

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ
НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Особенности обтекания равномерно нагретой
частицы цилиндрической формы в присутствии
магнитного поля**

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.03.02 Физика
очной формы обучения, группы 07001310
Скопца Николая Александровича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

БЕЛГОРОД 2017

Содержание

1. Введение.....	3
2. Глава I. Постановка задачи.....	5
3. Глава 2. Решение уравнения теплопроводности.....	10
4. Глава III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления.....	15
5. Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости упорядоченного движения твердой крупной нагретой частицы цилиндрической формы в режиме со скольжением в вязкой магнитной жидкости. Анализ полученных результатов.....	21
6. Заключение.....	26
7. Литература.....	27

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Магнитная гидродинамика (МГД) – это наука о движении электропроводящих газов и жидкостей во взаимодействии с магнитным полем[1,2,3]. Интерес к исследованию МГД растет с каждым годом и это обусловлено следующими обстоятельствами. В ряде областей физики, механики, техники возникает необходимость изучения движений электропроводных жидкостей и газов. К таким областям, например, относятся астрофизика, аэродинамика больших скоростей, магнитогидродинамические генераторы электрической энергии, электромагнитные насосы для перекачки жидких металлов, плазменные ускорители, управляемые термоядерные реакции и т.п. Если предметом изучения является газ, то свойством проводника электричества он обладает только тогда, когда находится в ионизованном состоянии (в состоянии плазмы).

При движении электропроводящей среды, находящейся в магнитном поле, в ней индуцируются электрические поля и токи, на которые действует магнитное поле и которые сами могут повлиять на магнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместных уравнений гидродинамики и электродинамики [1,2,3]. Следовательно, математическим аппаратом МГД являются уравнения гидродинамики и уравнения Максвелла для электромагнитных величин. В этом контексте интерес к МГД обусловлен как теоретическим интересом, так и практическими приложениями.

В дипломной работе исследуются особенности поведения равномерно и неравномерно нагретых частиц цилиндрической формы в вязкой магнитной жидкости.

Тема исследования – особенности обтекания равномерно и неравномерно нагретой частицы цилиндрической формы в присутствии магнитного поля.

Объектом исследования является изучение явлений, которые возникают при обтекании нагретой частицы цилиндрической формы в присутствии магнитного поля.

Предметом исследования: условия возникновения скольжения на поверхности крупной частицы цилиндрической формы.

Цель исследования – получить аналитические выражения силы, действующей на твердую крупную нагретую частицу цилиндрической формы и скорости ее движения в режиме со скольжением.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие **задачи исследования:**

- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в цилиндрической системе координат;
- получить аналитические выражения для силы и скорости твердой крупной нагретой частицы цилиндрической формы в режиме со скольжением в вязкой проводящей среде;
- провести качественный анализ влияния скольжения на силу и скорость ее упорядоченного движения в вязкой проводящей среде.

Научная новизна исследования. В настоящей дипломной работе получены аналитические выражения для силы и скорости упорядоченного движения твердой крупной нагретой частицы цилиндрической формы в режиме со скольжением в вязкой проводящей среде.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его материалы и выводы дополняют и углубляют исследования по данной проблеме.

Апробация исследования. По теме дипломной работы было сделано выступление на заседании кафедры теоретической и математической физики.

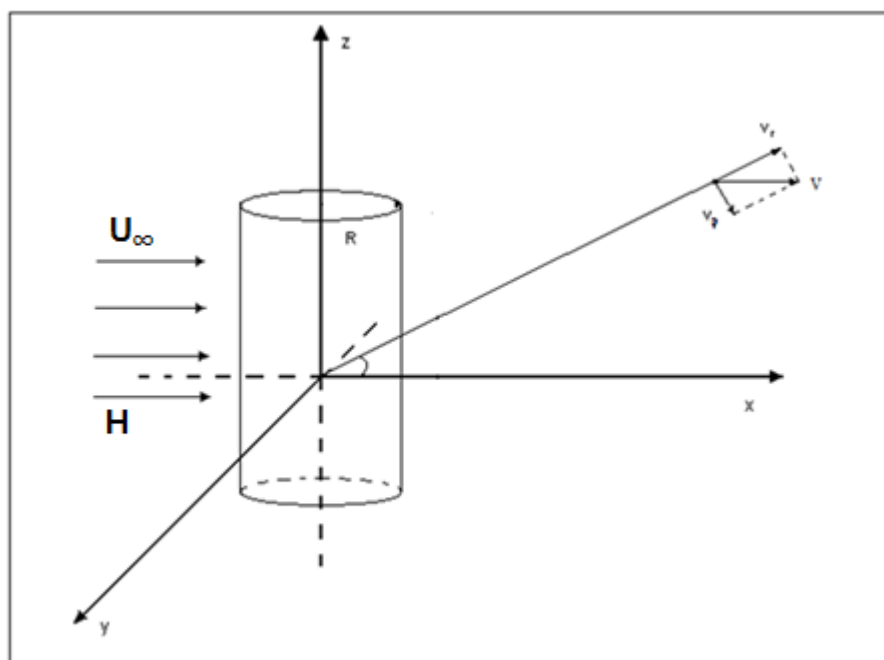
Структура работы. Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Глава I. Постановка задачи

Рассматривается задача о стационарном обтекании равномерно нагретого бесконечного круглого цилиндра вязкой проводящей жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении Ox . В том же направлении приложено магнитное поле.

Пусть U_∞ – скорость потока на бесконечности, a – радиус цилиндра. Причем a значительно меньше длины цилиндра L . Ось Oz выбираем вдоль оси цилиндра.

Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить соответственно к жидкой среде и частице; индексом « ∞ » – обозначены параметры жидкости на бесконечности, т.е. вдали от частицы, а индексом «S» – значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы.



Для решения этой задачи воспользуемся системой уравнений магнитной гидродинамики [5-6], которая описывает магнитное и электрическое поля H и E , вектор плотности тока j , распределение полей скорости V , давления P в среде и поле температуры T . Система уравнений представлена в виде

уравнения Навье-Стокса (1.1), уравнения неразрывности для несжимаемых сред (1.2), уравнение переноса тепла (1.3) и уравнения Максвелла (1.4):

$$\rho_e (\mathbf{V}_e \nabla) \mathbf{V}_e = -\nabla p_e + \eta_e \Delta \mathbf{V}_e + \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \mathbf{V}_e = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho_e c_p (\mathbf{V}_e \nabla) T_e = \lambda_e \nabla T_e + w_{Tp} + w_{Джс}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \nabla \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mu [\mathbf{V}, \mathbf{H}]), \quad (1.4)$$

где ρ_e – плотность жидкости, η_e – коэффициент динамической вязкости, \mathbf{f} – электродинамическая сила, σ – проводимость жидкости, μ – магнитная проницаемость, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, λ_e – коэффициент теплопроводности, $w_{Tp} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)^2$ – мощность тепла,

выделяемого в единицу объема за счет вынужденного трения, $w_{Джс} = \frac{j^2}{\sigma}$ – мощность тепла, выделяемого в единицу объема среды при протекании тока. Через U_i обозначены компоненты вектора скорости.

С учетом наших условий система уравнений принимает вид:

$$\nabla \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \nabla \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mu [\mathbf{V}, \mathbf{H}]), \quad (1.5)$$

$$\nabla \mathbf{V}_e = 0, \quad (1.6)$$

$$\rho_e (\mathbf{V}_e \nabla) \mathbf{V}_e = -\nabla p_e + \rho_e \nu_e \Delta \mathbf{V}_e + \mu [\mathbf{j}, \mathbf{H}], \quad (1.7)$$

$$\rho_e c_p (\mathbf{V}_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e + w_{Tp} + w_{Джс}. \quad (1.8)$$

Здесь предполагается, что вектор потока тепла \mathbf{q} определяется законом Фурье.

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты μ, σ, ν_e и сохраняющиеся в процессе движения цилиндрической частицы величины–

U_∞, a Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации:

$Re = \frac{U_\infty a}{\nu_e}$ – гидродинамическое число Рейнольдса и $Re_m = Re \mu \sigma \nu_e$ – маг-

нитное число Рейнольдса. При этом $Re \ll 1$, так как рассматриваем задачу для малых скоростей, а $Re_m \ll 1$, так как рассматриваем задачу для малой проводимости среды.

Приведем к безразмерным величинам уравнения и граничные условия следующим образом:

$$p'_e = p'_0 + \frac{a}{\rho_e \nu_e U_\infty} p_e, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{V}'_e = \frac{\mathbf{V}_e - U_\infty \mathbf{i}}{U_\infty}. \quad (1.10)$$

При этом граничные условия, удовлетворяющие условиям задачи, будут иметь вид:

- скорость на поверхности частицы (при $r = a$) имеет вид:

$$\mathbf{V}'_e = -\mathbf{i}. \quad (1.11)$$

- скорость вдали от цилиндрической частицы (при $r \rightarrow \infty$) удовлетворяет условию:

$$\mathbf{V}'_e = 0. \quad (1.12)$$

Тогда получаем безразмерные уравнения:

$$\nabla \mathbf{V}'_e = 0,$$

$$\frac{U_\infty^2}{a \rho_e} [(\mathbf{V}'_e + \mathbf{i}) \nabla] \mathbf{V}'_e = -\frac{\rho_e \nu_e U_\infty}{a} a^2 \nabla p'_e + \frac{\rho_e \nu_e U_\infty}{a^2} \Delta \mathbf{V}'_e + \mu [\mathbf{j}, \mathbf{H}].$$

Перемножим последнее уравнение на $\frac{a^2}{\rho_e \nu_e U_\infty}$, получим:

$$\operatorname{Re}[(\mathbf{V}'_e + \mathbf{i})\nabla]\mathbf{V}'_e = -\nabla p'_e + \Delta\mathbf{V}'_e + \frac{\mu}{\rho_e \nu_e U_\infty}[\mathbf{j}, \mathbf{H}]. \quad (1.13)$$

Из уравнений (1.5) получаем:

$$\nabla\mathbf{H} = \sigma(\mathbf{E} + \mu[\mathbf{V}, \mathbf{H}]).$$

Поддействуем оператором ∇ и приведем к безразмерным величинам:

$$\frac{\mu\sigma U_\infty}{a} \nabla[\mathbf{V}'_e, \mathbf{H}] = \frac{1}{a^2} \nabla(\nabla\mathbf{H}),$$

$$\operatorname{Re}_m \nabla[\mathbf{V}'_e, \mathbf{H}] = \nabla(\nabla\mathbf{H}).$$

Так как принимаем $\operatorname{Re}_m \ll 1$, тогда получаем:

$$\nabla(\nabla\mathbf{H}) = 0. \quad (1.14)$$

Отсюда видно, что в принятом приближении вектор \mathbf{H} не зависит от скорости.

Практически магнитная проницаемость μ жидкости и цилиндра одна и та же, поэтому μ кладем равным единице, так что можно считать магнитное поле однородным и параллельным оси Ox во всех точках. Поэтому уравнение для \mathbf{j} из (1.5) принимает вид:

$$\mathbf{j} = \sigma\mu U_\infty [(\mathbf{V}'_e + \mathbf{i}), \mathbf{H}].$$

Подставим в (1.14), при этом будем учитывать, что:

$$\mathbf{j} = \mu\sigma U_\infty \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V'_x & V'_y & V'_z \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu\sigma U_\infty (H_x V'_z \mathbf{j} - H_x V'_y \mathbf{k}),$$

$$[\mathbf{j}, \mathbf{H}] = \mu\sigma U_\infty \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & H_x V_z^{ie} & -H_x V_y^{ie} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu\sigma U_\infty (-H_x^2 V_y^{ie} \mathbf{j} - H_x^2 V_z^{ie} \mathbf{k}) =$$

$$= -\mu\sigma U_\infty H^2 (V_y^{ie} \mathbf{j} + V_z^{ie} \mathbf{k} + V_x^{ie} \mathbf{i} - V_x^{ie} \mathbf{i}) = -\mu\sigma U_\infty H^2 (\mathbf{V}'_e - (\mathbf{V}'_e \mathbf{i}) \mathbf{i}).$$

Тогда получаем:

$$-\nabla p'_e + \Delta \mathbf{V}'_e - \mu a \sqrt{\frac{\sigma H^2}{\rho_e \nu_e}} \{\mathbf{V}'_e - (\mathbf{V}'_e \mathbf{i}) \mathbf{i}\} = 0.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению уравнений:

$$\nabla \mathbf{V}'_e = 0, \quad (1.15)$$

$$-\nabla p'_e + \Delta \mathbf{V}'_e - M^2 \{\mathbf{V}'_e - (\mathbf{V}'_e \mathbf{i}) \mathbf{i}\} = 0, \quad (1.16)$$

где $M = \mu a \sqrt{\frac{\sigma H^2}{\rho_e \nu_e}}$ – число Гартмана.

Общая сила, действующая на единицу длины гидрозольной цилиндрической частицы, определяется интегрированием тензора вязких напряжений по поверхности частицы и имеет следующий вид [6]:

$$F = a \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos \varphi - p_{r\varphi} \sin \varphi) d\varphi, \quad (1.17)$$

где $p_{rr}, p_{r\varphi}$ – компоненты тензора вязких напряжений и в цилиндрической системе координат равны:

$$p_{rr} = -P_e + 2\eta_e \frac{\partial V_r^e}{\partial r}, \quad p_{r\varphi} = \eta_e \left(\frac{\partial V_\varphi^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^e}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^e}{r} \right). \quad (1.19)$$

Глава 2. Решение уравнения теплопроводности

Общая система уравнений магнитной гидродинамики включает в себя также и уравнение переноса тепла, которое получается из закона сохранения энергии и в случае электропроводящей среды (жидкость, газ) имеет вид:

$$\rho_e c_p (\mathbf{V}_e \nabla T_e) T_e = \lambda_e \Delta T_e + w_{Tp} + w_{Джк}. \quad (2.1)$$

Наличие конвективного переноса тепла, а также наличие w_{Tp} , $w_{Джк}$ делает уравнение (2.1) нелинейным. В первой главе при постановки задачи мы отмечали, что задача решается при малых Re и Re_m . Это означает, что если справедливы эти допущения, то уравнение (2.1) принимает следующий вид:

$$\Delta T_e = 0, \quad (2.2)$$

и оно описывает распределение температуры вне цилиндра.

Будем предполагать, что при движении круглого цилиндра происходит неоднородный его нагрев. Математически это означает, что в его объеме действуют тепловые источники с плотностью q_i . В этом случае уравнение, описывающее распределение температуры внутри частицы цилиндрической формы имеет вид:

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}, \quad (2.3)$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности частицы.

Уравнения (2.2)– (2.3) решаются со следующими граничными условиями в полярной системе координат.

На поверхности нагретой цилиндрической частицы ($r = a$) учитываются непрерывность температуры и радиального потока тепла:

$$T_e = T_i, \quad (2.4)$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим граничные условия вдали от частицы, т.е. при $r \rightarrow \infty$:

– для температуры T_e и давления P_e справедливы условия:

$$T_e = T_\infty, \quad P_e = P_\infty. \quad (2.6)$$

Учтем конечность температуры в центре частицы, т.е. при $r \rightarrow 0$:

$$T_i \neq \infty. \quad (2.7)$$

Таким образом, мы получили, что температура вне частицы удовлетворяет однородному уравнению Лапласа (2.8), а внутри – неоднородному уравнению Лапласа (2.9):

$$\Delta T_e = 0, \quad r \geq a, \quad (2.8)$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i} \quad r \leq a. \quad (2.9)$$

Эта система уравнений решается с граничными условиями (2.4) – (2.7).

Найдем решение уравнения (2.8). В полярных координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t_e(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_e(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (2.10)$$

где $t_e = T_e / T_\infty$.

Решение уравнения (2.10) будем искать методом разделения переменных:

$$t_e(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (2.11)$$

и, подставляя (2.11) в (2.10) получаем два уравнения, где через n^2 обозначена константа разделения $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2. \end{cases}$$

Общим решением уравнения

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0,$$

является функция:

$$\Phi(\varphi) = M_n \cos(n\varphi) + N_n \sin(n\varphi). \quad (2.12)$$

Получим общее решение уравнения

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами и его решением является функция:

$$R(r) = D_o + \Gamma_o \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n r^n + \frac{\Gamma_n}{r^n} \right). \quad (2.13)$$

Таким образом, мы получили решение уравнения теплопроводности, описывающего поле температуры вне нагретой цилиндрической частицы и оно имеет следующий вид:

$$t_e(r, \varphi) = D_o + \Gamma_o \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n r^n + \frac{\Gamma_n}{r^n} \right) [M_n \cos(n\varphi) + N_n \sin(n\varphi)]. \quad (2.14)$$

Постоянные интегрирования $D_o, \Gamma_o, D_n, \Gamma_n, M_n, N_n$, входящие в (2.14), определяются из граничных условий. Из граничного условия (2.6) следует, что $D_o = 1, \Gamma_o = 0, D_n = 0$. Учитывая, что при нахождении силы, действующей на частицу и скорости ее движения мы ограничиваемся первым прибли-

жением по магнитному и гидродинамическому числам Рейнольдса, то отсюда следует: $\Gamma_n = 0$ ($n \geq 2$), $M_n = 0$ ($n \geq 2$), $N_n = 0$ ($n \geq 1$) и, следовательно:

$$t_e(r, \varphi) = 1 + \frac{\Gamma_1}{r} \cos(\varphi). \quad (2.14)$$

Найдем решение уравнения (2.9), т.е.

$$\Delta t_i = -\frac{q_i}{\lambda_i T_\infty}. \quad (2.15)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности частицы, правую часть уравнения (2.15) представим в виде:

$$-\frac{q_i}{\lambda_i T_\infty} = q_{i1}(r) \cos \varphi, \quad (2.16)$$

где $q_{i1}(r) = -\frac{1}{\pi \lambda_i T_\infty} \int_0^{2\pi} q_i(r, \varphi) \cos \varphi d\varphi$.

Подставляя (2.16) в (2.15), получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt_{i0}(r)}{dr} \right) = q_{i0}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tau_{i1}(r)}{dr} \right) - \frac{\tau_{i1}(r)}{r^2} = q_{i1}. \end{cases}$$

где мы представили $t_i(r, \varphi) = t_{i0}(r) + \tau_i(r) \cos \varphi$.

Поскольку фундаментальная системы (когда в правой части стоит ноль) решений нам известна, то частное решение неоднородного уравнения определяется методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа) [4]. В конечном итоге мы получаем следующие решения:

$$t_e(r, \theta) = 1 + \frac{\Gamma_1}{r} \cos(\theta). \quad (2.17)$$

$$t_i(r, \theta) = t_{i0}(r) + \tau_i(r) \cos \theta, \quad (2.18)$$

$$\text{где } t_{i0}(r) = B_0, \quad \tau_i(r) = B_1 r + \frac{A_1}{r} + \frac{1}{2} \left[r \int_1^r \frac{\psi_1(r)}{r} dr - \frac{1}{r} \int_1^r r \psi_1(r) dr \right],$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_1^0 r \psi_1(r) dr, \quad \psi_1(r) = r q_{i1}.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий на

$$\text{поверхности частицы: } B_0 = 1, \quad \Gamma_1 = \frac{2 A_1}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_1}}, \quad B_1 = \frac{A_1}{a^2} \frac{1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_1}}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_1}}.$$

Вследствие неоднородного распределения тепловых источников на поверхности частицы возникает тепловое скольжение [7]. Это явление хорошо изучено для частиц сферической формы [7]. Таким образом, причиной скольжения является нескомпенсированность потока импульса на поверхности частицы, которая появляется вследствие наличия какой-либо неоднородности в вязкой среде. Причиной возникновения теплового скольжения в нашем случае является неоднородность поверхности частицы по температуре. Это приводит к тому, что рассмотренные выше граничные условия для компонент массовой скорости – условия прилипания (равенства нулю как радиальной, так и касательной компоненты) мы должны заменить новыми граничными условиями. В данном случае они имеют следующий вид:

$$V_r^e = 0, \tag{2.19}$$

$$V_\varphi^e = \frac{K_{TS} \eta_e}{T_e \rho_e \cdot a} \frac{\partial T_e}{\partial \varphi}, \tag{2.20}$$

где K_{TS} – коэффициент теплового скольжения. Коэффициент K_{TS} определяются методами кинетической теории газов (из решения уравнения Больцмана в слое Кнудсена [7]). При коэффициентах аккомодации тангенциального им-

пульса и энергии, равных единицы газокINETический коэффициент (в случае плоской поверхности) $K_{TS} = 1.152$ [7].

Глава III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления

Решение уравнений (1.15) и (1.16) ищем в виде:

$$\mathbf{V}'_e = e^{Mx} \nabla \Phi_1 + e^{-Mx} \nabla \Phi_2, \quad (3.1)$$

$$p'_e = M \left(e^{Mx} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - e^{-Mx} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right). \quad (3.2)$$

Теперь для нахождения функций Φ_1 и Φ_2 подставим выражения (3.1), (3.2) в формулы (1.15) и (1.16), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{Mx} \nabla \Phi_1 + e^{-Mx} \nabla \Phi_2) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} (e^{Mx} \nabla \Phi_1 + e^{-Mx} \nabla \Phi_2) \mathbf{j} = 0,$$

$$M \left(e^{Mx} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - e^{-Mx} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) + e^{Mx} \Delta \Phi_1 + e^{-Mx} \Delta \Phi_2 = 0.$$

Получаем уравнения для нахождения функций Φ_1 и Φ_2 :

$$\Delta \Phi_1 + M \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$\Delta \Phi_2 - M \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0. \quad (3.4)$$

Удобно сделать замену $\Phi_1 = e^{\frac{1}{2}Mx} G$ в уравнении (3.3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} M e^{\frac{1}{2} M x} G + e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial G}{\partial x} \right) + e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + M \left(-\frac{1}{2} M e^{\frac{1}{2} M x} G + e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial G}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{4} M^2 e^{\frac{1}{2} M x} G - \frac{1}{2} M e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2} M e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial G}{\partial x} + e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} -$$

$$-\frac{1}{2} M^2 e^{\frac{1}{2} M x} G + M e^{\frac{1}{2} M x} \frac{\partial G}{\partial x} = 0,$$

$$e^{\frac{1}{2} M x} \Delta G - \frac{1}{4} M^2 e^{\frac{1}{2} M x} G = 0.$$

Получаем уравнение вида:

$$\Delta G - k^2 G = 0, \quad (3.5)$$

где $k = \frac{1}{2} M$.

Для нахождения функции Φ_2 в уравнении (3.4) используем следующую замену $\Phi_2 = e^{\frac{1}{2} M x} G$, получаем аналогичное (3.5) уравнение.

Выражение (3.5) – уравнение Гельмгольца [4]. В полярных координатах оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - k^2 G = 0. \quad (3.6)$$

Решения уравнения (3.6) ищем методом разделения переменных:

$$G(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) f_n(\varphi). \quad (3.7)$$

Подставляем (3.7) в (3.6), имеем:

$$f(\varphi) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{F}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - k^2 F f = 0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получаем:

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} = -n^2, \quad (3.8)$$

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - (k^2 r^2 + n^2) F = 0, \quad (3.9)$$

где n – константа разделения.

В уравнении (3.9) сделаем замену переменной $z = kr$ и в результате получаем следующее уравнение:

$$z^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + z \frac{dF}{dz} - (z^2 + n^2) F = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) совпадает с известным уравнением в математической физики - модифицированным уравнением Бесселя [8], решением которого являются модифицированные функции Бесселя целого порядка: $K_n(z)$ и $I_n(z)$. Функции $K_n(z)$ и $I_n(z)$ можно представить в виде разложения в степенной ряд [8]:

$$I_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)},$$

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^k + (-1)^{n+1} \ln \frac{z}{2} I_n(z) +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\} \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)}.$$

Эти функции обладают следующими особенностями: $K_n(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, $I_n(z \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$. Из граничного условия вдали от частицы (1.12) следует, что

функция $I_n(z)$ нас не устраивает. Таким образом, исходя из граничного условия на бесконечности и требования симметричности компоненты скорости V_x от x , решения имеют вид:

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-kx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n K_0(kr), \quad (3.11)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n e^{kx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n K_0(kr), \quad (3.12)$$

где C_n – постоянные, определяемые из граничных условий.

В случае малых kr мы можем в вычислениях ограничиться только двумя членами и в этом случае:

$$K_0(kr) \approx -\ln \frac{\gamma kr}{2}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial K_0(kr)}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\gamma kr}{2} = -\frac{1}{r} \frac{x}{r} = -\frac{\cos \varphi}{r}, \quad (3.14)$$

где $\ln \gamma = 0,577$ – постоянная Эйлера [8].

Таким образом, имеем следующие выражения для функций:

$$\Phi_1(r, \varphi) = C_0 e^{-\frac{M}{2} r \cos \varphi} \ln \frac{\gamma M r}{4} - C_1 e^{-\frac{M}{2} r \cos \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (3.15)$$

$$\Phi_2(r, \varphi) = -C_0 e^{\frac{M}{2} r \cos \varphi} \ln \frac{\gamma M r}{4} - C_1 e^{\frac{M}{2} r \cos \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (3.16)$$

Учитывая, что $M \ll 1$, раскладываем экспоненту в ряд:

$$e^{-\frac{M}{2} r \cos \varphi} \approx 1 - \frac{M}{2} r \cos \varphi + \dots \quad (3.17)$$

и ограничиваемся двумя членами разложения, получаем:

$$\Phi_1(r, \varphi) = -C_0 \ln \frac{\gamma Mr}{4} - \cos \varphi \left(\frac{C_1}{r} - \frac{MC_0}{2} r \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right), \quad (3.18)$$

$$\Phi_2(r, \varphi) = C_0 \ln \frac{\gamma Mr}{4} - \cos \varphi \left(\frac{C_1}{r} - \frac{MC_0}{2} r \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right). \quad (3.19)$$

Далее будем находить компоненты скорости из уравнения (3.1), пользуясь полученными выражениями для функций Φ_1 и Φ_2 . В результате имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} V_r^{ie}(r, \varphi) &= (1 + Mr \cos \varphi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + (1 - Mr \cos \varphi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = \\ &= (1 + Mr \cos \varphi) \left[-\frac{C_0}{r} - \cos \varphi \left(-\frac{C_1}{r^2} - \frac{MC_0}{2} \ln \frac{\gamma Mr}{4} - \frac{MC_0}{2} \right) \right] + \\ &+ (1 - Mr \cos \varphi) \left[\frac{C_0}{r} - \cos \varphi \left(-\frac{C_1}{r^2} - \frac{MC_0}{2} \ln \frac{\gamma Mr}{4} - \frac{MC_0}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

и аналогично:

$$\begin{aligned} V_\varphi^{ie}(r, \varphi) &= (1 + Mr \cos \varphi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + (1 - Mr \cos \varphi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} = \\ &= (1 + Mr \cos \varphi) \sin \varphi \left[\frac{C_1}{r} - \frac{MC_0}{2} r \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right] + \\ &+ (1 - Mr \cos \varphi) \sin \varphi \left[\frac{C_1}{r} - \frac{MC_0}{2} r \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right]. \end{aligned}$$

Далее в полученных выражениях оставляем члены пропорциональные $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, так как вклад в силу (1.18) имеют только они. Получаем:

$$V_r^{ie}(r, \varphi) = \cos \varphi \left[\frac{2}{r^2} C_1 + MC_0 \left(-1 + \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right) \right], \quad (3.20)$$

$$V_{\varphi}^{\prime e}(r, \varphi) = \sin \varphi \left[\frac{2}{r^2} C_1 - MC_0 \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right]. \quad (3.21)$$

Теперь найдем выражение для давления. Для нахождения p' подставим функции Φ_1 и Φ_2 из (3.18) и (3.19) в (3.2), имеем:

$$\begin{aligned} p'_e &= M \left[(1 + Mr \cos \varphi) \cos \varphi \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - (1 - Mr \cos \varphi) \cos \varphi \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right] = \\ &= M \left[(\cos \varphi + Mr \cos^2 \varphi) \left\{ -\frac{C_0}{r} - \cos \varphi \left(-\frac{C_1}{r^2} - \frac{MC_0}{2} \ln \frac{\gamma Mr}{4} - \frac{MC_0}{2} \right) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - (\cos \varphi - Mr \cos^2 \varphi) \left\{ \frac{C_0}{r} - \cos \varphi \left(-\frac{C_1}{r^2} - \frac{MC_0}{2} \ln \frac{\gamma Mr}{4} - \frac{MC_0}{2} \right) \right\} \right], \end{aligned}$$

и, оставляем члены пропорциональные $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, получаем:

$$p'_e = -\frac{2C_0 M}{r} \cos \varphi. \quad (3.22)$$

Таким образом, в третьей главе нами получены выражения для компонент массовой скорости и давления, которые имеют вид:

$$V_r^{\prime e}(r, \varphi) = \cos \varphi \left[\frac{2}{r^2} C_1 + MC_0 \left(-1 + \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right) \right], \quad (3.23)$$

$$V_{\varphi}^{\prime e}(r, \varphi) = \sin \varphi \left[\frac{2}{r^2} C_1 - MC_0 \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right]. \quad (3.24)$$

$$p'_e = -\frac{2C_0 M}{r} \cos \varphi. \quad (3.25)$$

Здесь постоянные интегрирования C_0 и C_1 определяются из граничных условий на поверхности нагретой цилиндрической частицы.

Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости упорядоченного движения твердой крупной нагретой частицы цилиндрической формы в режиме со скольжением в вязкой магнитной жидкости. Анализ полученных результатов

Сила, действующая на частицу цилиндрической формы со стороны магнитной жидкости, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и она имеет следующий вид (см. главу 1):

$$F = a \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos \varphi - p_{r\varphi} \sin \varphi) d\varphi, \quad (4.1)$$

где $p_{rr}, p_{r\varphi}$ – компоненты тензора вязких напряжений и в цилиндрической системе координат равны:

$$p_{rr} = -P_e + 2\eta_e \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad p_{r\varphi} = \eta_e \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \right). \quad (4.2)$$

Для того чтобы найти выражения для компонент тензора напряжений $p_{rr}, p_{r\varphi}$ необходимо от безразмерных величин перейти к размерным.

Из (1.10) имеем:

$$\mathbf{V}_e = U_\infty (\mathbf{V}'_e + \mathbf{i}) = U_\infty (V'_r \mathbf{e}_r + V'_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi),$$

в то же время:

$$\mathbf{V}_e = V_r^e \mathbf{e}_r + V_\varphi^e \mathbf{e}_\varphi.$$

Следовательно:

$$V_r^e = U_\infty (V'_r + \cos \varphi) = \frac{U_\infty \cos \varphi}{1 - 2 \ln \frac{\gamma Ma}{4}} \left(-1 + \frac{a^2}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right),$$

$$V_\varphi^e = U_\infty (V'_\varphi - \sin \varphi) = \frac{U_\infty \sin \varphi}{1 - 2 \ln \frac{\gamma M a}{4}} \left(-1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right).$$

И, аналогично, для поля давления:

$$p_e = p_\infty - \frac{4 \rho_e \nu_e U_\infty \cos \varphi}{1 - 2 \ln \frac{\gamma M a}{4}} \frac{1}{r},$$

где $p_\infty = -\frac{\rho_e \nu_e U_\infty}{a} p'_0$.

Таким образом, имеем следующие выражения для компонент массовой скорости и поля давления:

$$\begin{aligned} V_r^e &= U_\infty \cos \varphi \left[1 + \frac{2}{r^2} C_1 + M C_0 \left(\ln \frac{\gamma M r}{4} - 1 \right) \right], \\ V_\varphi^e &= U_\infty \sin \varphi \left[-1 + \frac{2}{r^2} C_1 - M C_0 \ln \frac{\gamma M r}{4} \right], \\ p_e &= p_0 - \frac{2 C_0 M}{r} \frac{\rho_e \nu_e U_\infty}{a} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2) находим компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} p_{rr} &= \frac{2 C_0 M}{r} \eta_e U_\infty \cos \varphi - p_0 + 2 \eta_e U_\infty \cos \varphi \left(-\frac{4}{r^3} C_1 + \frac{M C_0}{r} \right), \\ p_{r\varphi} &= -\frac{8 C_1 \eta_e U_\infty \sin \varphi}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку компоненты тензора напряжений нам известны, то мы можем найти общую силу, действующую на цилиндрическую частицу. Интегрируя выражение (4.1) с учетом формул (4.4), имеем:

$$F = 4 \pi \eta_e^{(S)} U_\infty M^{(S)} C_0. \quad (4.5)$$

Здесь индексом «S» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы

Из формулы (4.5) видим, что для нахождения силу нам необходимо знать постоянную интегрирования C_0 , которая определяется из граничных условий на поверхности частицы.

Случай А. В качестве граничных условий возьмем условия "прилипания", т.е.

$$V_r^e = 0, \quad V_\varphi^e = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) выражения (4.3), имеем следующую систему для нахождения коэффициента C_0 :

$$\begin{cases} \frac{2}{r^2} C_1 + MC_0 \left(-1 + \ln \frac{\gamma Mr}{4} \right) = -1 \\ \frac{2}{r^2} C_1 - MC_0 \ln \frac{\gamma Mr}{4} = 1 \end{cases},$$

и отсюда получаем:

$$C_0 = \frac{2}{M \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma Ma}{4} \right)}, \quad C_1 = \frac{a^2}{2 \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma Ma}{4} \right)}. \quad (4.7)$$

Подставляя коэффициент C_0 в выражение (4.5), получаем:

$$F = -8 \pi \eta_e^{(s)} \frac{U}{1 - 2 \ln \frac{\gamma M^{(s)}}{4}}. \quad (4.8)$$

Здесь $U = -U_\infty$ – скорость движения частицы цилиндрической формы относительно лабораторной системы координат.

В формуле (4.8) и далее во всех выражениях мы будем относить величины, отнесенные к единицы длины цилиндра, т.е. $a = 1$.

Формула (4.8) позволяет оценивать величину силы сопротивления, которая испытывает частица цилиндрической формы в вязкой несжимаемой

магнитной жидкости. Отрицательный знак показывает, что сила, действующая со стороны магнитной жидкости на цилиндр, направлена противоположно движению последней; следовательно, магнитная жидкость препятствует движению частицы через нее. Чтобы поддерживать стационарное движение, необходимо постоянно прикладывать силу этой же самой величины к частице цилиндрической формы в направлении ее движения.

Кроме того, полученное аналитическое выражения для силы сопротивления позволяют провести качественный анализ влияния средней температуры поверхности частицы цилиндрической формы (нагрев поверхности) незначительно отличающейся от температуры окружающей ее магнитной жидкости на величину силы сопротивления.

Из приведенной выше формулы видно, что в случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы на величину силы сопротивления. Это вытекает, как видно из формулы (4.8), коэффициент динамической вязкости экспоненциально уменьшается с повышением температуры. В случае малых относительных перепадов температуры в окрестности частицы будет иметь место линейная зависимость и вклад будет не более 10 %.

Если не учитывать влияния средней температуры поверхности частицы на величину силы сопротивления, полученная выше формула переходят в известные ранее полученные формулы [9].

Случай В. В качестве граничных условий возьмем условия "скольжения", т.е. при $r = a$:

$$V_r^e = 0, \quad V_\varphi^e = \frac{K_{TS} \eta_e}{T_e \rho_e \cdot a} \frac{\partial T_e}{\partial \varphi}, \quad (4.9)$$

где K_{TS} – коэффициент теплового скольжения.

В этом случае коэффициент C_0 имеет вид:

$$C_0 = \frac{2}{M^{(s)} \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma M^{(s)}}{4} \right)} - K_{TS} \frac{\eta_e^{(s)}}{U_\infty \rho_e^{(s)}} \frac{\Gamma_1}{M^{(s)} \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma M^{(s)}}{4} \right)},$$

и, с учетом коэффициента C_0 , имеем, что полная сила, действующая на частицу среды F_μ и силы F_{ph} , связанной с тепловым скольжением вдоль неравномерно нагретой поверхности частицы:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{ph}, \quad (4.10)$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = 8 \pi \eta_e^{(s)} \frac{U_\infty}{1 - 2 \ln \frac{\gamma M^{(s)}}{4}} \mathbf{i}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{F}_{ph} = -4 \pi \eta_e^{(s)} K_{TS} \frac{\Gamma_1}{\rho_e^{(s)} \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma M^{(s)}}{4} \right)} \mathbf{i}, \quad (4.12)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_1^0 y \psi_1(y) dy, \quad \psi_1(y) = y q_{i1}, \quad \Gamma_1 = \frac{2 A_1}{1 + \frac{\lambda_e^{(s)}}{\lambda_i^{(s)}}},$$

$$q_{i1}(r) = -\frac{1}{\pi \lambda_i^{(s)} T_\infty} \int_0^{2\pi} q_i(r, \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

Поскольку частица движется равномерно, то приравнявая полную силу \mathbf{F} к нулю, получаем выражение для скорости упорядоченного движения неравномерно нагретой частицы цилиндрической формы в режиме со скольжением:

$$U_{ph} = -K_{TS} \frac{\Gamma_1}{2 \rho_e^{(s)}} \mathbf{i}. \quad (4.13)$$

Следовательно, в **Случае В** получены аналитические выражения, позволяющие оценивать силу и скорость упорядоченного движения неравномерно нагретой частицы цилиндрической формы в режиме скольжения в вяз-

кой несжимаемой магнитной жидкости. Полученные формулы позволяют провести и количественный анализ этого явления в магнитной жидкости, т.е. можно провести эксперимент.

Заключение.

В дипломной работе приведено теоретическое описание движения гидрозольной нагретой частицы цилиндрической формы с учетом скольжения в вязкой несжимаемой магнитной жидкости. Получены аналитические выражения для силы сопротивления, когда средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей ее магнитной жидкости и выражения для силы и скорости упорядоченного движения неравномерно нагретой частицы цилиндрической формы в режиме со скольжением в вязкой магнитной жидкости. В последнем случае по полученным формулам можно провести и количественный анализ этого явления в магнитной жидкости.

Литература

1. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., ИЛ, 1952 . 290 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 652 с.
3. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика, М., Логос. 2005. 328 с.
4. Н.М. Матвеев Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 409 с.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса М.: Мир. 1976. 630 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
7. Ю.И. Яламов, В.С. Галоян Динамика капель в неоднородных вязких средах Ереван: Луйс. 1985. 89 с.
8. Абрамовиц М., Стиган И. (Abramowitz, Stegun) Справочник по специальным функциям. Наука, 1979.
9. Р.Я Дамбург Обтекание бесконечного цилиндра вязкой проводящей жидкостью в присутствии магнитного поля //Изв. АН Латвийской ССР. 1959. № 5 (142) . С.81-84