Математические заметки

Том 110 выпуск 6 июнь 2021

УДК 517.983.23

Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

А. В. Глушак. Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 5. С. 656 – 665.

Устанавливается операторная формула сдвига для решения в случае, когда в уравнении Эйлера-Пуассона-Дарбу слагаемое, содержащее первую производную, возмущается генератором группы.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, абстрактная задача Коши, операторная формула сдвига.

1. Введение и постановка задачи

Пусть $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в нем областью определения $D(A)$. При $k > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) исследована в работе [1], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ и ее весовых производных. В работе [2] получен критерий равномерной корректности этой задачи, который, в отличие от [1], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее невесовых производных.

Обозначим через $C^n(J, E_0)$ линейное пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in J \subset [0, \infty)$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

Определение 1. *Решением уравнения (1.1) называется функция $u(t)$, которая при $t \geqslant 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, при каждом $t > 0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, так что $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, а также удовлетворяет уравнению (1.1).*

Если $Y_k(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ — операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$, то в дальнейшем будем использовать обозначение $Y_k'(t; A)u_1 = (Y_k(t; A)u_1)'$.

Определение 2. *Задача (1.1), (1.2) называется равномерно корректной, если существует коммутирующая на $D(A)$ с оператором A операторная функция $Y_k(\cdot)$ $Y_k(\cdot) : [0,\infty) \to B(E)$ и числа $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $Y_k(t;A)u_0$ является ее единственным решением и при этом*

$$\|Y_k(t;A)\| \leqslant Me^{\omega t}, \qquad \|Y_k'(t;A)u_0\| \leqslant Mte^{\omega t}\,\|Au_0\|\,.$$

Функцию $Y_k(t;A)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1.1), (1.2), а множество операторов A, для которых задача (1.1), (1.2) равномерно корректна, обозначим через G_k, при этом через G_0 обозначим множество генераторов операторной косинус-функции $C(t;A)$ и $Y_0(t;A) = C(t;A)$.

В работе [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть задача (1.1), (1.2) равномерно корректна ($A \in G_k$). Тогда эта задача равномерно корректна и для $m > k \geqslant 0$ ($A \in G_m$), при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t;A)$ имеет вид*

$$Y_m(t;A) = \frac{2\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/2-k/2)} \int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{(m-k)/2-1}Y_k(ts;A)\,ds, \tag{1.3}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Равенство (1.3) называется формулой сдвига по параметру k решения задачи Коши для уравнения (1.1). Укажем, что определяемый равенством (1.3) оператор сдвига по параметру дифференциального оператора Бесселя является частным случаем оператора преобразования, построенного композиционным методом в [3] и [4].

Отметим также, что формулы сдвига по параметру решения весовой задачи Коши для уравнения ЭПД и решения задачи Коши для уравнения Бесселя-Струве приводятся соответственно в [5] и [6].

В настоящей работе мы установим операторную формулу сдвига для решения задачи Коши в случае, когда в уравнении (1.1) слагаемое, содержащее первую производную решения, возмущается неким оператором.

2. Основные результаты

Наряду с уравнением (1.1) при $p > 0$ будем рассматривать уравнение, возмущенное операторным коэффициентом K

$$u''(t) + \frac{(k+2p)I + 2K}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

где I — единичный оператор. Заметим, что разрешимость задачи (1.1), (1.2) в случае возмущения стоящего в правой части уравнения оператора A как ограниченным, так и неограниченным оператором, исследована автором ранее и соответствующие результаты приводятся в работах [7] и [8].

Опишем класс операторов K, для которого будет доказана операторная формула сдвига. Если K и p — действительные числа, $K \geqslant 0$, $p > 0$, то для гамма-функции Эйлера справедливо представление

$$\Gamma(K+p) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{K+p-1}\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-t}e^{K\ln t}t^{p-1}\,dt,$$

которое и будет положено далее в основу определения гамма-оператора.

Пусть K является генератором C_0-группы $T(t;K)$ с оценкой

$$\|T(t;K)\| \leqslant Me^{\sigma|t|}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad M\geqslant 1, \ \ \sigma\geqslant 0. \tag{2.2}$$

При $x\in E$ и $p>\sigma\geqslant 0$ определим оператор

$$\Gamma(K+pI)x=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p-1}T(\ln t;K)x\,dt, \tag{2.3}$$

который назовем гамма-оператором. Из оценки (2.2) вытекает неравенство

$$\|T(\ln t;K)\|\leqslant M\left(t^\sigma+t^{-\sigma}\right), \quad t>0,$$

поэтому интеграл в (2.3) абсолютно сходится, а гамма-оператор является ограниченным и имеет место оценка

$$\|\Gamma(K+pI)x\|\leqslant M\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p-1}\left(t^\sigma+t^{-\sigma}\right)\,dt\,\|x\|=M\left(\Gamma(p+\sigma)+\Gamma(p-\sigma)\right)\|x\|.$$

Лемма 1. *Пусть K является генератором C_0-группы $T(t;K)$ с оценкой (2.2) и $p>\sigma\geqslant 0$. Тогда справедливо равенство*

$$(K+pI)\Gamma(K+pI)x=\Gamma\left(K+(p+1)I\right)x, \qquad x\in E. \tag{2.4}$$

Доказательство. Предположим вначале, что $x\in D(K)$. Тогда в силу замкнутости оператора K и абсолютной сходимости интеграла в равенстве (2.3) будем иметь

$$(K+pI)\Gamma(K+pI)x=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p-1}KT(\ln t;K)x\,dt+p\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p-1}T(\ln t;K)x\,dt. \tag{2.5}$$

Поскольку $KT(\ln t;K)x=t\left(T(\ln t;K)x\right)'$, то после интегрирования по частям в равенстве (2.5) получим

$$(K+pI)\Gamma(K+pI)x=$$

$$=\lim_{\delta\to 0+}\left(e^{-t}t^pKT(\ln t;K)x\right)\Big|_\delta^{+\infty}+\int\limits_0^\infty\left(e^{-t}t^p-pe^{-t}t^{p-1}\right)T(\ln t;K)x\,dt+$$

$$+p\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p-1}T(\ln t;K)x\,dt=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^pT(\ln t;K)x\,dt=\Gamma\left(K+(p+1)I\right)x. \tag{2.6}$$

В силу плотности $D(K)$ в E равенство (2.6), доказанное для $x\in D(K)$, справедливо и для $x\in E$.

Лемма 2. *Пусть K является генератором C_0-группы $T(t;K)$ с оценкой (2.2) и $p>\sigma\geqslant 0$. Тогда оператор $\Gamma(K+pI)$ обратим.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\Gamma(K+pI)x=0$ относительно $x \in E$. В силу свойства (2.4) для $n=0,1,2,...$ будут справедливы равенства

$$\Gamma(K+(p+n)I)x=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p+n-1}T(\ln t;K)x\;dt=0. \tag{2.7}$$

При $\mathrm{Re}\lambda>0$ умножим (2.7) на $(-\lambda)^n/n!$ и просуммируем по $n=0,1,2,....$ Будем иметь

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-t}t^{p-1}T(\ln t;K)x\;dt=0. \tag{2.8}$$

Пусть $f \in E^*$, где E^* — сопряженное к E пространство. Применяя произвольный функционал $f \in E^*$ к равенству (2.8), в силу единственности преобразования Лапласа получим $f\left(T(\ln t;K)x\right)=0$ для $t>0$. А поскольку $f \in E^*$ — произвольный функционал, то из последнего равенства при $t=1$ следует $x=0$. Таким образом гамма-оператор $\Gamma(K+pI)$ обратим.

Если группа $T(-\ln\lambda;K)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda>0$, то в некоторых случаях, учитывая скалярное равенство (см. интеграл 2.3.3.4 [9])

$$\frac{1}{\Gamma(K+p)}=\frac{t^{1-K-p}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{t\lambda}\lambda^{-K-p}\;d\lambda,\quad K\geqslant 0,\quad p>0,\quad \gamma>0,\quad t>0,$$

для оператора $\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}$ можно установить представление

$$\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}x=\frac{t^{1-p}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{t\lambda}\lambda^{-p}T(-\ln(t\lambda);K)x\;d\lambda,\quad t>0,\quad x\in E. \tag{2.9}$$

Например, если в последующих равенствах можно изменить порядок интегрирования и замкнуть контур интегрирования в правую полуплоскость, то при $0<\gamma<1$ получим

$$\Gamma(K+pI)\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}x=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{p-1}T(\ln t;K)\frac{t^{1-p}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{t\lambda}\lambda^{-p}T(-\ln(t\lambda);K)x\;d\lambda dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{-t}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{t\lambda}\lambda^{-p}T(-\ln\lambda;K)x\;d\lambda dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\lambda^{-p}T(-\ln\lambda;K)x\int\limits_0^\infty e^{-t+t\lambda}\;dtd\lambda=$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\lambda^{-p}T(-\ln\lambda;K)x}{\lambda-1}\,d\lambda = T(0;K)x = x, \tag{2.10}$$

что и подтверждает возможность определения при некоторых дополнительных предположениях оператора $(\Gamma(K+pI))^{-1}$ по формуле (2.9).

Опираясь на представление (1.3), сформулируем теорему, содержащую операторную формулу сдвига для решения уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (1.1), в которой через D обозначено множество элементов $u_0 \in D(A)$ таких, что при $t \geqslant 0$ $Y_k(t;A)u_0 \in D(K)$.

Теорема 2. *Пусть $k \geqslant 0$, $A \in G_k$ и $Y_k(t;A)$ — соответствующая ОФБ. Если оператор K является генератором C_0-группы $T(t;K)$ с оценкой (2.2), $p > \sigma \geqslant 0$ и $u_0 \in D$, то функция*

$$u(t) = \frac{2}{\Gamma(k/2+1/2)}\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}\Gamma\left(K+(p+k/2+1/2)I\right) \quad\times$$

$$\times \quad \int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1}T\left(\ln(1-s^2);K\right)Y_k(ts;A)u_0\,ds, \tag{2.11}$$

является решением уравнения (2.1), удовлетворяющим начальным условиям (1.2).

Доказательство. Проверим, что определяемая равенством (2.11) функция $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (1.2). Действительно, учитывая определение гамма-оператора формулой (2.3), после элементарных преобразований будем иметь

$$u(0) = \frac{2}{\Gamma(k/2+1/2)}\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}\Gamma\left(K+(p+k/2+1/2)I\right) \quad\times$$

$$\times \quad \int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1}T\left(\ln(1-s^2);K\right)u_0\,ds = \frac{2\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}}{\Gamma(k/2+1/2)} \quad\times$$

$$\times \quad \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{k/2+p-1/2}T(\ln\tau;K)\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1}T\left(\ln(1-s^2);K\right)u_0\,dsd\tau =$$

$$= \frac{2\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}}{\Gamma(k/2+1/2)}\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{k/2+p-1/2}\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1}T\left(\ln(\tau(1-s^2));K\right)u_0\,dsd\tau =$$

$$= \frac{\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}}{\Gamma(k/2+1/2)}\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\int\limits_0^\tau \xi^{p-1}(\tau-\xi)^{k/2-1/2}T\left(\ln\xi);K\right)u_0\,d\xi d\tau =$$

$$= \frac{\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}}{\Gamma(k/2+1/2)}\int\limits_0^\infty \xi^{p-1}T\left(\ln\xi);K\right)u_0\int\limits_\xi^\infty e^{-\tau}(\tau-\xi)^{k/2-1/2}\,d\tau d\xi =$$

$$= \left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\xi^{p-1}T\left(\ln\xi);K\right)u_0\,d\xi = \left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}\Gamma(K+pI)u_0 = u_0.$$

Таким образом, функция $u(t)$ удовлетворяет первому начальному условию в (1.2). Второе начальное условие в (1.2) очевидно, поскольку $Y_k'(0;A)=0$.

Покажем далее, что функция

$$v(t)=\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k(ts;A)u_0\,ds,$$

где $Q(s)=T\big(\ln(1-s^2);K\big)$, удовлетворяет уравнению (2.1). С этой целью вычислим

$$v'(t),\quad v''(t),\quad Av(t),\quad v''(t)+\frac{(k+2p)I+2K}{t}v'(t)-Av(t).$$

Получим

$$v'(t)=\int\limits_0^1 s^{k+1}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds=$$

$$=-\frac{1}{2p}\int\limits_0^1 s^k\left((1-s^2)^p\right)'Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds=$$

$$=\frac{k}{2p}\int\limits_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^pQ(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds+\frac{t}{2p}\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^pQ(s)Y_k''(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{1}{2p}\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^pQ'(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds,$$

$$v''(t)=\int\limits_0^1 s^{k+2}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k''(ts;A)u_0\,ds,$$

$$Av(t)=\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k''(ts;A)u_0\,ds+\frac{k}{t}\int\limits_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds,$$

$$v''(t)+\frac{(k+2p)I+2K}{t}v'(t)-Av(t)=\frac{kI+2K}{2p}\int_0^1 s^k(1-s^2)^pQ(s)Y_k''(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{k}{t}\int_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^{p-1}\left((1-s^2)\frac{(k+2p)I+2K}{2p}-I\right)Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{(k+2p)I+2K}{2pt}\int_0^1 s^k(1-s^2)^pQ'(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds. \tag{2.12}$$

Проинтегрировав по частям в первом интеграле правой части равенства (2.12), после элементарных преобразований будем иметь

$$v''(t)+\frac{(k+2p)I+2K}{t}v'(t)-Av(t)=-\frac{kI+2K}{2pt}\int_0^1 ks^{k-1}(1-s^2)^pQ(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{kI+2K}{2pt}\int_0^1\left(2ps^{k+1}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k'(ts;A)u_0-s^k(1-s^2)^pQ'(s)Y_k'(ts;A)u_0\right)\,ds+$$

$$+\frac{k}{t}\int_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^{p-1}\left((1-s^2)\frac{(k+2p)I+2K}{2p}-I\right)Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{(k+2p)I+2K}{2pt}\int_0^1 s^k(1-s^2)^pQ'(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds=$$

$$=\frac{k}{t}\int_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^pQ(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds-\frac{2K}{t}\int_0^1 s^{k+1}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{kI+2K}{t}\int_0^1 s^{k+1}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds-$$

$$-\frac{k}{t}\int_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^{p-1}Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds=\frac{k}{t}\int_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^pQ(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds+$$

$$+\frac{k}{t}\int_0^1 s^{k-1}(1-s^2)^{p-1}\left(s^2-1\right)Q(s)Y_k'(ts;A)u_0\,ds=0.$$

Таким образом, функция $v(t)$, а следовательно, и функция $u(t)$, удовлетворяют уравнению (2.1).

Если $K\geqslant 0,\ p>0$ — действительные числа, то равенство (2.11) превращается в равенство (1.3) при $m=k+2(K+p)$. Приведем еще два примера.

Пример 1. Пусть $k>0$ и $E=L^2_{x^k}(0,\infty)$ — пространство комплекснозначных функций $v(x)$, $x\in(0,\infty)$, интегрируемых в квадрате с весом x^k и с нормой

$$\|v(x)\|^2=\int\limits_0^\infty x^k|v(x)|^2\,dx.$$

Рассмотрим оператор A, определенный дифференциальным выражением Бесселя

$$A=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{k}{x}\frac{d}{dx}.$$

Для этого оператора A ОФБ $Y_k(t;A)$ представляет собой оператор обобщенного сдвига, который введен в рассмотрение в [10] и исследован в [11]. Она имеет вид

$$Y_k(t;A)u_0(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2+1/2)}\int\limits_0^\pi u_0\left(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\right)\sin^{k-1}\varphi\,d\varphi. \qquad (2.13)$$

Рассмотрим также оператор $K=d/dx$, определенный на функциях $v(x)\in D(A)$, продолженных четным образом на $x\in\mathbb{R}$. Он является генератором равномерно ограниченной группы $T(t;K)v(x)=v(x+t)$, при этом

$$T\left(\ln(1-s^2);K\right)w_1(ts,x)=w_1\left(ts,x+\ln(1-s^2)\right), \qquad (2.14)$$

где $w_1(t,x)=Y_k(t;A)u_0(x)$, а в неравенстве (2.2) постоянная $\sigma=0$.

В исследуемом случае $p>0$ и

$$\Gamma\left(K+(p+k/2+1/2)I\right)w_2(t,x)=\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{p+k/2-1/2}w_2(t,x+\ln\tau)\;d\tau, \tag{2.15}$$

где

$$w_2(t,x)=\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1/2}w_1\left(ts,x+\ln(1-s^2)\right)\;ds.$$

Если, например, функция $w_3(t,x)=\Gamma\left(K+(p+k/2+1/2)I\right)w_2(t,x)$ по переменной x допускает продолжение в полосу $-\pi/2<\operatorname{Im}\,z<\pi/2$ комплексной плоскости $z=x+i\operatorname{Im}\,z$ и при этом ее модуль ограничен константой M_0, то

$$\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}w_3(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\lambda}\lambda^{-p}w_3(t,x-\ln\lambda)\;d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\gamma+i\tau}(\gamma+i\tau)^{-p}w_3(t,x-\ln(\gamma+i\tau))\;d\tau, \tag{2.16}$$

$$0<\gamma<1,\quad \lambda=\gamma+i\tau=\frac{\gamma}{\cos\varphi}e^{i\varphi},\quad \varphi\in(-\pi/2,\pi/2).$$

При $p>1$ интеграл (2.16) абсолютно сходится, поскольку

$$\left|\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}w_3(t,x)\right|\leqslant\frac{M_0e^{\gamma}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(\gamma^2+\tau^2)^{p/2}}.$$

Выкладки, позволяющие подтвердить равенство (2.10) в этом случае справедливы, и задаваемое формулой (2.11) искомое решение $u(t)$ определяется операторами (2.13) – (2.16).

Аналогичный результат имеет место для оператора A, определенного дифференциальным выражением Бесселя

$$A=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m}{x}\frac{d}{dx},\quad m>0,\quad m\neq k.$$

В примере 1 работы [2] определена ОФБ $Y_k(t;A)$, имеющая вид

$$Y_k(t;A)u_0(x)=\gamma_q\int_0^\infty \xi^{2q+1}j_q(\xi x)j_{(k-1)/2}(\xi t)\hat{u}_0(\xi)\;d\xi, \tag{2.17}$$

где $m=2q+1$, $J_q(\cdot)$ — функция Бесселя,

$$\gamma_q=\frac{1}{2^{2q}\Gamma^2(q+1)},\quad j_q(x)=\frac{2^q\Gamma(q+1)}{x^q}J_q(x),\quad \hat{u}_0(\xi)=\int_0^\infty x^{2q+1}j_q(\xi x)u_0(x)\;dx.$$

Теперь при нахождении решения $u(t)$ по формуле (2.11) вместо равенства (2.13) следует использовать равенство (2.17).

Пример 2. Пусть $k > 0$ и $E = L^2_{x^k}\left(R_2^+\right)$ — пространство комплекснозначных функций $v(x,y)$, $(x,y) \in R_2^+$, интегрируемых в квадрате с весом x^k и с нормой

$$\|v(x,y)\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} x^k |v(x,y)|^2\, dxdy.$$

Пусть оператор A такой же как и в примере 1, а оператор $K = d/dy$ является генератором группы $T(t;K)v(x,y) = v\,(x, y+t)$.

В этом случае для нахождении решения $u(t)$ по формуле (2.11) вместо представлений (2.14) – (2.16) следует соответственно использовать следующие три равенства:

1) на функциях $v(x,y) \in D(A)$, продолженных четным образом для $y \in \mathbb{R}$

$$T\left(\ln(1-s^2);K\right) w_1(ts,x,y) = w_1\left(ts, x, y+\ln(1-s^2)\right),$$

где $w_1(t,x,y) = Y_k(t;A)u_0(x,y)$;

2) $\Gamma\left(K + (p+k/2+1/2)I\right) w_2(t,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{p+k/2-1/2} w_2(t,x,y+\ln\tau)\, d\tau, \quad p > 0,$

где

$$w_2(t,x,y) = \int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{p-1/2} w_1\left(ts, x, y+\ln(1-s^2)\right)\, ds;$$

3) если функция $w_3(t,x,y) = \Gamma\left(K + (p+k/2+1/2)I\right) w_2(t,x,y)$ по переменной y допускает продолжение в полосу $-\pi/2 < \mathrm{Im}\ z < \pi/2$ комплексной плоскости и при этом ее модуль ограничен константой M_0, то

$$\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1} w_3(t,x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda}\lambda^{-p} w_3(t,x,y-\ln\lambda)\, d\lambda, \quad 0<\gamma<1.$$

В заключение заметим, что в работе [12] установлена формула связи между решением задачи Коши (2.1), (1.2) и решением задачи Дирихле для уравнения

$$w''(t) + \frac{(1-2p)I - 2K}{t} w'(t) = -Aw(t), \quad t > 0, \tag{2.18}$$

которая вместе с теоремой 2 приводит к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и определяемое формулой (2.11) решение $u(t)$ задачи (2.1), (1.2) ограничено. Тогда функция*

$$w(t) = 2t^{2p}\left(\Gamma(K+pI)\right)^{-1}\left(\Gamma(K+(p+k/2+1/2)I)\right)^{-1}\Gamma\left(2K + (2p+k/2+1/2)I\right) \quad \times$$

$$\times \quad \int\limits_0^\infty \frac{s^{k+2p}}{(t^2+s^2)^{2p+k/2+1/2}} T\left(2\ln\frac{ts}{t^2+s^2};K\right) u(s)\, ds$$

является ограниченным решением уравнения (2.18), удовлетворяющим условию

$$\lim_{t\to 0+} w(t) = u_0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Глушак, “Операторная функция Бесселя”, *ДАН*, **352**:5 (1997), 587–589.
[2] А. В. Глушак, О. А. Покручин, “Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу”, *Дифференц. уравнения*, **52**:1 (2016), 41–59.
[3] S. M. Sitnik, “Transmutations and Applications: a Survey”, *ArXiv: 1012.3741*, 2010, 141 pp.
[4] A. Fitouhi, I. Jebabli, E. L. Shishkina, S. M. Sitnik, “Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations”, *Electron. J. Differential Equations*, **130** (2018), 27 pp.
[5] А. В. Глушак, “Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу”, *Дифференц. уравнения*, **54**:5 (2018), 627–637.
[6] А. В. Глушак, “Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя-Струве”, *Дифференц. уравнения*, **53**:7 (2017), 891–905.
[7] А. В. Глушак, “О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 363–369.
[8] А. В. Глушак, “Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта”, *Дифференц. уравнения*, **35**:1 (1999), 128–130.
[9] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.
[10] J. Delsarte, “Une extension nouvelle de la theorie des fonctions presque-periodiques de Bohr”, *Acta Math.*, **69** (1938), 259–317.
[11] Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **1**:2(42) (1951), 102–143.
[12] А. В. Глушак, “О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **33**:4 (1997), 433–437.

А. В. Глушак. Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 5.
С. 656 – 665.
НИУ "БелГУ", г. Белгород
E-mail: aleglu@mail.ru