Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
201_, №_, с. 1–10 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.В. ГЛУШАК, ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. МАТЕМАТИКА. 2019. №7, С. 29 – 38

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ-СТРУВЕ

Аннотация. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальной задачи для абстрактного дифференциального уравнения Бесселя-Струве. Оба нелокальные условия записаны с помощью операторов Эрдейи-Кобера.

Ключевые слова: уравнение Бесселя-Струве, оператор Эрдейи-Кобера, нелокальное условие, однозначная разрешимость.

УДК: 517.983.23

Abstract. Sufficient conditions for the unique solvability of the nonlocal problem for the abstract Bessel-Struve differential equation are found. Both nonlocal conditions are written with the help of Erdelyi-Kober operators.

Keywords: Bessel-Struve equation, Erdelyi-Kober operator, nonlocal condition, unique solvability.

Пусть $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в нем областью определения $D(A)$. На интервале $(0, 1]$ при $k > 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение Бесселя-Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t}\big(u'(t) - u'(0)\big) = Au(t). \tag{1}$$

Как следует из результатов работы [1], корректная постановка начальных условий для уравнения Бесселя-Струве (1) состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u_0,\ u_1 \in D(A). \tag{2}$$

В работе [1] приводятся также и условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи Коши (1), (2). Следуя [1], в дальнейшем будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 1. Пусть $k = 2\alpha > 0$ и оператор A является генератором α раз проинтегрированной косинус оператор-функции (ПКОФ) $C_\alpha(t)$.

По поводу определения ПКОФ $C_\alpha(t)$ см., например, [1] – [4], при этом $C_0(t) = C(t)$ — косинус оператор-функции (КОФ).

Как установлено в [1], условие 1 обеспечивает однозначную разрешимость задачи Коши (1), (2) и при этом ее решение имеет вид

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)u_1, \qquad u_0,\ u_1 \in D(A), \tag{3}$$

где операторная функция Бесселя (ОФБ) $Y_k(t)$ и операторная функция Струве (ОФС) $L_k(t)$ определены соответственно равенствами

$$Y_k(t) = \frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}\ t^{\alpha}} \left(C_{\alpha}(t) - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau) C_{\alpha}(t\tau)\ d\tau \right), \tag{4}$$

$$L_k(t) = \frac{2^{\alpha}\ \Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha-1}} \int_0^1 P_{\alpha-1}(\tau) C_{\alpha}(t\tau)\ d\tau, \tag{5}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $P_{\alpha-1}(\cdot)$ — сферическая функция Лежандра ([5], с. 205).

Для операторных функций Бесселя $Y_k(t)$ и Струве $L_k(t)$ справедливы формулы сдвига по параметру. Если $m > k \geq 0$, то соответствующие ОФБ $Y_m(t)$ и ОФС $L_m(t)$ имеют вид

$$Y_m(t) = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)} \int_0^1 s^k\ (1-s^2)^{(m-k)/2-1}\ Y_k(ts)\ ds, \tag{6}$$

$$L_m(t) = \frac{2}{B(k/2+1, m/2-k/2)} \int_0^1 s^k\ (1-s^2)^{(m-k)/2-1}\ L_k(ts)\ ds, \tag{7}$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера.

Имеют место также формулы дифференцирования. Если $u_0 \in D(A)$, то

$$Y'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t) A u_0, \tag{8}$$

$$L'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+2} L_{k+2}(t) A u_0 + u_0, \tag{9}$$

при этом принято обозначение $Y'_k(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'$.

В настоящей работе будем искать решение $u(t) \in C^2([0,1], E) \cap C((0,1], D(A))$ уравнения (1), удовлетворяющее двум нелокальным интегральным условиям

$$\lim_{t\to 1-} I_{(k-1)/2,\beta}\ u(t) = u_2, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to 1-} I_{k/2,\beta}\ u'(t) = u_3, \tag{11}$$

где $\beta > 0$, $I_{\nu,\beta}$ — оператор Эрдейи-Кобера, определяемый равенством (см. [6], с. 246)

$$I_{\nu,\beta}\ u(t) = \frac{2}{\Gamma(\beta)\ t^{2(\beta+\nu)}} \int_0^t s^{2\nu+1}(t^2-s^2)^{\beta-1} u(s)\ ds.$$

Задача (1), (10), (11) с нелокальными условиями (10), (11), вообще говоря, не является корректной. В настоящей работе устанавливаются условия, налагаемые на оператор A и элементы $u_2,\ u_3 \in E$, обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Нелокальные задачи для уравнений в частных производных рассматривались в ряде работ, см. [7] и приводимую в ней библиографию. Среди публикаций, посвящённых исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка отметим работы [8] и [9]. Критерий единственности решения установлен в [10]. Нелокальные задачи для уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу и Мальмстена с одним нелокальным условием исследованы автором в [11], [12]. Что касается нелокальной задачи (1), (10), (11) с двумя нелокальными условиями, то она рассматривается впервые.

Исследования разрешимости задачи (1), (10), (11) основаны на нахождении начальных элементов $u_0,\ u_1$ в условии (2) по нелокальным условиям (10), (11).

Применим оператор Эрдейи-Кобера $I_{(k-1)/2,\beta}$ к определяемой равенствами (3) – (5) функции $u(t)$. Учитывая формулы сдвига по параметру (6), (7) получим

$$I_{(k-1)/2,\beta}\ u(t) = I_{(k-1)/2,\beta}\ \left(Y_k(t)u_0 + L_k(t)u_1\right) =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\beta)\ t^{2\beta+k-1}} \int\limits_0^t s^k(t^2-s^2)^{\beta-1}\left(Y_k(s)u_0 + L_k(s)u_1\right)\ ds =$$

$$= t^{-2\beta}\left(\frac{\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)}Y_{k+2\beta}(t)u_0 + \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1+\beta)}L_{k+2\beta}(t)u_1\right). \tag{12}$$

Из равенств (10), (12) получим первое уравнение для нахождения начальных элементов

$$\frac{\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)}Y_{k+2\beta}(1)u_0 + \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1+\beta)}L_{k+2\beta}(1)u_1 = u_2. \tag{13}$$

Рассмотрим далее функцию $I_{k/2,\beta}\ u'(t)$. Используя равенства (8), (9) и (6), (7), аналогично (12) получим равенство

$$I_{k/2,\beta}\ u'(t) = \frac{t\ \Gamma(k/2+3/2)}{(k+1)\Gamma(k/2+3/2+\beta)}Y_{k+2+2\beta}(t)Au_0 +$$

$$+\frac{t\ \Gamma(k/2+2)}{(k+2)\Gamma(k/2+2+\beta)}L_{k+2+2\beta}(t)Au_1 + \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1+\beta)}u_1,$$

из которого, учитывая условие (11), выводим второе уравнение для нахождения начальных элементов

$$\frac{\Gamma(k/2+3/2)}{(k+1)\Gamma(k/2+3/2+\beta)}Y_{k+2+2\beta}(1)Au_0 +$$

$$+\frac{\Gamma(k/2+2)}{(k+2)\Gamma(k/2+2+\beta)}L_{k+2+2\beta}(1)Au_1 + \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1+\beta)}u_1 = u_3. \tag{14}$$

Уравнения (13), (14) удобно записать в виде матричного уравнения

$$Bv = w, \qquad B : D(A)\times D(A) \longrightarrow E\times E, \tag{15}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1+2\beta}{2}\right)}Y_{k+2\beta}(1) & \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2+2\beta}{2}\right)}L_{k+2\beta}(1) \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{(k+1)\Gamma\left(\frac{k+3+2\beta}{2}\right)}Y_{k+2+2\beta}(1)A & \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)}{(k+2)\Gamma\left(\frac{k+4+2\beta}{2}\right)}L_{k+2+2\beta}(1)A + \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2+2\beta}{2}\right)}I \end{pmatrix}, \tag{16}$$

при этом все операторы $B_1 - B_4$ коммутируют на $D(A)$.

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1), (10), (11) сводится к задаче о существовании у операторной матрицы $B : D(A)\times D(A) \to E\times E$, заданной соотношением (16), обратной операторной матрицы, определённой на некотором подмножестве из $E\times E$.

Как и в скалярном случае важную роль при этом играет определитель операторной матрицы B, который мы обозначим через $\Delta = B_1B_4 - B_2B_3$.

Пусть $x \in D(A)$, учитывая формулы сдвига по параметру (6) и (7), после элементарных преобразований получим

$$\Delta x = B_1B_4x - B_2B_3x = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)}Y_{k+2\beta}(1) \quad \times$$

$$\times \quad \left(\frac{\Gamma(k/2+2)}{(k+2)\Gamma(k/2+2+\beta)}L_{k+2+2\beta}(1)Ax + \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1+\beta}\ x\right) -$$

$$-\ \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1+\beta)}L_{k+2\beta}(1)\frac{\Gamma(k/2+3/2)}{(k+1)\Gamma(k/2+3/2+\beta)}Y_{k+2+2\beta}(1)Ax =$$

$$= \frac{2\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+2)Y_{k+2\beta}(1)}{(k+2)\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}\int\limits_0^1 s^{k+2\beta}AL_{k+2\beta}(s)x\ ds +$$

$$+\frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}Y_{k+2\beta}(1)x -$$

$$-\frac{2\Gamma(k/2+3/2)\Gamma(k/2+1)L_{k+2\beta}(1)}{(k+1)\Gamma(k/2+1+\beta)\Gamma(k/2+1/2+\beta)}\int\limits_0^1 s^{k+2\beta}AY_{k+2\beta}(s)x\ ds =$$

$$= \frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)Y_{k+2\beta}(1)x}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)} + \frac{2\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+2)Y_{k+2\beta}(1)}{(k+2)\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)} \quad \times$$

$$\times \quad \int\limits_0^1 s^{k+2\beta}\left(L''_{k+2\beta}(s) + \frac{k+2\beta}{s}L'_{k+2\beta}(s) - \frac{k+2\beta}{s}I\right)x\ ds -$$

$$-\frac{2\Gamma(k/2+3/2)\Gamma(k/2+1)L_{k+2\beta}(1)}{(k+1)\Gamma(k/2+1+\beta)\Gamma(k/2+1/2+\beta)}\int\limits_0^1 s^{k+2\beta}\left(Y''_{k+2\beta}(s) + \frac{k+2\beta}{s}Y'_{k+2\beta}(s)\right)x\ ds =$$

$$= \frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}Y_{k+2\beta}(1)\ \left(s^{k+2\beta}L'_{k+2\beta}(s)x\right)\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}L_{k+2\beta}(1)\ \left(s^{k+2\beta}Y'_{k+2\beta}(s)x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}\left(Y_{k+2\beta}(1)L'_{k+2\beta}(1)x - Y'_{k+2\beta}(1)L_{k+2\beta}(1)x\right). \tag{17}$$

Далее введем в рассмотрение оператор

$$W_k(t)x = \begin{vmatrix} Y_k(t) & L_k(t) \\ Y'_k(t) & L'_k(t) \end{vmatrix} x = Y_k(t)L'_k(t)x - Y'_k(t)L_k(t)x$$

— операторный определитель Вронского, построенный по ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$.

Таким образом, в силу равенства (17) вопрос о существовании обратного у оператора $\Delta = B_1B_4 - B_2B_3$ сводится к существованию обратного у операторного определителя Вронского $W_{k+2\beta}(1)$.

Лемма. *Пусть выполнено условие 1. Тогда операторный определитель Вронского, построенный по определяемым соответственно равенствами (4), (5) ОФБ* $Y_k(t)$ *и ОФС* $L_k(t)$*, равен*

$$W_k(t)x = \frac{k}{t^k}\int\limits_0^t \tau^{k-1} Y_k(\tau)x\, d\tau. \qquad (18)$$

Доказательство. Покажем, что функция $W_k(t)x$ удовлетворяет уравнению

$$W_k'(t)x + \frac{k}{t}W_k(t)x = \frac{k}{t}Y_k(t)x \qquad (19)$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to 0+} W_k(t)x = x. \qquad (20)$$

Действительно,

$$W_k'(t)x = Y_k'(t)L_k'(t)x + Y_k(t)L_k''(t)x - Y_k'(t)L_k'(t)x - Y_k''(t)L_k(t)x =$$

$$= Y_k(t)\left(L_k''(t) + \frac{k}{t}L_k'(t) - \frac{k}{t}I\right)x - \left(Y_k''(t) + \frac{k}{t}Y_k'(t)\right)L_k(t)x - \frac{k}{t}W_k(t)x + \frac{k}{t}Y_k(t)x =$$

$$= Y_k(t)AL_k(t)x - AY_k(t)L_k(t)x - \frac{k}{t}W_k(t)x + \frac{k}{t}Y_k(t)x = -\frac{k}{t}W_k(t)x + \frac{k}{t}Y_k(t)x,$$

поэтому функция $W_k(t)x$ удовлетворяет уравнению (19).

Поскольку (см. [1]) $Y_k(0)x = L_k'(0)x = x,\ Y_k'(0)x = L_k(0)x = 0$, то функция $W_k(t)x$ удовлетворяет и начальному условию (20), а единственным решением задачи (19), (20) является функция, определяемая равенством (18). Лемма доказана.

Далее мы исследуем обратимость ограниченного оператора

$$W_k(1)x = k\int\limits_0^1 \tau^{k-1} Y_k(\tau)x\, d\tau. \qquad (21)$$

Заметим, что если $\alpha = 0$, т.е., оператор A является генератором КОФ $C(t)$, то при $x \in D(A)$

$$W_0(t)x = \lim_{k\to 0} W_k(t)x = \lim_{k\to 0}\frac{k}{t^k}\int\limits_0^t \tau^{k-1}Y_k(\tau)x\, d\tau = \lim_{k\to 0}\frac{1}{t^k}\int\limits_0^t (\tau^k)'Y_k(\tau)x\, d\tau =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{t^k}\left(\left(\tau^k Y_k(\tau)x\right)\Big|_0^t - \int\limits_0^t \tau^k Y_k'(\tau)x\, d\tau\right) = C(t) - \int\limits_0^t C'(\tau)x\, d\tau = C(0)x = x,$$

и оператор $W_0(t)$ обратим всегда. В общем случае $k > 0$ это не так, поэтому нам понадобятся представления ОФБ $Y_k(t)$, установленные в [13].

Если оператор A ограничен, то ОФБ $Y_k(t)$ имеет вид

$$Y_k(t)x = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t/2)^{2j}A^j x}{j!\,\Gamma\left((k+1)/2 + j\right)} = {}_0F_1\left(\frac{k+1}{2}; \frac{t^2}{4}A\right)x, \quad x \in E, \qquad (22)$$

где ${}_pF_q(\cdot)$ — обобщённая гипергеометрическая функция. В случае неограниченного оператора A при выполнении условия 1 справедливо представление

$$Y_k(t)x = \frac{2^{(k-1)/2}\Gamma((k+1)/2)}{i\pi\ t^{(k-1)/2}} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{(3-k)/2} I_{(k-1)/2}(t\lambda) R(\lambda^2)x\ d\lambda, \quad \sigma > \omega, \quad x \in E, \tag{23}$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, λ^2 при $\mathrm{Re}\lambda > \omega \geq 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, а $R(\lambda^2) = (\lambda^2 I - A)^{-1}$ — его резольвента.

В дальнейшем важную роль будет играть целая функция

$$\chi_k(\lambda) = {}_1F_2\left(\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}+1; \frac{\lambda}{4}\right). \tag{24}$$

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный оператор. Для того, чтобы определяемый равенством* (21) *оператор $W_k(1)$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$$\chi_k(\lambda) \neq 0, \qquad \lambda \in \sigma(A). \tag{25}$$

Доказательство. Подставив (22) в (21), после элементарных преобразований получим

$$W_k(1) = k\int\limits_0^1 \tau^{k-1} Y_k(\tau)\ d\tau = k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A/4)^j}{j!\ \Gamma(j+k/2+1/2)} \int\limits_0^1 \tau^{2j+k-1}\ d\tau =$$

$$= \frac{k}{2}\ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+k/2)(A/4)^j}{j!\ \Gamma(j+k/2+1/2)\Gamma(j+k/2+1)} = {}_1F_2\left(\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}+1; \frac{A}{4}\right) = \chi_k(A). \tag{26}$$

Пусть Ω — открытое множество комплексной плоскости, содержащее спектр $\sigma(A)$ ограниченного оператора A, и граница которого $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда, записывая для оператора, стоящего в правой части (26), представление через резольвенту, получим

$$W_k(1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega} \chi_k(\lambda) R(\lambda)\ d\lambda. \tag{27}$$

Необходимым и достаточным условием обратимости оператора $W_k(1)$ является отсутствие в спектре $\sigma(W_k(1))$ оператора $W_k(1)$ точки $\lambda = 0$. Равенство (27) означает, что оператор $W_k(1)$ является аналитической функцией оператора A, $W_k(1) = \chi_k(A)$. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(W_k(1)) = \chi_k(\sigma(A))$. Таким образом, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора $W_k(1)$ только тогда, когда на спектре $\sigma(A)$ не обращается в нуль функция $\chi_k(\lambda)$ или, что тоже самое, выполнено условие (25). При этом

$$W_k^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{\chi_k(\lambda)} R(\lambda)\ d\lambda. \tag{28}$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 следует, что расположение нулей функции $\chi_k(\lambda)$ определяет обратимость оператора $W_k(1)$ в случае ограниченного оператора A. В случае неограниченного оператора A условие вида (25) уже не будет достаточным условием обратимости, хотя расположение нулей также будет играть важную роль. В этом случае, подставляя (23) в (21) и используя интеграл 2.15.2.5 [14], после элементарных преобразований получим

$$W_k(1)=\frac{2^{(k-1)/2}k\ \Gamma((k+1)/2)}{i\pi}\int\limits_0^1\tau^{(k-1)/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{(3-k)/2}I_{(k-1)/2}(\tau\lambda)R(\lambda^2)\ d\lambda\ d\tau=$$

$$=\frac{2^{(k-1)/2}k\ \Gamma((k+1)/2)}{i\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{(3-k)/2}R(\lambda^2)\int\limits_0^1\tau^{(k-1)/2}I_{(k-1)/2}(\tau\lambda)\ d\tau\ d\lambda=$$

$$=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}{}_1F_2\left(\frac{k}{2};\frac{k+1}{2},\frac{k}{2}+1;\frac{\lambda^2}{4}\right)\lambda R(\lambda^2)\ d\lambda=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\chi_k(\lambda^2)\lambda R(\lambda^2)\ d\lambda. \tag{29}$$

Условие 2. Пусть каждый нуль $\lambda_j,\ j=1,2,...$ определяемой равенством (24) целой функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и существует такое $d>0$, что

$$\sup_{j=1,2,...}\|R(\lambda_j)\|\le d.$$

Будем считать условие 2 выполненным. Поскольку каждый нуль $\lambda_j,\ j=1,2,...$ функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $1/d$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\mathrm{Re}\ z=\sigma_0>\omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении

$$w=z^2\ (z\in\Upsilon_0,\ w\in\Upsilon_0^2),\quad \Xi=\Upsilon_0^2\bigcup_{j=1,2,...}\gamma_j.$$

Наша задача сводится к задаче о существовании определённого на некотором подмножестве из $D(A)$ обратного оператора, у ограниченного оператора, заданного соотношением (29) и продолженного по непрерывности на E. С этой целью при $x\in E$, $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_0\in\mathbb{C}$ введем в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hx=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R\,(z)\,x\ dz}{\chi_k(z)(z-\lambda_0)^n},\quad H:E\to E. \tag{30}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и пусть* $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_0\in\rho(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_0>\sigma_0$ *выбраны так, чтобы абсолютно сходился интеграл в формуле* (30). *Тогда оператор* $W_k(1)$ *имеет обратный* $W_k^{-1}(1):D(A^n)\to E$.

Доказательство. Пусть $x\in D\,(A)$, $\sigma_0<\sigma<\mathrm{Re}\ \xi$. Тогда, подставляя определяемый равенством (29) оператор $W_k(1)$ в (30) и применяя тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2)=\frac{R(z)-R(\xi^2)}{\xi^2-z},$$

получим равенство

$$HW_k(1)x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R\,(z)}{\chi_k(z)(z-\lambda_0)^n}\ \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\chi_k\left(\xi^2\right)\xi R(\xi^2)x\ d\xi dz=$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi\chi_k\left(\xi^2\right)R\left(z\right)x}{\chi_k\left(z\right)\left(z-\lambda_0\right)^n(\xi^2-z)}-\frac{\xi\chi_k\left(\xi^2\right)R\left(\xi^2\right)x}{\chi_k\left(z\right)\left(z-\lambda_0\right)^n(\xi^2-z)}\right)\,d\xi dz. \qquad (31)$$

Интеграл в (31) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HW_k(1)x = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi\chi_k\left(\xi^2\right)R\left(z\right)x\;d\xi dz}{\chi_k\left(z\right)\left(z-\lambda_0\right)^n(\xi^2-z)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_k\left(\xi^2\right)R\left(\xi^2\right)x\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi_k\left(z\right)\left(z-\lambda_0\right)^n\,\left(\xi^2-z\right)}\,d\xi. \qquad (32)$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup\limits_{j=1,2,\ldots}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (32) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (32), используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HW_k(1)x = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon}\frac{\xi\chi_k\left(\xi^2\right)R\left(z\right)x\;d\xi dz}{\chi_k\left(z\right)\left(z-\lambda_0\right)^n(\xi^2-z)}=$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon^2}\frac{\chi_k\left(\lambda\right)R(z)x\;d\lambda dz}{\chi_k\left(z\right)\left(z-\lambda_0\right)^n(\lambda-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)x\;dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)x\;dz}{(z-\lambda_0)^n}=$$

$$=\frac{-1}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda_0)x=(-1)^nR^n(\lambda_0)x.$$

Коммутирующие операторы $H,\ W_k(1),\ R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $HW_k(1)x=(-1)^nR^n(\lambda_0)x$ справедливо и для $x\in E$, и при этом $HW_k(1): E\to D\left(A^n\right)$. Отсюда следует, что оператор

$$W_k^{-1}(1)x=(-1)^n(\lambda_0I\ -\ A)^nHx,\quad W_k^{-1}(1): D\left(A^n\right)\to E \qquad (33)$$

является обратным по отношению к $W_k(1)$. Действительно,

$$W_k(1)W_k^{-1}(1)x=(-1)^nW_k(1)(\lambda_0I-A)^nHx=(-1)^nW_k(1)H(\lambda_0I-A)^nx=$$

$$=R^n(\lambda_0)(\lambda_0I-A)^nx=x,\quad x\in D\left(A^n\right),$$

$$W_k^{-1}(1)W_k(1)x=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHW_k(1)x=(\lambda_0I-A)^nR^n(\lambda_0)x=x,\quad x\in E.$$

Теорема доказана.

Заметим, что расположение, кратность и асимптотика нулей λ_j нулей определяемой равенством (24) функции $\chi_k\left(\lambda\right)$ в общем случае нам неизвестны, что приводит в формулировке теоремы 2 к условию о сходимости интеграла в формуле (30). Дополнительная информация о нулях функции $\chi_k(\lambda)$ позволит это условие конкретизировать. Например, если $k=2$, то

$$\chi_2(\lambda)=\frac{\operatorname{ch}2\lambda-1}{2\lambda^2},\qquad \lambda_j=j\pi i,\ j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

и для сходимости интеграла в формуле (30) достаточно взять $n=4$.

В теоремах 1 и 2 указано множество, на котором у оператора $W_k(1)$ при $k>0$ существует обратный $W_k^{-1}(1)$, имеющий вид (28) в случае ограниченного оператора A и вид (33) — в случае неограниченного A. Поэтому, в силу равенства (17), нами доказано и существование обратного у оператора

$$\Delta = \frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)} W_{k+2\beta}(1).$$

Решая матричное уравнение (15), также как и в скалярном случае получим

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} B_4 & -B_3 \\ -B_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу теорем 1 и 2 мы приходим к следующим утверждениям, в которых важную роль играет функция

$$\chi_{k+2\beta}(\lambda) = {}_1F_2\left(\frac{k+2\beta}{2}; \frac{k+2\beta+1}{2}, \frac{k+2\beta}{2}+1; \frac{\lambda}{4}\right).$$

Теорема 3. *Пусть $u_2,\ u_3 \in E$, A — ограниченный оператор и на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнено условие $\chi_{k+2\beta}(\lambda) \neq 0$. Тогда задача* (1), (10), (11) *имеет единственное решение, определяемое равенством* (3), *где*

$$u_0 = \frac{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)} W^{-1}_{k+2\beta}(1) \quad \times$$

$$\times \left(\frac{\Gamma\left(k/2+2\right) L_{k+2+2\beta}(1) A u_2}{(k+2)\Gamma\left(k/2+2+\beta\right)} + \frac{\Gamma\left(k/2+1\right) u_2}{\Gamma\left(k/2+1+\beta\right)} - \frac{\Gamma\left(k/2+3/2\right) Y_{k+2+2\beta}(1) A u_3}{(k+1)\Gamma\left(k/2+3/2+\beta\right)}\right), \tag{34}$$

$$u_1 = \frac{\Gamma(k/2+1/2+\beta)\Gamma(k/2+1+\beta)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(k/2+1)} W^{-1}_{k+2\beta}(1) \quad \times$$

$$\times \left(-\frac{\Gamma\left(k/2+1\right) L_{k+2\beta}(1) u_2}{\Gamma\left(k/2+1+\beta\right)} + \frac{\Gamma\left(k/2+1/2\right) Y_{k+2\beta}(1) u_3}{\Gamma\left(k/2+1/2+\beta\right)}\right), \tag{35}$$

$$W^{-1}_{k+2\beta}(1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{\chi_{k+2\beta}(\lambda)} R(\lambda)\ d\lambda.$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 1, пусть также каждый нуль $\lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots$ целой функции $\chi_{k+2\beta}(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и существует такое $d > 0$, что*

$$\sup_{j=1,2,\ldots} \|R(\lambda_j)\| \leq d.$$

Если $u_2,\ u_3 \in D(A^{n+1})$, где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, $Re\ \lambda_0 > \sigma_0$ выбраны так, чтобы абсолютно сходился интеграл

$$\int\limits_{\Xi} \frac{R(z)\ dz}{\chi_{k+2\beta}(z)(z-\lambda_0)^n},$$

то задача (1), (10), (11) имеет единственное решение, определяемое равенствами (3), (34), (35), где

$$W^{-1}_{k+2\beta}(1)x = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} \frac{R(z)\,(\lambda_0 I\ -\ A)^n x\ dz}{\chi_{k+2\beta}(z)(z-\lambda_0)^n}.$$

Мы рассмотрели задачу с двумя нелокальными условиями, записанными с помощью операторов Эрдейи-Кобера. Аналогично, причем со значительными упрощениями, исследуется случай, когда вместо нелокальных условий (10), (11) задаются финальные условия вида

$$\lim_{t\to 1-} u(t) = u_2, \qquad \lim_{t\to 1-} u'(t) = u_3. \tag{36}$$

Результаты о разрешимости задачи (1), (36), которую можно также назвать краевой задачей управления, получаются из теорем 3 и 4, если в них положить $\beta = 0$.

Отметим также, что при $k = \beta = 0$ ОФБ и ОФС соответственно равны $Y_0(t) = C(t),\ L_0(t) = C_1(t),\ \chi_0(z) = 1$. Как указано после леммы $W_0(1) = W_0^{-1}(1) = I$, и единственное решение задачи (1), (36) в этом случае существует при любых $u_2,\ u_3 \in D(A)$.

Литература

[1] Глушак А.В. *Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя-Струве*, Дифференц. уравнения. **53**(7), 891 – 905 (2017).

[2] Zheng Q. *Integrated cosine functions*, Internat. J. Math. and Math. Sci. **19** (3), 575 – 580 (1996).

[3] Zhang J., Zheng Q. *On α-times integrated cosine functions.* Math. Jap. **50**, 401 – 408 (1999).

[4] Kostić M. *Generalized semigroups and cosine functions.* (Beograd. Matematički institut SANU, 2011).

[5] Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения.* (М.: Физматгиз, 1963).

[6] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* (Минск. Наука и техника, 1987)

[7] Камынин В.Л. *Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными.* Мат. заметки. **97** (3), 368 – 381 (2015).

[8] Тихонов И.В. *О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве.* Диф. уравнения. **34** (6), 841 – 843 (1998).

[9] Сильченко Ю.Т. *Уравнение параболического типа с нелокальными условиями.* СМФН. **17**, 5 – 10 (2006).

[10] Тихонов И.В. *Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений.* Изв. РАН. Сер. матем. **67**: 2, 133 – 166 (2003).

[11] Глушак А.В. *Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* Изв. вузов. Матем. **6**, 1 – 9 (2016).

[12] Глушак А.В. *О разрешимости одной нелокальной задачи для абстрактного уравнения Мальмстена.* Ученые записки Брянского госуниверситета: физ.-мат. науки/ биолог. науки/ ветер. науки. **3**, 22 – 30 (2016).

[13] Глушак А.В., Покручин О.А. *Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* Диф. уравнения. **52** (1), 41 – 59 (2016).

[14] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* (М.: Наука, 1983)

Александр Васильевич Глушак, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики Белгородского государственного национального исследовательского университета

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

`e-mail:` aleglu@mail.ru

A.V. Glushak, Institute of Engineering Technology and Natural Science, Belgorod State National Research University

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia

`e-mail:` aleglu@mail.ru