *).

Разсмотримъ имѣющую рѣшеніе систему линейныхъ уравненій

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_k^{\nu} p_{\nu} = X_k ,$$

$$k = 1 , 2 , \dots m ,$$

не приведенныхъ къ (11)-ымъ и положимъ

$$X^k(f) = \sum_{\nu=1}^{n} X_k^{\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}} + X_k \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{19}$$

Соотвѣтствующія имъ равенства вида (17) даютъ новыя линейныя уравненія, или уничтожаются, въ силу данныхъ уравненій, такъ что должно быть

$$X^h[X^k(f)] - X^k[X^h(f)] = \sum_{i=1}^{m} A_{kh}^i X^i(f) ,$$

гдѣ A_{kh}^i — функціи перемѣнныхъ x и z. Въ этомъ случаѣ наши уравненія называются *полными*, или *замкнутыми системами*. Само-собою разумѣется, что такая система рѣшеніемъ ея уравненій относительно частныхъ производныхъ приводится къ якобіевской.

Наконецъ, если ввести новыя независимыя перемѣнныя

$$y_1 , y_2 , \cdots y_n ,$$

вмѣсто x, z въ уравненія (19), то послѣднія преобразовываются въ замкнутую систему

$$Y^k(f) = 0 ; \qquad k = 1 , 2 , \dots m .$$

---

*) Обыкновенно якобіевскими называютъ однородныя уравненія.

Дѣйствительно, въ силу зависимостей между прежними и новыми перемѣнными, находимъ тождества *)

$$X^k(f) = Y^k(f),$$
$$X^h[X^k(f)] = X^h[Y^k(f)] = Y^h[Y^k(f)],$$
$$X^h[X^k(f)] - X^k[X^h(f)] = Y^h[Y^k(f)] - Y^k[Y^h(f)],$$

которыя и доказываютъ высказанное предложенiе.

Условiя (18) интегрируемости якобiевской системы (13) не только необходимы, но и достаточны. Легко доказать, что *для якобiевской системы m уравненiй вида (13) съ $n+1$ независимыми перемѣнными всегда существуютъ $n-m+1$ различныхъ рѣшенiй.*

Для одного уравненiя это доказано въ n^0 4. Положимъ послѣднее предложенiе справедливымъ для системы $m-1$ уравненiй и покажемъ, что оно остается таковымъ для случая m уравненiй.

Уравненiе

$$X^1(f) = 0$$

имѣетъ $n-m+1$ частныхъ интеграловъ

$$y_1, y_2, \dots y_{n-m+1},$$

различныхъ относительно перемѣнныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, z.$$

Принимаемъ y-ки за независимыя перемѣнныя вмѣсто послѣднихъ. Преобразованная система (13) становится

$$Y^k(f) = 0; \qquad k = 1, 2, \dots m,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m+1} Y_k^\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = 0,$$

$$k = 2, 3, \dots m,$$

гдѣ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначаютъ частныя производныя, взятыя въ новомъ

*) Goursat. Leçons sur l'intégration..., p. 49, n⁰ 25.

предположенiи, а Y_k^ν — функцiи независимыхъ перемѣнныхъ. По предыдущему эта система—якобiевская, такъ что должны имѣть мѣсто тождества

$$Y^h(Y_k^\nu) - Y^k(Y_h^\nu) = 0\,,$$

$$\nu = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m + 1\,,$$

для различныхъ значенiй h, k отъ 1 до m. Поэтому при $h = 1$ получаемъ изъ нихъ

$$\frac{\partial Y_k^\nu}{\partial x_1} = 0\,,$$

т. е. коэффицiенты Y_k^ν не зависятъ то x_1. Стало-быть, послѣднiя $m - 1$ преобразованныхъ уравненiй представляютъ также якобiевскую систему $m - 1$ уравненiй съ $n - 1$ независимыми перемѣнными. По условiю для нея существуютъ $n - m + 1$ различныхъ частныхъ интеграловъ. Преобразовавъ ихъ къ прежнимъ перемѣннымъ, мы получимъ $n - m + 1$ различныхъ интеграловъ системы (13), что и убѣждаетъ насъ въ справедливости высказаннаго предложенiя.

Слѣдовательно, *если функцiи X перемѣнныхъ x и z имѣютъ по нимъ конечныя, опредѣленныя частныя производныя перваго порядка и удовлетворяютъ условiямъ (18), то существуютъ $n - m + 1$ различныхъ рѣшенiй системы (11), опредѣляемыхъ равенствами*

$$\left. \begin{array}{l} f_i(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ z) = C_i\,, \\ i = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m + 1\,, \end{array} \right| \qquad (20)$$

гдѣ функцiи f_i имѣютъ непрерывныя и опредѣленныя (см. n^0 4) частныя производныя перваго порядка по всѣмъ перемѣннымъ и удовлетворяютъ условiямъ (14).

8. Изъ предыдущихъ разсужденiй ясно, что задача интегрированiя уравненiй (11) приводится къ разысканiю зависимостей (20).

Какъ было указано

$$\Delta \gtrless 0\,. \qquad (21)$$

Поэтому уравненiя (20) разрѣшаются относительно перемѣнныхъ

$$z\,,\ x_{m+1}\,,\ x_{m+2}\,, \ldots x_n$$

и даютъ ихъ значенiя въ функцiяхъ x_1, x_2, $\ldots x_m$ и произвольныхъ постоянныхъ C_i. Равенства (20) можно, стало-быть, разсматривать какъ интегралы системы уравненiй въ полныхъ дифференцiалахъ вида

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+\nu} &= \sum_{k=1}^{m} Z_k^\nu \, dx_k\,, \\ dz &= \sum_{k=1}^{m} Z_k \, dx_k\,, \\ \nu = 1\,,\ 2\,, &\ldots n-m. \end{aligned}\right| \tag{22}$$

Задача приводится къ разысканію функцій Z. Такъ какъ постоянныя C_i не исключаются изъ уравненій (20), то полные дифференціалы послѣднихъ даютъ тождества

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+\nu}} Z_k^\nu + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k\right) dx_k = 0\,,$$

$$i = 1\,,\ 2\,, \ldots n-m+1\,.$$

Поэтому, въ силу независимости перемѣнныхъ $x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_m$, должно быть тождественно

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+\nu}} Z_k^\nu + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k = 0\,,$$

$$i = 1\,,\ 2\,, \ldots n-m+1\,,$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Эти равенства опредѣляютъ вполнѣ Z въ функціяхъ f_i. Но принявъ во вниманіе тождества (14), получаемъ

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+\nu}} (Z_k^\nu - X_k^\nu) + \frac{\partial f_i}{\partial z}(Z_k - X_k) = 0\,,$$

$$i = 1\,,\ 2\,, \ldots n-m+1\,,$$

при чемъ k принимаетъ значенія отъ 1 до m. Отсюда, вслѣдствіе неравенства (21), находимъ

$$Z_k^\nu = X_k^\nu\,, \qquad Z_k = X_k\,.$$

Итакъ, если функціи X выполняютъ всѣ поставленныя условія, то $n-m+1$ различныхъ рѣшеній якобіевской системы (11) являются интегралами уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+\nu} &= \sum_{k=1}^{m} X_k^\nu \, dx_k \,, \\ dz \quad &= \sum_{k=1}^{m} X_k \, dx_k \,, \\ \nu = 1\,,\ 2\,, &\ldots n-m. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Система (22) опредѣляется вполнѣ интегралами (20), такъ что уравненія (23) не имѣютъ отличныхъ отъ нихъ интеграловъ. Дѣйствительно, если

$$f(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ z) = C$$

— интегралъ системы (23), то его полный дифференціалъ утождествляется, въ силу уравненій (23), f представляетъ рѣшеніе системы (13) и, слѣдовательно, есть функція всѣхъ f_i.

Такимъ образомъ, обратно, задача интегрированія уравненій (23) приводится къ интегрированію системы (13). Слѣдовательно:

Если коэффиціенты уравненій (23) для нѣкоторой области измѣненія перемѣнныхъ имѣютъ по нимъ конечныя, опредѣленныя частныя производныя перваго порядка и удовлетворяютъ условіямъ (18), то существуютъ внутри этой области непрерывныя и опредѣленныя функціи $x_{m+1}\,,\ x_{m+2} \ldots x_n\,,\ z$ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_m\,,$ имѣющія по нимъ непрерывныя, опредѣленныя частныя производныя перваго порядка и утождествляющія уравненія (23).

Предыдущія разсужденія велись въ предположеніи, что рѣшенія уравненій (13) зависятъ отъ z. Но доказанныя предложенія распространяются очевидно, какъ въ n^0 4, и на тотъ случай, когда z не входитъ въ нѣкоторые изъ интеграловъ системы (23).

Итакъ, *задача интегрированія уравненій (11) приводится всегда къ интегрированію системы (23) и общій интегралъ ихъ выражается формулой (15), гдѣ Π — произвольная функція съ непрерывными, опредѣленными частными производными перваго порядка по f_i.*

9. Разсмотримъ случай, когда всѣ коэффиціенты X уравненій (11) не зависятъ отъ z. При этомъ условіи $n-m$ первыхъ уравненій (23), независимо отъ ихъ послѣдняго, представляютъ систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Въ самомъ дѣлѣ, соотвѣтствующія имъ уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = 0\,,$$

$$k = 1\,,\ 2\,, \ldots m\,,$$

представляютъ якобіевскую систему, въ силу равенствъ, получающихся, соотвѣтственно нашему случаю, изъ первой строки условій (18). Поэтому первые $n-m$ уравненій (23) можно проинтегрировать. Исключая $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$, въ силу найденныхъ интеграловъ, изъ послѣдняго уравненія (23), получаемъ равенство

$$dz = \sum_{k=1}^{m} (X_k)\, dx_k\,,$$

представляющее точный дифференціалъ. Послѣднее ясно *a priori* и слѣдуетъ также изъ тождествъ

$$\frac{\partial (X_k)}{\partial x_h} = \frac{\partial X_k}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial X_k}{\partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_h}\,,$$

$$\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = X_k^\nu\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ нихъ, въ силу равенствъ второй строки условій (18), находимъ

$$\frac{\partial (X_k)}{\partial x_h} = \frac{\partial (X_h)}{\partial x_k}$$

для всѣхъ различныхъ значеній h, k отъ 1 до m. Такимъ образомъ всѣ f, становятся

$$\varphi_1\,,\ \varphi_2\,, \ldots \varphi_{n-m}\,, \qquad z - \varphi_{n-m+1}\,,$$

гдѣ φ — функціи только x-овъ.

10. Распространяя доказательство предложенія n^0 5, легко показать, что *въ области измѣненія перемѣнныхъ, гдѣ коэффиціенты X имѣютъ конечныя, опредѣленныя производныя перваго порядка и удовлетворяютъ условіямъ (18), общій интегралъ (15) системы (11) заключаетъ въ себѣ всѣ рѣшенія, для которыхъ X сохраняютъ указанныя свойства.*

Для всякаго рѣшенія системы (11)

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots x_n), \tag{24}$$

удовлетворяющаго поставленнымъ требованіямъ, имѣютъ мѣсто тождественно какъ самыя дифференціальныя уравненія, такъ и равенства (14). Исключая изъ нихъ всѣ X_k, получаемъ новыя тождества

$$\frac{df_i}{dx_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu \frac{df_i}{dx_{m+\nu}} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots n - m + 1; \qquad k = 1, 2, \dots m.$$

Результатъ исключенія отсюда всѣхъ $(n - m)m$ величинъ X_k^ν даетъ m тождествъ

$$D_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots m.$$

Лѣвыя части послѣднихъ представляютъ функціональные опредѣлители

$$D_k = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_k} & \frac{df_1}{dx_{m+1}} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_k} & \frac{df_2}{dx_{m+1}} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_{n-m+1}}{dx_k} & \frac{df_{n-m+1}}{dx_{m+1}} & \dots & \frac{df_{n-m+1}}{dx_n} \end{vmatrix},$$

составленные изъ функцій $f_1, f_2, \dots f_{n-m+1}$ въ предположеніи, что въ нихъ подставлено значеніе (24) функціи z. Равенство нулю послѣднихъ опредѣлителей показываетъ, что эти функціи связаны между собой одной произвольной зависимостью. Слѣдовательно, рѣшеніе (24) заключается въ выраженіи общаго интеграла (15).

11. Въ n^0 9 указанъ частный случай, когда, по извѣстнымъ $n - m$ интеграламъ системы въ полныхъ дифференціалахъ (23), послѣдній $n - m + 1$-ый интегралъ ея находится при помощи квадратуры. Къ тому же результату приходятъ въ общемъ случаѣ, если извѣстно значеніе такъ называемаго послѣдняго множителя Якоби, теорія котораго была расцространена С. Ли на уравненія въ полныхъ дифференціалахъ. Этимъ множителемъ называется функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \dots f_{n-m+1}}{z, x_{m+1}, \dots x_n}\right),$$

отличный отъ нуля и обозначенный выше черезъ Δ. Въ частности, когда система (23) приводится къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію, множитель Δ становится тождественнымъ интегрирующему множителю Эйлера *).

Пользуясь обозначеніями n^0 6-го, находимъ, что выраженія

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial \Delta_k^\nu}{\partial x_{m+\nu}} - \frac{\partial \Delta_k}{\partial z}$$

уничтожаются тождественно, такъ какъ являются линейными, однородными функціями вторыхъ частныхъ производныхъ всѣхъ f_i, коэффиціенты которыхъ представляютъ разность двухъ равныхъ опредѣлителей. Поэтому, вслѣдствіе формулъ (16), получаемъ для опредѣленія Δ систему линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial (X_k^\nu \Delta)}{\partial x_{m+\nu}} + \frac{\partial (X_k \Delta)}{\partial z} = 0,\\ k = 1, 2, \dots m,\end{gathered}\right| \tag{25}$$

которая иначе представляется въ видѣ

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} X_k^\nu \frac{\partial \log \Delta}{\partial x_{m+\nu}} + X_k \frac{\partial \log \Delta}{\partial z} + X_k' = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots m,$$

при чемъ

$$X_k' = \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial X_k^\nu}{\partial x_{m+\nu}} + \frac{\partial X_k}{\partial z}.$$

Послѣдняя система уравненій есть якобіевская. Дѣйствительно, условія, соотвѣтствующія первой строкѣ равенствъ (18), въ силу послѣднихъ, удовлетворяются тождественно. Такъ какъ коэффиціенты X_k' не зависятъ отъ Δ, то условія, соотвѣтствующія второй строкѣ равенствъ (18), выражаются формулами

---

*) Jordan, Cours d'Analyse, t. III, 1-re éd., p.p. 17, 18, n^0 n^0 12, 13. Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. IV, S. 319, n^0 3.

$$X_h(X'_k) - X^k(X'_h) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial x_{m+\nu}} [X^h(X_k^\nu) - X^k(X_h^\nu)] + \frac{\partial}{\partial z} [X^h(X_k) - X^k(X_h)],$$

также уничтожающимися тождественно.

Изъ самаго опредѣленія послѣднихъ множителей легко заключить, что число ихъ неограничено. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе даннаго значенія Δ на произвольную функцію интеграловъ $f_1, f_2, \dots f_{n-m+1}$ системы (13) является тоже послѣднимъ множителемъ разсматриваемой системы. Это слѣдуетъ изъ того, что произвольныя функціи отъ f_i представляютъ интегралы системы (13) и всегда возможно выбрать эти произвольныя функціи такъ, чтобы наше предложеніе было справедливо *).

Обратно, всякое рѣшеніе Δ' системы (25) есть послѣдній множитель уравненій (23). Дѣйствительно, положивъ

$$\Delta' = \Delta F,$$

находимъ

$$F\left[\frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial (X_k^\nu \Delta)}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial (X_k \Delta)}{\partial z}\right] + \Delta X^k(F) =$$

$$= \Delta X^k(F) = 0.$$

Поэтому функція F непремѣнно должна быть интеграломъ системы (13) и по предыдущему произведеніе ΔF, или Δ' есть множитель Якоби для разсматриваемыхъ уравненій.

Предположимъ извѣстными $n - m$ интеграловъ уравненій (23)

$$\left.\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots x_n, z) = C_i \\ i = 1, 2, \dots n - m. \end{aligned}\right| \qquad (26)$$

Всегда возможно положить ихъ разрѣшимыми относительно $n - m$ изъ перемѣнныхъ $z, x_{m+1}, \dots x_n$, пусть

$$z, x_{m+1}, \dots x_{n-1}.$$

---

*) Jordan, Cours d'Analyse, t. III, 1-re éd., p. 47, n⁰ 43.

Принимаемъ вмѣсто послѣднихъ за новыя независимыя перемѣнныя $f_1, f_2, \ldots f_{n-m}$. Условившись обозначать скобками производныя неизвѣстнаго интеграла f_{n-m+1}, взятыя въ новомъ предположеніи, получаемъ

$$\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial f_i}\right) \frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial f_i}\right) \frac{\partial f_i}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_{m+\nu}} = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial f_i}\right) \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+\nu}},$$

$$\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial f_i}\right) \frac{\partial f_i}{\partial x_n},$$

$$k = 1, 2, \ldots m; \qquad \nu = 1, 2, \ldots n - m - 1.$$

Поэтому, называя черезъ D значеніе функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots f_{n-m}}{z, x_{m+1}, \ldots x_{n-1}}\right),$$

отличнаго по условію отъ нуля, мы получаемъ равенства

$$\Delta = \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_n}\right) D,$$

$$\Delta_k^{n-m} = -\left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_k}\right) D.$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція f_{n-m+1} находится при помощи квадратуры, если извѣстны интегралы (26) и значеніе множителя Δ *). Въ самомъ дѣлѣ, полный дифференціалъ f_{n-m+1} въ новыхъ перемѣнныхъ есть

$$df_{n-m+1} = \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_n}\right) dx_n + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f_{n-m+1}}{\partial x_k}\right) dx_k,$$

*) Cp. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Zweite Ausgabe, S. 77.

или, въ силу предыдущихъ формулъ и (16),

$$df_{n-m+1} = \frac{\Delta}{D}\,[dx_n - \sum_{k=1}^{m} (X_k^{n-m})\, dx_k].$$

Стало-быть, предпослѣднее уравненіе системы (23), въ силу интеграловъ ея (26)-ыхъ, имѣетъ интегрирующимъ множителемъ выраженіе

$$\frac{\Delta}{D},$$

представленное функціей перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m, x_n$ и постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{n-m}$. Поэтому послѣдній искомый интегралъ системы (23) есть

$$\int \frac{\Delta}{D}\,[dx_n - \sum_{k=1}^{m} (X_k^{n-m})\, dx_k] = C_{n-m+1},$$

гдѣ C_{n-m+1} — произвольная постоянная.

12. Возвращаемся къ интеграламъ (20) уравненій (23). Вводя вмѣсто C_i новыя произвольныя постоянныя, составляемъ систему интеграловъ, отличную по виду отъ предыдущей. Изъ различныхъ интеграловъ подобнаго рода особаго вниманія заслуживаютъ тѣ, для которыхъ произвольныя постоянныя представляются начальными значеніями $z^0, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \ldots x_n^0$ функціональныхъ перемѣнныхъ, соотвѣтствующими значеніямъ x_k^0 перемѣнныхъ x_k. Уравненія (20), даютъ равенства

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, z^0) = C_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots n - m + 1,$$

устанавливающія зависимость между прежними и новыми произвольными постоянными. Если значенія x^0, z^0 лежатъ въ области, гдѣ функціи X имѣютъ конечныя, опредѣленныя частныя производныя перваго порядка и удовлетворяютъ условіямъ (18), то написанныя уравненія разрѣшаются относительно z^0, $x_{m+\nu}^0$ и даютъ

$$z^0 = \psi(C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}),$$

$$x_{m+\nu}^0 = \psi_\nu(C_1, C_2, \ldots C_{n-m+1}),$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n - m.$$

Получающіеся отсюда интегралы уравненій (23)

$$\left.\begin{aligned} &\psi(f_1, f_2, \dots f_{n-m+1}) = z^0,\\ &\psi_\nu(f_1, f_2, \dots f_{n-m+1}) = x^0_{m+\nu},\\ &\quad \nu = 1, 2, \dots n-m. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

опредѣляютъ такія значенія функцій z, $x_{m+\nu}$, которыя для начальныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ становятся z^0, $x^0_{m+\nu}$ *). Такъ какъ послѣднія величины не входятъ въ выраженія функцій ψ, ψ_ν то ясно, что онѣ для начальныхъ значеній x_k равны тождественно z, $x_{m+\nu}$. Мы приходимъ такимъ образомъ къ опредѣленію рѣшеній системы (13), которыя для начальныхъ значеній перемѣнныхъ x_k принимаютъ значенія z, $x_{m+\nu}$.

Ограничимъ наши изслѣдованія областью голоморфности коэффиціентовъ X разсматриваемыхъ уравненій. Какъ хорошо извѣстно **), внутри этой области существуетъ для уравненій (23) единственная система голоморфныхъ интеграловъ, удовлетворяющихъ даннымъ начальнымъ условіямъ. Поэтому функціи

$$\psi, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_{n-m}$$

являются здѣсь для уравненія (13) единственной системой $n-m+1$ различныхъ, голоморфныхъ интеграловъ, которые для начальныхъ значеній x_k становятся равными

$$z, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n.$$

На этихъ соображеніяхъ основывается замѣчательное приведеніе Майера якобіевской системы къ одному линейному уравненію и—системъ въ полныхъ дифференціалахъ къ обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ. Вводимъ вмѣсто независимыхъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \dots x_m$ новыя y_1, $y_2, \dots y_m$, связанныя съ ними равенствами ***)

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \dots x_m = x_m^0 + y_1 y_m,$$

*) Cp. Jmschenetsky, sur l'intégration... p. 31, n⁰ 22.

**) Bouquet, sur l'intégration d'un système d'equations differentielles totales simultannées du premier ordre. Bulletin des Sciences Math. et Astron., t. III, annee 1872, p. 265.

***) Goursat, Leçons sur l'intégration..., p. 58, n⁰ 30.

такъ что получаемъ

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} y_m ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} y_1 ,$$

$$k = 2 , \ 3 , \ldots m .$$

Уравненія (13) преобразовываются въ якобіевскую систему

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-m} \left[(X_1^\nu) + \sum\limits_{k=2}^{m} y_k (X_k^\nu)\right] \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+\nu}} + \left[(X_1) + \sum\limits_{k=2}^{m} y_k (X_k)\right] \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 , \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_l} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-m} y_1 (X_l^\nu) \dfrac{\partial f}{\partial x_{m-\nu}} + y_1 (X_l) \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 . \\ l = 2 , \ 3 , \ldots m . \end{array}\right\} \quad (27)$$

Коэффиціенты послѣднихъ уравненій голоморфны вблизи значеній

$$y_1 = 0 , \qquad x_{m+\nu} = x_{m+\nu}^0 , \qquad z = z^0$$

и произвольныхъ величинахъ остальныхъ y-ковъ. Слѣдовательно, уравненія (27) имѣютъ единственную систему $n - m + 1$ различныхъ частныхъ рѣшеній, которыя для $y_1 = 0$ и произвольныхъ значеній остальныхъ y-овъ становятся соотвѣтственно равными z, $x_{m+\nu}$. Полагая $y_2 , y_3 , \cdots y_m$ постоянными, проинтегрируемъ первое уравненіе (27) и найдемъ его $n - m + 1$ частныхъ рѣшеній, которыя для $y_1 = 0$ принимаютъ значенія z, $x_{m+\nu}$. Мы получаемъ такимъ образомъ $n - m + 1$ различныхъ функцій, соотвѣтсвенно равныхъ z, $x_{m+\nu}$ для $y_1 = 0$ и произвольныхъ значеній $y_2 , y_3 , \cdots y_m$ и представляющихъ очевидно искомые интегралы системы (27). Поэтому интегрированіе якобіевскихъ уравненій (13), или (11), приводится къ рѣшенію одного перваго уравненія (27), а интегрированіе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (23) замѣняется разсмотрѣніемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+\nu} &= [(X_1^\nu) + \sum_{k=2}^{m} y_k (X_k^\nu)]\, dy_1\,, \\ dz &= [(X_1) + \sum_{k=2}^{m} y_k (X_k)]\, dy_1\,, \\ \nu &= 1\,,\ 2\,, \ldots n-m. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Задача интегрированія уравненій въ полныхъ дифференціалахъ представляетъ такимъ образомъ трудности, въ теоретическомъ отношеніи одинаковыя съ обыкновенными дифференціальными уравненіями одного съ ними порядка (т. е. заключающими одинаковое число уравненій). Вслѣдстіе этого называютъ *операціей интегрированія μ-аго порядка* вычисленіе одного интеграла системы μ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ $\mu+\nu$ перемѣнныхъ, каково бы ни было число ν. Такъ для интегрированія уравненій (23) приходится выполнить $n-m+1$ операцій порядковъ

$$n-m+1\,, \qquad n-m\,, \ldots 2\,,\ 1.$$

13. Въ дальнѣйшемъ изложеніи будетъ выгодно пользоваться свойствами такъ называемыхъ *скобокъ Пуассона*. Если φ, f — функціи независимыхъ перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_n$, p_1, $p_2, \ldots p_n$, то скобки Пуассона представляются выраженіемъ

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right),$$

которое обозначается черезъ

$$(\varphi\,,\ f).$$

Пусть ψ — новая функція перемѣнныхъ x и p. Изъ самого опредѣленія разсматриваемыхъ скобокъ слѣдуютъ формулы

$$(\varphi\,,\ f) = -(f\,,\ \varphi), \tag{I}$$

$$(\varphi\,,\ f+\psi) = (\varphi\,,\ f) + (\varphi\,,\ \psi), \tag{II}$$

$$(\varphi\,,\ f\cdot\psi) = (\varphi\,,\ f)\cdot\psi + (\varphi\,,\ \psi) f. \tag{III}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\varphi\,,\ f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\cdot f\right) + \left(\varphi\,,\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right), \tag{IV}$$

гдѣ α — какая-либо изъ перемѣнныхъ величинъ.

Нѣсколько сложнѣе доказательство тождества Якоби

$$J=(\varphi,(f,\psi))+(f,(\psi,\varphi))+(\psi,(\varphi,f))=0. \qquad \text{(V)}$$

Условимся обозначать

$$(f,\psi)=\sum(f'_p\,\psi'_x-f'_x\,\psi'_p),$$

и т. д.

На основанiи равенствъ (II) и (III), мы получаемъ

$$J=\sum[(\varphi,f'_p)\,\psi'_x+(\varphi,\psi'_x)\,f'_p-(\varphi,f'_x)\,\psi'_p-(\varphi,\psi'_p)\,f'_x+$$
$$+(f,\psi'_p)\,\varphi'_x+(f,\varphi'_x)\,\psi'_p-(f,\psi'_x)\,\varphi'_p-(f,\varphi'_p)\,\psi'_x+$$
$$+(\psi,\varphi'_p)\,f'_x+(\psi,f'_x)\,\varphi'_p-(\psi,\varphi'_x)\,f'_p-(\psi,f'_p)\,\varphi'_x].$$

Сумма членовъ, представляющихъ произведенiе производныхъ функцiи φ на скобки, въ силу равенствъ (I) и (IV), выражается формулой

$$\sum\left[\frac{\partial(f,\psi)}{\partial p}\varphi'_x-\frac{\partial(f,\psi)}{\partial x}\varphi'_p\right]=((f,\psi),\varphi),$$

и т. д.

Отсюда ясно, что

$$J=-J,$$

т. е. равенство (V) справедливо.

Пусть, наконецъ, функцiи φ, f зависятъ отъ x и p какъ непосредственно, такъ и черезъ посредство функцiй $\psi_1,\psi_2,\ldots$ Внося въ выраженiе скобокъ вычисленныя въ этомъ предположенiи производныя отъ φ, f, получаемъ

$$(\varphi,f)=(\varphi',f')+\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_i}(\psi_i,f')+\sum_j\frac{\partial f}{\partial\psi_j}(\varphi',\psi_j)+$$
$$+\sum_i\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_i}\frac{\partial f}{\partial\psi_j}(\psi_i,\psi_j),$$

гдѣ

$$(\varphi',f'),\ (\psi_i,f'),\ (\varphi',\psi_j)$$

обозначаютъ скобки, составленныя въ предположенiи, что функцiи φ, f дифференцируются только по x, p, входящимъ въ нихъ непосредственно.

Предположимъ, далѣе, что φ, f, ψ, являются функціями независимыхъ перемѣнныхъ x, p и z. Будемъ обозначать

$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}p.$$

Въ частномъ случаѣ, когда p являются частными производными функціи z по x, указанное обозначеніе представляетъ полную производную по x (см. n^0 5 настоящей главѣ). Въ 1863 году Вейлеръ ввелъ въ свои изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными разсмотрѣніе выраженій

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{df}{dx_i}-\frac{d\varphi}{dx_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right),$$

которыя мы будемъ называть *скобками Вейлера* и обозначать по Майеру черезъ

$$[\varphi, f].*)$$

Легко видѣть, что формулы (I)—(III) распространяются безъ измѣненія и на эти скобки. Что касается формулъ дифференцированія, то онѣ принимаютъ видъ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\varphi, f]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, f\right]+\left[\varphi, \frac{\partial f}{\partial\alpha}\right],$$

если α имѣетъ одно изъ значеній перемѣнныхъ x или z, и

$$\frac{\partial}{\partial p_i}[\varphi, f]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, f\right]+\left[\varphi, \frac{\partial f}{\partial p_i}\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Въ IX томѣ „Mathematische Annalen“, въ 1876 году, Майеръ показалъ, что для скобокъ Вейлера тождество Якоби замѣняется слѣдующимъ

$$[\varphi, [f, \psi]]+[f, [\psi, \varphi]]+[\psi, [\varphi, f]]=$$
$$=\frac{\partial\varphi}{\partial z}[f, \psi]+\frac{\partial f}{\partial z}[\psi, \varphi]+\frac{\partial\psi}{\partial z}[\varphi, f].$$

---

*) Weiler, Zeitschrift für Math. und. Phys., Bd. 8, S. 264, Bd. 20, S. 271. Mayer, Math. Annalen, Bd. IX, S. 370.

Наконецъ, когда функціи φ, f зависятъ отъ перемѣнныхъ x, z, p какъ непосредственно, такъ и черезъ посредство ψ_1, $\psi_2, \ldots$, то мы получаемъ

$$[\varphi, f] = [\varphi', f'] + \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial\psi_i}[\psi_i, f'] + \sum_j \frac{\partial f}{\partial\psi_j}[\varphi', \psi_j] +$$

$$+ \sum_i \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial\psi_i} \frac{\partial f}{\partial\psi_j}[\psi_i, \psi_j].$$

14. Въ заключеніе настоящей главы остановимся на изученіи уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, которыя я предлагалъ называть *каноническими* *).

Пусть H_1, $H_2, \ldots H_m$ — функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, $x_{m+1}, \ldots x_n$, $p_{m+1}, \ldots p_{m+2}, \ldots p_n$. Будемъ называть уравненія

$$dx_{m+\nu} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} dx_k,$$

$$dp_{m+\nu} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}} dx_k,$$

$$\nu = 1, \ldots n - m,$$

каноническими въ полныхъ дифференціалахъ, если для нихъ удовлетворяются условія вида (18). Соотвѣтствующія разсматриваемымъ линейныя, однородныя уравненія суть

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + (H_k, f) = 0,$$

$$k = 1, 2 \ldots m,$$

при чемъ скобки Пуассона распространяются на перемѣнныя $x_{m+\nu}$, $p_{m+\nu}$. Поэтому равенства (18) становятся

---

*) Comptes Rendus, t. CXXVIII, p.p. 225, 274.

Сообщенія Харьковскаго Мат. Общ., т. VI, Обобщеніе перваго способа Якоби интегрированія дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}+\left(H_h,\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}-\left(H_k,\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}+\left(H_h,\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}-\left(H_k,\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\right)=0,$$

$$\nu=1,\ 2\ \ldots\ n-m,$$

гдѣ h, k принимаютъ различныя значенія отъ 1 до m. На основаніи формулъ (I) и (IV), послѣднія равенства приводятся къ виду

$$\frac{\partial}{\partial p_{m+\nu}}\left[\frac{\partial H_k}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial x_k}+(H_h,\ H_k)\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+\nu}}\left[\frac{\partial H_k}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial x_k}+(H_h,\ H_k)\right]=0,$$

$$\nu=1,\ 2\ \ldots\ n-m.$$

Дифференціальныя уравненія послѣдняго множителя Δ для разсматриваемой системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ становятся

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_k}+(H_k,\ \Delta)=0,$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots\ m.$$

Они показываютъ, что послѣднимъ множителемъ разсматриваемой системы можетъ служить всякая постоянная или единица, или любой изъ интеграловъ линейныхъ однородныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ нашимъ изслѣдуемымъ.

Наконецъ, при помощи преобразованія Майера, каноническія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ приводятся къ обыкновеннымъ каноническимъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (28) приводся въ настоящемъ случаѣ къ слѣдующимъ

$$dx_{m+1}=\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_{m+\nu}}\right)+\sum_{k=2}^{m}y_k\left(\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\right)\right]dy_1,$$

$$dp_{m+\nu}=-\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_{m+\nu}}\right)+\sum_{k=2}^{m}y_k\left(\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\right)\right]dy_1,$$

$$\nu=1,\ 2,\ \ldots\ n-m.$$

Поэтому, вводя обозначеніе

$$H = (H_1) + \sum_{k=2}^{m} y_k (H_k),$$

получаемъ каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_{m+\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_{m+\nu}} dy_1,$$

$$dp_{m+\nu} = -\frac{\partial H}{\partial x_{m+\nu}} dy_1,$$

$$\nu = 1, 2 \ldots n - m.$$

Предположимъ, далѣе, что функціи $H_1, H_2, \ldots H_m$ заключаютъ кромѣ прежнихъ перемѣнныхъ еще z. Разсмотримъ *обобщенную каноническую систему въ полныхъ дифференціалахъ*

$$dx_{m+\nu} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} dx_k,$$

$$dp_{m+\nu} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m+\nu}} dx_k,$$

$$dz = \sum_{k=1}^{m} P_k dx_k,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n - m,$$

гдѣ положено, что

$$P_k = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k.$$

Внося послѣднія значенія функцій P_k, мы напишемъ соотвѣтствующія разсматриваемымъ линейныя, однородныя уравненія въ слѣдующей формѣ

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + [H_k, f] = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots m.$$

Поэтому получаемъ слѣдующаго вида условія, выражающія, что наша система—якобіевская,

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} - H_h\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}} + \left[H_h\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\right] -$$

$$-\frac{d}{dx_k}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}} + H_k\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}} - \left[H_k,\ \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{dH_k}{dx_{m+\nu}} - H_h\frac{\partial}{\partial z}\frac{dH_k}{dx_{m+\nu}} + \left[H_h,\ \frac{dH_k}{dx_{m+\nu}}\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{dH_h}{dx_{m+\nu}} + H_k\frac{\partial}{\partial z}\frac{dH_h}{dx_{m+\nu}} - \left[H_k,\ \frac{dH_h}{dx_{m+\nu}}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h}P_k - H_h\frac{\partial}{\partial z}P_k + [H_h,\ P_k] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}P_h + H_k\frac{\partial}{\partial z}P_h - [H_k,\ P_h] = 0,$$

$$\nu = 1,\ 2,\ \ldots n-m,$$

для всѣхъ различныхъ значеній h, k отъ 1 до m. Вносимъ въ эти равенства значенія функцій P и замѣчаемъ, что

$$[H_h,\ p_{m+\nu}] = -\frac{dH_h}{dx_{m+\nu}}.$$

Въ силу первыхъ четырехъ свойствъ скобокъ Вейлера, написанныя условія принимаютъ соотвѣтственно видъ

$$\frac{\partial}{\partial p_{m+\nu}}\{H_h,\ H_k\} = 0,$$

$$\frac{d}{dx_{m+\nu}}\{H_h,\ H_k\} = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu}\frac{\partial}{\partial p_{m+\nu}}\{H_h,\ H_k\} - \{H_h,\ H_k\} = 0,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$\{H_h,\ H_k\} = \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial z}H_h - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} + \frac{\partial H_h}{\partial z}H_k + [H_h,\ H_k].$$

Отсюда слѣдуетъ, что искомыя условія выражаются тождествами

$$\{H_h,\ H_k\} = 0,$$

при чемъ h, k проводятся по всѣмъ различнымъ значеніямъ отъ 1 до m.

Наконецъ, прилагая преобразованіе Майера къ разсматриваемымъ уравненіямъ, находимъ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx_{m+\nu} = \left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_{m+\nu}}\right) + \sum_{k=2}^{m} y_k \left(\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\right)\right] dy_1,$$

$$dp_{m+\nu} = -\left[\left(\frac{dH_1}{dx_{m+\nu}}\right) + \sum_{k=2}^{m} y_k \left(\frac{dH_k}{dx_{m+\nu}}\right)\right] dy_1,$$

$$dz = \left[(P_1) + \sum_{k=2}^{m} y_k (P_k)\right] dy_1,$$

$$\nu = 1,\ 2, \ldots n - m.$$

Пусть

$$H = (H_1) + \sum_{k=2}^{m} y_k (H_k).$$

Въ такомъ случаѣ преобразованныя уравненія становятся

$$dx_{m+\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_{m+\nu}} dy_1,$$

$$dp_{m+\nu} = -\frac{dH}{dx_{m+\nu}} dy_1,$$

$$dz = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{dH}{dp_{m+i}} - H.$$

Итакъ, приходимъ къ интегрированію обобщенной канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, теорія которыхъ служила предметомъ изслѣдованій Якоби *).

---

*) Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. IV, S. 413, Bd. V. S. S. 285, 291, 399.

ГЛАВА III.

О существованіи интеграловъ уравненій съ частными производными.

1. Пусть имѣемъ систему уравненій съ частными производными

$$\left. \begin{array}{c} F_k(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots m. \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Будемъ предполагать, что производныя p не исключаются изъ нихъ. Въ противномъ случаѣ между перемѣнными x, z получаются зависимости. Если послѣднія не опредѣляютъ значеній z, утождествляющихъ уравненія (1), или даютъ зависимости только между x-ами, то уравненія (1) несовмѣстны. Поэтому, исключая всѣ эти случаи изъ разсмотрѣнія, положимъ, что m не превосходитъ n. Начнемъ съ изученія системы (1), когда

$$m = n$$

и уравненія ея даютъ

$$p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Если существуетъ функція z, частныя производныя которой опредѣляются послѣдними уравненіями, то, на основаніи ихъ, должны удовлетворяться равенства

$$\frac{dH_h}{dx_k} = \frac{dH_k}{dx_h}$$

для всѣхъ различныхъ значеній h, k отъ 1 до m. Слѣдовательно, должны имѣть мѣсто тождества

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial z} H_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial z} H_h ,$$

и функція z представляетъ интегралъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$dz + \sum_{k=1}^{m} H_k \, dx_k = 0 .$$

Когда функція z не входитъ явно въ изслѣдуемыя уравненія, то послѣднее равенство — точный дифференціалъ.

Разсмотрѣнный случай заслуживаетъ особаго вниманія, такъ какъ къ нему, какъ будетъ показано въ слѣдующей главѣ, приводится по Якоби интегрированіе всякой системы уравненій съ частными производными, имѣющей рѣшеніе.

Если

$$m < n ,$$

то, при сдѣланномъ предположеніи, уравненія (1) приводятся къ виду

$$\left. \begin{array}{c} p_k + H_k \, (x_1 \, , \, x_2 \, , \, \ldots \, x_n \, , \, z \, , \, p_{m+1} \, , \, p_{m+2} \, , \, \ldots \, p_n) = 0 \, , \\ k = 1 , \, 2 \, , \, \ldots \, m . \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Приступая къ изученію условій ихъ интегрируемости, мы будемъ разсматривать, какъ въ n^0 7 второй главы, только такія рѣшенія системы (2), вторыя частныя производныя которыхъ непрерывны. Если это рѣшеніе существуетъ, то оно удовлетворяетъ какъ уравненіямъ (2), такъ и ихъ производнымъ. Дифференцируя по x_k, $x_{m+\nu}$, при чемъ $k \leqq m$, h-ое уравненіе системы (2), находимъ

$$\frac{\partial p_h}{\partial x_k} + \frac{\partial H_h}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} = 0 ,$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial x_{m+\nu}} + \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}} + \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_{m+\nu}} = 0 ,$$

$$\nu = 1 \, , \, 2 \, , \, \ldots \, n - m .$$

Сумма перваго уравненія съ произведеніями остальныхъ соотвѣтственно на

$$\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+1}} , \; \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+2}} , \; \ldots \; \frac{\partial H_k}{\partial p_n}$$

даетъ равенство

$$\frac{\partial p_h}{\partial x_k}+\frac{dH_h}{dx_k}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\left(\frac{\partial p_h}{\partial x_{m+\nu}}+\frac{dH_h}{dx_{m+\nu}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_{m+\nu}}\right)=0.$$

Такимъ же образомъ получаемъ

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_h}+\frac{dH_k}{dx_h}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_h}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_{m+i}}+\frac{dH_k}{dx_{m+i}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_{m+i}}\right)=0.$$

Вслѣдствіе непрерывности вторыхъ частныхъ производныхъ функціи z, существуютъ тождества

$$\frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma}=\frac{\partial x_\sigma}{\partial x_s}$$

для всѣхъ различныхъ значеній s, σ отъ 1 до n. Поэтому разность написанныхъ выше равенствъ становится

$$\frac{dH_h}{dx_k}-\frac{dH_k}{dx_h}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{dH_h}{dx_{m+\nu}}-\frac{dH_k}{dx_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\right)=0$$

и можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ

$$[p_k+H_k,\ p_h+H_h]=0, \tag{3}$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются на всѣ перемѣнныя x, z и p. Если интегралъ системы (2)-ой существуетъ, то полученныя равенства, заключая всѣ p, должны удовлетворяться, на основаніи уравненій (2). Впрочемъ, для существованія ихъ рѣшенія, высказанное условіе не есть необходимое. Равенства (3) могутъ представлять между перемѣнными x, z, p зависимости, которыя совмѣстно со (2)-ми образуютъ новую систему уравненій съ частными производными и т. д. Не останавливаясь на послѣднемъ случаѣ, будемъ предполагать, что скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (2), уничтожаются, въ силу разсматриваемыхъ уравненій, или, какъ говорятъ, послѣднія представляютъ *замкнутую систему.* Делассю выражаетъ результатъ исключенія значеній (2) производныхъ p_k изъ (3) равенствами *)

$$[H_k, H_h] = 0,$$

не раскрывая однако смысла этихъ обозначеній. Но принимая во вниманіе значеніе скобокъ Вейлера, легко видѣть, что условія замкнутости системы (2) выражаются тождествами

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial z} H_k - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} + \frac{\partial H_k}{\partial z} H_h + [H_k, H_h] = 0 \qquad (4)$$

для всѣхъ значеній k, h отъ 1 до m, при чемъ послѣднія скобки распространяются только на перемѣнныя $x_{m+\nu}$, z, $p_{m+\nu}$. Написанное выраженіе скобокъ Делассю совпадаетъ съ тѣмъ значеніемъ, которое мы имъ давали въ предыдущей главѣ. Въ частномъ случаѣ, когда z не входитъ явно въ уравненія (2), лѣвыя части тождествъ (4) представляютъ скобки Пуассона

$$(p_k + H_k, p_h + H_h).$$

Эти скобки уничтожаются тождественно и разсматриваемыя уравненія образуютъ такъ называемую *систему въ инволюціи.*

Выведенныя условія замкнутости уравненій (2) представляются тождествами (4); на нихъ будутъ основаны всѣ дальнѣйшія вычисленія Какъ было указано, идея — выражать искомыя условія тождествами прилагалась Делассю къ уравненіямъ, зависящимъ явно отъ неизвѣстной функціи. Раньше его, въ 1889 году Граве *), распространяя на разсматриваемыя уравненія второй способъ Якоби интегрированія уравненій съ частными производными, основывалъ свои разсужденія также на тождествахъ, которыя однако *по виду* отличны отъ (4)-ыхъ. Другіе же авторы, при рѣшеніи вопроса интегрированія уравненій (2), приводятъ ихъ къ системѣ *уравненій въ инволюціи*, для которыхъ скобки Вейлера, составленныя изъ ихъ лѣвыхъ частей, уничтожаются тождественно. Такъ Гурса **) показываетъ, что такое приведеніе всегда возможно.

2. Пусть уравненія съ частными производными (1) опредѣляютъ одинаковыя со (2)-ми значенія m какихъ-нибудь изъ входящихъ въ

---

*) Annales de l'Ecole Normale Snpéricure, troisieme série t. 14, p. 126.

**) Граве, Объ интегрированіи частныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, n° 18, стр. 19.

***) Goursat, Legons sur l'integration.., n° 65, p. 163.

нихъ величинъ. Слѣдуя Коркину *), называютъ обѣ разсматриваемыя системы *преобразованными* другъ-друга. Если система (2)-я замкнутая, то легко показать, что и преобразованная ея (1)-я тоже замкнутая, т. е. скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей ея уравненій, уничтожаются въ силу данныхъ уравненій. Дѣйствительно, значенія p_i, изъ уравненій (2), утождествляютъ (1)-ыя. Поэтому находимъ **)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial (p_k+H_k)}{\partial p_i},$$

$$\frac{dF_\beta}{dx_i}=\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_h}\frac{d(p_h+H_h)}{dx_i},$$

и т. д.

Слѣдовательно,

$$[F_\alpha, F_\beta]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_h}[p_k+H_k, p_h+H_h].$$

Отсюда заключаемъ, что, въ силу уравненій (1), справедливы равенства

$$[F_\alpha, F_\beta]=0$$

для всѣхъ различныхъ значеній α, β отъ 1 до m.

Мы предполагали до сихъ поръ m, не превосходящимъ n. Допустимъ теперь, что

$$m=n+1$$

и что уравненія системы (1) разрѣшимы относительно всѣхъ p. Если эта система имѣетъ интегралъ, то послѣдній удовлетворяетъ также уравненіямъ ***)

$$\frac{dF_\beta}{dx_i}+\frac{\partial F_\beta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial x_i}=0,$$

$$[F_\alpha, F_\beta]+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial F_\beta}{\partial z}-\frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial x_i}-\frac{\partial p_i}{\partial x_s}\right)=0,$$

*) Коркинъ, О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросовъ механики, n⁰ 7, стр. 9.

**) Ср. Mayer, Mathematische Annalen, Bd. VIII, S.S. 314–315. Goursat, Leçons sur l'intégration..., n⁰ 62, p. 153.

***) Goursat, Leçons sur l'intégration..., n⁰ 65, p.p. 162, 163.

для всѣхъ значеній α, β отъ 1 до $n+1$. Поэтому если значенія z и p, изъ уравненій (1), удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots n,$$

то получаются равенства

$$[F_\alpha, F_\beta] = 0.$$

Обратно, пусть уравненія (1) образуютъ замкнутую систему. Въ силу ея уравненій, получаемъ тождества

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\left(p_i - \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\left[\frac{\partial F_\beta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i\right) + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_s}\right)\right] = 0$$

$$\alpha = 1, 2 \dots n+1.$$

Если

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_{n+1}}{z, p_1, \dots p_n}\right) \gtrless 0,$$

то изъ послѣднихъ равенствъ заключаемъ, что, вслѣдствіе уравненій (1), удовлетворяются условія

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Слѣдовательно, результатъ исключенія всѣхъ n частныхъ производныхъ изъ замкнутой системы $n+1$ уравненій (1) даетъ равенство, опредѣляющее ихъ рѣшеніе z.

3. Всякая замкнутая система уравненій остается таковой и послѣ преобразованія ея къ новымъ перемѣннымъ. Для послѣдующаго изложенія отмѣтимъ преобразованіе *), при которомъ принимаютъ за новыя независимыя перемѣнныя

$$p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \dots p_{\mu+l}$$

вмѣсто

$$x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots x_{\mu+l}$$

---

*) Jacobi, Vorlesnugen über Dynamik, zweite Ausgube, S. 164.

и новой неизвѣстной функціей выраженіе

$$z' = z - \sum_{\lambda=1}^{l} x_{\mu+\lambda}\, p_{\mu+\lambda}.$$

Называя черезъ p'_i производныя функціи z' по независимымъ перемѣннымъ значка i, находимъ

$$p_s = p'_s,$$

$$x_{\mu+\lambda} = -p'_{\mu+\lambda},$$

при чемъ s, λ принимаютъ значенія

$$s = 1, 2, \ldots \mu, \mu+l+1, \ldots n,$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots l.$$

Пусть преобразованныя уравненія (1) становятся

$$F'_k(x_1, x_2, \ldots x_\mu, p_{\mu+1}, \ldots p_{\mu+l}, x_{\mu+l+1}, \ldots x_n, z', p'_1, p'_2, \ldots p'_n) = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots m.$$

Очевидно, что имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{\partial F'_k}{\partial p'_s} = \frac{\partial F_k}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial F'_k}{\partial p'_{\mu+\lambda}} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_{\mu+\lambda}},$$

$$\frac{\partial F'_k}{\partial x_s} = \frac{\partial F_k}{\partial x_s}, \quad \frac{\partial F'_k}{\partial z'} = \frac{\partial F_k}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F'_k}{\partial p_{\mu+\lambda}} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{\mu+\lambda}} - \frac{\partial F_k}{\partial z} p'_{\mu+\lambda},$$

правыя части которыхъ выражены въ новыхъ перемѣнныхъ. Отсюда слѣдуютъ равенства

$$[F'_\alpha, F'_\beta] = [F_\alpha, F_\beta],$$

и, стало-быть, если данная система (1)—замкнутая, то и преобразованныя уравненія представляютъ такую же систему.

Само собою разумѣется, если за новыя независимыя перемѣнныя принять всѣ или нѣкоторыя изъ перемѣнныхъ

$$p_{m+1}, \; p_{m+2}, \cdots p_n,$$

то замкнутая система (2) преобразовывается въ замкнутую же систему уравненій, разрѣшенныхъ относительно производныхъ

$$p_1', \; p_2', \cdots p_m'.$$

4. Равенства (4) являются не только необходимыми условіями существованія рѣшеній уравненій (2), но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточными. Докажемъ слѣдующее предложеніе:

Пусть $H_1, H_2, \cdots H_m$, *разсматриваемыя какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ* $x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots p_n$, *голоморфны вблизи ихъ начальныхъ значеній* x^0, z^0, $p^0_{m+\nu}$ *и удовлетворяютъ условіямъ (4). Положимъ, что*

$$f(x_{m+1}, \; x_{m+2}, \cdots x_n)$$

— произвольная, но голоморфная функція вблизи начальныхъ значеній $x^0_{m+\nu}$, *входящихъ въ нее перемѣнныхъ. Если для этихъ начальныхъ значеній функціи*

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

равны соотвѣтственно

$$z^0, \; p^0_{m+1}, \; p^0_{m+2}, \cdots p^0_n,$$

то существуетъ единственная функція z *перемѣнныхъ* x, *голоморфная вблизи ихъ начальныхъ значеній* x^0 *и удовлетворяющая уравненіемъ (2); при этомъ функціи*

$$z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots x_m$ *становятся равными*

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Высказанная теорема служила предметомъ изслѣдованій С. Ли, Гурса и Делассю. Приводимое здѣсь доказательство ея представляетъ равитіе идей Коши, которыя прилагались Бріо и Буке къ обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ и Дарбу — къ уравненіямъ съ частными производными нѣсколькихъ функцій, число которыхъ равно числу данныхъ уравненій *).

Замѣтимъ прежде всего, что достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ случая, когда начальныя значенія x^0, z^0, $p^0_{m+\nu}$ — нули. Въ самомъ дѣлѣ, вводимъ новыя перемѣнныя x'_1, x'_2, ... x'_n, z', опредѣленныя равенствами

$$x_1 = x_1^0 + x'_1,\ x_2 = x_2^0 + x'_2,\ \dots\ x_n = x_n^0 + x'_n,$$

$$z = z' + z^0 + \sum_{\iota=1}^{n-m} p^0_{m+\iota}\, x'_{m+\iota}.$$

Называя черезъ p' частныя производныя перваго порядка, взятыя въ новомъ предположеніи, получаемъ

$$p_k = p'_k,\ p_{m+\nu} = p'_{m+\nu} + p^0_{m+\nu},$$

$$k = 1,\ 2,\ \dots\ m,\ \nu = 1,\ 2,\ \dots\ n - m.$$

Уравненія (2) преобразовываются въ замкнутую систему

$$p'_k + H'_k(x'_1,\ x'_2,\ \dots\ x'_n,\ z',\ p'_{m+1},\ p'_{m+2},\ \dots\ p'_n) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots m,$$

при чемъ функціи H'_k голоморфны вблизи начальныхъ значеній, равныхъ нулю, всѣхъ входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ. Поэтому, возвращаясь къ системѣ (2), положимъ x^0, z^0, $p^0_{m+\nu}$ равными нулю. Докажемъ, что *въ этомъ случаѣ существуетъ единственный интегралъ* z *уравненій* (2), *голоморфный вблизи значеній* $x = 0$, *при чемъ*

$$z,\ \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}},\ \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}},\ \dots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

для всѣхъ $x_k = 0$ *становятся произвольными функціями*

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}},\ \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}},\ \dots\ \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

---

*) Goursat, Leçons sur l'intégration..., n⁰ 71, p. 179.

Delassus, Annales de l'Ecole Normale Superieure, troisième série, t. 13, p. 421, t. 14, p. 109.

Briot et Bouquet, Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXVI-e cahier.

Darboux, Comptes Rendus, t. LXXX, p.p. 101, 317.

голоморфными вблизи начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_{m+\nu}$, *равныхъ нулю, и уничтожающимися для послѣднихъ.*

Предположимъ, что искомый интегралъ существуетъ. Мы найдемъ въ такомъ случаѣ начальныя значенія всѣхъ его частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

составляя производныя уравненій (2), или дифференцируя функцію f, для вычисленія начальныхъ значеній производныхъ, которыя не берутся по перемѣннымъ x_k. Всякая производная, по нѣсколькимъ изъ послѣднихъ перемѣнныхъ, можетъ быть вычислена различными способами. Легко однако показать, что *всѣ онѣ опредѣляются однозначно въ области голоморфности функцій* H_k, *въ силу условій* (4) *). Начнемъ съ разсмотрѣнія производныхъ второго порядка. Функціи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_{m+\nu}}$$

опредѣляются единственнымъ образомъ изъ производныхъ по $x_{m+\nu}$ дифференціальныхъ уравненій (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_{m+\nu}} = -\left(\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}} + \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_{m+\nu}}\right).$$

Но для производныхъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_h}$$

получаются по два выраженія

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_h} = -\left(\frac{\partial H_k}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_h}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_h \partial x_k} = -\left(\frac{\partial H_h}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_k}\right).$$

---

*) Cp. Delassus, Leçons sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du 1—er ordre, n° 12, p.p. 20—21.

Внося въ нихъ полученныя выше значенія

$$\frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_h}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_h \partial x_{m+\nu}},\quad \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_k}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_{m+\nu}},$$

находимъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_h}=-\frac{dH_k}{dx_h}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{dH_h}{dx_{m+\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_{m+\nu}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_h \partial x_k}=-\frac{dH_h}{dx_k}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\frac{dH_k}{dx_{m+\nu}}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_{m+\nu}}.$$

Двойныя суммы въ обоихъ выраженіяхъ равны между собой, вслѣдствіе равенствъ

$$\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_{m+\nu}}=\frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_{m+i}}.$$

Поэтому, принимая во вниманіе тождества (4), заключаемъ, что оба полученныя выраженія производной

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_h}$$

тождественны, въ силу уравненій (2).

Такимъ образомъ высказанное предложеніе имѣетъ мѣсто для производныхъ второго порядка. Предположимъ его справедливымъ для всѣхъ производныхъ до μ-аго порядка включительно и докажемъ, что всѣ производныя $\mu+1$-аго порядка опредѣляются также однозначно.

Дѣйствительно, допустимъ противное. Пусть какая-либо производная $\mu+1$-аго порядка, назовемъ ее черезъ $D_{\mu+1}$, получаетъ два различныхъ значенія

$$D_{\mu+1}=\varphi_{\mu+1},\; D_{\mu+1}=\varphi'_{\mu+1} \tag{5}$$

Легко убѣдиться, что это предположеніе невозможно. Обозначимъ черезъ D^i_μ, D^p_μ соотвѣтственно частныя производныя

$$\frac{\partial^\mu z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_i^{\alpha_i-1}\ldots\partial x_p^{\alpha_p}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad \frac{\partial^\mu z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_i^{\alpha_i}\ldots\partial x_p^{\alpha_p-1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

гдѣ

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_p+\ldots+\alpha_n=\mu+1.$$

Положимъ, наконецъ, что уравненія (5) получаются дифференцированіемъ соотвѣтственно по x_i и x_p уравненіи

$$D'_\mu-\varphi'_\mu=0\,,\; D^p_\mu-\varphi^p_\mu=0\,, \tag{6}$$

Отсюда слѣдуютъ тождества

$$\varphi_{\mu+1}=\left(\frac{\partial\varphi'_\mu}{\partial x_i}\right),\varphi'_{\mu+1}=\left(\frac{\partial\varphi^p_\mu}{\partial x_p}\right),$$

при чемъ скобки обозначаютъ результатъ исключеній, необходимыхъ для того, чтобы послѣднія равенства удовлетворялись тождественно. Въ силу однозначности опредѣленія всѣхъ частныхъ производныхъ до μ-го порядка включительно, оба уравненія (6) должны получаться изъ одного и того же уравненія

$$D_{\mu-1}-\varphi_{\mu-1}=0\,,$$

опредѣляющаго выраженіе производной

$$D_{\mu-1}=\frac{\partial^{\mu-1}z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_i^{\alpha_i-1}\ldots\partial x_p^{\alpha_p-1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Поэтому необходимо существуютъ равенства

$$\varphi'_\mu=\left(\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial x_p}\right),\quad \varphi^p_\mu=\left(\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial x_i}\right).$$

$$\varphi_{\mu+1}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial x_p}\right)\right),$$

$$\varphi'_{\mu+1}=\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial x_i}\right)\right).$$

Такъ какъ въ области голоморфности функцій H_k величина ихъ производныхъ не зависитъ отъ порядка дифференцированія, то, стало-быть, оба выраженія производной $D_{\mu+1}$, тождественны.

Такимъ образомъ допустивъ существованіе искомаго интеграла, мы находимъ разложеніе его по строкѣ Тайлора

$$z=\sum A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{7}$$

Чтобы убѣдиться въ дѣйствительномъ существованіи послѣдней функціи z, остается доказать, что написанный рядъ—безусловно и равномѣрно сходящійся. Съ этой цѣлью разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ:

Функціи H_k разлагаются по строкѣ Тейлора вблизи начальныхъ значеній, равныхъ нулю, перемѣнныхъ x, z, $p_{m+\nu}$. Пусть r есть наибольшій изъ модулей значеній послѣднихъ перемѣнныхъ, для которыхъ эти ряды сходятся и пусть, въ тѣхъ же предѣлахъ измѣненія перемѣнныхъ, M представляетъ наибольшій изъ модулей всѣхъ функцій H_k. Назовемъ, далѣе, черезъ ϱ наибольшій изъ модулей перемѣнныхъ $x_{m+\nu}$, вблизи начальныхъ значеній которыхъ разложеніе функціи f по строкѣ Тейлора сходится. Пусть въ разсматриваемыхъ предѣлахъ N — наибольшее значеніе модуля f. Въ такомъ случаѣ функціи

$$\frac{M}{1-\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n+z+p_{m+1}+p_{m+2}+\cdots+p_n}{r}},$$

$$F=\frac{N}{\varrho}\cdot\frac{(x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots+x_n)^2}{\varrho-(x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots+x_n)}$$

разлагаются въ ряды

$$M+\frac{M}{r}(x_1+\cdots+x_n+z+p_{m+1}+\cdots+p_n)+\frac{M}{r^2}(x_1+\cdots+p_n)^2+\cdots,$$

$$\frac{N}{\varrho^2}(x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots+x_n)^2+\frac{N}{\varrho^3}(x_{m+1}+\cdots+x_n)^3+\cdots,$$

члены которыхъ превосходятъ соотвѣтственные члены разложеній функцій H_k и f.

Составляемъ замкнутую систему уравненій съ частными производными P_1, P_2, $\ldots P_n$ функцій Z по независимымъ перемѣннымъ x_1, x_2, $\ldots x_n$

$$\left.\begin{aligned} P_k&=H, \\ k&=1,\ 2,\ldots m, \end{aligned}\right| \tag{8}$$

гдѣ функція H имѣетъ значеніе

$$H=\frac{M}{1-\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n+Z+P_{m+1}+P_{m+2}+\cdots+P_n}{r}}$$

и представляетъ, стало-быть, голоморфную функцію перемѣнныхъ x, Z, $P_{m+\nu}$ вблизи ихъ значеній, равныхъ нулю.

Если существуетъ для системы (8)-ой интегралъ Z, голоморфный вблизи значеній $x=0$, при чемъ функціи

$$Z, \frac{\partial Z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial Z}{\partial x_{m+2}}, \dots \frac{\partial Z}{\partial x_n}$$

для всѣхъ $x_k=0$ становятся равными

$$F, \frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{m+2}}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

то функція Z разлагается вблизи значеній $x=0$ въ сходящійся рядъ, члены котораго больше соотвѣтственныхъ членовъ ряда (7). Поэтому для доказательства существованія функціи z, достаточно показать, что существуетъ функція Z, обладающая указанными свойствами. Въ этомъ легко убѣдиться, вычисливъ значеніе Z. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (8) приводятся къ слѣдующему виду

$$P_k - P_1 = 0,$$

$$P_1 - H = 0,$$

$$k = 2, 3, \dots m.$$

Первыя $m-1$ уравненій образуютъ якобіевскую систему, общій интегралъ которой есть

$$Z = \Pi(x, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n),$$

гдѣ Π — произвольная функція и

$$x = x_1 + x_2 + \dots x_m.$$

Поэтому уравненіе, опредѣляющее функцію Π, становится

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{Mr}{r - \left(x + x_{m+1} + \dots + x_n + \Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial x_{m+1}} + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\right)}.$$

Такъ какъ начальныя значенія искомой фукнціи Π и ея производныхъ зависятъ только отъ выраженія

$$y = x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n,$$

то, согласно съ установившимся обычаемъ, будемъ разсматривать Π функціей только x и y. Называя черезъ p, q частныя производныя перваго порядка функціи Π по x и y, напишемъ изслѣдуемое уравненіе въ видѣ

$$p + \frac{Mr}{x + y - \Pi + (n - m)\, q - r} = 0.$$

Задача разысканія требуемаго интеграла этого уравненія была рѣшена Кенигсбергеромъ *). Мы будемъ интегрировать его слѣдующимъ образомъ. Принимаемъ p новой независимой перемѣнной вмѣсто x и выраженіе

$$\varphi = y + \Pi - r - xp$$

—новой функціональной перемѣнной. Преобразованное уравненіе становится линейнымъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - b(1+p)\frac{\partial\varphi}{\partial p} + b\varphi + \frac{a}{p} = 1,$$

при чемъ введены обозначенія

$$b = \frac{1}{n-m}, \qquad a = \frac{Mr}{n-m}.$$

Общій интегралъ полученнаго уравненія есть

$$\varphi = \frac{1}{b}\left[1 - ap - a(1+p)\log\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] + (1+p)\psi((1+p)\, e^{by}),$$

гдѣ ψ — произвольная функція. Слѣдовательно, Π опредѣляется совокупностью уравненій

$$\left.\begin{aligned} \Pi = r + xp - y + \frac{1}{b}\left[1 - ap - a(1+p)\log\left(1+\frac{1}{p}\right)\right] + \\ + e^{-by}\,\Psi((1+p)\, e^{by}), \\ x - \frac{a}{b}\left[1 + \log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}\right] + \Psi'((1+p)\, e^{by}) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

*) Konigsberger, Journal Crelle, Bd. 109, S. S. 273—277; Mathematische Annalen, Bd. 42, S, 485.

гдѣ Ψ-новая произвольная функція, связанная съ прежней уравненіемъ

$$\Psi = (1+p)e^{by}\psi\,,$$

и p — перемѣнный параметръ. Остается опредѣлить Ψ такъ, чтобы для $x=0$ функціи Π, $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ становились равными

$$F = \frac{N}{\varrho}\cdot\frac{y^2}{\varrho - y}\,, \; F' = \frac{\partial F}{\partial y}\,.$$

Производная по y функціи Π дается равенствомъ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -1 - be^{-by}\Psi + b(1+p)\Psi'.$$

Поэтому, называя черезъ p_0 значеніе параметра p для $x=0$ и полагая

$$(1+p_0)e^{by} = v\,,$$

находимъ, для опредѣленія функціи Ψ, два уравненія

$$\left.\begin{aligned} \Psi(v) &= \frac{a}{b}v\left[1+\log\left(1+\frac{1}{ve^{-by}-1}\right)\right] + e^{by}\left(F+y-r-\frac{a+1}{b}\right), \\ & [b(F+y-r)+F'](1+ve^{-by}) - a = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Лѣвая часть второго изъ нихъ, называемъ ее черезъ U, представляетъ голоморфную функцію y, v вблизи ихъ значеній

$$y=0\,, v = -\left(1+\frac{a}{br}\right)$$

и уничтожается для послѣднихъ. Кромѣ того производная

$$\frac{\partial U}{\partial y}$$

для тѣхъ же значеній перемѣнныхъ выражается формулой

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = -\frac{[(n-m+r)M+r]\varrho^2 + 2MN(n-m)^2}{\varrho^2(n-m)^2}\,.$$

По условію

$$n > m$$

и всѣ величины r, M, ϱ, N — положительныя. Слѣдовательно, выраженіе $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0$ представляетъ конечную, отличную отъ нуля постоянную величину. Поэтому второе уравненіе (10) опредѣляетъ голоморфную функцію y перемѣнной v, а изъ перваго — (10) заключаемъ, что искомая функція Ψ является голоморфной функціей аргумента v для нѣкоторой области его измѣненія. Итакъ, въ области голоморфности функцій H_k существуетъ голоморфная функція Π перемѣнныхъ x, y и искомый интегралъ уравненій (2) представляется рядомъ (7), который сходится безусловно и равномѣрно вблизи начальныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ.

Приведенныя соображенія справедливы только для области голоморфности функцій H_k. Изъ дальнѣйшаго изложенія будетъ видно, что интегралы уравненій (2) существуетъ и въ болѣе общемъ случаѣ, когда функціи H_k имѣютъ только конечныя, опредѣленныя частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяютъ условіямъ (4). Если всѣ эти условія не удовлетворяются, то нельзя сказать ничего опредѣленнаго относительно существованія интеграловъ уравненій разсматриваемаго вида.

Такъ возьмемъ уравненіе *)

$$p_1 + \frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{4}p_2^2 - z\right) = 0.$$

Функція

$$\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{4}p_2^2 - z\right)$$

для значенія $x_1 = 0$ и конечныхъ значеній z и p_2, отличныхъ отъ нуля, обращается въ безконечность. Поэтому мы не можемъ утверждать *a priori*, имѣетъ ли разсматриваемое уравненіе въ области точки $x_1 = 0$ рѣшеніе, которое для значенія $x_1 = 0$ становилось бы данной функціей x_2.

5. Можно идти далѣе въ изученіи свойствъ интеграловъ системы (2) и показать, что *при голоморфности функцій H_k, внутри области безусловной и равномѣрной сходимости ряда (7), не существуетъ удовлетворяющихъ прежнимъ начальнымъ условіямъ, дифференцируемыхъ и неголоморфныхъ рѣшеній уравненій (2).*

При доказательствѣ этого предложенія мы будемъ слѣдовать соображеніямъ Пикара **) для случая обыкновенныхъ дифференціальныхъ

*) Этотъ примѣръ заимствованъ изъ сочиненія В. П. Ермакова „Нелинейныя дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка со многими перемѣнными и каноническія уравненія“, стр. 45.

**) Picard, Traité d'Analyse, t. II, n° 14, p. 314.

уравненій и ограничимъ наши разсужденія слѣдующими условіями. Опишемъ круги, достаточно малыхъ радіусовъ, на плоскостяхъ измѣненія перемѣнныхъ x, z, p_{m+i} вокругъ ихъ начальныхъ значеній. Пусть перемѣнныя x измѣняются внутри соотвѣтствующихъ имъ круговъ, а z, p_{m+i} не выходятъ изъ своихъ. Если перемѣнныя x, стремясь къ своимъ начальнымъ значеніямъ, описываютъ дуги конечной длины, то въ такомъ случаѣ легко убѣдиться въ справедливости нашего предложенія.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ противное. Предположимъ, что z_1 является дифференцируемымъ, неголоморфнымъ, отличнымъ отъ z интеграломъ системы (2) и удовлетворяетъ одинаковымъ съ нимъ начальнымъ условіямъ. Полагая

$$z_1 = z + u,$$

находимъ двѣ системы тождествъ

$$\frac{\partial(z+u)}{\partial x_k} + H_k\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z+u, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} + H_k\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Отсюда слѣдуютъ новыя тождества

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} + H_k\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z+u, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}},\right.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_{m+2}} + \frac{\partial u}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) -$$

$$- H_k\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Послѣднія, по теоремѣ о конечныхъ приращенія функцій, представляются въ видѣ системы линейныхъ уравненій относительно частныхъ производныхъ функціи u

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_k u + B_k \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}} + \ldots + F_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \\ k = 1, 2, \ldots m, \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

гдѣ коэффиціенты A_k, B_k, ... F_k — дифференцируемыя функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, ... x_n, не зависящія отъ u. По условію (см. n⁰ 1 настоящей главы) функція z_1 должна имѣть непрерывныя частныя производныя перваго и второго порядка. Поэтому система (11) является, или якобіевской, или приводится къ таковой, или, наконецъ, имѣетъ единственное рѣшеніе

$$u = 0.$$

Напишемъ уравненія (11) въ видѣ линейныхъ относительно $\log u$

$$\frac{\partial \log u}{\partial x_k} + A_k + B_k \frac{\partial \log u}{\partial x_{m+1}} + \ldots + F_k \frac{\partial \log u}{\partial x_n} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots m.$$

Не вдаваясь въ разсмотрѣніе условій, могутъ ли эти уравненія представлять якобіевскую систему, предположимъ, что они приводятся къ таковой прибавленіемъ l уравненій. Пусть полученная система есть

$$\frac{\partial \log u}{\partial x_i} + A'_i + B'_i \frac{\partial \log u}{\partial x_{m+l+1}} + \ldots + G'_i \frac{\partial \log u}{\partial x_n} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots m + l.$$

Изъ соображеній, развитыхъ въ n⁰ 9 предыдущей главы, слѣдуетъ, что общій интегралъ системы (11) дается уравненіемъ

$$u = e^F \Pi(u_1, u_2, \ldots u_{n-m-l}), \tag{12}$$

гдѣ Π — произвольная функція и

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-m-l}, ue^{-F}$$

различныя частныя рѣшенія разсматриваемой системы, при чемъ всѣ нумерованныя u и F — функціи только независимыхъ перемѣнныхъ x. Кромѣ того внутри разсматриваемой области интегрированія функція F сохраняетъ конечное значеніе, и

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots u_{n-m-l}}{x_{m+l+1}, x_{m+l+2}, \ldots x_n}\right) \gtrless 0. \tag{13}$$

По условію выраженія

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial u}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

должны уничтожаться тождественно для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Поэтому для послѣднихъ значеній получаемъ рядъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(u_1, u_2, \ldots u_{n-m-l}) = 0, \\ &\sum_{s=1}^{n-m-l} \frac{\partial \Pi}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x_{m+\nu}} = 0, \\ &\nu = 1, 2, \ldots n-m. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Вслѣдствіе условія (13), $n-m-l$ послѣднихъ равенствъ (14) показываютъ, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \; i = 1, 2 \ldots . n-m-l,$$

т. е. функція Π — постоянная величина. Въ силу перваго равенства (14), эта постоянная — нуль. Итакъ,

$$u = 0.$$

Слѣдовательно, оба рѣшенія системы (2), которыя предполагались различными, — тождественны.

6. Доказанныя предложенія касались интеграловъ Коши. Но вмѣстѣ съ тѣмъ легко убѣдиться въ существованіи, при прежнихъ условіяхъ, также полнаго интеграла уравненій (2).

Дѣйствительно, функція f считалась какой угодно. Стоитъ только положить

$$f = z^0 + \sum_{i=1}^{n-m} p^0_{m+i} x_{m+i},$$

(величины x^0, z^0, p^0_{m+i} отличны отъ нуля) и мы находимъ для уравненій (2) рѣшеніе, зависящее отъ величинъ

$$z^0, p^0_{m+1}, p^0_{m+2}, \ldots p^0_n.$$

Послѣднія могутъ быть заданы произвольно внутри разсматриваемой области интегрированія, слѣдовательно, полученное рѣшеніе зависитъ отъ $n-m+1$ произвольныхъ постоянныхъ. Кромѣ того функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{z, \dfrac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \dfrac{\partial z}{\partial x_n}}{z^0, p^0_{m+1}, p^0_{m+2}, \ldots p^0_n}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ функціи

$$z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

становятся соотвѣтственно равными

$$z^0 + \sum_{i=1}^{n-m} p^0_{m+i} x_{m+i}, \; p^0_{m+1}, \; p^0_{m+2}, \ldots p^0_n,$$

и предыдущій опредѣлитель принимаетъ значеніе, равное единицѣ. Итакъ, указанное рѣшеніе представляетъ полный интегралъ изслѣдуемыхъ уравненій.

7. Наконецъ, слѣдуя Гурса *), изложимъ приведеніе С. Ли системы (2) къ одному уравненію въ частныхъ производныхъ. Вводимъ вмѣсто $x_1, x_2, \ldots x_m$ новыя независимыя перемѣнныя $y_1, y_2, \ldots y_m$, связанныя съ прежними слѣдующими зависимостями

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \ldots \quad x_m = x_m^0 + y_1 y_m.$$

Преобразованныя уравненія (2) становятся

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} + H_1 + y_2 H_2 + y_3 H_3 + \ldots + y_m H_m = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_k} + y_1 H_k = 0,$$

$$k = 2, 3, \ldots m.$$

Разсуждая, какъ въ n°12 предыдущей главы, легко видѣть, что интегрированіе полученной преобразованной системы приводится къ задачѣ интегрированія только одного ея перваго уравненія.

*) Goursat, Leçons sur l'intégration..., n° 71, p. 179.

ГЛАВА IV.

Объ интегрированіи уравненій съ частными производными.

1. Задача интегрированія одного уравненія общаго вида съ частными производными перваго порядка одной функціи была рѣшена Пфаффомъ въ 1814 году. Съ тѣхъ поръ Коши, Якоби и Буръ, Вейлеръ и Клебшъ *) значительно упростили это рѣшеніе и распространили его на системы совокупныхъ уравненій. Вниманіе геометровъ было направлено главнымъ образомъ на уменьшеніе числа необходимыхъ операцій для интегрированія разсматриваемыхъ уравненій, и труды ихъ увѣнчались полнымъ успѣхомъ въ началѣ семидесятыхъ годовъ благодаря работамъ Майера и С. Ли. По свидѣтельству Клебша, ихъ изслѣдованія представляютъ „замѣчательный примѣръ одновременнаго совпаденія весьма важныхъ открытій, къ которымъ эти геометры пришли независимо другъ отъ друга и совершенно различными путями“ **). Въ XI томѣ „Mathematische Annalen“ ***) С. Ли приводитъ сравнительныя таблицы числа и порядковъ операцій, предлагавшихся различными авторами для интегрированія разсматриваемыхъ уравненій. Въ современной математической литературѣ наиболѣе совершеннымъ и простымъ по

---

*) Pfaff, Abhandlungen der Berliner Akademie, 1814—1815.

Cauchy, Exercices d'Analyse et de Physique mathematiques, 1841, p. 238.

Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. IV, S. 59, Bd. V, S. 1.

Bour, Sur l'integration des équations differentielles partielles du premier et du second ordre, Journal de l'Ecole polytechnique, 39—e cahier.

Weiler, Schomilch's Zeitschrift, Bd. VIII, S. 264, Bd. XX, S. 271.

Mayer Mathematische Annalen, Bd. IX, S. 347.

Clebsch, Journal Crelle, Bd. 65.

**) См. „Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universitat zu Göttingen“ за 1872 годъ, статьи Майера и С. Ли на стр. 315, 321 и подстрочное примѣчаніе Клебша въ послѣдней изъ нихъ.

***) S. 529, Abschnitt III, Giebt es noch bessere Integratiosmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1 . O . ?

изложенію является такъ называемый „способъ Якоби и Майера интегрированія уравненій съ частными производными“, который и будетъ приведенъ въ настоящей главѣ.

2. Возьмемъ систему уравненій въ инволюціи

$$\left. \begin{aligned} p_k + H_k\,(x_1\,,\ x_2\,, \cdots x_n\,;\ p_{m+1}\,;\ p_{m+2}\,, \cdots p_n) = 0\,, \\ k = 1\,,\ 2\,, \ldots m\,,\ m < n\,, \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

при чемъ функціи H_k имѣютъ конечныя, опредѣленныя частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ по перемѣннымъ x, $p_{m+\nu}$, вблизи данныхъ ихъ начальныхъ значеній, и удовлетворяютъ тождественно условіямъ

$$\frac{\partial H_k}{dx_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} + (H_k\,,\ H_h) = 0 \tag{2}$$

для всѣхъ различныхъ значеній k, h отъ 1 до m.

Слѣдуя Якоби, приводятъ интегрированіе данныхъ уравненій къ розысканію $n - m$ такихъ функцій $p_{m+1}\,,\ p_{m+2}\,, \cdots p_n$ перемѣнныхъ x и $n - m$ произвольныхъ постоянныхъ, которыя совмѣстно съ уравненіями (1) обращаютъ выраженіе

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\ dx_s \tag{3}$$

въ точный дифференціалъ *).

Пусть равенство

$$f\,(x_1\,,\ x_2\,, \cdots x_n\,,\ p_{m+2}\,,\ p_{m+2}\,, \cdots p_n) = C\,, \tag{4}$$

гдѣ C—произвольная постоянная, представляетъ одно изъ уравненій, опредѣляющихъ искомыя функціи. Изъ самой постановки вопроса слѣдуетъ, что уравненіе (4) должно имѣть рѣшеніе совмѣстно съ (1)-ыми, т. е. всѣ эти уравненія необходимо образуютъ систему въ инволюціи (скобки Пуассона, составленныя изъ ихъ лѣвыхъ частей, не зависятъ, ни отъ p_k, ни отъ C). Такимъ образомъ должны имѣть мѣсто тождества

$$(p_k + H_k\,,\ f) = 0\,,$$

$$k = 1\,,\ 2\,, \ldots m\,.$$

---

*) Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. V, S. 1, n° 2.

Послѣднія опредѣляютъ вполнѣ функцію f. Въ самомъ дѣлѣ, равносильныя имъ уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+(H_k\,,\,f)=0\,,$$
$$k=1\,,\ 2\,,\ \dots\ m\,,$$

гдѣ скобки распространяются только на перемѣнныя $x_{m+\nu}\,,\,p_{m+\nu}$, представляютъ якобіевскую систему относительно частныхъ производныхъ функціи f, такъ какъ всѣ необходимыя для этого условія (см. n⁰ 14 второй главы), удовлетворяются, въ силу тождествъ (2). Поэтому уравненіе (4) является интеграломъ канонической системы въ полныхъ дифференціальныхъ

$$dx_{m+\nu}=\ \ \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\,dx_k\,,$$

$$dp_{m+\nu}=-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\,dx_k\,,$$

$$\nu=1\,,\ 2\,,\ \dots\ n-m\,.$$

Предположимъ, что этотъ интегралъ ихъ зависитъ отъ p_{m+1}. Въ такомъ случаѣ уравненія (1) и (4) разрѣшаются относительно

$$p_1\,,\ p_2\,,\ \dots\ p_{m+1}$$

и даютъ систему $m+1$ уравненій въ инволюціи (см. n⁰ 2 третьей главы). Съ послѣдней поступаемъ, какъ съ первоначально данной и т. д.

Всѣ $n-m$ уравненій, которыя опредѣляютъ совмѣстно съ (1)-ми искомыя значенія p и получаются при помощи ряда указанныхъ, послѣдовательныхъ вычисленій, разрѣшимы какъ относительно всѣхъ $p_{m+\nu}$, такъ и всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому интегрированіе точнаго дифференціала (3) даетъ полный интегралъ системы (1). Такимъ образомъ разсматриваемая задача разрѣшается при помощи $n-m+1$ операцій интегрированія порядковъ

$$2n-2m\,,\ 2n-2m-2\,,\ \dots\ 4\,,\ 2$$

и одной квадратуры.

3. Изложенный способъ интегрированія распространяется на замкнутыя системы уравненій, зависящихъ явно отъ z,

$$\left.\begin{array}{c} p_k+H_k(x_1\,,\ x_2\,,\ \dots\ x_n\,,\ z\,,p_{m+1}\,,\ p_{m+2}\,,\ \dots\ p_n)=0 \\ k=1\,,\ 2\,,\ \dots\ m\,,\ m<n. \end{array}\right\}\qquad(5)$$

Пусть функціи H_k имѣютъ конечныя, опредѣленныя частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ по всѣмъ перемѣннымъ x, z, $p_{m+\nu}$, вблизи ихъ данныхъ начальныхъ значеній, и удовлетворяютъ тождественно условіямъ

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_k}-\frac{\partial H_h}{\partial z}H_k-\frac{\partial H_k}{\partial x_h}+\frac{\partial H_k}{\partial z}H_h+[H_k,\ H_h]=0 \tag{6}$$

для всѣхъ различныхъ значеній h, k отъ 1 до m.

Задача интегрированія уравненій (5) состоитъ въ разысканіи функцій p_{m+1}, p_{m+2}, $\ldots p_n$ перемѣнныхъ x, z и $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ, которыя совмѣстно съ (5)-ыми обращаютъ (3) въ уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ.

Если равенство

$$f(x_1,\ x_2,\ldots x_m,\ z,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ldots p_n)=C, \tag{7}$$

гдѣ C — произвольная настоящая, — одно изъ уравненій, опредѣляющихъ искомыя функціи, то, въ силу уравненій (5), имѣютъ мѣсто тождества

$$[p_k+H_k,\ f]=0,$$
$$k=1,\ 2,\ldots m,$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются на всѣ перемѣнныя x, z и p. Слѣдовательно, функція f представляетъ рѣшеніе якобіевской системы (см. n⁰ 14 второй главы)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial z}H_k+[H_k,\ f]=0,$$
$$k=1,\ 2,\ldots m.$$

Уравненіе (7) является, стало-быть, интеграломъ обобщенной канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+\nu}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}dx_k,\\ dp_{m+\nu}&=-\sum_{k=1}^{m}\frac{dH_k}{dx_{m+\nu}}dx_k,\\ dz&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-H_k\right)dx_k,\\ \nu&=1,\ 2,\ldots n-m. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пусть интегралъ ея (7)-ой заключаетъ p_{m+1}. Разрѣшая послѣднее уравненіе и (5)-ыя относительно

$$p_1, p_2, \dots p_{m+1},$$

находимъ замкнутую систему $m+1$ уравненій съ частными производными. Съ этой системой поступаемъ, какъ съ (5)-ой и т. д. Наконецъ, интегрируя уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ (3), получаемъ искомый интегралъ. Слѣдовательно, задача его разысканія разрѣшается при помощи $n-m$ операцій интегрированія порядковъ

$$2n-2m+1, \ 2n-2m-1, \dots 3, \ 1.$$

Проинтегрируемъ, напримѣръ, систему уравненій

$$p_1+z=0,$$

$$p_2+\frac{z^2}{p_3}=0.$$

Соотвѣтствующія имъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_3=-\frac{z^2}{p_3^2}dx_2,$$

$$dp_3=-p_3\ dx_1-2z\ dx_2,$$

$$dz=-z\ dx_1-\frac{2z^2}{p_3}dx_2$$

имѣютъ интегралъ

$$\frac{p_3}{z}=C_1,$$

гдѣ C_1 — произвольная постоянная. Поэтому искомый полный интегралъ находится интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$dz=-z\left(dx_1+\frac{1}{C_1}dx_2-C_1\ dx_3\right)$$

и представляется равенствомъ

$$z=C_2\,e^{-x_1-\frac{1}{C_1}x_2+C_1\ x_3},$$

при чемъ C_2 — новая произвольная постоянная.

4. Предположимъ, что извѣстны для системы (8)-ой l различныхъ интеграловъ

$$\left.\begin{array}{c} f_i\,(x_1\,,\, x_2\,,\, \cdots x_n\,,\, z\,,\, p_{m+1}\,,\, p_{m+2}\,,\cdots p_n) = C_i\,, \\ i = 1\,,\; 2\,,\, \ldots l,\; l \leqq n - m\,, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

которые разрѣшимы относительно перемѣнныхъ $p_{m+1}\,,\, p_{m+2}\,,\cdots p_{m+l}$. Если эти интегралы находятся въ инволюціи, т. е. равенства

$$[f_i\,,\, f_j] = 0\,,$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются на всѣ перемѣнныя $x_{m+\nu}$, z, $p_{m+\nu}$, удовлетворяются тождественно для всѣхъ значеній i, j, отъ 1 до l, то *число и порядокъ операцій, необходимыхъ для интегрированія уравненій* (5)-*ыхъ, понижаются на* $2l$ *единицъ.*

Дѣйствительно, равенства

$$[p_k + H_k\,,\, f_i] = 0\,,$$

$$k = 1\,,\; 2\,,\, \ldots m\,,$$

справедливыя, на основаніи (5)-хъ, для всѣхъ l значеній i и условія инволюціи интеграловъ (9) показываютъ, что уравненія (5) и (9) образуютъ замкнутую систему уравненій, разрѣшимыхъ относительно производныхъ p_1, p_2, $\cdots$ p_{m+l}. Полный интегралъ ея зависитъ отъ $n - m - l + 1$ новыхъ произвольныхъ постоянныхъ

$$C_{l+1},\; C_{l+2}, \cdots C_{n-m+1}$$

и является для уравненій (5)-ыхъ также полнымъ интеграломъ съ $n - m + 1$ произвольными постоянными

$$C_1,\; C_2\,, \cdots C_{n-m+1}\,.$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ задача интегрированія системы (5) разрѣшается $n - m - l + 1$ операціями интегрированія порядковъ

$$2n - 2m - 2l + 1\,,\; 2n - 2m - 2l - 1\,, \ldots 3\,,\; 1\,.$$

Такъ, возьмемъ систему уравненій *)

---

*) Къ послѣднему виду приводятся уравненія предыдущаго n°, если исключить изъ нихъ неизвѣстную функцію.

$$p_1 - x_4 p_4 = 0,$$

$$p_2 + \frac{x_4^2 p_4^2}{p_3} = 0.$$

Соотвѣтствующая имъ система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_3 = -\frac{x_4^2 p_4^2}{p_3^2} dx_2,$$

$$dx_4 = -x_4\, dx_1 + \frac{2x_4^2 p_4}{p_3} dx_2,$$

$$dp_3 = 0,$$

$$dp_4 = p_4\, dx_1 - \frac{2x_4 p_4^2}{p_3} dx_2$$

имѣетъ два слѣдующихъ интеграла въ инволюціи

$$p_3 = C_1, \quad x_4 p_4 = C_2,$$

гдѣ C_1, C_2 — произвольныя постоянныя. Поэтому полный интегралъ изслѣдуемыхъ уравненій находится квадратурой точнаго дифференціала

$$dz = C_2\, dx_1 - \frac{C_2^2}{C_1} dx_2 + C_1 dx_3 + \frac{C_2}{x_4} dx_4$$

и представляется уравненіемъ

$$z = C_2 x_1 - \frac{C_2^2}{C_1} x_2 + C_1 x_3 + C_2 \log x_4 + C_3,$$

гдѣ C_3 — новая произвольная постоянная.

Разсмотрѣнный въ настоящемъ n⁰ случай имѣетъ мѣсто всякій разъ, когда данныя уравненія представляются слѣдующимъ образомъ

$$p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l) = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots m, \quad m < n,$$

при чемъ φ — функціи x, z, $p_{m+\nu}$ и равенства

$$p_k + H_k(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n, C_1, C_2, \dots C_l) = 0,$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = C_i,$$

$$i = 1, 2, \dots l,$$

гдѣ C_i — произвольныя постоянныя, представляютъ замкнутую систему уравненій, разрѣшимыхъ относительно $m+l$ перемѣнныхъ p. Въ самомъ дѣлѣ, интегралъ послѣдней системы служитъ въ тоже время рѣшеніемъ первоначально данныхъ m уравненій. Если данныя уравненія не заключаютъ явно функцій z и каждая изъ функцій φ и H, когда въ послѣднихъ замѣнить φ черезъ C, не зависятъ отъ перемѣнныхъ, заключающихся въ остальныхъ, то тогда говорятъ, что *перемѣнныя раздѣляются* въ разсматриваемыхъ уравненіяхъ *).

Такъ приведенныя соображенія прилагаются къ проинтегрированнымъ только что уравненіямъ, гдѣ перемѣнныя раздѣляются, если положить

$$\varphi_1 = p_3, \quad \varphi_2 = x_4 p_4.$$

5. Изложенная теорія интегрированія уравненій съ частными производными основана на всегда возможныхъ вычисленіяхъ и вполнѣ совершенна въ теоретическомъ отношеніи. Какъ было видно, всегда возможно вычислить для данныхъ m уравненій въ частныхъ производныхъ $n-m$ новыхъ, требуемыхъ Якоби, которыя разрѣшаются вмѣстѣ съ данными относительно всѣхъ частныхъ производныхъ. Однако С. Ли показалъ, что послѣднее требованіе не является необходимымъ. Это открытіе, изложенное имъ для случая одного уравненія, было распространено Майеромъ на системѣ совокупныхъ уравненій и въ этомъ видѣ приведено Гурса въ своемъ сочиненіи **). Однако слѣдуетъ замѣтить, что разсужденія Майера несправедливы. Чтобы не быть голословнымъ, остановимся подробнѣе на его соображеніяхъ.

Пусть равенства (9) даются въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} f_i\,(x_1, x_2 \cdots x_n, z) = C_i, \\ i = 1, 2, \dots l. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

---

*) Imschenetsky, Sur l'integration..., p. 75.
Goursat, Leçons sur l'intégration..., p. 152.

**) S. Lie, Mathematische Annalen, Bd. 8, S. 215, § 7, Ueber eine Verbesserung der Jocobi—Mayer'schen Intergrationsmethode.
Mayer, Methematische Annalen, Bd. 8, S. 313.
Goursat, Leçons sur l'integration..., n° 63, p. 157,

По свойству интеграловъ системы (8), уравненія (10) должны разрѣшаться относительно l изъ перемѣнныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, z,$$

положимъ—первыхъ l изъ нихъ. Преобразовываемъ уравненія (5) и (10) къ новымъ перемѣннымъ, принимая

$$p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{m+l}$$

за независимыя перемѣнныя вмѣстѣ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_{m+l}$ и полагая новой функціей выраженіе

$$z' = z - \sum_{\lambda=1}^{l} x_{m+\lambda}\, p_{m+\lambda}. \tag{11}$$

Назовемъ черезъ p'_s частныя производныя функціи z' по независимымъ перемѣннымъ указателя s. Преобразованная система — замкнутая, и уравненія ея, полученныя изъ (10), суть

$$\left.\begin{aligned} & f_i\Big(x_1, x_2, \dots x_m, -p'_{m+1}, -p'_{m+2}, \dots -p'_{m+l}, x_{m+l+1}, \dots x_n, \\ & \qquad z' - \sum_{\lambda=1}^{l} p_{m+\lambda}\, p'_{m+\lambda}\Big) = C_i, \\ & \qquad i = 1, 2, \dots l. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Легко видѣть, что эти уравненія можно предположить разрѣшимыми относительно всѣхъ $p'_{m+\lambda}$. Въ самомъ дѣлѣ, (см. n⁰ 4 предыдущей главы) всегда возможно принять начальныя значенія перемѣнныхъ x, z и $p_{m+\lambda}$, равными нулю. Слѣдовательно, полагая

$$p_{m+\lambda} = 0, \ \lambda = 1, 2, \dots l,$$

мы не выйдемъ изъ области измѣненія перемѣнныхъ, гдѣ уравненія (12) образуютъ замкнутую систему совмѣстно съ преобразованными (5)-ыми. Но при сдѣланномъ предположеніи равенства (12) принимаютъ видъ (10), гдѣ перемѣнныя $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_{m+l}$, z обозначены черезъ $-p'_{m+1}$, $-p'_{m+2}, \dots -p'_{m+l}$, z' и, стало-быть, разрѣшимы относительно первыхъ l изъ этихъ величинъ. Поэтому уравненія (12) разрѣшимы относительно тѣхъ же перемѣнныхъ *). Если бы уравненія (10) разрѣшались только

*) Jordan, Cours d'Analyse, t. I, 2-e éd., nn⁰ 92, 93, p.p. 82—84.

относительно $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_{m+l-1}, z$, то и въ этомъ случаѣ указаное преобразованіе вело бы къ прежнему заключенію.

Такимъ образомъ получается замкнутая система $m+l$ уравненій, разрѣшимыхъ относительно $m+l$ частныхъ производныхъ. Пусть полный интегралъ ея есть

$$z' = F(x_1, x_2, \dots x_m, p_{m+1}, \dots p_{m+l}, x_{m+l+1}, \dots x_n, C_1, C_2, \dots C_{n-m+1}), \quad (13)$$

гдѣ всѣ C — произвольныя постоянныя. Майеръ и Гурса говорятъ, что результатъ исключенія величинъ $z', p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{m+l}$ изъ уравненій (11), (13) и l слѣдующихъ

$$x_{m+\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial p_{m+\lambda}}, \quad \lambda = 1, 2, \dots l,$$

представляетъ полный интегралъ системъ (5). Съ этимъ заключеніемъ нельзя согласиться. Нѣтъ никакого основанія утверждать, что результатъ указаннаго исключенія представляетъ одно только уравненіе, полный интегралъ системы (5). Можетъ случится, что, по совершеніи этого исключенія, получается совокупность нѣсколькихъ независящихъ отъ $p_{m+\lambda}$ уравненій, которыя не въ состояніи опредѣлить полнаго интеграла Лагранжа для разсматриваемой системы.

Такъ возьмемъ уравненіе

$$p_1 + \frac{(z + x_2 p_2)\,x_2}{x_1 p_3} + \frac{z - x_2 x_3}{x_1} = 0. \quad (14)$$

Соотвѣтствующая ему система обобщенныхъ каноническихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ два интеграла въ инволюціи

$$x_1 p_3 = C_1, \quad x_1\left(1 + \frac{p_3}{x_2}\right) = C_2, \quad (15)$$

гдѣ C_1, C_2 — произвольныя постоянныя. Принимаемъ новой независимой перемѣнной p_2 вмѣсто x_2 и новой функціей выраженіе

$$z' = z - x_2 p_2.$$

Уравненія (14) и (15) преобразовываются въ замкнутую систему

$$p_1' - \frac{(z' - 2p_2 p_2')\,p_2'}{x_1 p_3'} + \frac{z' + (x_3 - p_2)\,p_2'}{x_1} = 0,$$

$$x_1 p_3' = C_1, \quad x_1\left(1 - \frac{p_3'}{p_2'}\right) = C_2,$$

полный интегралъ которой есть

$$z' = \frac{C_1 p_2}{x_1 - C_2} + \frac{C_1 x_3 - CC_2}{x_1} + C,$$

гдѣ C — новая произвольная постоянная. Возвращаясь къ прежнимъ перемѣнныхъ и выполнивъ всѣ требуемыя исключенія, получаемъ два уравненія

$$z = \frac{C_1 x_3 - CC_2}{x_1} + C, \quad x_2 + \frac{C_1}{x_1 - C_2} = 0,$$

такъ что разсужденіи Майера не приводятъ насъ къ искомому рѣшенію.

Тѣмъ не менѣе упомянутое выше утвержденіе С. Ли справедливо и имѣетъ при рѣшенія разсматриваемыхъ задачъ несомнѣнное, практическое значеніе въ томъ смыслѣ, что упрощаетъ иногда необходимыя интегрированія. Доказательство соображеній С. Ли, которое имѣется въ виду здѣсь привести, основывается на той тѣсной зависимости, что устанавливается между задачами интегрированія уравненій съ частными производными и въ полныхъ дифференціалахъ. Изученіе этой зависти займетъ всѣ послѣдующія страницы настоящаго сочиненія.

ГЛАВА V.

О составленіи рѣшеній уравненій съ частными производными изъ общаго интеграла уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

1. Вопросъ, къ изученію котораго мы приступаемъ, служилъ предметомъ изслѣдованій Коши и Якоби въ случаѣ одного уравненія съ частными производными. Созданная ими теорія разсматривалась Бертраномъ, Серре, Майеромъ и Лемоннье *), которые внесли въ нее нѣкоторыя дополненія. Въ своихъ изслѣдованіяхъ они исходили изъ установленныхъ Лагранжемъ понятій объ уравненіяхъ съ частными производными и ихъ интегралахъ. Въ началѣ семидесятыхъ годовъ С. Ли ввелъ въ теорію уравненій съ частными производными новыя идеи, развитыя имъ въ своихъ сообщеніяхъ Академіи Наукъ въ Христіаніи, въ „Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen“ за 1872 годъ и затѣмъ изложенныя въ рядѣ мемуаровъ въ VIII, IX и XI томахъ „Mathematische Annalen“. Основываясь на своихъ новыхъ понятіяхъ объ уравненіяхъ съ частными производными и ихъ интегралахъ, С. Ли распространилъ результаты, полученные упомянутыми геометрами, на системы совокупныхъ уравненій и далъ способъ находить ихъ рѣшенія изъ общаго интеграла уравненій въ полныхъ дифференціалахъ**). Мнѣ удалось съ своей стороны рѣшить тотъ же вопросъ, сохраняя опредѣленія и понятія Лагранжа, которыя вяжутся естественнѣе съ сущностью задачи, разсматриваемой въ этомъ сочиненіи. Полученные результаты были изложены мною въ засѣданіи

---

*) Cauchy, Exercices d'Analyse..., 1841, p. 238.
Jocobi, Gesamelte Werke, Bd. IV, S. 59.
Bertrand. Comptes Rendus, t. XLV, p. 617.
Serret, Comptes Rendus, t. LIII, séances des 7 et 28 octebre 1861.
Mayer, Mathematische Annalen, Bd. III, S. 435.
Lemonnier, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. X, p. 223.

**) Goursat, Leçons sur l'integration..., n⁰ 97, p. 246.

Харьковскаго Математическаго Общества въ декабрѣ 1898 года и сообщены Парижской Академіи Наукъ, благодаря посредничеству К. Жордана, 16 января 1899 г. *). Подробное изложеніе этихъ соображеній слѣдуетъ ниже.

2. Будемъ разсматривать замкнутую систему уровненій

$$\left.\begin{array}{c} p_k + H_k(x_1, x_2, \dots x_m, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \dots m, \ m < n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

удовлетворяющихъ тождественно условіямъ

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \frac{\partial H_h}{\partial z} H_k - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} + \frac{\partial H_k}{\partial z} H_h + [H_k, H_h] = 0 \quad (2)$$

для всѣхъ различныхъ значеній k, h отъ 1 до m.

Пусть уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+\nu} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} dx_k, \\ dp_{m+\nu} &= -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}} dx_k, \\ dz &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k, \\ \nu &= 1, 2, \dots n-m, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

имѣютъ общій интегралъ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots b, b_1, \dots b_{n-m}), \quad (4)$$

$$p_{m+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_{n-m}, b, b_1, \dots b_{n-m}), \quad (5)$$

$$x_{m+i} = F_i(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_{n-m}, b, b_1, \dots b_{n-m}), \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots n-m,$$

гдѣ a_i, b, b_i — произвольныя постоянныя. Назовемъ черезъ $C_1, C_2 \dots C_{n-m}$ тѣ изъ нихъ, относительно которыхъ уравненія (6) разрѣшаются; всѣ же

---

*) Comptes Rendus, t. CXXVIII, p. 166.

остальныя постоянныя обозначимъ черезъ $C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, C_{2n-2m+1}$. Исключая изъ уравненій (4)-ыхъ и (5)-ыхъ значенія $C_1, C_2, \ldots C_{n-m}$, опредѣленныя (6)-ыми, находимъ выраженія

$$z,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ldots p_n \tag{7}$$

въ функціяхъ всѣхъ x-овъ и $n-m+1$ остальныхъ постоянныхъ. Послѣднія входятъ въ полученныя формулы, такъ какъ уравненія (4)—(6) представляютъ общій интегралъ системы (3), изъ котораго произвольныя постоянныя не исключаются. Назовемъ черезъ V найденное выраженіе функціи z. Задача интегрированія уравненій (1) рѣшена, коль скоро V зависитъ явно отъ всѣхъ $n-m+1$ произвольныхъ постоянныхъ и полученныя значенія функцій (7) совмѣстно съ выраженіями p_k, изъ уравненій (1), удовлетворяютъ условіямъ

$$p_1=\frac{\partial V}{\partial x_1},\quad p_2=\frac{\partial V}{\partial x_2},\ldots p_n=\frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Легко видѣть, что *достаточно* $n-m$ *послѣднихъ изъ этихъ равенствъ*

$$p_{m+i}=\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}},\quad i=1,\ 2,\ldots n-m, \tag{8}$$

для того чтобы выполнялись и m *первыя.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу общаго интеграла системы (3), мы имѣемъ рядъ тождествъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-H_k,$$

$$\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}=\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}.$$

Отсюда находимъ тождественно

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+H_k+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}-p_{m+i}\right)=0$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Поэтому, при существованіи равенствъ (8), получаемъ

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+H_k=0\,,$$

или

$$p_k=\frac{\partial V}{\partial x_k}\,,\quad k=1\,,\;2\,,\ldots m.$$

Для рѣшенія разсматриваемой задачи, стало-быть, достаточно удовлетворить условіямъ (8).

3. Такъ какъ уравненія (6) разрѣшимы относительно $C_1\,,\,C_2\,,\ldots C_{n-m}$, то должно быть

$$D\left(\frac{x_{m+1}\,,\;x_{m+2}\,,\;\ldots\;x_n}{C_1\,,\;C_2\,,\ldots\;C_{n-m}}\right)\gtrless 0. \tag{9}$$

Кромѣ того мы имѣемъ рядъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\,\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu}=\frac{\partial z}{\partial C_\nu}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial V}{\partial C_s}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\,\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_s}=\frac{dz}{\partial C_s}\,, \tag{11}$$

$$r=1\,,\;2\,,\ldots n-m\,,\quad s=n-m+1\,,\;n-m+2\,,\ldots\;2n-2m+1\,.$$

Для удобства дальнѣйшихъ вычисленій вводимъ обозначенія

$$U_c=\frac{\partial z}{\partial c}-\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}\,,$$

гдѣ z, p_{m+i}, x_{m+i} имѣютъ значанія (4), (5), (6), а C-любая изъ входящихъ въ нихъ произвольныхъ постоянныхъ.

Если равенства (8) имѣютъ мѣсто тождественно, то они остаются справедливыми также для значеній (6) перемѣнныхъ x_{m+i}. Въ такомъ случаѣ тождества (10) приводятся къ виду

$$U_{C_\nu}=0\,,\quad \nu=1\,,\;2\,,\ldots n-m. \tag{12}$$

Эти равенства являются не только необходимыми, но и достаточными условіями существованія—(8)-ыхъ. Дѣйствительно, если имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial z}{\partial c_\nu} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial c_\nu} = 0\,,$$

$$\nu = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m\,,$$

то изъ (10) слѣдуетъ

$$\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial c_\nu}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} - p_{m+i}\right) = 0\,,$$

$$\nu = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m.$$

Отсюда, вслѣдствіе условія (9), приходимъ къ равенствамъ (8).

Если постоянная C_s входитъ явно въ выраженіе функціи V, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial c_s} \lesseqgtr 0\,, \tag{13}$$

то изъ соотвѣтствующаго тождества (11) слѣдуетъ неравенство

$$U_{c_s} \lesseqgtr 0\,. \tag{14}$$

Обратно, при существованіи условій (8), т. е. когда функція V — рѣшеніе системы (1), неравенство (14) показываетъ, что постоянная C_s входитъ явно въ выраженіе V. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу (14), принимая во вниманіе s-тое тождество (11), мы получаемъ условіе (13). Если послѣднее имѣетъ мѣсто для всѣхъ $n - m + 1$ значеній s, то полученное рѣшеніе системы (1) зависитъ явно отъ $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ и представляетъ полный интегралъ. Дѣйствительно,

$$D\left(\frac{V, \quad p_{m+1}\,, \cdots \quad p_n}{C_{n-m+1}\,, \quad C_{n-m+2}\,, \ldots C_{2n-2m+1}}\right) \gtrless 0\,,$$

такъ какъ равенства, опредѣляющія значенія V, $p_{m+1}, \ldots p_n$ въ функціяхъ всѣхъ x-овъ и $C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, \ldots C_{2n-2m+1}$, являются для системы (3) $n - m + 1$ различными интегральными уравненіями, изъ которыхъ произвольныя постоянныя не исключаются.

Итакъ, для составленія рѣшенія уравненій (1) изъ общаго интеграла системы (3) *необходимо и достаточно, чтобы уравненія (6) разрѣшались относительно $n - m$ произвольныхъ постоянныхъ C, а соотвѣтствующія имъ функціи U_c уничтожались тождественно. Если функ-*

ціи U. составленныя для остальныхъ постоянныхъ, отличны отъ нуля, то полученное рѣшеніе—полный интегралъ разсматриваемыхъ уравненій.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе

$$p - \frac{z}{aq} = 0 ,$$

гдѣ p, q — частныя производныя перваго порядка функціи z по независимымъ перемѣннымъ x, y. Соотвѣтствующая ему система обобщенныхъ каноническихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ общій интегралъ

$$z = C_2(x + C_1)^2 , \; q = \frac{1}{a}(x + C_1) ,$$

$$y = C_2 a(x + C_1) + C_3 ,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — произвольныя постоянныя. Функціи U выражаются формулами

$$U_{c_1} = C_2(x + C_1) , \; U_{c_2} = 0 ,$$

$$U_{c_3} = \frac{1}{a}(x + C_1) .$$

Поэтому полный интегралъ разсматриваемаго уравненія есть

$$z = \frac{1}{a}(x + C_1)(y - C_3) ,$$

гдѣ C_1, C_3 — двѣ произвольныя постоянныя.

Если бы послѣднее интегральное уравненіе упомянутой канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій написать въ видѣ

$$y = C_2 ax + C_3' ,$$

гдѣ C_3' — новая произвольная постоянная, то всѣ три функціи U становятся отличными отъ нуля, и изложенная теорія не даетъ искомаго интеграла. Однако легко показать, что всегда возможно представить общій интегралъ системы (3) въ такой формѣ, что приведенныя нами соображенія даютъ возможность составить полный интегралъ уравненій (1). Для этого слѣдуетъ предварительно убѣдиться въ справедливости двухъ леммъ, которыя и доказываются ниже.

4. *Выраженіе*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial z} dx_k,$$

въ силу общаго интеграла системы (3), представляетъ точный дифференціалъ.

Дѣйствительно, на основаніи уравненій (4)—(6), имѣютъ мѣсто тождества

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} &= \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}, \\ \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Поэтому получаемъ

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial H_k}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 H_k}{\partial z \partial x_h} + \frac{\partial^2 H_k}{\partial z^2}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial^2 H_k}{\partial z \partial x_{m+i}} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial^2 H_k}{\partial z \partial p_{m+i}} \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}\right).$$

Дифференцируя по z тождества (2), мы находимъ новыя —, справедливыя и для (4)—(6) значеній z, p_{m+i}, x_{m+i}. Какъ легко видѣть, въ силу этихъ тождествъ, удовлетворяются равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial H_k}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial H_h}{\partial z}\right)$$

для всѣхъ различныхъ значеній h, k отъ 1 до m. Слѣдовательно, изслѣдуемое выраженіе — точный дифференціалъ; будемъ обозначать его черезъ

$$dW = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial z} dx_k.$$

Второе предложеніе, которое имѣется въ виду привести, доказываетъ, что *функція* U_c *опредѣляется уравненіемъ*

$$U_c = U_c^0 e^{-\int_{W_0}^{W} dW}, \tag{16}$$

гдѣ U_c^0, W_0 *представляютъ выраженія функцій* U_c, W *для начальныхъ значеній перемѣнныхъ* $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Величина производной $\dfrac{\partial U_c}{\partial x_k}$ можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial c}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial c}\right).$$

Это выраженіе, въ силу тождествъ (15), принимаетъ видъ

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial c} + \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial c} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial c}\right) + \frac{\partial H_k}{\partial z}\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial c}.$$

Отсюда получаемъ

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial z} U_c$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Послѣднія равенства и даютъ уравненіе (16).

5. По условію функціи H_k вблизи начальныхъ значеній перемѣнныхъ x, z, p_{m+i}, имѣютъ конечныя, опредѣленныя частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяютъ условіямъ (2). Въ этой области измѣненія перемѣнныхъ уравненія (4)—(6) опредѣляютъ непрерывныя и дифференцируемыя функціи z, p_{m+i}, x_{m+i} перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots x_m$. Слѣдовательно, интегралъ

$$\int_{W_0}^{W} dW$$

представляетъ конечную величину, и выраженіе

$$e^{-\int_{W_0}^{W} dW},$$

при всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ, сохраняетъ конечное, отличное отъ нуля значеніе. Поэтому изъ уравненій (16) заключаемъ, что, для существованія равенствъ (12) и (14), достаточно имѣть условія

$$\left.\begin{array}{c} U^0_{c_r}=0\,,\ \ U^0_{c_s}\gtrless 0\,, \\ r=1\,,\ 2\,,\ldots n-m\,,\ s=n+1\,,\ n-m+2\,,\ldots 2n-2m+1\,. \end{array}\right\} \quad (17)$$

Пусть постоянныя a_i, b_i, b являются начальными значеніями перемѣнныхъ величинъ

$$x_{m+i}\,,\quad p_{m+i}\,,\quad z-\sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i}\,p_{m+i}\,.$$

Въ этомъ случаѣ

$$D\left(\frac{x_{m+1}\,,\ x_{m+2}\,.\,.\,.\,.\ x_n}{a_1\,,\quad a_2\,,\,.\,.\,.\ a_{n-m}}\right)\gtrless 0\,,$$

такъ какъ для начальныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ x_i этотъ опредѣлитель становится равнымъ единицѣ. Вводимъ обозначеніе z^0 для начальнаго значенія z, такъ что

$$z^0=b+\sum_{i=1}^{n-m} a_i\ b_i\,.$$

Начальныя величины функцій U выражаются слѣдующими формулами

$$U^0_{a_i}=0\,,\ \ U^0_{b_i}=a_i\,,\ \ U^0_b=1\,.$$

Стало-быть, равенство

$$z=V(x_1\,,\ x_2\,,\,.\,.\,.\ x_n\,,\ b\,,\ b_1\,,\,.\,.\,.\ b_{n-m})\,,$$

представляющее результатъ исключенія изъ уравненія (4)-аго постоянныхъ a_i, въ силу—(6)-ыхъ, есть полный интегралъ системы (1).

Указанный способъ образованія полнаго интеграла уравненій (1) изъ общаго—системы (3) не представляется единственнымъ. Такъ пусть

$$a_i=x^0_{m+i}\,,\quad b_i=p^0_{m+i}\,,\quad b=z^0\,.$$

Если уравненія (6) разрѣшаются относительно всѣхъ постоянныхъ b_i, то результатъ исключенія ихъ изъ уравненія (4)-аго—полный интегралъ системы (1), ибо

$$U^0_{b_i}=0\,,\ U^0_{a_i}=-b_i\,,\ U^0_b=1\,.$$

Возвращаемся къ примѣру n⁰ 3-яго

$$p-\frac{z}{aq}=0\,.$$

Назовемъ черезъ x_0 данное начальное значеніе перемѣнной x и y_0, z_0, q_0, b — начальныя значенія величинъ

$$y\,,\ z\,,\ q\,,\ z-yq\,.$$

Оба разсмотрѣнные случая приложеній развитой теоріи примѣняются къ интегрируемому уравненію и даютъ его полный интегралъ соотвѣтственно въ двухъ видахъ

$$z=\frac{1}{aq_0}(x-x_0+aq_0)\,(b+q_0y)\,,$$

гдѣ q_0, b — двѣ произвольныя постоянныя, и

$$z=\frac{1}{a}\left[\sqrt{(x-x_0)\,(y-y_0)}+\sqrt{az_0}\right]^2,$$

при чемъ произвольными постоянными считаются y_0, z_0.

Предположимъ, наконецъ, что уравненія (6) разрѣшимы относительно $n-m$ постоянныхъ a_ρ, b_σ, при чемъ всѣ значенія ρ, σ различны и b представляетъ начальное значеніе функціи

$$z-\sum_\rho x_{m+\rho}\,p_{m+\rho}\,,$$

гдѣ суммированіе распространяется на значки ρ постоянныхъ a_ρ. Въ этомъ случаѣ получается рядъ условій

$$U^0_{a_\rho}=0\,,\ U^0_{b_\sigma}=0\,,$$

$$U^0_{b_\rho}=a_\rho\,,\ U^0_{a_\sigma}=-b_\sigma\,,\ U^0_b=1\,.$$

Результатъ исключенія изъ уравненія (4)-го всѣхъ b_ρ, a_σ, въ силу (6)-ыхъ, является полнымъ интеграломъ системы (1).

ГЛАВА VI.

Теорія главныхъ функцій и ея приложенія.

1. Въ настоящей главѣ излагаются изслѣдованія, служившія предметомъ моихъ сообщеній Харьковскому Математическому Обществу въ октябрѣ и декабрѣ 1898 года и Парижской Академіи Наукъ въ засѣданіяхъ ея 23 и 30 января 1899 г. *). Сущность послѣдующаго изложенія состоитъ въ распространеніи извѣстнаго перваго способа Якоби интегрированія одного уравненія съ частными производными перваго порядка на системы совокупныхъ уравненій. Выводимыя здѣсь формулы устанавливаютъ взаимную связь между задачами интегрированія уравненій съ частными производными и соотвѣтствующими имъ системами въ полныхъ дифференціалахъ. Построенная такимъ образомъ теорія можетъ служить основаніемъ для всѣхъ изслѣдованій въ разсматриваемой области научныхъ знаній. Такъ является возможнымъ вывести, путемъ разсужденій элементарнаго характера, предложенія, доказательства которыхъ С. Ли основывалъ на болѣе сложныхъ вычисленіяхъ. Кромѣ того приводимыя соображенія устанавливаютъ тѣсную связь между трудами послѣдняго геометра и теоріями, созданными Якоби и его сотрудниками.

2. Начнемъ съ разсмотрѣнія уравненій въ инволюціи

$$\left.\begin{aligned} p_k + H_k(x_1\,,\ x_2\,, \cdots x_n\,,\ p_{m+1}\,,\ p_{m+2}\,, \cdots p_n) = 0\,, \\ k = 1\,,\ 2\,, \cdots m\,, \quad m < n\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

*) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, т. VI, Обобщеніе перваго способа Якоби интегрированія дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Comptes Rendus, t. CXXVIII, pp. 225, 274.

Соотвѣтствующая имъ система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ представляется въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+i} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} dx_k , \\ dp_{m+i} &= -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} dx_k , \\ i &= 1 , 2 , \ldots n - m . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Докажемъ слѣдующую теорему:

Пусть уравненіе

$$z = V(x_1 , x_2 , \ldots x_m , b_1 , b_2 , \ldots b_{n-m}) + b , \tag{3}$$

гдѣ b, b_1, $\ldots b_{n-m}$ — *произвольныя постоянныя, есть полный интегралъ системы (1). Если*

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}} , \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}} , \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1 , b_2 , \ldots b_{n-m}} \right) \lesseqgtr 0 , \tag{4}$$

то равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i} , \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i , \\ i = 1 , 2 , \ldots n - m , \end{aligned}\right| \tag{5}$$

гдѣ a_i — *новыя произвольныя постоянныя, даютъ общій интегралъ уравненій (2).*

Значенія перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}, опредѣленныя изъ уравненій (5), утождествляютъ послѣднія. Поэтому производныя ихъ по x_1, x_2, $\ldots x_m$ даютъ тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\, \partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\, \partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = 0 ,$$

$$i = 1 , 2 , \ldots n - m ,$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Съ другой стороны значеніе (3) функціи z утождествляетъ уравненія (1). Дифференцируя полученныя такимъ образомъ тождества по всѣмъ x_{m+i}, b_i, находимъ для всѣхъ значеній k отъ 1 до m,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial x_{m+i}} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial x_{m+i}} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial b_i} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b_i} = 0\,,$$

$$i = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m.$$

Изъ двухъ послѣднихъ системъ тождествъ легко получаются слѣдующія

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial x_{m+i}} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\,,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b_i} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = 0\,,$$

$$i = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m.$$

Послѣднія, въ силу неравенства (4), даютъ тождественно

$$\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\,,\quad \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\,, \tag{6}$$

для всѣхъ значеній ν и k соотвѣтственно отъ 1 до $n - m$ и 1 до m, что и доказываетъ наше предложеніе.

2. Обратно, изъ общаго интеграла системы (2) получается при помощи квадратуры полный интегралъ уравненій (1). Чтобы убѣдиться въ этомъ, докажемъ *лемму*

Пусть уравненія

$$x_{m+i} = f_i(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_m\,,\ a_1\,,\ a_2\,, \ldots a_{n-m}\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_{n-m})\,, \tag{7}$$

$$p_{m+i} = F_i(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_m\,,\ a_1\,,\ a_2 \ldots a_{n-m}\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_{n-m})\,, \tag{8}$$

$$i = 1\,,\ 2\,, \ldots n - m\,,$$

гдѣ a_i, b_i — *произвольныя постоянныя, представляютъ общій интегралъ системы* (2). *На основаніи его, выраженіе*

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k\right)dx_k$$

становится точнымъ дифференціаломъ.

Изслѣдованія предыдущей главы показываютъ, что высказанное предложеніе справедливо. Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемое выраженіе представляетъ правую часть послѣдняго изъ уравненій (3) пятой главы. Если уравненія въ частныхъ производныхъ не заключаютъ явно z, то, само собою разумѣется, что, въ силу интеграловъ $2(n-m)$ первыхъ уравненій (3) пятой главы, послѣднее изъ нихъ становится точнымъ дифференціаломъ (см. n⁰ 9 второй главы). Впрочемъ въ этомъ легко убѣдиться и непосредственными вычисленіями, не ссылаясь на предыдущія формулы. Будемъ пользоваться обозначеніемъ

$$P_k = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k.$$

Въ силу тождествъ (6), находимъ

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_k \partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}},$$

$$\frac{\partial P_h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}.$$

Условія инволюціи уравненій (1) [см. равенства (2) четвертой главы] представляютъ тождества, справедливыя и для (7), (8) значеній перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Отсюда слѣдуютъ равенства

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_h} = \frac{\partial P_h}{\partial x_k}$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до m, т. е. изслѣдуемое выраженіе — точный дифференціалъ. Будемъ обозначать его слѣдующимъ образомъ

$$dU = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k\right)dx_k.$$

Если такъ, то возможно доказать теорему:

Пусть постоянныя a_i, b_i — *начальныя значенія перемѣнныхъ* x_{m+i} p_{m+i}. *Выполнивъ квадратуру точнаго дифференціала* dU, *составляемъ выраженіе*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=1}^{n-m} a_i\, b_i\,,$$

гдѣ U_0 — *значеніе функціи* U *для начальныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ* x_1, x_2, $\ldots x_m$. *Если исключить изъ, въ силу уравненій (7), величины* a_i, *то, составленныя при помощи полученнаго значенія* V, *равенства*

$$\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_i\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i\,,$$

$$i = 1\,.\; 2\,, \ldots n - m\,,$$

даютъ общій интегралъ системы (2), а уравненіе

$$z = V + b\,,$$

гдѣ b — *новая произвольная постоянная, представляетъ полный интегралъ системы (1).*

Дѣйствительно, условимся называть черезъ d и δ дифференціалы, соотвѣтствующіе измѣненіямъ x-овъ и a_i, b_i, а черезъ Δ-дифференціалы, соотвѣтствующіе приращеніямъ обѣихъ системъ этихъ перемѣнныхъ. Въ такомъ случаѣ получаемъ

$$\Delta V = dU + \int_{U_0}^{U} d\delta U + \sum_{i=1}^{n-m} (b_i\, \delta a_i + a_i\, \delta b_i)\,,$$

при чемъ

$$d\delta U = \sum_{k=1}^{m} \delta P_k\, dx_k\,.$$

Принимая во вниманіе, что, въ силу уравненій (7) и (8)-ыхъ, равенства (2) и (6) имѣютъ мѣсто тождественно, находимъ

$$dU = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, dx_{m+i} - \sum_{k=i}^{m} H_k\, dx_k\,,$$

$$\delta P_k = \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i}\, \delta \frac{\partial H}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\, \delta x_{m+i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i}\, \delta \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\, \delta x_{m+i} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, \delta x_{m+i} \right).$$

Изъ послѣднихъ формулъ слѣдуетъ равенство

$$d\delta U = d \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, \delta x_{m+i} \right).$$

Проинтегрировавъ этотъ точный дифференціалъ, получаемъ

$$\int_{U_0}^{U} d\delta U = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\, \delta x_{m+i} - b_i\, \delta a_i).$$

Итакъ,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\, \Delta x_{m+i} + a_i\, \delta b_i) - \sum_{k=1}^{m} H_k\, dx_k\,.$$

Уравненія (7) разрѣшаются относительно величинъ a_i. Поэтому, разсматривая V функціей только x и b, получаемъ иначе

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\, \Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i}\, \delta b_i \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k}\, dx_k\,.$$

Изъ сопоставленія обоихъ выраженій ΔV слѣдуютъ равенства

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}\,, \quad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i\,, \\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ n - m. \end{array}\right| \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0\,, \\ \\ k = 1\,,\ 2\,, \ldots m.\end{array}\right| \qquad (10)$$

Уравненія (9) даютъ между перемѣнными x, p_{m+i} и постоянными a_i, b_i всего $2n - 2m$ различныхъ зависимостей, ибо каждая изъ нихъ заключаетъ одну изъ величинъ, или p, или a, которыя не входятъ во всѣ остальныя. Слѣдовательно, равенства (9) являются для системы (2)-ой интегральными уравненіями, написанными въ видѣ, отличномъ отъ (7)-ыхъ и (8)-ыхъ.

Равенства (10), въ силу значеній (9) функцій p_{m+i}, представляютъ результатъ подстановки въ уравненія (1) разсматриваемаго значенія V и тѣмъ доказываютъ, что послѣднее—ихъ рѣшеніе. Легко видѣть, что это—полный интегралъ. Дѣйствительно, полученное рѣшеніе зависитъ явно отъ $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ b, b_1, $\ldots b_{n-m}$, такъ какъ производныя по нимъ отъ функціи V, въ силу $n - m$ послѣднихъ равенствъ (9), сохраняютъ значенія, отличныя отъ нуля. Кромѣ того, вслѣдствіе остальныхъ равенствъ (9),

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}\,,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}\,, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1\ \ ,\ \ b_2\ \ , \ldots b_{n-m}}\right) \gtrless 0\,,$$

ибо для начальныхъ значеній перемѣнныхъ x_k разсматриваемый опредѣлитель равенъ единицѣ.

При помощи функціи V составляются такимъ образомъ какъ полный интегралъ уравненій (1), такъ и интегральныя уравненія системы (2). Стало-быть, свойства разсматриваемой функціи представляютъ полную аналогію съ *главной функціей* Якоби въ той формѣ, которую далъ ей Майеръ *), и мы будемъ называть V въ дальнѣйшемъ изложеніи также *главной функціей* разсматриваемыхъ уравненій.

3. *Если уравненія (7) разрѣшаются относительно постоянныхъ* b_1, b_2, $\ldots b_l$, a_{l+1}, a_{l+2}, $\ldots a_{n-m}$, *то главной функціей уравненій (1) и (2) служитъ выраженіе*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=l+1}^{n-m} a_i\, b_i\,.$$

---

*) Mayer, Mathematische Annalen, Bd. III, S. 435.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ получаются равенства

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, \Delta x_{m+i} + \sum_{\sigma=l+1}^{n-m} a_\sigma\, \delta b_\sigma - \sum_{\rho=1}^{l} b_\rho\, \delta a_\rho - \sum_{k=1}^{m} H_k\, dx_k,$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} \Delta x_{m+i} + \sum_{\sigma=l+1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial b_\sigma} \delta b_\sigma + \sum_{\rho=1}^{l} \frac{\partial V}{\partial a_\rho} \delta a_\rho + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k.$$

Отсюда слѣдуетъ, что общій интегралъ системы (2)-ой опредѣляется уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \quad i = 1, 2, \dots n-m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_\rho} = -b_\rho, \quad \rho = 1, 2, \dots l,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_\sigma} = a_\sigma, \quad \sigma = l+1, 2, \dots n-m.$$

Наконецъ, значеніе V, выраженное функціей всѣхъ x-овъ и постоянныхъ a_ρ, b_σ, зависитъ явно отъ этихъ постоянныхъ и равенство

$$z = V + b,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная, представляетъ полный интегралъ уравненій (1).

Для случая одного уравненія съ частными производными разсматриваемое выраженіе главной функціи совпадаетъ со значеніемъ ея, указаннымъ Бертраномъ *). Если уравненія (7) разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ b_i, то изъ предыдущей формулы слѣдуетъ, что выраженіе главной функціи становится

$$V = \int_{U_0}^{U} dU$$

и соотвѣтствуетъ тому виду, въ которомъ представлялъ ее Якоби въ своихъ изслѣдованіяхъ относительно одного уравненія съ частными производными.

4. Установленная зависимость между задачами интегрированія уравненій съ частными производными и каноническихъ въ полныхъ дифференціалахъ позволяетъ построить теорію интегрированія послѣд-

*) Bertrand, Comptes Rendus, t. LXXXII, p. 641.

нихъ, или соотвѣтствующихъ имъ якобіевскихъ системъ. Подобными вопросами занимался С. Ли. Онъ разсматривалъ линейныя уравненія съ частными производными общаго вида, не приводя ихъ къ якобіевскимъ *). Въ теоретическомъ отношеніи однако такое приведеніе всегда возможно и является тѣмъ болѣе умѣстнымъ, что благодаря ему упрощаются вычисленія. Кромѣ того устанавливается полная аналогія между теоріями интегрированія обыкновенныхъ каноническихъ уравненій и разсматриваемыхъ въ полныхъ дифференціалахъ. Въ этомъ нетрудно убѣдиться изъ справедливости слѣдующихъ теоремъ.

Пусть уравненія

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = b_i,$$

$$i = 1, 2, \dots n-m,$$

гдѣ b_i *— произвольныя постоянныя, — различные интегралы системы (2). Если они находятся въ инволюціи, то остальные* $n-m$ *интеграловъ уравненій (2) опредѣляются при помощи квадратуры.*

Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ, по доказанному въ четвертой главѣ, полный интегралъ системы (1)

$$z = V(x_1, x_2, \dots x_n, b_1, b_2, \dots b_{n-m}) + b$$

находится при помощи одной только квадратуры и зависитъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $b, b_1, \dots b_{n-m}$. Слѣдовательно, интегральныя уравненія, для опредѣленія $n-m$ искомыхъ интеграловъ системы (2), выражаются формулами (5)

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots n-m,$$

гдѣ a_i — новыя произвольныя постоянныя.

Доказанное предложеніе есть очевидное обобщеніе извѣстной *теоремы Ліувилля* **) относительно интегрированія каноническихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Впервые указано оно было С. Ли, но въ совершенно иной формѣ ***).

---

*) S. Lie, Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 464.

**) Journal de Liouville, 1-re serie, t. XX, p. 137.

Cp. Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. V, n⁰ 38, S. 58.

***) S. Lie, Mathematische Annalen, Bd. XI, S. 469, Theorem I и Satz 4, или cp. Goursat, Leçons sur l'intégration..., p. 329, n⁰ 138.

Если извѣстны для системы (2) l различныхъ интеграловъ въ инволюціи

$$\left.\begin{array}{c} f_i(x_1, x_2, \dots x_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = b_i \\ i = 1, 2, \dots l, \quad l < n - m, \end{array}\right| \qquad (11)$$

гдѣ b_i — произвольныя постоянныя, то порядокъ ея понижается на $2l$ единицъ.

Въ самомъ дѣлѣ, задача интегрированія уравненій (1) (предполагаемъ уравненія (11) разрѣшимыми относительно $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_{m+l}$) приводится къ интегрированію системы $m + l$ уравненій съ частными производными въ инволюціи

$$p_k + H_k'(b_1, b_2, \dots b_l, x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+l+1}, p_{m+l+2}, \dots p_n) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots m + l.$$

Полный интегралъ послѣднихъ находится въ зависимости отъ интегрированія системы въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_{m+i} = \sum_{k=1}^{m+l} \frac{\partial H_k'}{\partial p_{m+i}} dx_k,$$

$$dp_{m+i} = -\sum_{k=1}^{m+l} \frac{\partial H_k'}{\partial x_{m+i}} dx_k,$$

$$i = l + 1, \quad l + 2, \dots n - m,$$

порядокъ которой на $2l$ единицъ меньше порядка системы (2)-ой. Такъ если извѣстенъ одинъ ея интегралъ, то порядокъ послѣдней системы понижается на двѣ единицы. Изъ этихъ разсужденій вытекаетъ справедливость слѣдующихъ двухъ теоремъ:

Одинъ извѣстный интегралъ канонической системы (2) понижаетъ порядокъ ея на двѣ единицы.

Задача интегрированія канонической системы (2) состоитъ въ выполненіи ряда $n - m$ операцій интегрированія порядковъ

$$2n - 2m, \; 2n - 2m - 2, \dots 4, \; 2$$

и одной квадратуры.

5. Въ дальнѣйшемъ изложенiи имѣется въ виду распространить предыдущую теорiю на замкнутыя системы уравненiй, заключающихъ явно неизвѣстную функцiю,

$$\left.\begin{array}{c} p_k + H_k(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots p_n) = 0, \\ k = 1,\ 2,\ \ldots m,\ m < n. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Составляемъ систему уравненiй въ полныхъ дифференцiалахъ

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+i} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} dx_k, \\ dp_{m+i} = -\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{dH_k}{dx_{m+i}} dx_k, \\ dz = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \dfrac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} - H_k \right) dx_k, \\ i = 1,\ 2,\ \ldots n-m. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Докажемъ слѣдующую теорему:

Пусть уравненiе

$$z = V(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n,\ b,\ b_1,\ \ldots b_{n-m}), \qquad (14)$$

гдѣ b, $b_1, \ldots b_{n-m}$ — *произвольныя постоянныя, — полный интегралъ системы (12), при чемъ*

$$D\left(\frac{V,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}},\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}},\ \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots b_{n-m}}\right) \gtrless 0. \qquad (15)$$

Такъ какъ по меньшей мѣрѣ одинъ изъ первыхъ миноровъ этого опредѣлителя отличенъ отъ нуля, то можно положить

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}},\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}},\ \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1,\ b_2,\ \ldots b_{n-m}}\right) \gtrless 0. \qquad (16)$$

Въ такомъ случаѣ равенства

$$z=V,\quad \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}=p_{m+i},\quad \frac{\partial V}{\partial b_i}=a_i\frac{\partial V}{\partial b},\quad i=1,2,\ldots n-m, \tag{17}$$

гдѣ a_i — новыя произвольныя постоянныя, опредѣляютъ общій интегралъ уравненій (13).

Въ самомъ дѣлѣ, первыя $n-m+1$ уравненій (17) даютъ значенія z, p_{m+i} въ функціяхъ перемѣнныхъ x и постоянныхъ b, b_i. Остальныя уравненія (17), если положить всѣ $a_i=0$, разрѣшимы относительно перемѣнныхъ x_{m+i}, въ силу условія (16). Стало-быть эти уравненія (17) опредѣляютъ также всѣ x_{m+i} въ функціяхъ x_k, постоянныхъ b, b_i и a_i, при произвольныхъ значеніяхъ послѣднихъ. Такимъ образомъ существуютъ функціи z, p_{m+i}, x_{m+i}, обращающія уравненія (17) въ тождества. Дифференцируя ихъ по перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, приходимъ къ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_{\nu=1}^{n-m}p_{m+\nu}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_k}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,\partial x_k}-a_i\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x_k}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,\partial x_{m+\nu}}-a_i\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x_{m+\nu}}\right)\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}=0,$$

$$i=1,2,\ldots n-m,$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Съ другой стороны, значеніе (14) функціи z утождествляетъ уравненія (12), и мы получаемъ еще рядъ тождествъ

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+H_k=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_{m+i}}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_{m+\nu}}+\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial b}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\,\partial b}+\frac{\partial H_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b}=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial b_i}+\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\,\partial b_i}+\frac{\partial H_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial b_i}=0,$$

$$i=1,2,\ldots n-m,$$

гдѣ k принимаетъ значенія отъ 1 до m. Изъ обѣихъ системъ предыдущихъ равенствъ, вслѣдствіе послѣднихъ $n-m$ уравненій (17), слѣдуютъ новыя тождества

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}-H_k\,,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_{m+\nu}}\left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}-\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\right)=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}+\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\,,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,\partial x_{m+\nu}}-a_i\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x_{m+\nu}}\right)\left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}-\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\right)=0\,,$$

$$i=1\,,\;2\,,\ldots n-m\,,$$

для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Опредѣлитель $n-m$ послѣднихъ изъ написанныхъ уравненій, линейныхъ относительно $n-m$ величинъ

$$\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}-\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}\,,\quad \nu=1\,,\;2\,,\ldots n-m\,,$$

отличенъ отъ нуля, такъ какъ по доказанному послѣднія $n-m$ уравненій (17) разрѣшимы относительно всѣхъ $x_{m+\nu}$. Поэтому предыдущая система равенствъ даетъ тождества, доказывающія наше предложеніе,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}&=\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\,,\\ \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}&=-\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\,,\\ \frac{\partial z}{\partial x_k}&=\sum_{\nu=1}^{n-m}p_{m+\nu}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}-H_k\,,\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

гдѣ i, k принимаютъ соотвѣтственно значенія отъ 1 до $n-m$ и 1 до m.

6. Обратная, только что разсмотрѣнной, задача составленія рѣшенія уравненій (12) изъ общаго интеграла системы (13) была рѣшена въ предыдущей главѣ. Слѣдующая теорема представляетъ новое доказательство развитой тамъ теоріи:

Пусть уравненія

$$z=\varphi(x_1,\ x_2,\ldots x_m,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{n-m},\ b,\ b_1,\ldots b_{n-m}),\tag{19}$$

$$x_{m+i}=f_i(x_1,\ x_2,\ldots x_m,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{n-m},\ b,\ b_1,\ldots b_{n-m}),\tag{20}$$

$$p_{m+i}=F_i(x_1,\ x_2,\ldots x_m,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{n-m},\ b,\ b_1,\ldots b_{n-m}),\tag{21}$$

$$i=1,\ 2,\ldots n-m,$$

представляютъ общій интегралъ системы (13), при чемъ постоянныя a_i, b_i, b *суть начальныя значенія выраженій*

$$x_{m+i},\quad p_{m+i},\quad z-\sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i}p_{m+i}.$$

Если равенство

$$z=V(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ b,\ b_1,\ldots b_{n-m})\tag{22}$$

— результатъ исключенія посточныхъ a_i *изъ уравненія (19), въ силу (20)-ыхъ, то общій интегралъ системы (13) представляется слѣдующими уравненіями*

$$\left.\begin{array}{c} z=V,\quad \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}}=p_{m+i},\quad \dfrac{\partial V}{\partial b_i}=a_i\dfrac{\partial V}{\partial b},\\ i=1,\ 2,\ldots n-m,\end{array}\right|\tag{23}$$

гдѣ a_i *— новыя произвольныя постоянныя, и равенство (22) — полный интегралъ уравненій (12)-ыхъ.*

Сохраняемъ прежнее обозначеніе (см. n⁰ 14 второй главы)

$$P_k=\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-H_k.$$

Уравненія (13) удовлетворяются тождественно, въ силу равенствъ (19)—(21), поэтому, пользуясь прежними обозначеніями, находимъ

$$\delta dz=\sum_{k=1}^{n-m}\delta P_k\,dx_k,$$

при чемъ

$$\delta P_k=\sum_{i=1}^{n-m}\left(p_{m+i}\,\delta\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\delta x_{m+i}\right)-\frac{\partial H_k}{\partial z}\delta z.$$

Послѣднее выраженіе δP_k, на основаніи тождествъ (18), принимаетъ видъ

$$\delta P_k = \sum_{i=1}^{n-m}\left[p_{m+i}\,\delta\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_k}{\partial z}\,p_{m+i}\right)\delta x_{m+i}\right] - \frac{\partial H_k}{\partial z}\,\delta z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) - \frac{\partial H_k}{\partial z}\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right).$$

Такъ какъ очевидно

$$\delta dz = d\delta z\,,$$

то первое изъ предыдущихъ равенствъ даетъ

$$d\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) + \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_k}{\partial z}\,dx_k = 0\,.$$

Принимая во вниманіе въ n⁰ 4 предыдущей главы первую лемму, по которой выраженіе

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_k}{\partial z}\,dx_k\,,$$

въ силу интегральныхъ уравненій (19)—(21), становится точнымъ дифференціаломъ

$$dW\,,$$

получаемъ равенство

$$d\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) + \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right)dW = 0\,^{*)}.$$

Интегрируемъ его между предѣлами, соотвѣтствующими начальнымъ значеніямъ перемѣнныхъ x_k и какимъ-либо значеніямъ, внутри ихъ области измѣненія. Въ силу зависимости

$$z^0 = b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i\,,$$

*) Cp. Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. V, n⁰ 13, S. 286;
Darboux, Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, § 24, p. 137.

получаемъ

$$\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i} = (\delta b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i\,\delta b_i)\, e^{-\int_{W_0}^{W} dW}.$$

Такъ какъ, далѣе, изъ равенствъ (13) слѣдуетъ

$$dz = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,dx_{m+i} - \sum_{k=1}^{m} H_k\,dx_k,$$

то выраженіе Δz принимаетъ видъ

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\Delta x_{m+i} + e^{-\int_{W_0}^{W} dW} a_i\,\delta b_i) + e^{-\int_{W_0}^{W} dW} \delta b - \sum_{k=1}^{m} H_k\,dx_k.$$

Съ другой стороны, исходя изъ равенства (22), находимъ формулу

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\,\Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i}\,\delta b_i\right) + \frac{\partial V}{\partial b}\,\delta b + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k}\,dx_k.$$

Отсюда приходимъ къ равенствамъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i\, e^{-\int_{W_0}^{W} dW}, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = e^{-\int_{W_0}^{W} dW}, \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots n-m. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0, \\ &k = 1, 2, \ldots m. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Въ разсматриваемой области измѣненія перемѣнныхъ функція

$$e^{-\int_{W_0}^{W} dW}$$

сохраняетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля (см. n⁰5 пятой главы). Исключивъ ее изъ $n-m+1$ послѣднихъ уравненій (24), заключаемъ, что — (23) представляютъ, дѣйствительно, интегральныя уравненія системы (13). Наконецъ, изъ равенствъ (25) видно, что значеніе (22) функціи z — рѣшеніе уравненій (12). Оно зависитъ явно, какъ показываютъ формулы (24), отъ $n-m+1$ произвольныхъ постоянныхъ b, $b_1, \ldots b_{n-m}$ и представляетъ полный интегралъ системы (12) Въ самомъ дѣлѣ

$$D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b, \quad b_1 \quad, \quad b_2 \quad, \ldots \quad b_{n-m}}\right) \gtrless 0,$$

такъ какъ уравненія

$$z = V, \quad \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i},$$

$$i = 1, 2, \ldots n-m,$$

являются для системы (13) интегральными, изъ которыхъ постоянныя b, b_i не исключаются.

Функція V служитъ такимъ образомъ для составленія формулъ, разрѣшающихъ вопросы интегрированія обѣихъ разсматриваемыхъ системъ дифференціальныхъ уравненій какъ съ частными производными, такъ и въ полныхъ дифференціалахъ. Эта функція обладаетъ, стало-быть, всѣми свойствами *главныхъ функцій*, опредѣленныхъ въ n⁰ n⁰ 2 и 3 настоящей главы.

7. Воспользуемся изложенной теоріей для развитія идей С. Ли, упомянутыхъ въ n⁰ 5 четвертой главы этого сочиненія. Пусть уравненія

$$\left.\begin{array}{c} f_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = C_i, \\ i = 1, 2, \ldots l, \end{array}\right\} \quad (26)$$

гдѣ C_i — произвольныя постоянныя, представляютъ для системы (13) интегралы въ инволюціи, разрѣшимые относительно перемѣнныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_{m+l}.$$

Выполнивъ указанное выше (см. n⁰ 5 четвертой главы) преобразованіе перемѣнныхъ, получаемъ уравненія (12) въ слѣдующемъ видѣ

$$
\left.\begin{array}{l}
p'_k + H'_k\,(x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\, x_m\,,\; p_{m+1}\,,\; \ldots\, p_{m+l}\,,\; x_{m+l+1}\,,\; \ldots\, x_n\,,\; z',\\
\qquad\qquad p'_{m+1}\,,\; \ldots\, p'_n) = 0\,,\\
\qquad\qquad k = 1\,,\; 2\,,\; \ldots\, m\,,
\end{array}\right\} \qquad (27)
$$

уравненія же (26) становятся

$$
\left.\begin{array}{l}
f'_i\,(x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\, x_m\,,\; p_{m+1}\,,\; \ldots\, p_{m+l}\,,\; x_{m+l+1}\,,\; \ldots\, x_n\,,\; z',\\
\qquad\qquad p'_{m+1}\,,\; \ldots\, p'_{m+l}) = C_i\,,\\
\qquad\qquad i = 1\,,\; 2\,,\; \ldots\, l.
\end{array}\right\} \qquad (28)
$$

Проинтегрировавъ систему уравненій (27) и (28), найдемъ, по формуламъ (17), общій интегралъ соотвѣтствующей уравненіямъ (27)-ымъ канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ

$$
\left.\begin{array}{l}
dp_{m+\lambda} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H'_k}{\partial p'_{m+\lambda}}\, dx_k\,, \quad dx_{m+\sigma} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H'_k}{\partial p'_{m+\sigma}}\, dx_k\,,\\[2ex]
dp'_{m+\lambda} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{dH'_k}{dp_{m+\lambda}}\, dx_k\,, \quad dp'_{m+\sigma} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{dH'_k}{dx_{m+\sigma}}\, dx_k\,,\\[2ex]
\qquad dz' = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p'_{m+i}\, \frac{\partial H'_k}{\partial p'_{m+i}} - H_k \right) dx_k\,,\\[2ex]
\lambda = 1\,,\; 2\,,\; \ldots\, l\,, \quad \sigma = l+1\,,\; l+2\,,\; \ldots\, n-m.
\end{array}\right\} \qquad (29)
$$

Уравненія (27) получаются изъ (12) замѣной

$$
p_s\,,\; x_{m+\lambda}\,,\; z\,,
$$

$$
s = 1\,,\; 2\,,\; \ldots\, m\,,\; m+l+1\,,\; \ldots\, n\,,
$$

$$
\lambda = 1\,,\; 2\,,\; \ldots\, l.
$$

всѣми перемѣнными

$$
p'\,,\; z'.
$$

Легко видѣть, что обратная замѣна перемѣнныхъ (см. n⁰ 3 третьей главы) приводитъ систему (29) тождественно къ (13)-ой. Стало-быть, само собою разумѣется, что общій интегралъ уравненія (29) преобразовывается въ таковой для системы (13). Въ такомъ случаѣ, основываясь на выводахъ пятой главы или n⁰ 6 настоящей главы, получаемъ полный интегралъ уравненій (12), не совершая новыхъ операцій интегрированія.

Возвращаемся къ интегрированію уравненія

$$p_1 + \frac{(z + x_2 p_2) x_2}{x_1 p_3} + \frac{z - x_2 x_3}{x_1} = 0. \tag{30}$$

Равенства

$$x_1 p_3 = C_1, \quad x_1 \left(1 + \frac{p_3}{x_2}\right) = C_2, \tag{31}$$

гдѣ C_1, C_2 — произвольныя постоянныя, представляютъ два интеграла въ инволюціи канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2^2}{x_1 p_3}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = -\frac{(z + x_2 p_2) x_2}{x_1 p_3^2}, \\ &\frac{dp_2}{dx_1} = \frac{x_3 - p_2}{x_1} - \frac{z + 3x_2 p_2}{x_1 p_3}, \quad \frac{dp_3}{dx_1} = -\frac{p_3}{x_1}, \\ &\frac{dz}{dx_1} = -\frac{(2z + x_2 p_2) x_2}{x_1 p_3} + \frac{x_2 x_3 - z}{x_1}. \end{aligned}\right| \tag{32}$$

Указанное раньше преобразованіе перемѣнныхъ приводитъ уравненія (30) и (31) къ виду

$$p_1' - \frac{(z' - 2p_2 p_2') p_2'}{x_1 p_3'} + \frac{z' + (x_3 - p_2) p_2'}{x_1} = 0, \tag{33}$$

$$x_1 p_3' = C_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_3'}{p_2'}\right) = C_2,$$

полный интегралъ которыхъ есть

$$z' = \frac{C_1 p_2}{x_1 - C_2} + \frac{C_1 x_3 - CC_2}{x_1} + C,$$

гдѣ C — новая произвольная постоянная. Такъ какъ функціональные опредѣлители

$$D\left(\frac{z', \dfrac{\partial z'}{\partial p_2}, \dfrac{\partial z'}{\partial x_3}}{C, \ C_1, \ C_2}\right), \quad D\left(\frac{\dfrac{\partial z'}{\partial p_2}, \dfrac{\partial z'}{\partial x_3}}{C_1, \ C_2}\right)$$

отличны отъ нуля, то каноническая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующая уравненію (33),

$$\frac{dp_2}{dx_1}=-\frac{z'-4p_2p_2'}{x_1p_3'}+\frac{x_3-p_2}{x_1}, \quad \frac{dx_3}{dx_1}=\frac{(z'-2p_2p_2')p_2'}{x_1p_3'^2},$$

$$\frac{dp_2'}{dx_1}=-\frac{p_2'^2}{x_1p_3'}, \quad \frac{dp_3'}{dx_1}=-\frac{p_3'}{x_1},$$

$$\frac{dz'}{dx_1}=\frac{z'p_2'}{x_1p_3'}-\frac{z'}{x_1},$$

имѣетъ интегральныя уравненія

$$z'=\frac{C_1p_2}{x_1-C_2}+\frac{C_1x_3-CC_2}{x_1}+C,$$

$$\frac{C_1}{x_1-C_2}=p_2', \quad \frac{C_1}{x_1}=p_3',$$

$$\frac{p_2}{x_1-C_2}+\frac{x_3}{x_1}=C_1'\left(1-\frac{C_2}{x_1}\right),$$

$$\frac{C_1p_2}{(x_1-C_2)^2}-\frac{C}{x_1}=C_2'\left(1-\frac{C_2}{x_1}\right),$$

гдѣ C_1', C_2' — двѣ новыя произвольныя постоянныя. Поэтому, полагая

$$x_1^0,\ a_1,\ a_2,\ b,\ b_1,\ b_2$$

начальными значеніями соотвѣтственно перемѣнныхъ

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ z,\ p_2,\ p_3,$$

приводимъ общій интегралъ системы (32) къ виду

$$z=\frac{a_1}{x_1 b_2}\left[(a_1 b_1-a_2 b_2)\left(x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1(b+a_1 b_1-a_2 b_2)}{x_1^0 b_2}\left(x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}\right)^2\right],$$

$$x_2=-\frac{x_1^0 b_2}{x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}},$$

$$x_3=\frac{a_1}{x_1^0 b_2^2}\left[(b+a_1 b_1-2a_2 b_2)\left(x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1(b+a_1 b_1-a_2 b_2)}{x_1^0 b_2}\left(x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}\right)^2\right],$$

$$p_2=\frac{a_1}{x_1 x_1^0 b_2^2}\left[(a_2 b_2-b)\left(x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{a_1(b+a_1 b_1-a_2 b_2)}{x_1^0 b_2}\left(x_1-x_1^0-\frac{x_1^0 b_2}{a_1}\right)^3\right],$$

$$p_3=\frac{x_1^0 b_2}{x_1}.$$

Результатъ исключенія b_1, b_2 изъ первыхъ трехъ уравненій представляетъ полный интегралъ уравненія (30)

$$z=\frac{a_1}{x_1}\left[\frac{x_1^0 b}{x_2}+\frac{(x_2 x_3-a_1 a_2)(x_1-x_1^0)}{x_2-a_1}\right],$$

гдѣ a_1, a_2, b — три произвольныя постоянныя.

8. Доказанныя предложенія въ n⁰n⁰ 5 и 6 позволяютъ распространить теорію интегрированія каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ на обобщенныя системы (13) этихъ уравненій. Мы не будемъ останавливаться на доказательствѣ слѣдующихъ теоремъ, которыя вполнѣ очевидны:

Если извѣстны $n-m+1$ различныхъ интеграловъ въ инволюціи для системы (13), то остальныя ея $n-m$ интеграловъ находятся при помощи дифференцированія.

Если извѣстны $l \, (l < n - m + 1)$ *различныхъ интеграловъ въ инволюціи для системы* (*13*), *то порядокъ ея понижается на* $2l$ *единицъ.*

Задача интегрированія уравненій (*13*) *разрѣшается при помощи* $n - m + 1$ *операцій интегрированія порядковъ*

$$2n - 2m + 1\,, \quad 2n - 2m - 1\,, \ldots 3\,,\ 1\,.$$

ГЛАВА VII.

Рѣшеніе задачи С. Ли.

1. Пусть имѣемъ систему уравненій въ инволюціи

$$\left.\begin{array}{c} p_k + H_k\,(x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots x_n\,,\,p_{m+1}\,,\,p_{m+2}\,,\,\cdots p_n) = 0\,, \\ k = 1\,,\,2\,,\,\ldots m\,,\quad m < n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Составляемъ каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\,dx_k\,, \\ dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\,dx_k\,, \\ i = 1,\,2\,,\,\ldots n-m. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Мы видѣли, что полный интегралъ уравненій (1) находится при помощи квадратуры, если извѣстенъ общій интегралъ системы (2), и указывали, какъ упрощается задача интегрированія уравненій (1), когда извѣстны для системы (2) нѣсколько интеграловъ въ инволюціи. Задача С. Ли, къ разсмотрѣнію которой мы приступаемъ, состоитъ въ образованіи системы интеграловъ въ инволюціи изъ какихъ-угодно данныхъ интеграловъ уравненій (2), съ цѣлью возможно больше упростить интегрированіе системы (1) *). Рѣшеніе своей задачи С. Ли основываетъ на созданной имъ *теоріи группъ.* Въ настоящей главѣ дѣлается попытка представить другое рѣшеніе разсматриваемаго вопроса, исходя исключительно изъ основныхъ положеній теоріи уравненій съ частными производными.

---

*) Lie, Mathematische Annalen, Bd. VIII, 8. 215, § 17. Integrationsmethoden, die sich aûf die früheren Entwickelungen stützen, S. 273; Bd. XI, S. 464.

Goursat, Leçons sur l'intégration..., chapitre XII, Théorie des groupes. Methode generale d'integration, p. 304.

2. Соотвѣтствующая уравненіямъ (2) якобіевская система представляется въ видѣ

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + (H_k\,,\ f) = 0\,, \\[2ex] k = 1,\ 2\,,\ \dots\ m. \end{array}\right| \qquad (3)$$

Докажемъ слѣдующую теорему:

Пусть функціи φ, ψ *перемѣнныхъ* x, p_{m+i} — *два различныхъ интеграла системы (3). Скобки Пуассона*

$$(\varphi\,,\ \psi),$$

распространенныя на всѣ перемѣнныя x_{m+i}, p_{m+i}, *представляютъ также рѣшеніе разсматриваемой системы.*

Дѣйствительно, равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + (H_k, \varphi) = 0\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + (H_k\,,\ \psi) = 0$$

утождествляются для всѣхъ значеній k отъ 1 до m. Отсюда, въ силу тождества Якоби

$$(\varphi\,,\ (\psi\,,\ H_k)) + (\psi\,,\ (H_k\,,\ \varphi)) + (H_k\,,\ (\varphi\,,\ \psi)) = 0$$

и формулъ дифференцированія скобокъ Пуассона, слѣдуютъ тождества

$$\frac{\partial(\varphi\,,\ \psi)}{\partial x_k} + (H_k\,,\ (\varphi\,,\ \psi)) = 0\,,$$

$$k = 1\,,\ 2\,,\ \dots\ m.$$

Полученный такимъ образомъ интегралъ $(\varphi\,,\ \psi)$ системы (3) можетъ быть, или новымъ, или являться слѣдствіемъ уже извѣстныхъ.

Доказанное предложеніе распространяется, какъ легко видѣть, на всякую систему уравненій, линейныхъ относительно частныхъ производныхъ перваго порядка функціи f,

$$(f_k\,,\ f) = 0\,,\quad k = 1\,,\ 2\,,\ \dots\ m\,,$$

гдѣ f_k — функціи x_1, x_2, $\dots$ x_n, p_1, p_2, $\dots$ p_n и удовлетворяютъ тождественно условіямъ

$$(f_k\,,\ f_h) = 0$$

для всѣхъ различныхъ значеній k, h отъ 1 до m, при чемъ скобки Пуассона составляются относительно всѣхъ x и p.

3. Пусть функціи

$$
\left.\begin{array}{c}
\varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n), \\
i = 1, 2, \dots l, \quad l < 2n - 2m,
\end{array}\right\} \qquad (4)
$$

являются для системы (3) различными интегралами, которые не находятся всѣ одновременно въ инволюціи. Предположимъ, далѣе, что скобки Пуассона $(\varphi_s, \varphi_\sigma)$—будемъ обозначать ихъ черезъ $a_{s\sigma}$ — не даютъ для разсматриваемыхъ уравненій новыхъ интеграловъ, отличныхъ отъ (4)-ыхъ. Рѣшеніе задачи С. Ли основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ. Произвольныя функціи всѣхъ φ представляютъ также интегралы уравненій (3). Поэтому вопросъ сводится къ вычисленію функцій вида

$$
\left.\begin{array}{c}
\Phi_j(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_l), \\
j = 1, 2, \dots \mu, \; \mu \leqq l,
\end{array}\right\} \qquad (5)
$$

которыя были бы различны и находились въ инволюціи. Составляя изъ нихъ скобки Пуассона, получаемъ формулы

$$
(\Phi_k, \Phi_h) = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_s} A_s(\Phi_h),
$$

гдѣ введено обозначеніе

$$
A_s(\Phi_h) = \sum_{\sigma=1}^{l} a_{s\sigma} \frac{\partial \Phi_h}{\partial \varphi_\sigma}.
$$

Чтобы функціи (5) находились въ инволюціи, для этого достаточно имѣть

$$
A_s(\Phi_h) = 0,
$$

$$
s = 1, 2, \dots l,
$$

для всѣхъ значеній h отъ 1 до μ. Слѣдовательно, функціи Φ_h должны быть различными рѣшеніями линейныхъ, однородныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ

$$
\left.\begin{array}{c}
A_s(f) = 0, \\
s = 1, 2, \dots l.
\end{array}\right\} \qquad (6)
$$

Послѣднія уравненія могутъ имѣть μ различныхъ рѣшеній только при условіи, что уничтожаются какъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} & \cdots & \alpha_{ll} \end{vmatrix},$$

такъ и всѣ его миноры порядковъ $1, 2, \ldots \mu - 1$. Въ такомъ случаѣ система (6) приводится къ виду

$$\left.\begin{array}{c} A_s(f) = 0, \\ s = 1, 2, \ldots, l - \mu. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Эти уравненія образуютъ замкнутую систему. Въ самомъ дѣлѣ, изъ свойствъ скобокъ Пуассона слѣдуетъ

$$(\varphi_s, f) = A_s(f).$$

Тождество Якоби, для трехъ функцій φ_s, φ_σ, f, даетъ равенство

$$(\varphi_s, (\varphi_\sigma, f)) - (\varphi_\sigma, (\varphi_s, f)) = (\alpha_{s\sigma}, f).$$

Такъ какъ по условію выраженія $\alpha_{s\sigma}$ являются функціями отъ φ, то предыдущее равенство замѣняется слѣдующимъ

$$A_s[A_\sigma(f)] - A_\sigma[A_s(f)] = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \alpha_{s\sigma}}{\partial \varphi_i} A_i(f).$$

и доказываетъ такимъ образомъ справедливость высказаннаго предложенія.

Итакъ, пусть существуютъ μ различныхъ функцій (5) перемѣнныхъ φ

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\mu, \qquad (8)$$

которыя представляютъ для системы (3) интегралы въ инволюціи. Само собою разумѣется, что они находятся въ инволюціи со всѣми функціями (4)-ыми. Дѣйствительно, полагая

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l)$$

какой-угодно функціей послѣднихъ, находимъ

$$(\Pi, \Phi_h) = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_s} A_s(\Phi_h) = 0.$$

Легко, наконецъ, доказать, что *число различныхъ уравненій (6)*

$$l - \mu$$

есть четное. Въ самомъ дѣлѣ, принимаемъ въ выраженіяхъ (5)-ыхъ вмѣсто

$$\varphi_{l-\mu+1}, \quad \varphi_{l-\mu+2}, \ldots \varphi_l \tag{9}$$

функцій (8), существованіе которыхъ было сейчасъ доказано. Если построить въ этомъ предположеніи систему уравненій для опредѣленія интеграловъ въ инволюціи (5)-ыхъ, то, само собою разумѣется, что послѣдняя приводится къ $l-\mu$ различнымъ уравненіямъ вида (7), которыя напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\sum_{\sigma=1}^{l-\mu} \alpha_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial \varphi_\sigma} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots l - \mu,$$

при чемъ величины, замѣняющія (9)-ыя, разсматриваются какъ постоянныя. Такъ какъ по условію число всѣхъ различныхъ функцій, составленныхъ изъ (4)-ыхъ и находящихъ въ инволюціи, есть μ, то предыдущая система не имѣетъ рѣшеній, отличныхъ отъ постоянной величины. Поэтому необходимо

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,\,l-\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,\,l-\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{l-\mu,\,1} & \alpha_{l-\mu,\,2} & \ldots & \alpha_{l-\mu,\,l-\mu} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Послѣдній опредѣлитель — косой, симметрическій. Онъ можетъ не равняться нулю только въ томъ случаѣ, когда порядокъ его является четнымъ числомъ. Слѣдовательно,

$$l-\mu$$

— четное число. Будемъ называть его черезъ 2ϱ, такъ что

$$l=\mu+2\varrho.$$

Обозначимъ, наконецъ, черезъ

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\ldots \varphi_{2\varrho} \tag{10}$$

2ϱ изъ функцій (4)-хъ, которыя совмѣстно съ (8)-ыми представляютъ l различныхъ интеграловъ системы (3). Приведенныхъ соображеній достаточно, чтобы показать, какъ рѣшается въ разсматриваемомъ нами случаѣ задача интегрированія уравненій (1).

4. Составляемъ систему $m+\mu$ уравненій въ инволюціи

$$\left.\begin{array}{c} p_k+H_k=0,\quad \Phi_s=C_s, \\ k=1,\ 2,\ldots m,\quad s=1,\ 2,\ldots \mu, \end{array}\right\} \tag{11}$$

гдѣ C_s — произвольныя постоянныя. Для вычисленія полнаго интеграла системы (1), мы будемъ искать уравненія вида

$$f(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ldots p_n)=C,$$

которыя образуютъ замкнутую систему совмѣстно съ (11)-ыми, при чемъ C — произвольныя постоянныя. Поэтому функціи f должны быть различными рѣшеніями полной системы линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} (p_k+H_k,\ f)=0,\ (\Phi_s,\ f)=0, \\ k=1,\ 2,\ldots m,\quad s=1,\ 2,\ldots \mu. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Мы подчинимъ кромѣ того функцію f условію удовлетворять уравненіямъ *)

$$\left.\begin{array}{c} (\varphi_\sigma,\ f)=0, \\ \sigma=1,\ 2,\ldots 2\varrho. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Изъ тождествъ Якоби слѣдуетъ, что уравненія (12) и (13) образуютъ полную систему. Функціи (8) представляютъ μ различныхъ ея

---

*) См. Lie, Mathematische Annalen, Bd. VIII, S. 274; Goursat, Leçons sur l'intégration..., n° 134, p. 323.

рѣшеній. Слѣдовательно, задача вычисленія первой изъ функцій f, которую назовемъ черезъ f_1, приводится къ выполненію операціи интегрированія порядка

$$2n - 2m - 2\mu - 2\varrho.$$

Для разысканія функціи f_2 будемъ интегрировать уравненія (12), (13) и новое уравненіе

$$(f_1 \cdot f) = 0,$$

и т. д.

Такимъ образомъ получаются для системы (12) и (13)-ыхъ уравненій $n - m - \mu - \varrho$ различныхъ интеграловъ въ инволюціи

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-m-\mu-\varrho}, \tag{14}$$

и составляется полная система $n - \varrho$ линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{l} (p_k + H_k, f) = 0, \quad (\Phi_s, f) = 0, \quad (f_i, f) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots m, \quad s = 1, 2, \ldots \mu, \quad i = 1, 2, \ldots n - m - \mu - \varrho. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Функціи (8), (10) и (14)-ыя представляютъ всѣ $n - m + \varrho$ ея различныхъ рѣшеній. Въ такомъ случаѣ легко показать, что *интегрированіе системы $n - \varrho$ уравненій въ инволюціи*

$$p_k + H_k = 0, \quad \Phi_s = C_s, \quad f_i = C_{\mu+i}, \tag{16}$$

гдѣ всѣ C — произвольныя постоянныя, приводится къ квадратурѣ. Это предложеніе было доказано въ двухъ предыдущихъ главахъ для уравненій, которыя представлены въ видѣ разрѣшенныхъ относительно частныхъ производныхъ. Наша задача заключается теперь въ распространеніи на разсматриваемый случай полученныхъ выше результатовъ.

5. Возьмемъ систему m различныхъ уравненій въ инволюціи

$$\left.\begin{array}{l} F_k(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots m, \quad m < n. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Пусть функціи

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ i = 1, 2, \ldots 2n - 2m, \end{array}\right\} \tag{18}$$

совмѣстно со всѣми F_k представляютъ $2n-m$ различныхъ рѣшеній полной системы линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c}(F_k\,,\,f)=0\,,\\ k=1,\,2\,,\ldots m.\end{array}\right| \tag{19}$$

Докажемъ слѣдующія теоремы:

Пусть F — функція всѣхъ x, p и перемѣнной z. Уравненія

$$\left.\begin{array}{c}[F_k\,,\;F]=0\,,\\ k=1,\,2\,,\ldots m\,,\end{array}\right| \tag{20}$$

гдѣ скобки Вейлера распространены на всѣ x, p и z, имѣютъ кромѣ рѣшеній системы (19) еще одинъ интегралъ, который находится при помощи квадратуры.

Дѣйствительно, обобщенное Майеромъ тождество Якоби, для трехъ функцій F_g, F_h, F, даетъ

$$[F_g,\,[F_h,\,F]]-[F_h,\,[F_g,\,F]]=[(F_g,\;F_h),\;F]+\frac{\partial F}{\partial z}(F_g\,,\;F_h).$$

Такъ какъ уравненія (17) — въ инволюціи, то скобки $(F_g\,,\;F_h)$ уничтожаются тождественно, и предыдущія равенства, для всѣхъ различныхъ значеній g, h, показываютъ, что уравненія (20) образуютъ замкнутую систему. Предположимъ уравненія (17) разрѣшимыми относительно $p_1\,,\,p_2\,,\ldots p_m$, такъ что

$$\Delta=D\left(\frac{F_1\,,\,F_2\,,\ldots F_m}{p_1\,,\,p_2\,,\ldots p_m}\right)\gtrless 0.$$

Въ такомъ случаѣ система (20) приводится къ якобіевской рѣшеніемъ своихъ уравненій относительно частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1},\;\frac{\partial F}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

Соотвѣтствующая этой якобіевской система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ представляется въ видѣ *)

---

*) Ср. Аптаевъ, Математическій Сборникъ, т. XX, стр. 443.

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+\nu} &= \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{m} D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots\ F_k\ ,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots p_{m+\nu},\dots p_m}\right)dx_k\,, \\ dp_i &= -\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{m} D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots\ F_k\ ,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots\ \ x_i\ \ ,\dots p_m}\right)dx_k\,, \\ dz &= \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\Delta}\sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} D\left(\frac{F_1,\ F_2,\dots\ F_k\ ,\dots F_m}{p_1,\ p_2,\dots p_{m+\nu},\dots p_m}\right)+p_k\right]dx_k\,, \\ \nu &= 1,\ 2,\dots n-m\,,\ i=1,\ 2,\dots n. \end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Интегралами первыхъ $2n-m$ изъ этихъ уравненій являются всѣ рѣшенія системы (19)-ой. Такъ какъ, далѣе, коеффиціенты послѣдняго уравненія (21)-аго не зависятъ отъ z, то, по доказанному въ n^0 9 второй главы, послѣдній интегралъ разсматриваемой системы находится при помощи квадратуры *).

Пусть уравненія

$$z=\psi\ (x_1\,,\ x_2\,,\dots x_m\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\dots a_{n-m}\,,\ b\,,\ b_1\,,\dots b_{n-m})\,, \qquad (22)$$

$$p_i=\psi_i\ (x_1\,,\ x_2\,,\dots x_m\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\dots a_{n-m}\,,\ b\,,\ b_1\,,\dots b_{n-m})\,, \qquad (23)$$

$$x_{m+\nu}=\Theta_\nu(x_1\,,\ x_2\,,\dots x_m\,,\ a_1,\ a_2\,,\dots a_{n-m}\,,\ b\,,\ b_1\,,\dots b_{n-m})\,, \qquad (24)$$

$$\nu=1\,,\ 2\,,\dots n-m\,,\ i=1\,,\dots n$$

представляютъ рѣшеніе системы (21), при чемъ равенства (17) приняты за m различныхъ ея интегральныхъ уравненій. Если произвольныя постоянныя a_ν, b, b_ν — начальныя значенія перемѣнныхъ величинъ

$$x_{m+\nu}\,,\quad p_{m+\nu}\,,\quad z-\sum_{\nu=1}^{n-m} x_{m+\nu}p_{m+\nu}\,,$$

то полный интегралъ уравненій съ частными производными (17) есть результатъ исключенія изъ уравненія (22) значеній a_ν, опредѣленныхъ — (24)-ыми.

Назовемъ черезъ

$$V,\quad p_1,\quad p_2,\dots p_n$$

*) Cp. Goursat, Leçons sur l'intégration..., n⁰ 122, p. 305, n⁰ 111, p. 281.

полученныя значенія z и p въ функціяхъ всѣхъ x-овъ и b, b_ν. Эти значенія утождествляютъ уравненія (17) и разрѣшаютъ задачу ихъ интегрированія въ томъ случаѣ, когда имѣютъ мѣсто условія

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Легко доказать, какъ уже было показано въ пятой главѣ настоящаго сочиненія, что достаточно удождествить $n-m$ послѣднихъ изъ предыдущихъ равенствъ

$$p_{m+\nu} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+\nu}}, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots n-m, \tag{25}$$

чтобы выполнялись и m первыя. Дѣйствительно, существуютъ тождества

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_k} &= \frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_k} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} D\left(\frac{F_1,\ F_2, \cdots\ F_k, \cdots F_m}{p_1,\ p_2, \cdots p_{m+\nu}, \cdots p_m}\right) + p_k, \\ \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} &= \frac{1}{\Delta} D\left(\frac{F_1,\ F_2, \cdots\ F_k, \cdots F_m}{p_1,\ p_2, \cdots p_{m+\nu}, \cdots p_m}\right). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Отсюда слѣдуютъ новыя тождества

$$p_k - \frac{\partial V}{\partial x_k} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{n-m} D\left(\frac{F_1,\ F_2, \cdots\ F_k, \cdots F_m}{p_1,\ p_2, \cdots p_{m+\nu}, \cdots p_m}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+\nu}} - p_{m+\nu}\right),$$

которыя и доказываютъ наше предложеніе.

Въ той же пятой главѣ были выведены необходимыя и достаточныя условія существованія равенствъ (25), въ зависимости отъ значеній функцій

$$U_c.$$

Само собою разумѣется, что всѣ эти разсужденія остаются справедливыми также для разсматриваемаго случая, и только уравненія, опредѣляющія значенія функцій U, измѣняютъ свой видъ. Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ тождествъ (26) мы имѣемъ еще слѣдующія

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\Delta} D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots F_k, \ldots F_m}{p_1, p_2, \ldots x_i, \ldots p_m}\right)$$

для всѣхъ значеній i и k соотвѣтственно отъ 1 до n и 1 до m. Назовемъ миноръ опредѣлителя Δ, соотвѣтствующій элементу его j-ой строки и k-аго столбца, черезъ

$$\Delta_{jk},$$

разумѣя подъ этимъ обозначеніемъ также приписываемый разсматриваемому минору знакъ, такъ что

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m} \Delta_{jk} \frac{\partial F_j}{\partial p_k}.$$

Поэтому выраженіе производной

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k} - \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k}\right) + \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial c}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_k}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial c}\right)$$

становится

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial c} + \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{m} \Delta_{jk} \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_{m+\nu}}\frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial c} + \frac{\partial F_j}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial c}\right).$$

Въ силу производныхъ по C отъ уравненій (17), которыя удовлетворяются тождественно, послѣднее равенство принимаетъ видъ

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial c} - \frac{1}{\Delta}\sum_{g=1}^{m} \frac{\partial p_g}{\partial c} \sum_{j=1}^{m} \Delta_{jk} \frac{\partial F_j}{\partial p_g} = 0,$$

ибо, на основаніи свойствъ опредѣлителей, имѣютъ мѣсто тождества

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta_{jk} \frac{\partial F_j}{\partial p_g} = 0$$

для всѣхъ значеній g и k, удовлетворяющихъ условію

$$g \lessgtr k.$$

Такимъ образомъ получаются равенства

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ m\,.$$

Поэтому уравненіе (16) пятой главы замѣняется въ разсматриваемомъ случаѣ слѣдующимъ

$$U_c = U_c^0\,.$$

Итакъ, заключаемъ, что результатъ исключенія изъ уравненія (22) значеній a_ν, опредѣленныхъ — (24)-ыми, представляетъ полный интегралъ системы уравненій съ частными производными (17).

6. Возвращаемся къ уравненіямъ (16). Полный интегралъ ихъ опредѣляется при помощи квадратуры и является искомымъ полнымъ интеграломъ системы (1). Что касается функцій (8), то онѣ вычисляются при помощи μ операцій интегрированія порядковъ

$$\mu\,,\ \ \mu - 1\,,\ \ldots\ 2\,,\ \ 1\,.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ формулированію слѣдующей теоремы С. Ли:

Предположимъ извѣстными для системы (3)-ей l интеграловъ (4)-ыхъ. Если составленный изъ нихъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 0 & (\varphi_1\,, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1\,, \varphi_l) \\ (\varphi_2\,, \varphi_1) & 0 & \cdots & (\varphi_2\,, \varphi_l) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (\varphi_l\,, \varphi_1) & (\varphi_l\,, \varphi_2) & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

уничтожается вмѣстѣ со всѣми своими минорами отъ перваго до μ—1-аго порядка включительно, то разность $l-\mu$ представляется четнымъ числомъ, положимъ 2ϱ, и задача интегрированія уравненій съ частными производными (1) разрѣшается при помощи $n-m-\varrho$ операцій интегрированія порядковъ

$$\mu,\ \ \mu - 1\,,\ \ldots\ 2\,,\ \ 1\,,$$

$$2n - 2m - 2\mu - 2\varrho, \quad 2n - 2m - 2\mu - 2\varrho - 2,\ \ldots\ 4,\ 2$$

и одной квадратуры.

Въ частности число и порядокъ этихъ операцій могутъ быть уменьшены. Это случится, напримѣръ, всякій разъ, когда извѣстны нѣсколько интеграловъ для одной изъ системъ линейныхъ уравненій, опредѣляющихъ функціи (14).

7. Доказанное предложеніе С. Ли является однимъ изъ самыхъ замѣчательныхъ открытій его въ теоріи интегрированія уравненій съ частными производными. Въ VIII и XI-омъ томахъ „Mathematische Annalen" С. Ли прилагаетъ свои изслѣдованія къ примѣрамъ и къ задачѣ о трехъ тѣлахъ *). Въ 1880 году Майеръ посвятилъ цѣлый мемуаръ приложеніямъ приведенной теоремы С. Ли къ интегрированію уравненій механики **). Не останавливаясь на этихъ вопросахъ, разсмотримъ только задачу о *движеніи двухъ матеріальныхъ точекъ вокругъ одной неподвижной, при чемъ всѣ три точки притягиваются обратно пропорціонально квадратамъ разстояній.* Предложенная задача приводится къ интегрированію одного уравненія съ частными производными слѣдующаго вида

$$F(x_1, x_2, \cdots x_6, p_1, p_2, \cdots p_6) = C.$$

Соотвѣтствующее послѣднему линейное уравненіе

$$(F, f) = 0$$

имѣетъ три различныхъ интеграла

$$F_1, F_2, F_3,$$

которые даются *„началомъ сохраненія площадей"*. Эти интегралы удовлетворяютъ условіямъ

$$(F_1, F_2) = F_3, \ (F_2, F_3) = F_1, \ (F_3, F_1) = F_2.$$

Поэтому въ нашемъ случаѣ опредѣлитель Δ принимаетъ видъ

$$\begin{vmatrix} 0 & F_3 & -F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ F_2 & -F_1 & 0 \end{vmatrix}$$

*) Bd. VIII, S. 278, § 18; Bd. XI, S. 476, § 4.

**) Mathematische Annalen, Bd. XVII, S. 332.

и уничтожается тождественно, при чемъ миноры его перваго порядка отличны отъ нуля. Стало-быть, для разсматриваемой задачи

$$\mu = 1\,, \quad \varrho = 1\,.$$

Функція Φ_1 опредѣляется системой двухъ уравненій

$$(F_1, f) = \quad F_3 \frac{\partial f}{\partial F_2} - F_2 \frac{\partial f}{\partial F_3} = 0,$$

$$(F_2, f) = -F_3 \frac{\partial f}{\partial F_1} + F_1 \frac{\partial f}{\partial F_3} = 0\,,$$

и представляется слѣдующимъ образомъ

$$\Phi_1 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2\,.$$

Итакъ, изслѣдуемая задача разрѣшается при помощи трехъ операцій интегрированія порядковъ 6, 4, 2 и одной квадратуры.

Послѣднія вычисленія можно расположить слѣдующимъ образомъ, составляя систему трехъ уравненій въ инволюціи

$$F = C\,, \quad \Phi_1 = C_1\,, \quad F_1 = C_2\,,$$

гдѣ C_1, C_2 — двѣ произвольныя постоянныя. Разрѣшивъ написанныя уравненія относительно трехъ частныхъ производныхъ, мы придемъ къ интегрированію канонической системы шести уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Послѣдняя приводится, по Майеру, къ канонической системѣ шести обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (см. n^0 14 второй главы). Однако слѣдуетъ замѣтить, что значеніе функціи Φ_1 было указано еще Якоби *), независимо отъ изложенной теоріи интегрированія уравненій съ частными производными.

*) Jacobi, Gesamelte Werke, Bd. V, S. 153, n⁰ 64;
Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, t. I, p.p. 33—37.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*строка (сверху)*	*вмѣсто*	*должно быть.*
1	6	Уравненения	уравненія
2	6	случяй	случай
—	17	уравненій	уравненій
3	20	первого	перваго
—	28	дано	дана
6	15	возвращается	возвращаемся
7	10	имѣемъ	имѣетъ
8	24	Werhe	Werke
11	15	нейиыхъ	нейныхъ
—	26	Imschenentsky	Imschenetsky
19	10	ироизводныхъ	производныхъ
24	25	y_n	y_{n+1}
28	5	нихъ	указанныхъ
34	17	(20),	(20)
40	4	φ	φ
41	7	x_γ	x_k
—	19	приводся	приводятся
47	5	$\sum\limits_{\nu=1}^{n=m}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{n-m}$
48	19	вычисленія	вычисленія.
—	27	уравнсній	уравненій
—	32	Snpéricure	Supérieure
—	35	Legons	Leçons
49	25	вопросовъ	вопросахъ
50	—	Vorlesnugen	Vorlesungen
55	5	$\frac{dH_h}{\partial x_h}$	$\frac{dH_k}{dx_k}$
—	23	$\alpha_и$	α_n
61	23	заимствоваиъ	заимствованъ

Стр.	*строка (сверху)*	*вмѣсто*	*должно быть.*
63	5	проводится	приводится
74	7	вмѣстѣ	вмѣсто
75	14	случится	случиться
76	6	разсуждепіи	разсужденія
78	5	уровпеній	уравненій
79	23	$\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}$	$\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}$
80	13	dz	∂z
83	11	$\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+i}} - H_k$	$\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k$
85	5	$n+1$	$n-m+1$
87	19	2.	вычеркнуто
88	20	$\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}$	$\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}$
91	7	изъ	изъ выраженія V
—	10	p_i	p_{m+i}
92	2	∂H	∂H_k

Опечатки и исправленія въ сочиненіи Н. Н. Салтыкова

„Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи“.

Стр.	*Строка (сверху)*	*вмѣсто*	*должно быть*
VI	12	общаго интеграла	интеграла Коши
1	22	меньше $n+1$	меньше $n+1$ и q изъ уравненій (1), (2) разрѣшимы относительно q изъ постоянныхъ C.
3	12	которое не уто-ждествляетъ	результатъ исключенія которыхъ изъ интеграла и его производныхъ не представляетъ
4	3	Обратно,	Поэтому
—	7	уравненіе (6)	правыя части уравненія (6)
—	8	разрѣшаются	различны
5	7	тождественно	тождественно,
6	15	постоянными	постоянными,
8	25	сдучай	случай
10	7	данная	данныя общаго вида

На 18 страницѣ примѣчаніе должно быть дополнено словами: Въ трактатахъ о дифференціальныхъ уравненіяхъ обыкновенно ограничиваются доказательствомъ существованія ихъ общаго интеграла. Въ настоящемъ сочиненіи сверхъ того предполагается, что одновременно съ общими интегралами существуютъ также интегралы разсматриваемыхъ уравненій.

Стр.	*Строка (сверху)*	*вмѣсто*	*должно быть*
20	21	p	pk
21	1—2	разрѣшеніемъ ихъ относительно	разрѣшимыхъ относительно m
22	17	z_2	z
29	5	первые	первыя
39	1	$\varphi,$	φ
41	21	$m+1$	$m+r$
43	2	$\frac{d}{dx_k}$	$\frac{\partial}{\partial x_k}$
44	4	dH_1	∂H_1
—	13	$\frac{dH}{dp_{m+i}}$	$\frac{\partial H}{\partial p_{m+i}}$
47	9	$\frac{\partial x_\sigma}{\partial x_s}$	$\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_s}$
48	16	тождественно	тождественно,
—	22	*	**
—	29	**	***
50	8	E_α	F_α
51	6	$p_{\mu+\lambda}$	$p'_{\mu+\lambda}$
63	3	должиа	должна
67	11	d	∂
69	25	∂	d
73	24	системѣ	системы

На 80, 81, 84, 119 страницахъ всѣ обозначенія c, C должны быть замѣнены однимъ обозначеніемъ C.

80	14	r	r
103	7	Въ самомъ дѣлѣ	Въ самомъ дѣлѣ,

150-00

2018