Уравнение (10) равносильно алгебраическому уравнению четвертой степени относительно λ :

$$(Z_1-\lambda)\{(Z_2-\lambda)\left[(Z_3-\lambda)(Z_4-\lambda)-\gamma_{34}\gamma_{43}N_3^*N_4^*\right]-$$
$$-\gamma_{23}N_2^*\left[\gamma_{32}N_3^*(Z_4-\lambda)-\gamma_{42}\gamma_{34}N_3^*N_4^*\right]+ \qquad (11)$$
$$+\gamma_{24}N_2^*\left[\gamma_{32}\gamma_{43}N_3^*N_4^*-\gamma_{42}N_4^*(Z_3-\lambda)\right]\}=0.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = Z_1$, а остальные три собственных числа находятся из решения кубического уравнения. Сразу же можно сделать вывод, что в случае кооперационных взаимодействий первого объекта со вторым $(\gamma_{12} > 0)$, третьим $(\gamma_{13} > 0)$, и четвертым $(\gamma_{14} > 0)$, рассматриваемая двенадцатая особая точка является неустойчивой, так как в этом случае $\lambda_1 = Z_1 > 0$. Из-за громоздкости вычислений дальнейший анализ устойчивости рассматриваемой особой точки является затруднительным. Он также требует предварительно определить область параметров модели в которой координаты (9) рассматриваемой особой точки имеют положительные значения. Отметим, что аналогичным образом строится характеристическое уравнение для особых точек 13 – 15.

Дальнейшее развитие данной модели мы видим в ее содержательной конкретизации и определении параметров модели. В этом случае будут эффективны численные эксперименты с этой моделью. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. МОСКОВКИН В. М., ЖУРАВКА А. В. МАТЕМАТИЧЕСКОЕМОДЕЛИРОВАНИЕКОНКУРЕНТНО-КООПЕРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ // ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА.– 2001.– № 3-4.

Материал предоставлен 15.11.2001 г.

АНАТОЛИЙ ВОРОНИН
СЕРГЕЙ ЕВТУШЕНКО
ВЛАДИМИР МОСКОВКИН
СТАНИСЛАВ ЭЛЛИС

ХАРЬКОВ
КИЕВ

УДК 330.42

БИФУРКАЦИИ В МОДЕЛИ ВАЛЬРАСА – МАРШАЛЛА

В работе [1] представлена математическая модель экономической системы, в основу построения которой приняты постулаты Вальраса и Маршалла о взаимодействии цены товара и его количества на рынке при условии избыточного спроса. Следуя Вальрасу, предполагается, что цена увеличивается (уменьшается), если избыточный спрос положительный (отрицательный). Согласно Маршаллу, количество товарной продукции имеет тенденцию к увеличению (уменьшению), если цена спроса товара выше (ниже) цены предложения.

Данные предположения позволяют записать следующую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений [1,2]:

$$\begin{cases}\overline{p} = c\left[D(p)-q\right],\\ \overline{q} = k\left[P-P_s(q)\right],\end{cases} \qquad (1)$$

где $p(t)$ — цена товара; $q(t)$ — количество продукции; t — время; $D(p)$ – функция спроса; $p_s(q)$— цена предложения товара на рынке; c, k – соответствующие постоянные времени для каждого уравнения*.

В работе [2] рассматривались следующие функции спроса и цены предложения товара:

$$D(p)=(-1+\varepsilon)p,\ 0<\varepsilon<1;$$

$$p_s(q)=\delta q^3-q,\ \delta>0,$$

при этом параметры c и k брались равными единице. В этих предположениях в работе [1] в качестве упражнения предлагается доказать наличие единственной особой (равновесной) точки, которая является неустойчивым фокусом, а также с помощью теорем Пуанкаре – Бендиксона и Немыцкого (в качестве альтернативного доказательства) — доказать наличие предельного устойчивого цикла:

$$p^2+q^2=\rho^2 \text{ при } \rho^2>\rho_c=\frac{1}{4}\cdot\frac{5-4\varepsilon}{\delta(1-\varepsilon)}.$$

В данной работе мы рассмотрим более детально эту модель без учета ограничений на коэффициент эластичности спроса: $\dfrac{dD(p)}{dp}=-a$, где a – любое положительное действительное число, и на параметры c и k. Для этого исследуем поведение динамической системы (1) вблизи нулевого положения равновесия: $p^*=0$, $q^*=0$, введя новые переменные: $x_1=p$, $x_2=q$, $\tau=ct$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases}\overline{x_1}=-ax_1-x_2\\ \overline{x_2}=\gamma x_1+\gamma x_2-\gamma\delta x_2^3,\end{cases} \qquad (2)$$

где $\gamma=k/c$.

Проанализируем спектральные свойства линейной части системы (2). Матрица линеаризированной системы обладает характеристическим полиномом:

$$\lambda^2+(a-\gamma)\lambda+\gamma(1-a)=0. \qquad (3)$$

Рассмотрим подробно ситуацию, когда собственные числа, то есть корни уравнения (3), близки к нулю. Такое положение возможно при одновременном стремлении параметров a и γ либо к нулю, либо к единице. При значениях a и γ близких к нулю происходит трансформация системы (2) из динамической в статическую, поэтому наше исследование будет направлено на детальный анализ ситуации, в которой значения a и γ близки к единице.

Введем два малых параметра $\mu_1=a-1$ и $\mu_2=\gamma-1$. Тогда уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\gamma^2+(\mu_1-\mu_2)\gamma-\mu_1=0. \qquad (4)$$

В уравнении (4) не учитываются слагаемые, содержащие малые величины порядка выше первого. Выразим параметры a и γ в терминах малых парамет-

*Черточка над переменными в левых частях динамических систем здесь и далее означают дифференцирование по времени.

ров μ_1 и μ_2 и подставим их в соответствующие уравнения системы (2).

Получим следующее представление системы:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -(1-\mu)x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = (1+\mu_2)x_1 + (1+\mu_2)x_2 - (1+\mu_2)\delta x_2^3. \end{cases} \tag{5}$$

Для дальнейшего анализа качественных свойств динамической системы (5) необходимо выполнить ряд преобразований фазовых переменных с целью построения нормальной формы Пуанкаре для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем новые переменные: $u_1 = x_1$, $u_2 = -(1+\mu_1)x_1 - x_2$. Тогда (5) запишется так:

$$\begin{cases} \dot{u_1} = u_2 \\ \dot{u_2} = q_1u_1 + q_2u_2 + \alpha_{30}u_1^3 + \\ + \alpha_{21}u_1^2u_2 + \alpha_{12}u_1u_2^2 + \alpha_{03}u_2^3, \end{cases} \tag{6}$$

где
$$\begin{aligned} q_1 &= \mu_1 \\ q_2 &= \mu_2 - \mu_1 \\ \alpha_{30} &= -\delta(1+3\mu_1+\mu_2) \\ \alpha_{21} &= -3\delta(1+2\mu_1+\mu_2) \\ \alpha_{12} &= -3\delta(1+\mu_1+\mu_2) \\ \alpha_{03} &= -\delta(1+\mu_2). \end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы выполнить нелинейную редукцию системы (6) с помощью новых переменных:

$$u_1 = v_1 + \frac{\alpha_{12}}{6}v_1^3 + \frac{\alpha_{03}}{2}v_1^2v_2$$

$$u_2 = v_2 + \frac{\alpha_{12}}{2}v_1^2v_2 + \alpha_{03}v_1v_2^2.$$

В результате преобразований система (1) получит представление в виде нормальной формы Пуанкаре:

$$\begin{cases} \dot{v_1} = v_2 \\ \dot{v_2} = q_1v_1 + q_2v_2 + \alpha_{30}(0)v_1^3 + \alpha_{21}(0)v_1^2v_2, \end{cases} \tag{7}$$

где
$$\begin{aligned} \alpha_{30}(0) &= -\delta \\ \alpha_{12}(0) &= -3\delta. \end{aligned}$$

Выполним еще одно шкалирование переменных:

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{12}(0)}{\alpha_{30}(0)}\sqrt{-\alpha_{30}(0)} * v_1$$

$$\xi_2 = \left(\frac{\alpha_{21}(0)}{\alpha_{30}(0)}\right)^2 \sqrt{-\alpha_{30}(0)} * v_2$$

$$\Theta = \frac{\alpha_{21}(0)}{\alpha_{30}(0)} * \tau.$$

Имеем для системы (7):

$$\begin{cases} \dot{\xi_1} = \xi_2 \\ \dot{\xi_2} = p_1\xi_1 + p_2\xi_2 - \xi_1^3 - \xi_1^2\xi_2, \end{cases} \tag{8}$$

где
$$p_1 = \left(\frac{\alpha_{21}(0)}{\alpha_{30}(0)}\right)^2 q_1$$

$$p_2 = \frac{\alpha_{21}(0)}{\alpha_{30}(0)}q_2.$$

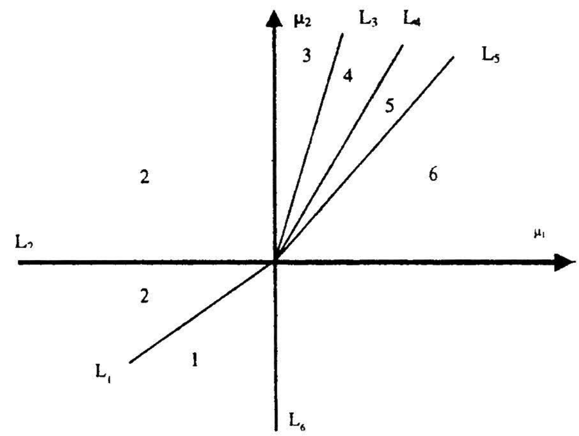
Очевидна связь между малыми параметрами p_1, p_2 и μ_1, μ_2:

$$\begin{aligned} p_1 &= 9\mu_1 \\ p_2 &= 3(\mu_2 - \mu_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, система (8) является нормальной формой Пуанкаре для исходной динамической системы (1) и имеет $E_0(0,0)$ — тривиальное равновесие, существующее при любых значениях μ_1 и

$E_{1,2} = \left(\pm 3\sqrt{\mu_1}, 0\right)$ — нетривиальные положения равновесия, существующие при $\mu_1 > 0$. Следует отметить, что (8) обладает симметрией, то есть инвариантна относительно замены переменных ξ_1 на $-\xi_1$ и ξ_2 на $-\xi_2$.

Используя результаты, приведенные в [3], построим бифуркационную диаграмму на плоскости параметров μ_1 и μ_2 и исследуем ее структуру:



В секторе 1 имеется единственное положение равновесия E_0, являющееся устойчивой особой точкой (узел или фокус). На полупрямой $L_1 = \{(\mu_1,\mu_2) : \mu_2 = \mu_1, \mu_1 < 0\}$ происходит невырожденная бифуркация Хопфа, и точка E_0 теряет устойчивость. Рождающийся при этом предельный цикл является устойчивым и имеет частоту автоколебаний $w_1 = 3\sqrt{-\mu_1}(\mu_1 < 0)$. При переходе из сектора 2 в сектор 3 через верхнюю полупрямую $L_2 = \{(\mu_1,\mu_2) : \mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$ от тривиального равновесия E_0 отделяются два неустойчивых узла $E_{1,2}$, далее переходящие в фокусы. Полупрямая L_2 называется линией изгибной бифуркации. В секторе 3 все три положения равновесия существуют и локализованы внутри так называемого «большого» предельного цикла.

На полупрямой $L_3 = \{(\mu_1,\mu_2) : \mu_1 = 4\mu_1, \mu_2 > 0\}$ нетривиальные фокусы $E_{1,2}$ претерпевают бифуркацию Хопфа. В результате особые точки E_1 и E_2 становятся устойчивыми и их окружают два «малых» орбитально неустойчивых предельных цикла с частотами $w_2 = 3\sqrt{2\mu_1}(\mu_1 > 0)$. В секторе 4 сосуществуют три предельных цикла — один «большой» и два «малых». Вдоль линии $L_4 = \left\{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = \frac{17}{5}\mu_1, \mu_2 > 0\right\}$ «малые» циклы преобразуются в симметричную фигуру — «восьмерку». Полупрямая L_4 называется линией глобальной бифуркации, вдоль которой седло E_0 имеет две гомоклинические орбиты. При пересечении линии L_4 и сектора 4 в сектор 5 происходит не только разрушение «малых» циклов, но и появление внешнего неустойчивого «большого» предельного цикла. Таким образом, в секторе 5 имеют место два «больших» предельных цикла — устойчивый и неустойчивый. Затем эти два цикла сливаются и исчезают вдоль линии

$$L_5 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = (3k_0 + 1)\mu_1, \mu_1 > 0, k_0 = 0{,}752\}$$

Происходит седло-узловая бифуркация предельного цикла. В секторе 6 уже нет предельных циклов и имеются тривиальная седловая точка E_0 и два нетривиальных фокуса (узла) E_1 и E_2. Далее при пересечении полупрямой $L_6 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0, \mu_2 < 0\}$ нетривиального равновесия E_1, E_2 сливаются с E_0, и мы возвращаемся в сектор 1.

В результате проведенного исследования следует обратить внимание на факт существования в экономической динамической системе (1) циклических процессов малой частоты (сверхдлинных волн), рождающихся при близости постоянных времени c и k ($\gamma \approx 1$) и приближении абсолютного значения эластичности спроса к единице ($a \approx 1$). При этом значения периодов наблюдаемых колебаний пропорциональны величине $|a-1|^{-\frac{1}{2}}$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. GANDOLFO, G., 1996, ECONOMIC DYNAMICS,BERLIN AND NEW-YORK,SPRINGER-VERLAG.

2. BECKMANN, M. J. AND RYDER, H. E., 1969,SIMULTANEOUS PRICE AND QUANTITY ADJUSTMENT IN A SINGLE MARKET, ECONOMETRICA 37, 470-484.

3. KUZNETSOV, YA. A., 1994,ELEMENTS OF APPLIED BIFURCATION THEORY, BERLIN AND NEW-YORK, SPRINGER-VERLAG.

ОЛЬГА НОСОВА

ХАРЬКОВ

УДК 330.322.011

ИНСТИТУТ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ В УКРАИНЕ

Приток иностранного капитала в страну связан с увеличением инвестиционной привлекательности экономики страны, снижением возможных рисков, связанных с инвестиционной деятельностью. Международная конкуренция за получение доступа к источникам и рынкам мировых капиталов непосредственно основывается на использовании преимуществ международного движения капитала. Инвестиционная привлекательность страны является определяющим фактором, влияющим на движение капитала.

После распада Советского Союза инвестиционная привлекательность Украины была выше и значительно снизилась в настоящее время. В период провозглашения независимости Украины в 1991 г. первоначальные прогнозы западных экспертов о перспективах экономического развития были многообещающими. Однако незначительная доля иностранного капитала в экономике страны и невысокий уровень отдачи от инвестиций в современных условиях не дали желаемых результатов. Потенциальные инвестиционные преимущества, которые имела Украина на начальном этапе проведения трансформационных преобразований, реализованы не были. Следует отметить, что при относительно низкой стоимости рабочей силы произошло снижение ее квалификации по сравнению с другими восточноевропейскими странами. Избыток квалифицированных рабочих перестал быть фактором привлекательности вложений капитала иностранными инвесторами в страну.

ИНСТИТУТ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ ВКЛЮЧАЕТ ИНВЕСТИЦИОННУЮ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТЬ, ФАКТОРЫ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ, А ТАКЖЕ ОРГАНИЗАЦИИ (УЧРЕЖДЕНИЯ), СТРУКТУРИРУЮЩИЕ И УПРОЩАЮЩИЕ ПРОЦЕДУРУ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ОЦЕНКИ НА МИКРО- И МАКРОУРОВНЯХ

Институциональные ресурсы характеризуют потенциальные возможности функционирования правовых, экономических и технологических институтов. Эффективное применение указанных ресурсов оказывает влияние на инвестиционную привлекательность стран. Существует взаимосвязь между ограниченным использованием институциональных ресурсов и экономической ценностью от их применения. Чем более высокой ценностью обладают институциональные ресурсы, тем ограниченнее возможности экономических субъектов в получении ренты от использования государственных институтов в частных интересах.

В связи с тем, что инвестиционная привлекатель ность носит субъективный характер и недостаточ но точно отражает происходящие в экономике процессы, введем в научный оборот новую категорию *«институт инвестиционной привлекательности»*, под которой будем понимать совокупность норм и правил инвестиционной деятельности, а также учреждения, организующие, оценивающие инвестиционные условия и определяющие выгодность инвестирования. Институт инвестиционной привлекательности включает инвестиционную привлекательность, факторы привлекательности, а также организации (учреждения), структурирующие и упрощающие процедуру инвестиционной оценки на микро- и макроуровнях. В зависимости от степени соблюдения инвестиционного законодательства, выгодности инвестирования, величины риска, институциональных ресурсов инвестиционная привлекательность как составная часть института инвестиционной привлекательности может иметь разный уровень градации от высокой до низкой, а также выступать в активной или пассивной формах. Международные организации, государственные и негосударственные организации, учреждения, фонды (МВФ, ЕБРР, торговые палаты государств)