ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙНАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**( Н И У « Б е л Г У » )**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ» В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ И ПРОФИЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.01Педагогическое образование, профиль Математика
заочной формы обучения, группы 02041251
Сафоновой Алины Сергеевны

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2017

## Оглавление

## Введение

В настоящее время в числе приоритетных задач, стоящих перед современной системой образования, особую значимость приобрела задача развития критического и творческого мышления ученика. Это означает, что на первый план выходит задача сформировать личность, готовую к творческой деятельности. Пожалуй, ни один школьный предмет не может конкурировать с возможностями математики в воспитании мыслящей личности.

Уже несколько десятилетий тригонометрия, как отдельная дисциплина школьного курса математики не существует, она плавно растеклась не только в геометрию и алгебру основной школы, но и в алгебру и начала анализа.

Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям уделялось особое место в школьном курсе. Еще греки на заре человечества, считали тригонометрия важнейшей из наук. Поэтому и мы, не оспаривая древних греков, будем считать тригонометрию одним из важнейших разделов школьного курса, да и всей математической науки в целом.

Тригонометрические уравнения занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и прикладного характера.

В школьном математическом образовании с изучением тригонометрических уравнений связаны несколько направлений:

1. Решение уравнений;

2. Решение систем уравнений.

Анализ учебной, научно-методической литературы показывает, что большое внимание уделяется именно этим направлениям.

Требованием нашего времени является необходимость усиления прикладных направлений в обучении математике. Как показал анализ содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических уравнений в этом плане достаточно широки.

Так же следует заметить, что решение тригонометрических уравнений создаёт предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных со всем учебным материалом по тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приёмы преобразования тригонометрических выражений и т.д.) и даёт возможность установить действенные связи с изученным материалом по алгебре (уравнения, равносильность уравнений, неравенства, тождественные преобразования алгебраических выражений и т.д.) [1].

Иначе говоря, рассмотрение приёмов решения тригонометрических уравнений, предполагает своего рода перенос этих умений на новое содержание.

**Актуальность исследования**: анализ материала, посвященного решению тригонометрических уравнений в учебных пособиях «Алгебра и начала анализа» для 10 – 11 классов разных авторов, учет целей изучения тригонометрических уравнений, а так же обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, свидетельствует о том, что перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения решать уравнения каждого вида, развивая тем самым общие тригонометрические представления.

**Цель исследования:** Разработать методику, направленную на формирование у учащихся умений решать тригонометрические уравнения в общеобразовательном и профильном курсах математики.

**Объект исследования:** процесс обучения математике.

**Предмет исследования:** методика формирования у учащихся умений решать тригонометрические уравнения в общеобразовательном и профильном курсах математики.

**Гипотеза исследования:** Если выделить основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений в общеобразовательном и профильном курсах математики, и разработать методику их формирования, то это будет способствовать качественному научению решать тригонометрические уравнения.

Под осознанным и качественным изучением тригонометрии мы понимаем процесс обучения, осуществляемый с учетом идей личностно ориентированного обучения, при реализации которого не допускается формальной передачи знаний и схоластической отработки умений, т.е. изучение тригонометрии должно опираться как на логическую, так и на образную составляющие мышление, при этом учащимся должны быть предоставлены возможности для дифференциации и индивидуализации.

В процессе исследования и проверке достоверности гипотезы необходимо было решить следующие задачи:

1. Провести анализ психолого-педагогической, учебной и методической литературы по проблеме исследования.

2. Выявить роль тригонометрических уравнений в обучении математики.

3. Выделить основы формирования умений необходимых для решения тригонометрических уравнений.

4. Классифицировать методы решения тригонометрических уравнений.

5. Разработать методику формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения в общеобразовательном и профильном курсах математики.

6. Провести экспериментальное исследование разработанной методики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования:

1. Анализ психолого-педагогической и методической литературы.

2. Анализ учебно-методических пособий, учебников, дидактических материалов.

3. Наблюдения, беседы с учителями.

4. Педагогический эксперимент.

Работа состоит из двух глав, введения и заключения. Во введении подчеркнута актуальность изучения проблемы. Первая глава посвящена рассмотрению значимости тригонометрического материала в школьном курсе математики, классификации тригонометрических уравнений и неравенств, а так же методов их решений. Во второй главе описаны основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений и неравенств и методика формирования умений решать тригонометрические уравнения и неравенства. Список литературы включает 26 источника.

# Глава 1. Тригонометрические уравнения в общеобразовательном и профильном курсах математики

## 1.1 Этапы развития тригонометрии как науки

Тригонометрия является одним из наиболее молодых отделов элементарной математики, получивших окончательное оформление лишь в XVIII в., хотя отдельные идеи её относятся к глубокой древности, к античному миру и к математическому творчеству индусов (К. Птолемей, II в., Аль Баттани, IX в., и др.). Европейские математики достигли высокой степени совершенства в вычислении таблиц натуральных синусов и тангенсов (Региомонтанус, XV в., Ретикус и Питискус, XVI в., и др.).

Само название «тригонометрия» греческого происхождения, обозначающее «измерение треугольников»: τριγονον (тригонон) – треугольник, μετρειν (метрейн) – измерение.

Научная разработка тригонометрии осуществлена Л. Эйлером в его труде «Jntroductioinanalysisinfinitorum» (1748). Он создал тригонометрию как науку о функциях, дал ей аналитическое изложение, вывел всю совокупность формул из немногих основных формул. Обозначение сторон малыми буквами и противолежащих углов — соответствующими большими буквами позволило ему упростить все формулы, внести в них ясность и стройность. Эйлеру принадлежит мысль рассматривать тригонометрические функции как отношения соответствующих линий к радиусу круга, т. е. как числа, причём радиус круга как «полный синус» он принял за единицу. Эйлер получил ряд новых соотношений, установил связь тригонометрических функций с показательными, дал правило знаков функций для всех четвертей, получил обобщённую формулу приведения и освободил тригонометрию от многих ошибок, которые допускались почти во всех европейских учебниках математики.

Сочинение Л. Эйлера в дальнейшем послужило фундаментом для учебников тригонометрии. Одно из первых руководств, «Сокращённая математика» С. Румовского (1760), отдел «Начальные основания плоской тригонометрии», начинает изложение следующим образом: «Тригонометрия плоская есть знание через арифметические выкладки сыскивать треугольники, которые геометрия черченьем находит». Всё изложение сводится к решению треугольников (самые простые случаи), вычисления проводятся весьма сложным путём, учение о функциях отсутствует.

Таким образом, тригонометрия возникла на геометрической основе, имела геометрический язык и применялась к решению геометрических задач. Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул; применение отрицательных чисел позволило рассматривать направленные углы и дуги и распространить понятие тригонометрических линий (определенных отрезков в круге) для любых углов. В этот период создалась база для изучения тригонометрических функций как функций числового аргумента, основа аналитической теории тригонометрических (круговых) функций. Аналитический аппарат, позволяющий вычислять значения тригонометрических функций с любой степенью точности, был разработан Ньютоном.[25]

Современный вид тригонометрия получила в трудах великого ученого, члена Российской академии наук Л. Эйлера (1707 – 1783). Эйлер стал рассматривать значения тригонометрических функций как числа – величины тригонометрических линий в круге, радиус которого принят за единицу («тригонометрический круг» или «единичная окружность»). Эйлер дал окончательное решение о знаках тригонометрических функций в разных четвертях, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул, ввел единообразные обозначения. Именно в его трудах впервые встречаются записи $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$. Он также открыл связь между тригонометрическими и показательной функциями от комплексного аргумента. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие ее в строгой научной последовательности.

Аналитическое (не зависящее от геометрии) построение теории тригонометрических функций, начатое Эйлером, получило завершение в трудах великого русского ученого Н.И. Лобачевского.

Современная точка зрения на тригонометрические функции как на функции числового аргумента во многом обусловлена развитием физики, механики, техники. Эти функции легли в основу математического аппарата, при помощи которого изучаются различные периодические процессы: колебательные движения, распространение волн, движения механизмов, колебание переменного электрического тока. Как показал Ж. Фурье (1768 – 1830), всякое периодическое движение с любой степенью точности можно представить в виде суммы простейших синусоидальных (гармонических) колебаний. Если в начале развития тригонометрии соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ лишь выражало зависимость между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1, то в последующем это отношение стало отражать также сложение двух колебательных движений с происходящей при этом интерференцией.

Таким образом, на первоначальных стадиях своего развития тригонометрия служила средством решения вычислительных геометрических задач. Ее содержанием считалось вычисление элементов простейших геометрических фигур, то есть треугольников. Но в современной тригонометрии самостоятельное и столь же важное значение имеет изучение свойств тригонометрических функций. Этот период развития тригонометрии был подготовлен всем ходом развития механики колебательных движений, физики звуковых, световых и электромагнитных волн.

В этот период даны обобщения многим терминам тригонометрии и, в частности, выведены соотношения для $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, $tgn\alpha$, где n – натуральное число, и др. Функции $\sin x$ и $\cos x$ рассматриваются теперь как суммы степенных рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Вполне научное изложение тригонометрии даёт акад. М. Е. Головин в своём учебнике «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами» (1789). В этой книге можно найти все важнейшие формулы тригонометрии почти в том виде, в каком принято излагать их в XIX в. (за исключением обратных тригонометрических функций). Автор не нашёл нужным загромождать изложение введением секанса и косеканса, так как эти функции в редких случаях применяются на практике.

В 1804 г. выходит учебник Н. Фусса. Книга предназначена для гимназий. «Плоская тригонометрия,— говорит автор,— есть наука, имеющая предметом из трёх данных и числами изображённых частей прямолинейного треугольника определять три прочие его части». Учебник состоит из 4 равных частей. Общие понятия, решение треугольников, приложение тригонометрии к практической геометрии и геодезии и, наконец, теорема сложения. Учебник Н. Фусса отмежёвывается от сферической тригонометрии.

Шаг вперёд делает академик М. В. Остроградский в 1851 г. В своём конспекте по тригонометрии для руководства в военно-учебных заведениях он выступает как сторонник определения тригонометрических функций, на первом этапе их изучения, как отношений сторон в прямоугольном треугольнике с последующим обобщением их определения и распространением его на углы любой величины. [24]

## 1.2 Содержание и анализ материала по тригонометрии в различных школьных учебниках

Анализ материала, посвящённого решению тригонометрических уравнений и неравенств, в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов под ред. А.Н. Колмогорова и в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов авторов Ш.А. Алимова и др. свидетельствует, что различные виды тригонометрических уравнений и неравенств представлены в пособиях по математике для средней школы. Значит, перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения решать уравнения и неравенства каждого вида.

Рассмотрим содержание материала по тригонометрии изложенного в различных учебниках по математике за курс 10 – 11 класс средней школы, с целью его сравнения, анализа и формирования наиболее приемлемой методики внедрения данной темы в школьном курсе математики.

*Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11* [3]

Учебник разбит на 6 глав. Каждая глава открывается списком вопросов и задач. Затем коротко формулируются результаты, которые необходимо достичь после изучения главы. Материал, касающийся темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» представлен в главе III «Тригонометрические функции» после изучения глав «Функции и графики» и «Производная и её применение».

Четвёртая глава «Показательная и логарифмическая функции» и пятая глава «Интеграл и его применение» не содержат обращений к области тригонометрии вообще, а в шестой главе «Уравнения и неравенства» встречаются и тригонометрические уравнения, и тригонометрические неравенства.

Обращаясь в главе III к теме «Тригонометрические функции», М.И. Башмаков считает нужным повторить такие темы как: измерение углов; соотношения в треугольнике; вращательное движение; техника вычислений. Далее вводятся: определения и простейшие свойства тригонометрических функций; формулы приведения; значения тригонометрических функций.Здесь же вводится основное тригонометрическое тождество. Автор рассматривает вопрос решения простейших тригонометрических уравнений по тригонометрической окружности.

Следующие разделы данной темы «Исследование тригонометрических функций» и «Тождественные преобразования». Лишь после этого в разделе «Решение уравнений» вводятся различные виды уравнений. И соответственно здесь же говорится о способах и методах их решения.

Схема изучения темы «Решение тригонометрические уравнений» определяется следующим образом: **функция → преобразования →уравнения.**[3]

*Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11* [19]

Учебник разбит на 8 глав. В конце изучения каждой главы чётко обозначены основные результаты изучения. Курс изучения математики в 10 классе начинается с изучения главы «Тригонометрические функции». Здесь автор вводит понятия тригонометрической окружности на координатной плоскости, понятия синус и косинус, основные тригонометрические соотношения с ними связанные, решения простейших уравнений по тригонометрической окружности. Как таковые формулы приведения вводятся после изучения тригонометрических функций углового аргумента. Далее рассматриваются свойства и графики тригонометрических функций.

Во второй главе «Тригонометрические уравнения» подробно рассматривается решение каждого простейшего тригонометрического уравнения, на основе ранее введенных понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса. В этой же главе рассмотрены такие методы решения: разложение на множители и введение новой переменной; метод решения однородных тригонометрических уравнений. Другие методы решения рассматриваются после изучения третьей главы «Преобразование тригонометрических выражений».

Здесь схема изучения выглядит следующим образом: **функция → уравнения → преобразования.**

С точки зрения применения учебник Мордковича удобен для самостоятельного изучения учащимися, т.к. он содержит сильную теоретическую базу. Изложение теоретического материала ведётся очень подробно. В условиях острой нехватки часов для проведения занятий в классе возрастает значение самостоятельной работы учеников с книгой. Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберётся в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что заставить их запомнить, а что предложить им просто прочесть дома.

К недостаткам можно отнести не очень большое количество упражнений по этой теме в самом учебнике.[19]

*Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа* [14]

Учебник содержит 4 главы. Схема изучения материала по теме «Решение тригонометрических уравнений» радикально отличается от предыдущих, т.к. сначала рассматриваются тригонометрические функции числового аргумента и основные формулы тригонометрии. В этой же первой главе, но несколько позже, рассматриваются основные свойства тригонометрических функций, их графики и их исследование. После этого вводятся понятия арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс и «параллельно» с этим решение простейших тригонометрических уравнений. Автор не называет методов решения тригонометрических уравнений, а описывает алгоритм их решения..

Таким образом, схема изучения выглядит так: **преобразования → функции → уравнения**.

Стоит отметить, что учебник содержит достаточно много дидактических материалов, как простых так и более сложных. Это естественно обеспечивает учителю возможность варьировать задания для учащихся.

С точки зрения изложения теоретического материала нельзя сказать, что учебник идеально подходит для самостоятельного изучения.[14]

Анализ содержания набора задач в теме «Тригонометрические уравнения» приводит к следующим выводам:

1) преобладающими являются простейшие тригонометрические уравнения, решение которых основано на определениях соответствующих функций в понятиях арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа;

2) фактически отсутствуют тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на свойстве ограниченности синуса и косинуса;

3) если говорить о связях приемов решения тригонометрических уравнений с приемами тождественных преобразований тригонометрических и алгебраических выражений, то следует отметить, что эти приемы в учебном пособии представлены бедно и однообразно. Рассматриваются приемы тождественных преобразований:

а) тригонометрические выражения:

- прием использования основного тригонометрического тождества;

- прием использования формул двойного и половинного аргументы;

- прием преобразования суммы тригонометрических выражений в произведение;

б) алгебраических выражений:

- прием разложения на множители;

- прием преобразования тригонометрического выражения, представляющего собой однородный многочлен относительно синуса и косинуса.

Использование указанных приемов приводит к тригонометрическим уравнениям, которые условно можно разделить на следующие виды:

а) сводящиеся к квадратным относительно тригонометрической функции;

б) сводящиеся к дробно-рациональным относительно тригонометрической функции;

в) сводящиеся к однородным;

г) сводящиеся к виду $(f_1(x)-a_1)(f_2(x)-a_2)\ldots(f_n(x)-a_n)=0$, где $f_i(x)$ - тригонометрическая функция $a_i \in R$ [16].

## 1.3 Роль и место тригонометрических уравнений в общеобразовательном и профильном курсах математики

Тригонометрия традиционно является одной из важнейших составных частей школьного курса математики. И этот курс предполагает задачи, решить которые, как правило, можно, пройдя целенаправленную специальную подготовку.

Анализ школьных учебников по математике в полной степени определяет место тригонометрических уравнений и неравенств в линии изучения уравнений.

Изучению темы «Решение тригонометрических уравнений» часто предшествует изучение таких тем как «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций». В разделе «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» мы знакомим учащихся с понятиями арксинус, арккосинус, арктангенс.

Опыт преподавания математики показывает, что осознание важности изучаемого материала приходит к ученикам не в процессе его изучения, а в процессе его применения при решении других заданий, т.е. тогда когда он становится средством для решения других задач.

Так, например, решение уравнения $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 1$, сводится к простейшему уравнению $\cos x = 1$, причём частному виду простейшего, после элементарного преобразования выражения, стоящего в левой части уравнения по формуле косинуса разности.

Мы видим, что именно здесь школьники могут наблюдать пользу от изучения формул тригонометрии. С их помощью нерешаемое на первый взгляд уравнение или неравенство принимает достаточно простой и, главное, знакомый вид.

При таком подходе изучения тригонометрии, когда уравнения изучаются после формул преобразования тригонометрических выражений, место тригонометрических уравнений определяется через систематизацию знаний по темам «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций».

Если же тригонометрические уравнения изучаются до темы «Преобразование тригонометрических выражений», то здесь место их изучения определяется совершенно противоположным образом. Здесь на изучение тригонометрических уравнений отводится больше времени: как только появляется новая формула, она сразу же используется для решения уравнений. То есть в данном случае не формула преобразования является средством для решения тригонометрического уравнения, а уравнение выступает как средство закрепления тригонометрических формул.

Таким образом, при любом подходе к изучению тригонометрии, роль изучения уравнений неизмеримо велика, не зависимо от места их изучения. Ну и как следствие из этого велико и неизмеримо место изучения методов решения и тригонометрических уравнений. Т.к. авторы учебников не уделяют должного внимания обозначению методов решения тригонометрических уравнений, попробуем классифицировать, и соответственно методы их решения.

## 1.4 Виды тригонометрических уравнений и методы их решения

Материал, относящийся к тригонометрии, изучается не единым блоком, учащиеся не представляют себе весь спектр применения тригонометрического материала, дробление на отдельные темы приводит к тому, что тригонометрия изучается в течение нескольких лет.

Необходимость классификации уравнений вызывается невозможностью найти общий метод их решения. Очевидно, что классифицировать тригонометрические уравнения и неравенства имеет смысл с опорой на методы их решения. Мы будем рассматривать типы уравнений и неравенств в той последовательности, которая представляется нам наиболее приемлемой для обучения школьников, то есть в последовательности, построенной в соответствии с принципом «от простого к сложному».

### *1.4.1 Уравнения, сводящиеся к простейшим*

Практически все тригонометрические уравнения считаются «сводящимися к простейшим», но можно выделить ряд уравнений которые сводятся к простейшим достаточно просто. Рассмотрим сначала виды простейших уравнений.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$.

На эти уравнения следует обратить особое внимание, так как без умения их решать невозможно решить никакое другое тригонометрическое уравнение. Лучше всего, если учащиеся будут иметь схемы решения каждого из простейших уравнений (рис. 1).

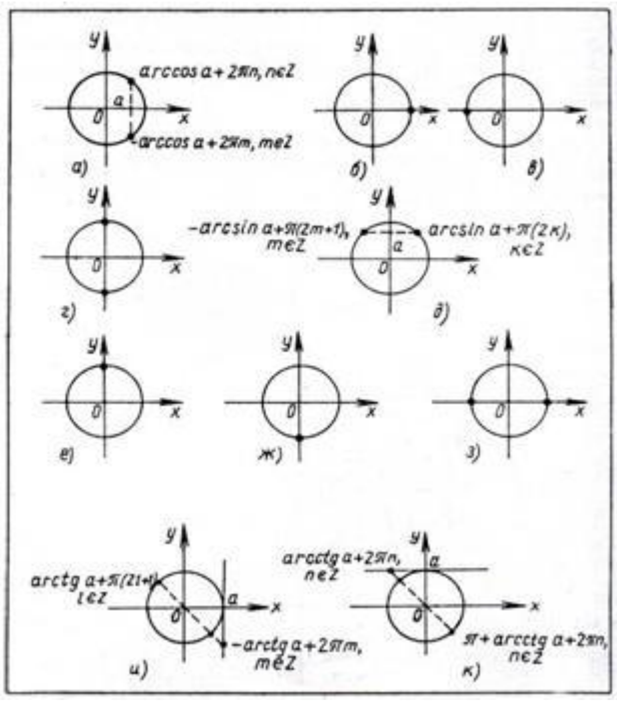



Рис.1

**Уравнение вида** $\cos x = a$.

Если $|a > 1|$, то $x \in Q$

Если $|a \leq 1|$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$ (рис 1, а)

Особые случаи:

$\cos x = 1$; $x = 2\pi\kappa, \kappa \in Z\,(рис 1, б)$

$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z\,(рис 1, в)$

$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z\,(рис 1, г)$

Любая из этих формул может быть заменена формулой общего вида, однако они проще и их выгоднее применять при решении уравнений.

Полезно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $0 \le \arccos a \le \pi$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\cos(\arccos a) = a$.

**Уравнение вида $\sin x = a$.**

Если $|a > 1|$, то $x \in Q$

Если $|a \le 1|$, то $x = (-1)^n \arccos a + \pi n, n \in Z$ (рис 1, д)

Особые случаи:

$\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\,(рис 1, е)$

$\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z\,(рис 1, ж)$

$\sin x = 0$; $x = \pi m, m \in Z\,(рис 1, з)$

Нужно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $-\frac{\pi}{2} \le \arccos a \le \frac{\pi}{2}$;

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos a + \arcsin a = \frac{\pi}{2}$.

**Уравнение вида $tgx = a$.**

$x = arctga + \pi n, n \in Z$ (рис 1, и)

Нужно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2}$; $arctg(-a) = -arctga$;

$tg(arctga) = a$

**Уравнение вида $ctgx = a$.**

$x = arctga + \pi n, n \in Z$ (рис 1, к)

Нужно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $0 < arctga < \pi$; $arcctg(-a) = \pi - arcctga$;

$ctg(arcctga) = a$; $arctga + arcctga = \frac{\pi}{2}$

Уравнения, сводящиеся к простейшим, имеют вид $\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$, $tgf(x) = a$, $ctgf(x) = a$.

Данные уравнения также являются простейшими и решаются сначала относительно *f(x)*, а затем полученные уравнения решаются относительно *x*.

Примеры:

1. $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$;

$\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2.

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})=1;$$
$$x+\frac{\pi}{3}=2\pi k, k\in Z;$$
$$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.$$

3. $tg(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3};$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+\pi n;$$
$$2x=\frac{5\pi}{12}+\pi n;$$
$$x=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

*1.4.2 Уравнения, являющиеся равенством двух одноимённых тригонометрических функций:*

а) уравнения вида $\sin f(x)=\sin\varphi(x)$ равносильно совокупности уравнений:

f(x)=$\varphi(x)+2\pi n, n\epsilon Z$ или f(x)=$-\varphi(x)+\pi+2\pi k, k\epsilon Z$

б) уравнения вида $\cos f(x)=\cos\varphi(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x)+2\pi k, k\in Z \\ f(x)=-\varphi(x)+2\pi n, n\in Z \end{cases}$$

в) уравнения вида $tgf(x)=tg\varphi(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{f(x)}=\varphi(x)+\pi k \\ \mathrm{f(x)}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \\ \varphi(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \end{cases}$$

Примеры:

1. **Решите уравнение:**

$$\sin 5x = \sin 3x$$

**Решение.**

$$\sin 5x = \sin 3x$$

$\begin{cases} 5x - 3x = 2\pi n, \\ 5x + 3x = \pi + 2\pi n. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}. \end{cases}$$

**Ответ:**
$x_1 = \pi n,$
$x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},$ n$\in Z$

**2. Решите уравнение:**

cos$x^2$+2sin$x^2$=1

**Решение:**

*$cos^{2x}$+2$sin^2x$=1*

*$cos^2x$=1-2$sin^2x$*

*$cos^2x$=cos2x*

$\begin{cases} x^2 - 2x - 2\pi n = 0, \\ x^2 + 2x - 2\pi n = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n,} \\ x = -1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n,} \qquad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$

**Ответ:** $\pm 1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n,}\ \ n = 0,1,2,\dots$

*1.4.3 Тригонометрические уравнения, содержащие одну и ту же функцию одного и того же аргумента и решаемые методом подстановки*

Уравнения данного вида $\varphi^2(x)+\varphi(x)+c=0$, где $\varphi(x)-$ тригонометрическая функция часто называются сводящимися кквадратным и решаются методом подстановки вместо тригонометрической функции данного аргумента некоторого параметра *t* с учётом допустимых значений *t* в зависимости от области значения функции.

Пример: Решите уравнение:

$$\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-2=0;$$

Пусть $\cos\frac{x}{2}=t, (t \le 1),$ тогда уравнение примет вид: $t^2-t-2=0$

$t_1=-1$; $t_2=2$.

Только один корень уравнения удовлетворяет условию допустимого значения *t*, следовательно, переходим к обратной замене.

$$\cos\frac{x}{2}=-1$$

$$\frac{x}{2}=\pi+2\pi n,$$

$$x=2\pi+4\pi n, n\in Z$$

Ответ: $2\pi+4\pi n, n\in Z$

*1.4.4 Однородные уравнения*

Предварительно можно показать учащимся вид однородной функции от двух переменных *U* и *V* первой степени, например, *3U + 2V*; второй степени: $U^2-3UV+V^2$; третьей степени: $5U^3+U^2V-UV^2-V^3$ и т.д., сформировав понятия выражения, однородного относительно переменных *U* и *V*.

Для лучшего усвоения и закрепления идеи необходимо решить с учащимися следующее уравнение:

$$2(x^2 - x + 3)^2 - 3(x^2 - x + 3)(x + 7) + (x + 7)^2 = 0.$$

Обозначим

$$x^2 - x + 3 = V,$$
$$x + 7 = U.$$

Получается однородное уравнение второй степени:

$$2V^2 - 3UV + U^2 = 0$$

Разделим обе части уравнения на $U^2$, получим $2\frac{V^2}{U^2} - 3\frac{V}{U} + 1 = 0$

Сделаем замену y=v/u, имеем $2y^2$-3y+1=0

$y_1$=0,5

$y_2$=1

Имеем 2 случая: U = V или V = 0,5 U

1) $x^2$-x+3=x+7

$x^2$-2x-4=0

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$

2)

$$2x^2 - 2x + 6 = x + 7,$$
$$2x^2 - 3x - 1 = 0,$$
$$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{5}; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Как правило, на практике очень часто встречаются уравнения, где

$$\begin{gathered} U = \cos x \\ V = \sin x \end{gathered}.$$

Примеры:

1. $2\cos x - 3\sin x = 0$.

Это однородное уравнение первой степени. Обе части уравнения нужно разделить на *cos x*. При этом получится равносильное уравнение. Чтобы в этом удостовериться, покажем, что уравнение *cos x = 0* не содержит корней данного уравнения.

Действительно, если

$\begin{cases} \cos x_0 = 0, \\ 2\cos x_0 - 3\sin x_0 = 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} \cos x_0 = 0, \\ \sin x_0 = 0 \end{cases}$.

Но это невозможно, т.к. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Следовательно, имеем равносильное уравнение

$$\mathrm{tg}x = \frac{2}{3}$$

$$x = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$$

2. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$.

Это однородное уравнение второй степени. Получим равносильное уравнение после деления обеих частей уравнения на $\cos^2 x$.

$$tg^2x - 5tgx + 4 = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z,$$
$$x = arctg4 + \pi n, n \in Z.$$

\

*1.4.5 Уравнения, решающиеся разложением на множители*

При решении уравнений такого типа необходимо пользоваться известным правилом: *произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.*

Примеры:

1. $\cos x(3tgx - 5) = 0.$

Используя данное правило получим:

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{array}{l} 3tgx = 5, \\ x = arctg\frac{5}{3} + \pi m, m \in Z. \end{array}$

2. $4\cos x\sin x + 2\cos x + 2\sin x + 1 = 0.$

Сгруппируем соответствующие слагаемые, получим:

$$(2\cos x + 1)(2\sin x + 1) = 0,$$
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$
$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

*1.4.6 Уравнения вида acosx+bsinx=c, где a,b,c≠0*

Один из способов решения такого уравнения состоит в том, что левую часть уравнения можно преобразовать по формуле:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi), где$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases},$$

Примеры:

1. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$

$a = \sqrt{3};$

$b = 1;$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, т.к. это решение системы $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Подставляя в формулу, получаем:

$$2\cos(x-\frac{\pi}{6}) = 2;$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{6}) = 1;$$

$$x-\frac{\pi}{6} = 2\pi n, n\in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$$

2. $5\cos x + 12\sin x = 13.$

$a = 5$
$b = 12$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5^2+13^2} = \sqrt{169} = 13$$

$\varphi = arctg\frac{12}{5}$, т.к. это решение системы $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{5}{13} \\ \sin\varphi = \frac{12}{13} \end{cases}$

Подставляя в формулу, получаем

$$\cos(x - arctg\frac{12}{5}) = 1$$
$$x = arctg\frac{12}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

К сожалению, внимание учащихся нечасто обращается на преобразование выражения $a\cos x + b\sin x$.

В некоторых пособиях эта формула приведена в таком виде

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi), \quad \text{где } tg\varphi = \frac{b}{a}.$$

Такая запись приведёт к ошибке, если, например, *a* и b отрицательны.[10]

Выделенные виды тригонометрических уравнений представлены в пособиях по математике для средней школы. Значит, перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения решать уравнения каждого вида.

# Глава 2. Формирование умений и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств

## 2.1 Основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений

В методической литературе существуют различные трактовки понятия «умения». Например, Петровский А.В. под «умениями» понимает способность использовать имеющиеся данные, знания или понятия, оперировать ими для выявления существенных свойств вещей и успешного решения определенных теоретических или практических задач [22].

По мнению Булыгиной Т.Б. «умения – это способность осознанно выполнять определенное действие».

Матюхина М.В. дает следующее определение: «умение – сочетание знаний и навыков, которое обеспечивает успешное выполнение деятельности». Навыки – это автоматизированные способы выполнения действий. Знания – это разновидность субъективных образов в сознании. Понятие – это форма знания, которая отражает единичное и особенное, являющееся одновременно и всеобщим [6].

Рассмотрим следующее понятие – «формирование умений». Под ним понимается деятельность учителя, связанная с организацией усвоения определенного элемента социального опыта учеником.

Формирование умений – это овладение всей сложной системой операций по выявлению и переработке информации, содержащейся в знаниях и получаемой от предмета, по сопоставлению и соотнесению информации с действиями.

Формирование умений выступает, прежде всего, как продукт все углубляющихся знаний. Умения формируются на основе освоения понятий о различных сторонах и свойствах изучаемых объектов. Главный путь формирования умений – это приучение учащихся видеть различные стороны в объекте, применять к нему разнообразные понятия, формулировать в понятиях многообразные отношения этого объекта. Учащихся надо научить преобразовывать объект с помощью синтеза через анализ. Применяемые преобразования зависят от того, какие отношения и зависимости требуется установить. Схема таких преобразований и есть план решения задачи.

Научение умениям может осуществляться разными путями. Один из них заключается в том, что учащемуся сообщают необходимые знания, затем перед ним ставят задачи на их применение. И учащийся сам ищет решения, обнаруживая путем проб и ошибок соответствующие ориентиры, способы переработки информации и приемы деятельности. Этот путь называют проблемным обучением. Другой путь заключается в том, что учащихся обучают признакам, по которым можно однозначно распознать тип задач и требуемые для ее решения операции. Этот путь называют алгоритмизированным обучением или обучением на полной ориентировочной основе. Наконец, третий путь заключается в том, что учащегося обучают самой психической деятельности, необходимой для применения знаний. В этом случае педагог не только знакомит учащегося с ориентирами отбора признаков и операций, но и организует деятельность учащегося по переработке и использованию полученной информации для решения поставленных задач. Это достигается систематическим проведением учащегося через все этапы деятельности, требующей ориентировки на признаки, которые закреплены в изучаемом понятии. На первом этапе эти ориентиры (существенные признаки) предмета предъявляются ученику в готовом, материализованном виде, в виде схем, символа, предметов, а операции по выделению ориентиров осуществляются в форме предметных действий. На втором этапе ориентиры и предметные операции заменяются речевыми обозначениями и действиями. На третьем этапе отпадают и словесные действия, их заменяют мыслительные операции, которые протекают по все более свернутой схеме. Эту концепцию называют методикой поэтапного формирования умственных действий [6].

Фактически эти этапы проходит каждый человек при формировании новых понятий. Однако при обычном обучении эти этапы не организуются сознательно. Поэтому ученик вынужден сам искать и обнаруживать нужные существенные или логические признаки, а главное – сам подбирать для этого действия. Неизбежно возникают ошибки. Понятия формируются не всегда полные и верные. Традиционное обучение, основанное на «самостоятельном» осмысливании и корректировке через результаты, является следствием неполноты ориентировочной деятельности ученика.

Причем деятельность ученика не должна сводиться к созданию понятий, нахождению их признаков, а к тому, чтобы наполнить сообщаемые понятия значением, то есть усвоить способы их использования, - это деятельность не по самостоятельному отыскиванию существенных признаков вещей, закрепленных в понятиях, а по применению этих признаков. Чтобы понятия формировались полно и безошибочно, соответствующая деятельность ученика должна строиться на полной ориентировочной основе. Иначе говоря, учитель должен давать ученику готовыми все существенные признаки объектов и обучать ребенка тем операциям, каких требует каждый из признаков для его выявления и воспроизведения.[30]

Говоря об умениях решать тригонометрические уравнения и неравенства, нужно иметь в виду, что эти умения образуют целый комплекс, в который среди прочих входят следующие:

- умения отыскать на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженных в долях числа $\pi$ ($\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$ и т.д.) и не выраженных в долях числа $\pi$ (M(2), M(-7), M(6) и т.д.);

- умение изображать числа точкой числовой окружности и надписывать точки (имеется в виду определять все числа, которые соответствуют данной точке);

- умение изображать числа на числовой окружности по значению одной из тригонометрических функций;

- составлять двойные неравенства для дуг числовой окружности;[20]

- умение провести анализ предложенного уравнения или неравенства с целью получения оснований для отнесения уравнения к одному из известных видов;

- умение осуществить обоснованный выбор приема решения;

- умение решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства и иллюстрировать решение с помощью графика, тригонометрического круга;

- умение применять свойства тригонометрических функций при решении уравнений и неравенств;

- умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений, которое, в свою очередь, предполагает умение применять приемы преобразований алгебраических выражений и соответствующие тригонометрические формулы;

- умение решать алгебраические уравнения определенных видов (линейные, квадратные, дробно-рациональные, однородные, сводящиеся к совокупностям алгебраических уравнений указанных видов) и др.[28]

Перечисленные умения формируются в течение длительного времени, рядом из них учащиеся должны владеть, приступая к изучению тригонометрических уравнений. Но рассмотрение приемов решения тригонометрических уравнений или неравенств предполагает своего рода перенос этих умений на новое содержание.

Анализ программ по математике для средней школы, учет целей изучения тригонометрических уравнений, а также обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, приводит к выводу, что указанные умения должны быть усвоены, по крайней мере, на уровне применения «в ситуации по образцу». Предложенные ниже методики предусматривает овладение учащимися умениями решать простейшие тригонометрические уравнения, и знакомство с приемами решения тригонометрических уравнений других видов.[6]

## 2.2 Методика формирования у учащихся решать тригонометрические уравнения

В процессе формирования у школьников умений решать тригонометрические уравнения рекомендуется выделить три этапа:

1. подготовительный,

2. формирование умений решать простейшие тригонометрические уравнения,

3. введение тригонометрических уравнений других видов и установление приемов их решения.

Цель подготовительного этапа состоит в том, чтобы, во-первых, начать формирование у школьников умения использовать тригонометрический круг или график функции для решения уравнения; во-вторых, познакомить учащихся с применением свойств тригонометрических функций для решения уравнений вида $\sin x = 1, \cos x = 1, tgx = 0$ и т.п.; в-третьих, специально обратить внимание школьников на применение различных приемов преобразований выражений при решении тригонометрических уравнений.

Реализовать этот этап рекомендуется в процессе систематизации знаний школьников о свойствах тригонометрических функций. Основным средством могут служить задания, предлагаемые учащимся и выполняемые либо под руководством учителя, либо самостоятельно. Приведем примеры таких заданий:

1) найти все числа отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, для которых верно $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2};\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и т.п.,

2) отметить на единичной окружности точки t, для которых соответствующие значения t удовлетворяют равенству $\sin t=\frac{1}{2};tgt=-\sqrt{3}$ и т.п.,

3) используя график функции $y=\cos x$, указать множество чисел, для которых верно $\cos\alpha=-\frac{1}{2};\cos\alpha=-\frac{8}{7};\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

4) решить уравнения

а) $\cos x=1$,

б) $\cos 3x=\cos^2 x+\sin^2 x$,

в) $\sin 2x\cos 3x-\cos 2x\sin 3x=1$,

г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin x=1$,

д) $1+\cos 2x-\cos^2 x=1$,

5) решить уравнения:

а) $\sin x\cos 2x=0$,

б) $(1-\sin x)tgx=0$,

в) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

Обратим внимание на два последних задания. В основе решения предложенных уравнений, как правило, – применение определений синуса, косинуса числа (либо таких свойств тригонометрических функций, как наличие корней, наличие экстремумов у функций синус и косинус). Выполнение пятого задания предполагает решение совокупностей тригонометрических уравнений рассматриваемого вида (например, последнее уравнение преобразуется следующим образом: $1+\cos 2x-\sin 2x\cos 2x=1$, $\cos 2x(1-\sin 2x)=0$, то есть имеем совокупность уравнений $\cos 2x=0$ или $\sin 2x=1$). Следует специально обратить внимание учащихся на цель преобразований тригонометрических выражений при решении предложенных уравнений: замена данного выражения, тождественно ему равным и зависящим от одной тригонометрической функции, либо преобразование выражения в произведение линейных множителей относительно тригонометрических функций.

Реализация второго этапа обучения школьников решению тригонометрических уравнений, на котором происходит формирование умений решать простейшие уравнения, предполагает введение понятий «арксинус числа», «арккосинус числа» и т.д., получение общих формул решения простейших тригонометрических уравнений, формирование умений иллюстрировать решение простейших тригонометрических уравнений с помощью графика соответствующей функции или тригонометрического круга.

В настоящее время понятия арксинуса, арккосинуса числа и т.д. вводятся без обращения к функции, которая является обратной по отношению соответственно к функциям синус, косинус и т.д. В качестве основы введения указанных понятий используется так называемая теорема о корне. Указанная теорема применяется и для введения способа решения простейших тригонометрических уравнений. Это требует выделять в процессе получения формул, задающих множества их решений, несколько пунктов: 1) рассматривается промежуток, длина которого равна наименьшему положительному периоду функции, представленной в левой части уравнения и на котором определено понятие арксинуса, арккосинуса или арктангенса числа (в зависимости от предложенного уравнения); если эта функция – синус или косинус, то промежуток разбивается на два);2) данное уравнение решается на каждом промежутке; основой решения служит теорема о корне, которая конкретизируется для соответствующей тригонометрической функции; 3) на основе свойства периодичности рассматриваемой тригонометрической функции делается вывод о том, что числа $\alpha+2\pi k$ или $\alpha+\pi k, k\in Z$ (здесь $\alpha$ - решение уравнения, принадлежащее выделенным промежуткам) являются решениями данного уравнения; этот вывод используется для получения формулы решений.

Рекомендуем предложить учащимся и другой способ получения формулы решений простейшего тригонометрического уравнения. Раскроем его суть, обратившись к решению уравнения $\sin x = a$ ( $a\in R$ и $|a|\le 1$).

Так как $|a|\le 1$, то данное уравнение обязательно имеет решения, одно из которых принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Обозначим его $\alpha$. Тогда $\sin\alpha = a$ $(\alpha = \arcsin a)$. С учетом принятых обозначений данное уравнение приводим к виду: $\sin x - \sin\alpha = 0$. Преобразуем левую часть уравнения в произведение: $2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x+\alpha}{2}=0$; это дает возможность заменить данное уравнение равносильной совокупностью простейших тригонометрических уравнений $\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$ или $\cos\frac{x+\alpha}{2}=0$. Используя свойство функций синус и косинус (множество корней), получаем: $\frac{x-\alpha}{2}=\pi k, k\in Z$ или $\frac{x+\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. Теперь осталось выразить $x$ через $\alpha = \arcsin a$ ( $x=\arcsin a + 2\pi k, k\in Z$

или $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$) и записать общую формулу для нахождения решений уравнения.

Предложим рекомендации, связанные с методикой организации деятельности учащихся на втором этапе обучения решению тригонометрических уравнений. При этом будем ориентироваться на использование второго способа получения общей формулы решений простейшего тригонометрического уравнения.

Во-первых, мотивировать целесообразность получения общего приема решения простейших тригонометрических уравнений можно, обратившись, например, к уравнениям $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{x}{2}$, $1 + \cos 8x = \cos 4x$. Используя знания и умения, приобретенные на подготовительном этапе, учащиеся приведут предложенные уравнения к виду $\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 4x \cdot \left(\cos 4x - \frac{1}{2}\right) = 0$, но могут затрудниться в нахождении множества решений каждого из полученных уравнений. Указанных затруднений можно избежать, если обратиться к соответствующей иллюстрации (решение уравнения графически или с помощью тригонометрического круга), но и в этом случае остается открытым вопрос: нельзя ли получить общие формулы для записи множеств решений тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$ ($a \neq 0$ и $|a| \neq 1$), $tgx = a$ ($a \neq 0$), которые дадут возможность сразу фиксировать искомые множества.

Во-вторых, следует обратить внимание учащихся, что получение общих формул для записи множеств решений уравнений указанного вида предполагает введение понятий арксинуса, их арккосинуса числа и т.д. Ввести эти понятия должен учитель, демонстрируя школьникам применение теоремы о корне к каждой из тригонометрических функций на определенном множестве. При этом целесообразно обратиться к графическому способу решения задачи о нахождении множества решений уравнения вида $\sin x = a$

, $\cos x = a$, $tgx = a$ на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $[0; \pi]$ и $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ соответственно (решить такую задачу учащиеся могут самостоятельно).

В-третьих, следует провести работу по формированию у учащихся умений находить значения выражений вида $\arcsin a$, $\arccos a$, $arctga$ при данных значениях $a$. С этой целью полезно предложить учащимся задания типа

1) Вычислить: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $arctg1$, $\arccos\frac{5}{4}$;

2) Найти значение выражения: $\cos(arctg(-1))$, $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$, $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ и т.п.

Учитель должен обратить внимание учащихся на способ выполнения каждого из заданий, дать соответствующий образец. В первом случае способ задается следующим предписанием: нужно найти такое действительное число $\alpha$, которое удовлетворяет двум условиям (укажем эти условия, имея в виду пример $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$: это число принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; синус искомого числа равен $-\frac{1}{2}$, то есть $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$. Способ выполнения второго задания основан на применении понятий «арксинус числа», «арккосинус числа» и т.д. и, возможно, тригонометрических тождеств. Особое внимание следует обратить на выполнение последнего примера этого задания.

В-четвертых, целесообразно провести работу по актуализации у учащихся приемов преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение, обратить внимание школьников на роль этих приемов при решении тригонометрических уравнений. Организовать такую работу можно через самостоятельное выполнение учащимися предложенных учителем заданий, среди которых выделим следующие:

1)Разложить на множители: $\sin x - \sin 3x,\ tg5x + tg2x,\ \sin x + \cos 3x$.

2)Решить уравнение: $\cos x - \cos 3x = 0,\ tg5x = tg2x,\ \cos 3x = \sin x$. Выполнение учащимися приведенных заданий следует заключить выводом о том приеме, который лежит в основе решения данных уравнений: привести уравнение к виду $f(x) - g(x) = 0$, разложить левую часть на множители, воспользоваться условием равенства нулю произведения и заменить уравнение равносильной совокупностью уравнений, каждое из уравнений совокупности решить, используя факт о множестве корней соответствующей тригонометрической функции.

В-пятых, начать работу по введению способа решения простейших тригонометрических уравнений следует с постановки вопроса: при каких значениях параметра $a$ уравнение вида $\sin x = a$ ($\cos x = a$, $tgx = a$, $a \in R$) имеет (не имеет) действительного решения и почему. Выделение множества решений параметра, при которых указанное уравнение разрешимо в $R$, дает основание для поиска способа его решения. Заметим, что в практике обучения школьникам достаточно разъяснить суть такого способа для одного из уравнений, например, $\sin x = a$, $|a| \le 1$. При этом нужно лишь обратить внимание учащихся на то, что если мы заменим число $a$ значением функции синус некоторого аргумента, то данное уравнение сводится к уравнению, способ решения которого уже известен. Поэтому, по сути, большая часть работы, связанной с получением формулы решений рассматриваемого уравнения, может быть выполнена учащимися самостоятельно. Учитель выступает в роли консультанта и помогает школьникам сделать обобщения. Получение формул, задающих множества решений уравнений $\cos x = a$, $tgx = a$ целесообразно представить учащимся для самостоятельной работы.

В-шестых, от учащихся не рекомендуется требовать обязательной иллюстрации решения каждого простейшего тригонометрического уравнения с помощью графика или тригонометрического круга. Но обратить внимание на ее целесообразность следует (в особенности на применение круга), так как в последующем при решении тригонометрических неравенств соответствующая иллюстрация служит очень удобным средством фиксации множества решений данного неравенства.

Последующее формирование у учащихся умений решать простейшие тригонометрические уравнения осуществляется в основном в процессе самостоятельного решения школьниками уравнений, среди которых – уравнения, приводящиеся к простейшим или их совокупностям после выполнения преобразований тригонометрических выражений. В список предлагаемых учащимся уравнений рекомендуем включить такие, которые сводятся к виду

$\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(2x - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$; $tg(5 + 4x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; $|\cos 2x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и т.п.

Аналогичные задания могут служить средством контроля за сформированностью у учащихся умений решать простейшие тригонометрические уравнения.

В связи с реализацией третьего этапа процесса формирования у школьников умений решать тригонометрические уравнения сделаем лишь два замечания.

Во-первых, знакомство учащихся с приемами решения тригонометрических уравнений, не являющихся простейшими, целесообразно осуществлять по следующей схеме: обращение к конкретному тригонометрическому уравнению = типичному представителю определенного вида $\rightarrow$ совместный поиск (учитель – учащиеся) приема решения $\rightarrow$ самостоятельный перенос найденного приема на другие уравнения этого же вида $\rightarrow$ обобщение-вывод о характеристиках уравнений рассматриваемого вида и общем приеме решения этих уравнений.

Во-вторых, чтобы, с одной стороны, систематизировать знания учащихся о приемах решения тригонометрических уравнений, а с другой, продемонстрировать достаточную «условность» отнесения ряда уравнений к определенному виду, рекомендуем специально показать школьникам возможность применения различных приемов решения к одному и тому же уравнению. Для этого целесообразно обратиться к «хорошему уравнению, установить все те приемы, которые могут быть реализованы в процессе его решения, акцентировать внимание учащихся на их особенностях, выделить прием, который в рассматриваемой ситуации оказывается наиболее рациональным.

В качестве такого «хорошего» уравнения можно предложить, например, следующее $\sin x + 5 = 7\cos x$.

Это уравнение может быть приведено

1) к виду однородного относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$

$\left(6\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0\right)$

2) к квадратному относительно $tg\frac{x}{2}$ с помощью универсальной подстановки

$\left(6tg^2\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2} - 1 = 0\right)$;

3) к простейшему тригонометрическому вида

$$\cos\left(x + \arccos\frac{7}{\sqrt{50}}\right) = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

после применения приема введения вспомогательной переменной.

Сравнение приемов решения уравнения в каждом из указанных случаев свидетельствует, что наиболее рациональным является приведение данного уравнения к простейшему тригонометрическому, так как процесс решения состоит из наименьшего числа операций, выполнение каждой из этих операций не может нарушить равносильность исходного и полученного уравнений, запись ответа более компактна.

В заключение приведем примеры тригонометрических уравнений, которые рекомендуем предложить учащимся для самостоятельного решения:

1 группу составляют тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на определениях и некоторых свойствах тригонометрических функций.

а) $\cos x \cdot tgx = 1$; б) $\cos x - \sin x = 3$; в) $\sin 3x = 2 + \sin x$; г) $\sin x = a + \frac{1}{a}, a \neq 0$

2 группу составляют простейшие тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на определениях тригонометрических функций и понятиях арксинуса, арккосинуса и арктангенса числа.

а) $2\cos\frac{x+60^0}{2} + \sqrt{3 = 0}$; б) $3tg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$; в) $3\sin(x-3) = \sqrt{10}$;

г) $\frac{\pi}{7} - \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

3 группа задач объединяет тригонометрические уравнения, решение которых потребует выполнения тождественных преобразований

тригонометрических и алгебраических выражений для приведения данного уравнения к одному из известных видов.

а) $\cos^2(x+\pi)+\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)+2=0$; б) $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z=\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}$;

в) $\frac{3}{\sin x+1}=2\sin x-3$; г) $2\sin^2 t+\sin t\cos t-3\cos^2 t=0$;

д) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=0$.

## 2.3 Педагогический эксперимент, его проведение и обработка результатов

**Педагогический эксперимент**

Предметом исследования является система тригонометрических уравнений, направленная на развитие умений решать тригонометрические уравнения.

Объект исследования – процесс обучения математике.

Гипотеза эксперимента: если в процессе изучения тригонометрического материала использовать разработанную методику, то это будет способствовать осознанному и качественному формированию умений решать тригонометрические уравнения.

Цель: заключается в выявлении и обосновании возможности использования данной методики для формирования умений решать тригонометрические уравнения.

В процессе исследования проблемы и проверки достоверности сформулированной гипотезы необходимо было решить следующие задачи:

1. Выявить роль тригонометрических уравнений при обучении математике;

2. Разработать методику формирования умений решать тригонометрические уравнения, направленную на развитие тригонометрических представлений;

3. Экспериментально проверить эффективность разработанной методики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования:

- анализ психолого-педагогической и методической литературы;

- теоретический метод;

- практический метод.

Ход эксперимента можно разбить на два этапа:

1.) Диагностирующий;
2.) Обучающий;

База исследования: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Фощеватовская средняя общеобразовательная школа Волоконовского района Белгородской области.

**Диагностирующий этап эксперимента**

В качестве испытуемых 7 учеников 10 класса МБОУ «Фощеватовская СОШ» с. Фощеватово. Среди учеников были хорошо успевающие, но и отстающие ученики.

Целью этапа является выявление уровня сформированности основных умений необходимых для решения тригонометрических уравнений.

Для реализации цели, поставленной на данном этапе, были сформулированы следующие задачи:

1. Выявить умение учащихся определять положение точки на единичной окружности, соответствующей данному углу;

2. Установить умение учащихся отмечать угол соответствующий конкретному значению конкретной тригонометрической функции;

3. Проверить умения определять принадлежность угла соответствующей четверти и оперировать с формулами приведения;

4. Вычислять значения тригонометрических функций и обратных тригонометрических функций некоторых углов (как положительных, так и отрицательных);

Для реализации данных задач были использованы методы:

- контрольная работа;

- наблюдение.

Учащимся была предложена контрольная работа, состоящая из 7 заданий. Задания контрольной работы были выбраны в соответствии с умениями, необходимыми для решения тригонометрических уравнений.

Текст самостоятельной работы

**1**. Отметьте на единичной окружности точку $P_\alpha$, если

$\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = 2\pi$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

**2.** В какой четверти координатной плоскости расположена точка $P_\alpha$, если

$\alpha$ равно: $\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-2{,}3\pi$, $\frac{17\pi}{5}$

**4**. Отметьте на тригонометрической окружности точки $P_\alpha$, если:

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha = -1$

$tg\alpha = -1$ $\qquad$ $tg\alpha = \frac{1}{2}$

**5.** Приведите выражение к тригонометрическим функциям I четверти.

а) $\cos\frac{7\pi}{3}$ б) $\sin\frac{9\pi}{4}$ в) $\cos\frac{4\pi}{5}$ г) $\sin\frac{9\pi}{10}$ д) $tg\frac{5\pi}{4}$

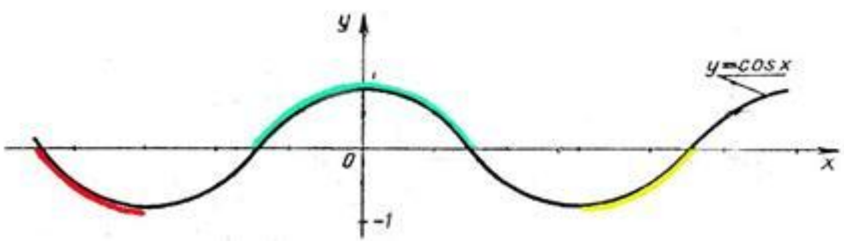
**6.** Дана дуга МР. М – середина I – ой четверти, Р – середина II-ой четверти.

Ограничить значение переменной t для: (составить двойное неравенство)

а) дуги МР;

б) дуги РМ.

**7.** Записать двойное неравенство для выделенных участков графика:




**8.** Решите неравенства *sinx > 1, sinx <-1 , cos x > 1, cosx <-1*

**9**. Преобразовать выражение *cos5xcos4x-sin5xsin4x*

Результаты диагностирующего эксперимента.

Результаты контрольной работы отражены в таблице в количественном и процентном отношении.

| | |
|---|---|
| Решили здание на обозначение точки на окружности | 71,4% |
| Решили задания на принадлежность угла соответствующей четверти | 57,1% |
| Отметили угол по значению функции | 71.4% |
| Преобразование функции к углу I четверти | 57,1% |
| Составили двойные неравенства для дуг окружности | 57,1% |
| Составили тригонометрические неравенства для дуг графика функции | 85,7% |
| Решили неравенства с помощью свойств функции | 71,4% |
| Преобразовали выражение | 42,9% |

1 задание: (задание на обозначение точки).

Справилось 5 человек.

Ошибки: Неверное деление на доли тригонометрической окружности. Неверное определение четверти.

2 задание: (задание на принадлежность угла к координатной четверти).

Справилось 4 человек.

Ошибки: Неумение определять положение отрицательного угла. Неверное представление десятичной дроби к виду обыкновенной.

3 задание: (определение угла по значению конкретной функции). Справилось 5 человек.

Ошибки: Определение не пар точек у функций синус и косинус, а только одной. Для функции $y = tgx$ учащиеся отмечают точку не на окружности, а на прямой, изображающей линию тангенса

4 задание: (задание на преобразование угла к острому).

Справилось 4 человек.

Ни один из учеников не ответил правильно на все формулы. Вероятно, что у учеников нет чёткого понимания принадлежности угла к интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

5 задание: (составление двойных неравенств для дуг тригонометрической окружности)

Справилось 4 человек.

Ошибки: сложность вызывает определение дуги, расположенной ниже мнимой прямой МР, а именно обозначение той точки дуги, которая обозначается отрицательным значение $\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

6 задание: (составление двойных неравенств для дуг графика тригонометрической функции).

Справилось 6 человек.

Ошибки: Учащиеся затрудняются в определении направления той дуги, которая расположена в левой части графика, т.е. граничные значения которых имеют отрицательное значение. «Они ведут по дуге от центра»

7 задание: (решение тригонометрических неравенств с помощью свойств тригонометрических функций).

Справилось 5 человек.

Ошибки: Сложно выделить трудности, т.к. учащиеся, не справившиеся с заданием, не приступали к его выполнению.

8 задание: (преобразование выражения)

Справилось 3 человек.

Ошибки: Используется аналогия с формулой синуса разности.

В результате наблюдения работы учащихся у доски, а так же в ходе устной работы было замечено, что учащиеся более верно выполняют задания под руководством учителя.

Таким образом, анализ результатов самостоятельной работы и наблюдений показал что:

1. Учащиеся не уделяют должного внимания определению области применимости некоторых формул и правил;

2.

- Определяют точку на единичной окружности –71,4% учащихся;
- Определяют принадлежность угла соответствующей четверти – 57,1% учащихся;
- Отмечают угол по значению функции – 71,4 % учащихся;
- Выполняют задание на преобразование угла к острому – 57,1% учащихся;
- Составили двойные неравенства для дуг тригонометрической окружности– 85,7% учащихся;
- Составили двойные неравенства для дуг графика тригонометрической функции– 71,4% учащихся;
- Решили тригонометрические неравенства с помощью свойств тригонометрических функций–42,9% учащихся;

- Упрощают выражение – 57,1 % учащихся.

Это говорит о том, что при обучении учащихся решать тригонометрические уравнения и неравенства необходимо акцентировать внимание учащихся на работу с тригонометрической окружностью.

**Обучающий эксперимент**

Целью данного этапа является формирование у учащихся умений решать тригонометрические уравнения.

Для реализации поставленной цели сформулированы следующие задачи:

1. В соответствии с результатами предыдущего этапа внести коррективы в разработанную методику формирования у учащихся решать тригонометрические уравнения, направленную на развитие тригонометрических представлений;

2. Применять данную систему задания на уроках и дополнительных занятиях со слабыми учащимися.

3. Организовать деятельность учащихся на занятиях, направленную на формирование умений решать тригонометрические уравнения.

Для реализации данных задач были проведены уроки и дополнительные занятия. Содержание этих занятий включало в себя теоретическую и практическую часть.

**Фрагмент урока направленный на развитие умения решать тригонометрические уравнения**

*Решим тригонометрическое уравнение tg x = -1*

**Шаг 1.** Начертим единичную окружность. Исключим верхнюю и нижнюю точки, так как они изображают числа, тангенс которых не существует.

Отметим на линии тангенсов точку -1 и соединим эту точку с началом координат. Эта прямая пересечет единичную окружность. Точка пересечения изображает числа, тангенс которых равен -1.

**Шаг 2.** Точки пересечения проведенной прямой с окружностью это и есть решения данного уравнения, в данном случае это арктангенс -1, то есть $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

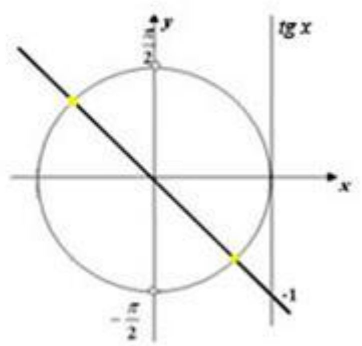



Рис. 2

**Шаг 3.** Учитывая, что тангенс периодическая функция с периодом π, получаем решения уравнения

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

**Диагностирующий эксперимент**

Целью данного этапа является определение эффективности разработанной методики.

Для реализации данной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Провести контролирующую самостоятельную работу, позволяющую определить уровень сформированности у учащихся умений решать тригонометрические неравенства.

2. Сделать соответствующие выводы об использовании данной методики, её корректировке или полном изменении.

Для решения данных задач была проведена контрольная работа, аналогичная работе, предложенной на подготовительном этапе.

Текст контрольной работы.

1. Отметить на единичной окружности точки t, для которых соответствующие значения t удовлетворяют равенству $\sin t = \frac{1}{2}; \quad tgt = -\sqrt{3}$

Справилось –5 человек (71,4%);.

2. Определить принадлежность угла соответствующей четверти, если α равно $\frac{3\pi}{7}, \quad -\frac{2\pi}{5}, \quad \frac{13\pi}{4}, \quad -\frac{5\pi}{3}, \quad 1{,}2\pi$.

Справилось – 5 человек (71,4%);

3. Отметить угол α по значению функции $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Справилось – 4 человек (54,1%);

4. Выполнить задание на преобразование угла к острому

а) $\sin\frac{9\pi}{10}$ б) $tg\frac{5\pi}{4}$

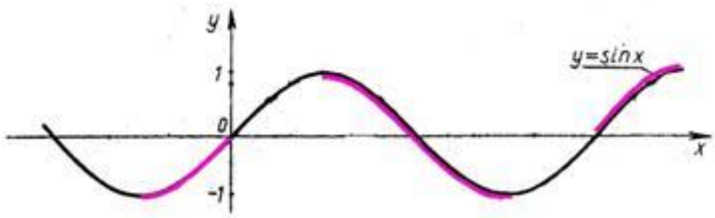
Справилось – 3 человек (42,9%);

5. Составить двойные неравенства для дуг тригонометрической окружности.

R – середина III четверти, К – середина IV четверти. Составить двойное неравенство для дуг KR и RK.

Справилось – 5 человек (71,4%);

6. Составить двойные неравенства для дуг графика тригонометрической функции




Справилось – 6 человек (85,7%);

7. Решить тригонометрические уравнения cosx=1; sinx=$\frac{1}{2}$.

Справилось – 6 человек (85,7%);

8. Упростить выражение *cos5xcos4x+sin5xsin4x*

Справилось – 3 человек (42,9%);

9. Решить уравнение $cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

Справилось – 5 человек (71,4 %).

1. Ученики более внимательно работают с тригонометрической окружностью, более точно обозначают точки на окружности, определяют направление нужной дуги и приступают к решению неравенств после рассмотрения условий применимости свойств функции, необходимых для решения.

2. Сравнение результатов тестирования до и после эксперимента позволяет представить их в графической форме.

Работа с учащимися по формированию осознанного и качественного научения решать тригонометрические уравнения прошла успешно. Об этом свидетельствуют:

· Улучшение результатов проверочных работ

· Отношение самих учащихся к проведённым занятиям.

Школьники с интересом принимали участие в процессе обучения.

Таким образом, цель эксперимента достигнута. Его результаты удовлетворительны. Данная методика имеет возможность применения на занятиях по алгебре и началам анализа в общеобразовательной школе.

## Заключение

Проработав соответствующую психолого-педагогическую и методическую литературу по данному вопросу, очевидно, сделать вывод о том, что умение и навыки решать тригонометрических уравнения в школьном курсе алгебры и начал анализа являются очень важными, развитие которых требует значительных усилий со стороны учителя математики.

Таким образом, учитель сам обязан в достаточной мере владеть методиками формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения. С учётом того, что тригонометрические уравнения разделяются на несколько типов, то соответственно и методика для каждого типа различна.

Бесспорно, достичь поставленной цели с помощью только средств и методов предложенными авторами современных учебников, практически невозможно. Это связано с индивидуальными особенностями учащихся. Ведь в зависимости от уровня их базовых знаний по тригонометрии выстраивается линия возможностей изучения различных видов уравнений на разных уровнях.

С решением уравнений, в которых переменная входит под знак одной или нескольких тригонометрических функций, так или иначе связаны многие задачи тригонометрии, стереометрии, физики и др. Процесс решения таких задач как бы синтезирует в себе практически все знания и умения, которые учащиеся приобретают при изучении элементов тригонометрии. Поэтому учитель сталкивается с довольно сложной проблемой выделения тех идей изучаемого материала, которые лежат в основе способов решения рассматриваемых задач, с целью их последующего обобщения и систематизации. Это важно и для осознанного усвоения учащимися теории, и для овладения некоторыми достаточно общими способами решения математических задач. Следует также заметить, что решение тригонометрических уравнений не только создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных с материалом тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приемы преобразования тригонометрических выражений и т.д.), но и дает возможность установить действенные связи с изученным алгебраическим материалом (уравнение, равносильность уравнений, виды алгебраических уравнений, способы их решения, приемы преобразования алгебраических выражений и т.п.). В этом состоит одна из особенностей материала, связанная с изучением тригонометрических уравнений.

Другая особенность – в исключительном разнообразии таких уравнений. Именно это разнообразие влечет определенные трудности в их классификации; его следствием могут быть и затруднения в решении тригонометрических уравнений, в частности, - в выборе того приема, который целесообразно применить для получения искомого множества значений переменной.

Указанные особенности должны быть учтены учителем при разработке методики обучения школьников решению тригонометрических уравнений.

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают достойное место в процессе обучения математики и развитии личности в целом.

## Список использованных источников

1. *Аджиева А,.* Тригонометрические уравнения // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 33, 2001г. С.1-2.

2. *Адрова И.А., Ромашко И.В,.* Модульный урок в X классе по теме «Решение тригонометрических уравнений» //Математика в школе. 2001. №4. С. 28-32.

3. *БашмаковМ.И,.* Алгебра и начала анализа. 10-11. Учебное пособие для 10 – 11 кл. средней школы. М. Просвещение, 1998. – 335 с.: ил.

4. *Водинчар М.И. и др.,* Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств //Математика в школе. 1999. № 4. С. 73-77.

5. *Гилемханов Р.Г.,* Освободимся от лишней работы (при решении однородных тригонометрических уравнений) //Математика в школе. 2000. № 10. С.9

6. *Зайкин М.И.* Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении (сборник научных и методических работ, предоставленных на региональную научно-практическую конференцию). М.: Арзамас, 2002. – 334 с.

7. *Зандер В.К.* О блочном изучении математики / на примере изучения темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» //Математика в школе.1991. № 4, С.38-42.

8. *Звавич В.И., Пигарев Б.П.* Тригонометрические уравнения //Математика в школе. 1995. № 2. С.23-33

9. *Звавич В.И., Пигарев Б.П.* Тригонометрические уравнения (решение уравнений + варианты самостоятельных работ) //Математика в школе. № 3, С.18-27.

10. *Золотухин Е.П.,* Замечания о решении уравнений вида $asinx+bcosx=c$ //Математика в школе. 1991. № 3. С.84.

11. *Калинин А.К.,* О решении тригонометрических неравенств. // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 6, 1991г.

12. *Кириченко Т.Ф.* и др., Методические рекомендации для студентов-заочников по решению математических задач. Ленинград, 1987 – 53 с.

13. *Клещев В.А.,* Обобщение метода интервалов на тригонометрической окружности //Математика в школе. 1992. № 6. С. 17-18.

14. *Колмагоров А.Н.,* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений, 17-е изд. – М. : Просвещение , 2008. - 384с.

15. *Кордемский Б.А.,* Как увлечь математикой. М.:Просвещение, 1981. - 112с.ил.

16. *Лященко Е.И.* и др., Методические рекомендации по формированию ведущих понятий курса математики. Ленинград, 1988. – 72 с.

17. *Мирошин В*. Отбор корней в тригонометрических уравнениях.// Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 17, 2006г.

18. *Мордкович А.Г,*. Беседы с учителем. М.: ООО “Издательский дом “ОНИКС 21 век”:ООО “Издательство “Мир и Образование”, 2005”

19. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа.10-11 классы. Часть 1.Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений(базовый уровень). – 10-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 399с.:ил.

20. *Мордкович А.Г.* Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. №6.

21. *Немов Р.С.* Психология: Учеб.для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн–4-е изд. М.: Гумакнит. изд. центр ВЛАДОС, 2003.-Кн.1:Общие основы психологии.-688с.

22. *Немов Р.С.* Психология: Учеб.длястуд.высш.пед.учеб.заведений: В 3 кн. – 4е изд. М.:Гумакнит.изд.центр ВЛАДОС, 2003.-Кн.2: Общие основы психологии.-608с.

23. *Орлова Т.* Решение однородных тригонометрических уравнений: Конкурс “Я иду на урок” //Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 48, 1999г.

24. *Пичурин Л.Ф.* О тригонометрии и не только о ней: М. Просвещение, 1985г.

25. *Решетников Н.Н.* Тригонометрия в школе: М. Педагогический университет «Первое сентября», 2006, лк 1.

26. *Смоляков А.Н., Севрюков П.Ф.* Приемы решения тригонометрических уравнений //Математика в школе. 2004. № 1. С. 24-26.

## Приложение1

### План-конспект урока

### Алгебра-10

**Тема урока: Числовая окружность**.

**Цель урока:**

- ввести понятия числовой окружности и единичной окружности; научить учащихся находить на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженным в долях числа$\pi$.
- способствовать развитию пространственного воображения, умению работать с интерактивной доской, развитие логического мышления, вычислительных навыков, памяти,внимания.
- содействовать воспитанию интереса к математике,активности.

**Тип урока:** изучение нового материала с применением информационных технологий.

**Методы обучения**: объяснительно — иллюстративный, использование слайдов при объяснении нового материала.

**Оборудование:** интерактивная доска с проектором, шаблоны — макеты окружностей.

**Структураурока**

1. Организационныймомент
2. Актуализациязнанийучащихся
3. Объяснениеновойтемы
4. Закреплениеизученногоматериала
5. Итогиурока
6. Домашнеезадание

**Ходурока:**

## *1. Организационныймомент(1мин)*

- приветствие;
- проверка готовности класса к уроку

## *2. Актуализация знаний учащихся(10мин)*

С понятием функция вы знакомы с 7 класса, сегодня мы начинаем изучать большой раздел в математике, в котором продолжим изучение функций, их свойств. А для начала давайте повторим, что нам о них известно.

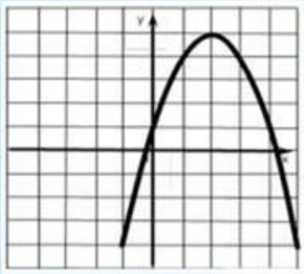
*Устнаяработа:* **Слайд 1**

— Какая из предложенных формул задаёт изображённую на графике функцию?

— Перечислитесвойстваизображённыхфункций.

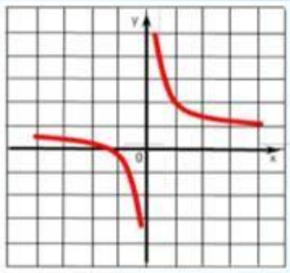
## Повторение

Какая из предложенных формул задаёт изображённую на графике функцию?




1. $y = -(x+2)^2 - 5$ 3. $y = (x-2)^2 + 5$

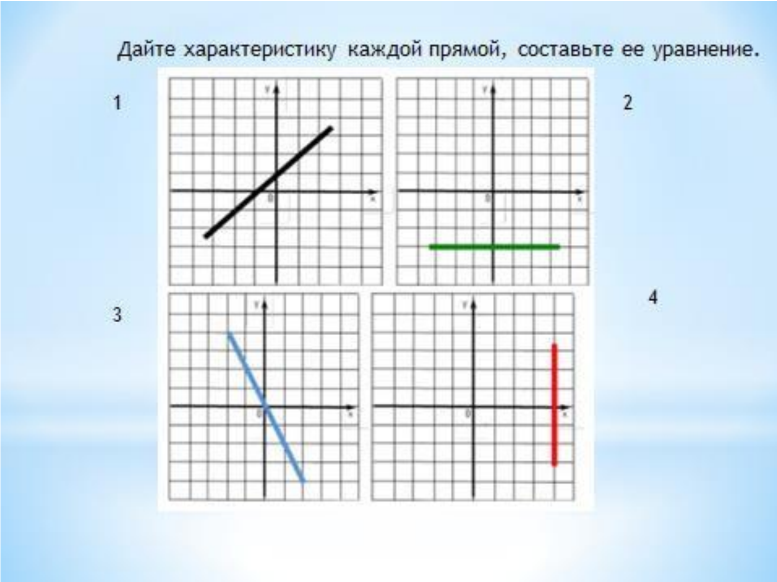
2. $y = -(x+2)^2 + 5$ 4. $y = -(x-2)^2 + 5$




1. $y = \frac{1}{x+1}$ 3. $y = \frac{1}{x+1}$

2. $y = -\frac{1}{x}$ 4. $y = \frac{1}{x}$

**Слайд 2**




—Дайте характеристику каждой прямой

— Составьтееееуравнение

— Какие функции называются числовыми? (Числовой функцией с областьюопределения ***X*** называется соответствие, прикоторомкаждому значению независимого аргумента ***x***ставится в соответствие по некоторому правилу ***f***определённое число ***y***.В аналитической записи этих функций используют алгебраические операции надпеременными.)

Мы начинаем знакомство с первыми представителями класса неалгебраических функций — тригонометрическими функциями. Дляэтогонампотребуетсяноваяматематическаямодель.

**Слайд 3**

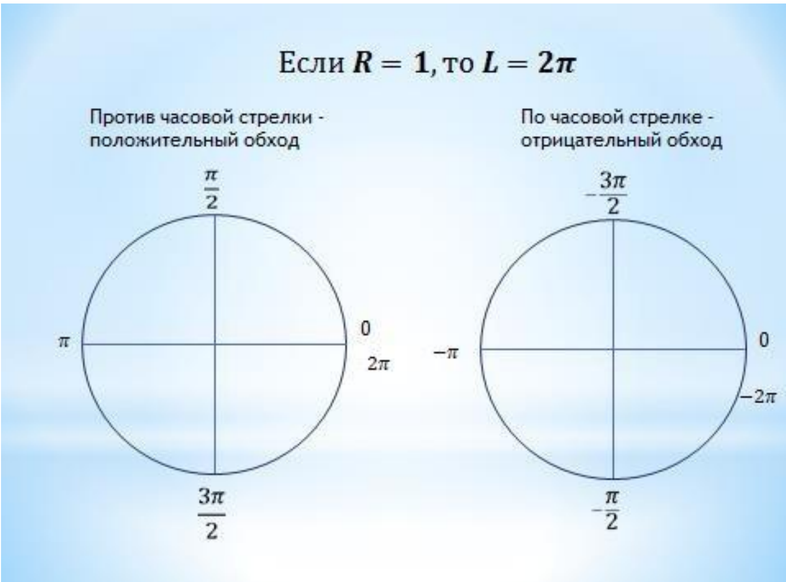

— Что вы видите на слайде?(Окружность).

— Чтоназываетсяокружностью?

— Как найти длину окружности?(L=2πR).

## *2. Объяснениеновойтемы(20мин)*

Новой математическоймодельюявляется числоваяокружность. Каждому ученику раздается лист с макетом окружности, с использованием которой будет изучаться новый материал.

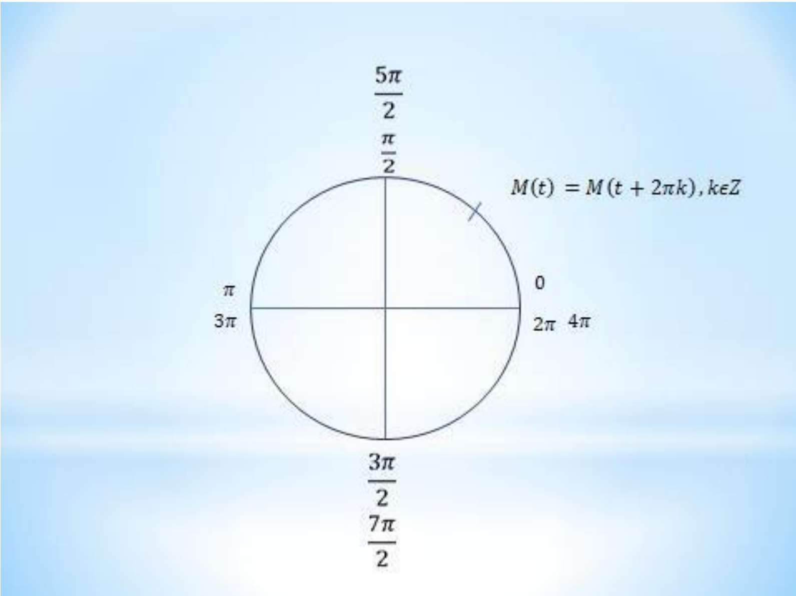


**Слайд 4**

1)Любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать единичную окружность — окружность с радиусом 1.

На макете ученики отмечают длину половины окружности и длину четверти окружности, отмечают четверти. На этом этапе необходимо акцентировать внимание учащихся на положительное и отрицательное направление обхода окружности.

**Слайд 5**




2)Мы обошли полностью круг по окружности от 0 до 2π и можем продолжить движение, пройдя от 2π четверть окружности, попадём в точку, которую уже отметили, но соответствовать она будет уже другому числу:

– — и т.д.

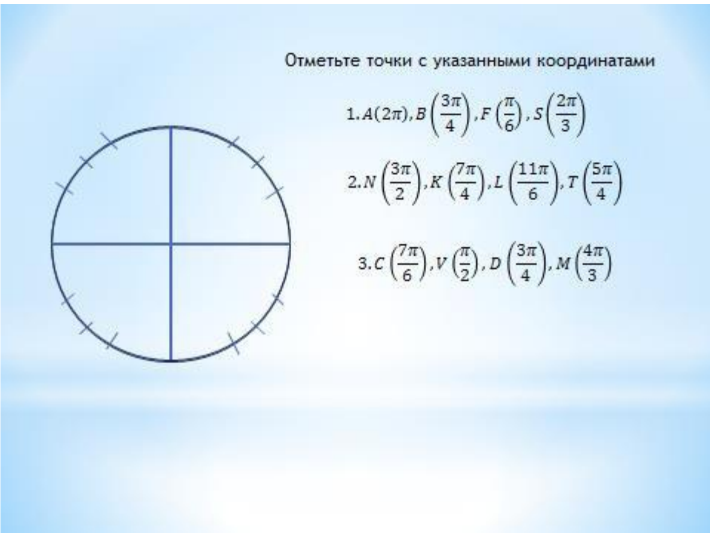
Для числовой окружности справедливо следующее утверждение: если точка М числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида t + 2πk, где параметр k – любое целое число.

**Слайд 6**


1)Каждую из четырех четвертей числовой окружности делим на две равные части, и около каждой точки записываем «имя» при положительном направлении обхода окружности.

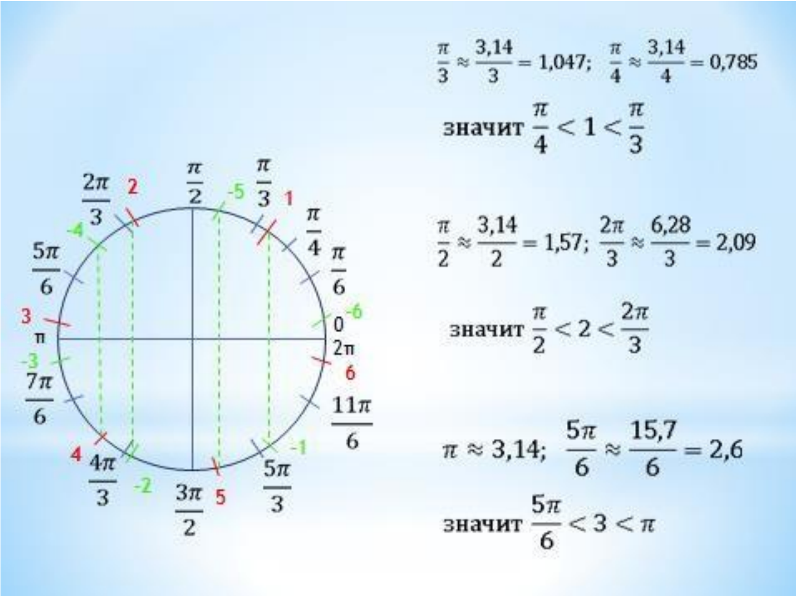
2)Каждую из четырех четвертей числовой окружности делим на три равные части.

**Слайд 7**



*Выполнить работу можно в интерактивном режиме.*

**Слайд 8**




Во всех разобранных примерах точки и длины дуг на единичной окружности соответствовали долям числа $\pi$, но мы можем найти такие точки, которые будут соответствовать числам 1, 2. 3, 4…. .

## *3. Закреплениеизученногоматериала(10мин)*

Решить на интерактивной доске и в тетрадях:

№ 11 — № 15 .

## *4. Итогиурока(3мин)*

Вместе с учащимися разобрать пример 6 из учебника.

## *5. Домашнеезадание(1мин)*

Изучить по учебнику на стр. 8-18 теоретический материал и решение примеров 1 — 3; решить № 9, 10, 16, 18, 27.

## Приложение 2

**План-конспект урока**

**Алгебра-10**

**Тема урока**:***Простейшие тригонометрические уравнения***

***Цель:*** 1. Вывести формулы решений простейших тригонометрических уравнений вида sinx =a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a;

2. Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения с помощью формул.

***Оборудование:*** **1)**Таблицы с графиками тригонометрических функций y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx; **2)**Таблица значений обратных тригонометрических функций; **3)**Сводная таблица формул для решения простейших тригонометрических уравнений.

***План урока-лекции:***
**1**.Вывод формул корней уравнения
а) sinx =a,
б) cosx=*a*,
в) tgx=*a*,
г) ctgx=*a*.
**2**. Устная фронтальная работа по закреплению полученных формул.
**3**. Письменная работа по закреплению изученного материала

***Ход урока.***

В алгебре, геометрии, физике и других предметах мы сталкиваемся с разнообразными задачами, решение которых связано с решением уравнений. Мы изучили свойства тригонометрических функций, поэтому естественно обратиться к уравнениям, в которых неизвестное содержится под знаком функций

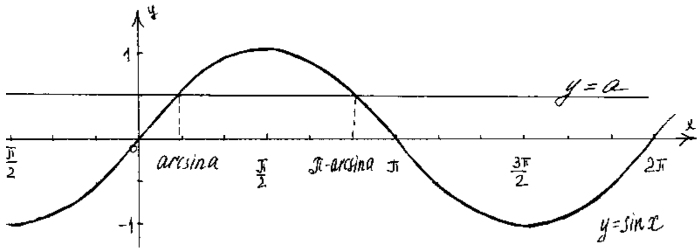
*Определение:*Уравнения вида sinx =*a*, cosx=*a*, tgx=*a*, ctgx=*a* называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Очень важно научиться решать простейшие тригонометрические уравнения, так как все способы и приемы решения любых тригонометрических уравнений заключается в сведении их к простейшим.

Начнем с того, что выведем формулы, которые «активно» работают при решении тригонометрических уравнений.

**1.Уравнения вида sinx =*a*.**

Решим уравнение sinx =*a* графически. Для этого в одной системе координат построим графики функций y=sinx и y=*a*.




1) Если $a > 1$ и $a < -1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет решений, так как прямая и синусоида не имеют общих точек.
2) Если $-1 < a < 1$, то по рисунку видно, что прямая $y = a$ пересечет синусоиду бесконечно много раз. Это означает, что уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечно много решений.

Так как период синуса равен $2\pi$, то для решения уравнения $\sin x = a$ достаточно найти все решения на любом отрезке длины $2\pi$.

Решением уравнения на $[-\pi/2;\ \pi/2]$ по определению арксинуса $x = \arcsin a$, а на $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ $x = \pi - \arcsin a$. Учитывая периодичность функции $y = \sin x$ получим следующие выражения

$$x = \arcsin a + 2\pi n$$
$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Обе серии решений можно объединить

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z.$$

В следующих трех случаях предпочитают пользоваться не общей формулой, а более простыми соотношениями:

Если $a = -1$, то $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi n$
Если $a = 1$, то $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi n$
Если $a = 0$, то $\sin x = 0$. $x = \pi n$,

Пример: Решить уравнение $\sin x = 1/2$.
Составим формулы решений $x = \arcsin 1/2 + 2\pi n$
$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$
Вычислим значение $\arcsin 1/2$. Подставим найденное значение в формулы решений

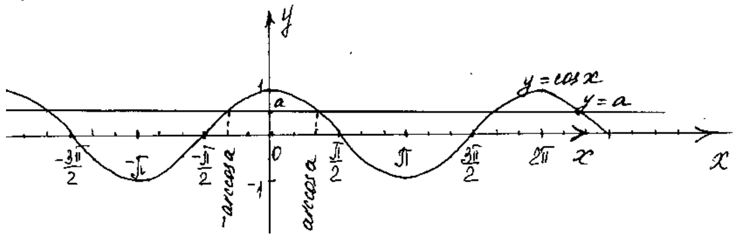
$$x = \pi/6 + 2\pi n$$
$$x = 5\pi/6 + 2\pi n$$

или по общей формуле

$$x = (-1)^n \arcsin 1/2 + \pi n,$$
$$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,$$

**2. Уравнения вида $\cos x = a$.**

Решим уравнение cosx=$a$ также графически, построив графики функций y= cosx и y=$a$.



1) Если a<-1 и a> 1, то уравнение cosx=$a$ не имеет решений, так как графики не имеют общих точек.

2) Если -1<$a$< 1, то уравнение cosx=$a$ имеет бесконечное множество решений.

Найдем все решения cosx=$a$ на промежутке длины $2\pi$ так как период косинуса равен $2\pi$.

На [0; $\pi$] решением уравнения по определению арккосинуса будет x=arcosa. Учитывая четность функции косинус решением уравнения на [-$\pi$;0] будет x=-arcos$a$.

Таким образом решения уравнения cosx=$a$ x=$\pm$arcos$a$+2 $\pi$n,

В трех случаях будем пользоваться не общей формулой, а более простыми сотношениями:

Если $a$=-1, то cosx =-1, x =-$\pi$/2+2$\pi$n

Если$a$=1, то cosx =1, x = 2$\pi$n,

Если a=0, то cosx =0. x =$\pi$/2+$\pi$n

Пример: Решить уравнение cosx =1/2,

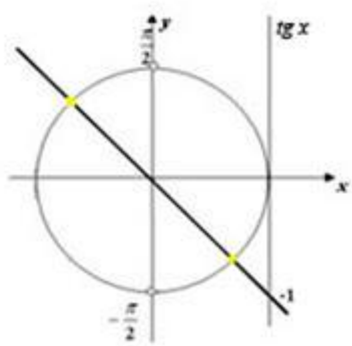
Составим формулы решений x=arccos 1/2+ 2$\pi$n

Вычислим значение arccos1/2.

Подставим найденное значение в формулы решений

X=$\pm\pi$/3+2$\pi$n, n$\in$ Z.

## 2. Уравнения вида tgx=$a$.



Так как период тангенса равен $\pi$, то для того чтобы найти все решения уравнения tgx=$a$, достаточно найти все решения на любом промежутке длины $\pi$. По определению арктангенса решение уравнения на $(-\pi/2;\ \pi/2)$ есть arctg$a$. Учитывая период функции все решения уравнения можно записать в виде

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

*Пример:* Решите уравнение tgx = 3/3

Составим формулу для решения x= arctg 3/3 + $\pi$n, n $\in$ Z.

Вычислим значение арктангенса arctg 3/3= $\pi$/6, тогда

x=$\pi$/6+$\pi$n, n $\in$ Z.

Вывод формулы для решения уравнения **ctgx=a**можно предоставить учащимся.

*Пример.*

Решить уравнение ctg x = 1.

x = arcctg 1 + $\pi$n, n $\in$ Z,

x = $\pi$/4 + $\pi$n, n $\in$ Z.

В результате изученного материала учащиеся могут заполнить таблицу:

«Решение тригонометрических уравнений».

| уравнение | формулы корней |
|---|---|
| **sinx =*a*** | x= $(-1)^n$arcsin*a*+$\pi$n, n $\in$ Z. |
| **cosx=*a*** | x=$\pm$ arcos *a*+2 $\pi$n, n $\in$ Z. |
| **tgx=*a*** | x= arctg *a*+ $\pi$n, n $\in$ Z. |
| **ctgx=*a*** | x= arcctg *a*+ $\pi$n, n $\in$ Z. |

***Упражнения для закрепления изученного материала.***

1. (Устно ) Какие из записанных уравнений можно решить по формулам:

а) x= $(-1)^n$arcsin*a*+$\pi$n, n $\in$ Z;

б) x=$\pm$ arcos *a*+2 $\pi$n?

cos x = 2/2, tg x= 1 , sin x = 1/3, ctg x = 3/3, sin x = -1/2, cos x= 2/3, sin x = 3 , cos x = 2 .

Какие из перечисленных уравнений не имеют решений?

2. Решите уравнения:

а) sinx = 0; д) sinx = 2/2;

б) cosx = 2/2; е) cosx = -1/2;

г) tgx = 3; ж) ctgx = -1.

3. Решите уравнения:

а) sin 3x = 0; в) 2cosx = 1;
б) cosx/2 =1/2; г) 3 tg 3x =1.

При решении данных уравнений полезно записать правила для решения уравнений вида sin*в*x =*a*, и *c*sin*в*x =*a*, |*a*|<1.

| | |
|---|---|
| **sin*в*x =*a*, \|*a*\|<1.**<br>*в*x= $(-1)^n$ arcsin*a*+$\pi$n, n$\in$ Z,<br>x= $(-1)^n$1/*в*arcsin*a*+$\pi$n/*в*, n$\in$ Z. | **cos*в*x=*a*, \|*a*\|<1.**<br>*в*x=$\pm$ arcos *a*+2 $\pi$n, n$\in$ Z,<br>x=$\pm$ 1/*в*arcos*a*+2 $\pi$n/*в*, n$\in$ Z, |
| ***c*sin*в*x =*a*, \|*a*\|<1.**<br>**sin*в*x =*a/c*,**<br>*в*x= $(-1)^n$ arcsin*a*/*c*+$\pi$n, n$\in$ Z,<br>x= $(-1)^n$1/*в*arcsin*a*/*c*+$\pi$n/*в*, n$\in$ Z. | ***c* cos *в*x =*a*, \|*a*\|<1.**<br>**cos*в*x =*a* /*c*/.**<br>X=$\pm$ 1/*в* arcos*a*/*c*+2 $\pi$n/*в*. |

***Подведение итогов занятия:***

1. Сегодня на занятии мы вывели формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Разобрали примеры решения простейших тригонометрических уравнений.
3. Заполнили таблицу, которую будем использовать для решения уравнений.

***Домашнее задание:***

1. ***Решите уравнения:***

а) sinx = 2;
б) cosx = 1;
в) tgx = 1/ 3
г) sinx/4 = 1;

д) 2cos(2x+ $\pi$/5) = 3.