ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2019, том 55, № 8, с.1103–1110

УДК 517.983.23

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ-СТРУВЕ

А.В. Глушак

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрены граничные задачи Дирихле и Неймана для гиперболического уравнения Бесселя-Струве, которые, вообще говоря, относятся к классу некорректных задач. Установлены достаточные условия их однозначной разрешимости, налагаемые на операторный коэффициент уравнения и граничные элементы.

Пусть $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E с плотной в нем областью определения $D(A)$. При $k > 0$ рассмотрим уравнение Бесселя-Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t}\left(u'(t) - u'(0)\right) = Au(t). \tag{1}$$

В работе [1] приводится обзор публикаций, относящихся к уравнению (1), и описан класс G_k операторов A, с которым при $t > 0$ установлена равномерная корректность задачи Коши для этого уравнения с условиями

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = p, \quad u_0,\ p \in D(A). \tag{2}$$

Класс $G_k,\ k > 0$ представляет собой множество операторов, которые являются генераторами проинтегрированной косинус оператор-функции (ПКОФ) $C_{k/2}(t)$ (определение ПКОФ см., например, в [1] – [4]), G_0 — множество генераторов косинус оператор-функции (КОФ) $C(t)$.

Граничные же задачи для уравнения (1) при $A \in G_k$ (гиперболический случай), вообще говоря, не являются корректными, но необходимость решать некорректные задачи в настоящее время является общепризнанной (см. введение в [5], [6], [7] и имеющуюся в них обширную библиографию). Во второй главе монографии [5] исследована корректность общих краевых задач для дифференциально-операторного уравнения первого порядка и для абстрактного волнового уравнения (случай $k = 0$ в уравнении (1)).

Многие некорректные задачи для дифференциально-операторных уравнений могут быть сведены к операторным уравнениям первого рода $Bx = y,\ x, y \in E$ и основная трудность состоит в установлении их разрешимости. В настоящей работе именно при $A \in G_k$ в гиперболическом случае удается решить операторное уравнение первого рода и установить условия корректности граничных задач Дирихле и Неймана для уравнения Бесселя-Струве (1).

1. Задача Дирихле. Будем искать решение $u(t) \in C^2([0,1], E) \cap C((0,1], D(A))$ уравнения (1) при $t \in [0,1]$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \tag{3}$$

Как уже было отмечено, задача (1), (3), вообще говоря, не является корректной. Мы установим условия, налагаемые на оператор $A \in G_k$ и элементы $u_0,\ u_1 \in E$, обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Пусть $A \in G_k$. Из результатов работы [1] следует, что корректная постановка начальных условий для уравнения Бесселя-Струве (1) состоит в задании в точке $t = 0$ начальных значений (2), при этом единственное решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)p, \quad u_0,\ p \in D(A), \tag{4}$$

где операторная функция Бесселя (ОФБ) $Y_k(t)$ и операторная функция Струве (ОФС) $L_k(t)$ определены соответственно равенствами

$$Y_k(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\ t^\alpha} \left(C_\alpha(t) - \int\limits_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau)\ d\tau \right), \tag{5}$$

$$L_k(t) = \frac{2^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha-1}} \int\limits_0^1 P_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau)\ d\tau, \tag{6}$$

$\alpha = k/2$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $P_{\alpha-1}(\cdot)$ — сферическая функция Лежандра ([8], с. 205), $C_\alpha(t)$ — ПКОФ.

Задача Дирихле (1), (3) может быть переформулирована как обратная задача нахождения функции $u(t)$ и входящего в уравнение элемента $p \in D(A)$, одновременно являющимся вторым начальным условием в (2), из уравнения

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t) + \frac{k}{t} p \tag{7}$$

по начальному и финальному условиям из равенства (3). Подробный обзор работ по различным обратным задачам можно найти в [9].

При $k = 0$ задача (7), (3) превращается в задачу Дирихле для абстрактного волнового уравнения

$$u''(t) = Au(t), \tag{8}$$

исследованную в работе [10]. Как установлено в этой работе, если $A \in G_0,\ u_0, u_1 \in D(A)$, множество чисел

$$\xi_j = -\pi^2 j^2, \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и для любого $x \in E$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=-m}^{m} R(\xi_j^2) x \right), \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=-m}^{m} AR^2(\xi_j^2) x \right), \tag{10}$$

где $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, то задача Дирихле (8), (3) имеет единственное решение.

Возвращаясь к рассматриваемой нами задаче (7), (3), отметим, что, учитывая представление (4), нам следует определить элемент $p \in D(A)$ из уравнения

$$L_k(1)p = u_2, \tag{11}$$

где $u_2 = u_1 - Y_k(1)u_0$.

Еще один частный случай уравнения (11) при $k = 2$ встречался ранее в работе [11] при решении обратной задачи

$$w''(t) = Aw(t) + q, \tag{12}$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = q, \quad w(1) = w_1, \quad w_0, q, w_1 \in D(A). \tag{13}$$

ОФС $L_2(t)$ при $k = 2$ выражается через ПКОФ $C_2(t)$ из равенства $2C_2(t) = tL_2(t)$ (см. [1]) и уравнение (11) имеет вид

$$2C_2(1)p = u_2. \tag{14}$$

Как доказано в [11], если $A \in G_0$, множество чисел

$$\eta_j = -4\pi^2 j^2, \quad j = 1, 2, ... \tag{15}$$

принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и для любого $x \in E$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} R(\eta_j^2)x\right), \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} AR^2(\eta_j^2)x\right), \tag{16}$$

то уравнение (14) и обратная задача (12), (13) имеют единственное решение $(p, v(t))$.

Отметим, что в указанных частных случаях $k = 0$ и $k = 2$ использована суммируемость по Чезаро рядов, входящих в равенства (10), (16), что было возможным в силу того, что оператор A являлся генератором КОФ $C(t)$, $A \in G_0$. В общем случае $A \in G_k$, $k > 0$ ситуация, естественно, усложняется при этом важную роль при решении граничных задач будет играть ОФС $L_k(t)$, ее представление через резольвенту $R(\lambda)$ оператора A и распределение нулей некоторой целой функции $\chi_k(\lambda)$.

Для получения нужного представления, воспользуемся формулой связи (см. [1]) функций ОФС $L_k(t)$ и ОФБ $Y_{k+1}(t)$

$$L_k(t)x = \int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} Y_{k+1}(\xi)x \, d\xi, \quad x \in E, \tag{17}$$

и выражением (см. [12]) ОФБ $Y_{k+1}(t)$ через резольвенту

$$Y_{k+1}(t)x = \frac{2^{k/2}\Gamma(k/2+1)}{i\pi \; t^{k/2}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda^{1-k/2} I_{k/2}(t\lambda) R(\lambda^2)x \, d\lambda, \quad \sigma > \omega, \quad x \in E, \tag{18}$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, λ^2 при $\mathrm{Re}\lambda > \omega \geq 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Подставляя выражение (18) в (17), после элементарных преобразований получим

$$L_k(t)x = \int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} \frac{2^{k/2}\Gamma(k/2+1)}{i\pi \; \xi^{k/2}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda^{1-k/2} I_{k/2}(\xi\lambda) R(\lambda^2)x \, d\lambda d\xi =$$

$$= \frac{2^{k/2}\Gamma(k/2+1)}{i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda^{1-k/2} R(\lambda^2)x \int_0^t \frac{\xi^{1-k/2}}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} I_{k/2}(\xi\lambda) \, d\xi d\lambda =$$

$$= \frac{t}{i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda \; {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, \frac{k}{2} + 1; \frac{t^2\lambda^2}{4}\right) R(\lambda^2)x \, d\lambda =$$

$$= \frac{2^{k/2-1/2}\Gamma(k/2+1)}{i\sqrt{\pi}\ t^{k/2-1/2}} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{1/2-k/2}\mathbf{L}_{k/2-1/2}(t\lambda)R(\lambda^2)x\ d\lambda, \tag{19}$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ — гипергеометрическая функция, а $\mathbf{L}_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Струве ([13], с. 655), при этом были использованы интеграл 2.15.2.5 [14] и представление гипергеометрической функции 7.14.1.11 [13].

Учитывая представление (19), операторное уравнение (11) для нахождения элемента $p \in D(A)$ перепишем в виде

$$Bp \equiv \frac{2^{k/2-1/2}\Gamma(k/2+1)}{i\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{1/2-k/2}\mathbf{L}_{k/2-1/2}(\xi)R(\xi^2)p\ d\xi = u_2. \tag{20}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1), (3) сводится к задаче о существовании у заданного левой частью уравнения (20) и продолженного по непрерывности на E ограниченного оператора $B : D(A) \to E$ обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из $D(A)$. Важную роль при этом будет играть целая функция

$$\chi_k(\lambda) = \frac{2^{k/2-1/2}\sqrt{\pi}\ \Gamma(k/2+1)}{\lambda^{k/4+1/4}}\ \mathbf{L}_{k/2-1/2}\left(\sqrt{\lambda}\right), \tag{21}$$

используя которую, уравнение (20) запишем в виде

$$Bp \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\ \chi_k(\xi^2)\ R(\xi^2)p\ d\xi = u_2. \tag{22}$$

Для установления разрешимости уравнения (22) на резольвенту оператора A наложим дополнительное условие.

Условие 1. Каждый нуль $\mu_j,\ j = 1, 2, ...$ определяемой равенством (21) целой функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ и существует такое $d > 0$, что

$$\sup_{j=1,2,...} \|R(\mu_j)\| \leq d.$$

Отметим, что в общем случае для $k > 0$ распределение нулей μ_j функции $\chi_k(\lambda)$ нам не известно, но в частных случаях при $k = 0$ и $k = 2$, нули μ_j вычисляются явно и они ранее нами приведены в равенствах (9), (15). В указанных частных случаях соответственно имеем:

$$\chi_0(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mu_j = -\pi^2 j^2, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$\chi_2(\lambda) = \frac{2\left(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - 1\right)}{\lambda}, \quad \mu_j = -4\pi^2 j^2, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль $\mu_j,\ j = 1, 2, ...$ функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $\dfrac{1}{d}$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой

$\mathrm{Re}\ z = \sigma_0 > \omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении $w = z^2$ $(z \in \Upsilon_0,\ w \in \Upsilon_0^2)$, и $\Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup\limits_{j=1,2,\ldots} \gamma_j$.

Возьмём $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\mathrm{Re}\ \lambda_0 > \sigma > \sigma_0$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$n > \frac{1}{4}\left(k + 7 - \max\{3-k, 1\}\right). \tag{23}$$

Введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi} \frac{R\,(z)\,v\ dz}{\chi_k(z)(z-\lambda_0)^n}, \quad H : E \to E. \tag{24}$$

Покажем, что интеграл в (24) при выполнении некоторых условий абсолютно сходится.

Действительно, в силу выбора контура Υ_0^2, неравенства (см. [12])

$$\|\lambda^{1-k/2}R(\lambda^2)\| \le \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{k/2+1}}, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega$$

и асимптотического поведения функций Струве $\mathbf{L}_\nu(\cdot)$ и Бесселя $I_\nu(\cdot)$, $K_\nu(\cdot)$ при $z \to \infty$, $|\arg\,z| < \pi/2$

$$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{\pi i/2}I_\nu(z) + \frac{2i}{\pi}e^{-\nu\pi i}K_\nu(z) + O(z^{\nu-1}),$$

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 + O(z^{-1})\right), \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\ e^{-z}\left(1 + O(z^{-1})\right)$$

интеграл

$$\int\limits_{\Upsilon_0^2} \frac{R\,(z)\ dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n} = \frac{2^{(3-k)/2}}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(k/2+1)}\int\limits_{\Upsilon_0} \frac{\lambda^{(k+3)/2}\ R\,(\lambda^2)\ d\lambda}{\mathbf{L}_{(k-1)/2}(\lambda)\ (\lambda^2-\lambda_0)^n}$$

абсолютно сходится, поскольку, как следует из ограничения (23), справедливо неравенство $2n > 1/2\ \ (k + 7 - \max\{3-k, 1\})$, обеспечивающее его абсолютную сходимость.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\limits_{j=1,2,\ldots}\gamma_j} \frac{R\,(z)\ dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n}. \tag{25}$$

по оставшейся части контура Ξ. Как уже было отмечено, в общем случае асимптотика нулей μ_j функции $\chi_k(\lambda)$ нам не известна, поэтому абсолютную сходимость интеграла (25) мы, наряду с условием 1, обеспечим следующим предположением.

Условие 2. При некотором n, удовлетворяющем неравенству (23), ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j} \frac{R\,(z)\ dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n}$$

абсолютно сходится.

Заметим, что в частных случаях $k = 0$ и $k = 2$ в качестве n в неравенстве (23) и условии 2 можно взять $n = 3$.

Теорема 1. *Пусть $A \in G_k$, $n \in \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство (23) и справедливы условия 1, 2. Если $u_0, u_1 \in D(A^{n+1})$, то задача (1), (3) имеет единственное решение.*

Доказательство. Как мы уже выяснили, доказательство существования единственного решения задачи (1), (3) сводится к существованию обратного у ограниченного оператора B, определяемого равенством (22). Покажем, что оператор B имеет обратный оператор $B^{-1} : D\left(A^n\right) \to E$.

Пусть $v \in D\left(A\right)$, $\sigma_0 < \sigma < \mathrm{Re}\lambda$. Тогда, применяя определяемый равенством (24) оператор H к Bv и учитывая тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2) = \frac{R(z) - R(\xi^2)}{\xi^2 - z},$$

получим равенство

$$HBv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R\left(z\right)}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\ \chi_k(\xi^2)\ R(\xi^2)v\ d\xi =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi\chi_k(\xi^2)\ R(z)v}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)} - \frac{\xi\chi_k(\xi^2)\ R(\xi^2)v}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)}\right)\ d\xi dz. \tag{26}$$

Интеграл в (26) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HBv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi\chi_k(\xi^2)\ R(z)v\ d\xi dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)} -$$

$$-\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_k(\xi^2)\ R(\xi^2)v\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)}\ d\xi. \tag{27}$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup\limits_{j=1,2,\ldots}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (27) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (27), используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HBv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon}\frac{\xi\chi_k(\xi^2)\ R(z)v\ d\xi dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\xi^2-z)} = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon^2}\frac{\chi_k(\lambda)\ R(z)v\ d\lambda dz}{\chi_k(z)\ (z-\lambda_0)^n\ (\lambda-z)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)v\ dz}{(z-\lambda_0)^n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)v\ dz}{(z-\lambda_0)^n} = \frac{-1}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda_0)v = (-1)^n R^n(\lambda_0)v.$$

Коммутирующие операторы $H,\ B,\ R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $HBv = (-1)^n R^n(\lambda_0)v$ справедливо и для $v \in E$, и при этом $HB : E \to D\left(A^n\right)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}v = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n Hv$ при $v \in D\left(A^n\right)$ является обратным по отношению к B, $B^{-1} : D\left(A^n\right) \to E$. Действительно,

$$BB^{-1}v = (-1)^n B(\lambda_0 I - A)^n Hv = (-1)^n BH(\lambda_0 I - A)^n v = R^n(\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^n v = v, \quad v \in D\left(A^n\right),$$

$$B^{-1}Bv = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n HBv = (\lambda_0 I - A)^n R^n(\lambda_0)v = v, \quad v \in E.$$

Возвращаясь к задаче (1), (3), определим принадлежащий $D(A)$ начальный элемент $p = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n H u_2$, где $u_2 = u_1 - Y_k(1)u_0,\ u_2 \in D\left(A^{n+1}\right)$, оператор H задан равенством (24), $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\mathrm{Re}\lambda_0 > \sigma_0 > \omega$. Тогда единственное решение $u(t)$ задачи (1), (3) имеет вид (см. представление (4)) $u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)p$, где ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $C_k(t)$ определены соответственно равенствами (5), (6). Теорема доказана.

2. Задача Неймана. Рассмотрим еще один случай регулярных граничных условий для гиперболического уравнения (1), а именно: задачу Неймана

$$u'(0) = v_0, \quad u'(1) = v_1. \tag{28}$$

Критерий корректной разрешимости задачи Неймана для уравнения (8) (уравнение (1) при $k = 0$) в эллиптическом случае (в частности, когда оператор $-A \in G_0$) получен ранее в [15], [16]. В этих работах установлено, что для корректной разрешимости задачи Неймана необходимо и существование ограниченного оператора A^{-1}, что мы также будем предполагать при исследовании задачи (1), (28).

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $(Y_k(t)u_0)' = Y_k'(t)u_0$ и следующие формулы (см. [1]) для дифференцирования

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0, \quad L_k'(t)v_0 = \frac{t}{k+2}L_{k+2}(t)Av_0 + v_0.$$

Учитывая представление (4) и условия (28), нам предстоит определить неизвестный элемент $u_0 \in D(A)$ из уравнения

$$Y_k'(1)u_0 + L_k'(1)v_0 = \frac{1}{k+1}Y_{k+2}(1)Au_0 + \frac{1}{k+2}L_{k+2}(1)Av_0 + v_0 = v_1,$$

которое мы перепишем в виде

$$Y_{k+2}(1)Au_0 = v_2, \tag{29}$$

где

$$v_2 = (k+1)(v_1 - v_0) - \frac{k+1}{k+2}L_{k+2}(1)Av_0.$$

Утверждение о разрешимости уравнения (29) относительно Au_0 при выполнении ряда условий содержится в теореме 3 работы [17]. Мы сформулируем эти условия применительно к рассматриваемой задаче Неймана, потребовав при этом существование обратного оператора A^{-1} и используя для Ξ, λ_0 обозначения из теоремы 1.

Условие 3. Число $\theta_0 = 0$ и каждый нуль $\theta_j,\ j = 1, 2, ...$ функции

$$\psi_k(\lambda) = 2^{k/2+1/2}\Gamma(k/2+1/2)\ \lambda^{-(k+1)/4}\ I_{k/2+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\right)$$

принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ и существует такое $d > 0$, что

$$\sup_{j=0,1,2,...} \|R(\theta_j)\| \le d.$$

Условие 4. Пусть $v_0 \in D(A^{n+2}),\ v_1 \in D(A^{n+1})$, где $n \in \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $2n > \max\{k+2, k/2+3\}$.

Теорема 2. Пусть $A \in G_k$ и выполнены условия 3, 4. Тогда задача (1), (28) однозначно разрешима и решение имеет вид $u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)v_0$, где

$$u_0 = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{A^{-1}(\lambda_0 I - A)^n\ R(z)\, v_2\ dz}{\psi_k(z)(z-\lambda_0)^n}.$$

Список литературы

[1] *Глушак А. В.* Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя-Струве // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. №7, С. 891 – 905.

[2] *Zheng Q.* Integrated cosine functions // Internat. J. Math. and Math. Sci. 1996. V. 19. №3. P. 575 – 580.

[3] *Zhang J., Zheng Q.* On α-times integrated cosine functions // Math. Jap. 1999. V. 50. P. 401 – 408.

[4] *Kostić M.* Generalized semigroups and cosine functions. Beograd. Matematički institut SANU. 2011.

[5] *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит. 1995.

[6] *Кабанихин С.И., Криворотько О.И.* Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. №4. С. 90 – 101.

[7] *Васильев В.И., Кардашевский А.М., Попов В.В.* Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряженных градиентов // Вестник СВФУ. 2015 Т. 12. №2. С. 43–50.

[8] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз. 1963.

[9] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York. Basel. Marcel Dekker. 2000.

[10] *Cioranescu I., Lizama C.* Some applications of Fejer's theorem to operator cosine functions in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. №8. P. 2353 -– 2362.

[11] *Eidelman Y.* An inverse problem for a second-order differential equation in a Banach space // Abstr. Appl. Anal. V. 2004. №12. P. 997 – 1005.

[12] *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №1. С. 41 – 59.

[13] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука. 1986.

[14] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука. 1983.

[15] *Небольсина М.Н.* Ортогональные многочлены Чебышева и краевая задача Неймана // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. №3. С. 449 – 450.

[16] *Небольсина М.Н.* Задача Неймана для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве и ортогональные многочлены // Математические модели и операторные уравнения. Воронеж, ВГУ. 2007. Т. 4. С. 104 – 115.

[17] *Глушак А.В.* Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Изв. вузов. Матем. 2016. №6. С. 1 – 9.