ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

Математические модели управляемых процессов

Магистерская диссертация

очной формы обучения

обучающегося по направлению подготовки 01.04.01.68 Математика

очной формы обучения, группы 07001534

Статинова Дмитрия Сергеевича

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. Наук
Полунин В. А.

Рецензент
Начальник отдела государственной службы и кадров «Октябрьского районного суда города Белгорода»
Солодовникова Е. Е.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 3
ГЛАВА 1 ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ... 5
1.1 Моделирование управляемых процессов ... 8
1.2 Основные задачи моделирования управляемых процессов ... 10
1.3 Управляемые процессы как объект моделирования ... 13
1.4 Основные категории и понятия моделирования ... 15
ГЛАВА 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ, ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ... 17
2.1 Теория автоматического управления, фундаментальные принципы управления ... 19
2.2 Основы моделирования управляемых решений ... 22
2.3 Принципы системного подхода в моделировании систем ... 24
2.4 Необходимые условия оптимальности управления, достаточные условия оптимальности управления и проблема существования оптимального управления ... 25
2.5 Условия рационального применения методов оптимизации. Методы оптимизации управления ... 28
ГЛАВА 3 ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ. ... 31
3.1 Вводные замечания. ... 31
3.2 Основная модель ... 31
    3.2.1 Модель производственных поставок ... 35
    3.2.2 Модель поставок со скидкой ... 38
3.3 Модель Леонтьева ... 41
    3.3.1 Продуктивные матрицы ... 41
    3.3.2. Ограничения на ресурсы ... 47
    3.3.3 Прибыльные матрицы ... 52
3.4 Математическая модель распределения времени между овладением знаниями и развитием умений. ... 53
    3.4.1 Рассмотрение математической модели. ... 53
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 65
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ: ... 66

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность.

Выбранная мною тема магистерской диссертационной работы, является актуальной и повседневной для изучения. По мере увеличения сложности систем возникают проблемы, меньше связанные с рассмотрением свойств и законов функционирования элементов, а больше – с выбором наилучшей структуры, оптимальной организации взаимодействия элементов, определением оптимальных режимов их функционирования, учётом влияния внешней среды и т.д. Поэтому целесообразно использование системного подхода при анализе и синтезе таких систем. Классический системный подход опирается на математическое моделирование с использованием теории подобия, теории научного эксперимента, математической статистики, теории алгоритмов и ряда других фундаментальных классических теорий. В то же время в области проектирования современных информационно-управляющих систем и программного обеспечения ЭВМ при анализе и синтезе сложных систем все большее применение находит так называемый объектно-ориентированный подход.

Цели работы:

1. Изучить аппарат теории математического моделирования, рассмотреть её основные принципы.

2. Изучить свойства математического моделирования управляемых процессов.

3. Исследовать примеры математических моделей управляемых процессов.

Структура и объем работы.

Магистерская диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения. Она изложена на 69 страницах машинописного текста, включающего 14 рисунков, список литературных источников из 29 наименований.

Основное содержание работы.

В введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы и формулируется её цель, даётся общий обзор содержания диссертационной работы.

В главе 1 «Моделирование управляемых процессов» изложены основные понятия модели, изучены основные задачи моделирования управляемых процессов. Рассмотрены понятия модели и моделирования,

В главе 2 «Математические модели управления, подход к моделированию. » Изучена теория автоматического управления, рассмотрены фундаментальные принципы управления.

В главе 3 «Примеры математических моделей управляемых процессов» Были рассмотрены математические модели управляемых процессов: «Производственных поставок; Модель Леонтьева; Распределения времени между овладением знаниями и развитием умений».

В заключении формулируются основные результаты, полученные в работе.

ГЛАВА 1 ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы моделирования. Особенно это относится к сфере управления различными системами, где 15 основными являются процессы принятия решений на основе получаемой информации. Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам; такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами, модель (лат. niodulus – мера) – это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых, свойств оригинала. Моделирование – замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путём проведения экспериментов с его моделью. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования.

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта. В качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на:

– полные,

– неполные

– приближенные.

В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем.

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе S все виды моделирования могут быть разделены:

– детерминированные;

– стохастические;

– статические и динамические;

– дискретные;

– непрерывные;

– дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий. Стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса, и оцениваются средние характеристики, т.е. набор однородных реализаций. Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отражает поведение объекта во времени. Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а дискретно-непрерывное моделирование используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов. В зависимости от формы представления объекта (системы S) можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Одна из проблем современной науки и техники – разработка и внедрение в практику проектирования новейших методов исследования характеристик сложных информационно-управляющих и информационно-вычислительных систем различных уровней (например: автоматизированных систем научных исследований и комплексных испытаний, систем автоматизации проектирования, комплексов и сетей, информационных систем). При проектировании сложных систем и их подсистем возникают многочисленные задачи, требующие оценки количественных и качественных закономерностей процессов функционирования таких систем, проведения структурного алгоритмического и параметрического их синтеза [21]. В дисциплине рассматриваются системы информатики и вычислительной техники, автоматизированные системы обработки информации и управления, информационные системы относятся к классу больших систем, этапы проектирования, внедрения, эксплуатации и эволюции которых в настоящее время невозможны без использования различных видов моделирования. На всех перечисленных этапах для сложных видов различных уровней необходимо учитывать следующие особенности:

– сложность структуры и стохастичность связей между элементами, неоднозначность алгоритмов поведения при различных условиях, – большое количество параметров и переменных, неполноту и недетерминированность исходной информации;

– разнообразие и вероятностный характер воздействий внешней среды.

Ограниченность возможностей экспериментального исследования больших систем делает актуальной разработку методики их моделирования, которая позволила бы в соответствующей форме представить процессы функционирования систем, описание протекания этих процессов с помощью математических моделей, получение результатов экспериментов с моделями по оценке характеристики исследуемых объектов. Причём на разных этапах создания и использования перечисленных систем для всего многообразия входящих в них подсистем применение метода моделирования преследует конкретные цели, а эффективность метода зависит от того, насколько грамотно разработчик использует возможности моделирования. Независимо от разбиения конкретной сложной системы на подсистемы при проектировании каждой из них необходимо выполнять внешнее проектирование (макропроектирование) и внутреннее проектирование (микропроектирование). Так как на этих стадиях разработчик преследует различные цели, то и используемые при этом методы и средства моделирования могут существенно отличаться. На стадии макропроектирования должна быть разработана обобщённая модель процесса функционирования сложной системы, позволяющая разработчику получить ответы на вопросы об эффективности различных стратегий управления объектом при его взаимодействии с внешней средой. Стадию внешнего проектирования можно разбить на анализ и синтез. При анализе изучают объект управления, строят модель воздействий внешней среды, определяют критерии оценки эффективности, имеющиеся ресурсы, необходимые ограничения. Конечная цель стадии анализа – построение модели объекта управления для оценки его характеристик. При синтезе на этапе внешнего проектирования решаются задачи выбора стратегии управления на основе модели объекта моделирования, т. е. сложной системы.

1.1 Моделирование управляемых процессов

По мере увеличения сложности систем возникают проблемы, меньше связанные с рассмотрением свойств и законов функционирования элементов, а больше – с выбором наилучшей структуры, оптимальной организации взаимодействия элементов, определением оптимальных режимов их функционирования, учётом влияния внешней среды и т.д. Поэтому целесообразно использование системного подхода при анализе и синтезе таких систем. Классический системный подход опирается на математическое моделирование с использованием теории подобия, теории научного эксперимента, математической статистики, теории алгоритмов и ряда других фундаментальных классических теорий. В то же время в области проектирования современных информационно-управляющих систем и программного обеспечения ЭВМ при анализе и синтезе сложных систем все большее применение находит так называемый объектно-ориентированный подход.

Для более определённой и точной характеристики системы необходимо иметь её модель, преобразуя имеющиеся сведения так, чтобы вычленить существенные её стороны, такие как взаимосвязи, соподчинённость и т.д. И здесь следует дать определение предметной области исследований. Предметная область – это мысленно ограниченная область реальной действительности или область идеальных представлений, подлежащая описанию (моделированию) или исследованию. Предметная область состоит из объектов, различаемых по классификационным признакам (свойствам) и находящихся в определённых отношениях (связях), между собой и взаимодействующих определённым образом с внешней средой. На заре применения системного подхода к исследованию систем большую роль сыграло представление системы как чёрного ящика с определёнными функциями на входе и выходе. Эта максимально простая модель подчёркивает два системных свойства: целостность и обособленность от среды. Определение системы в виде чёрного ящика допускает множественность вложения, но требует учёта всех взаимосвязей. Недостатком модели чёрного ящика являлась техническая направленность системного понимания моделируемого объекта, недостаточное внимание к структуре системы, недооценка синергетических явлений.

Процесс моделирования предполагает получение и обработку информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой. В общем случае под объектом понимается все то, на что направлена человеческая деятельность. Другими словами – это все то, что мы воспринимаем как нечто целое, реально существующее, или возникающее в нашем сознании и обладающее определёнными свойствами. Свойством называется характерная особенность объекта, которая может быть качественно и количественно оценена исследователем. С точки зрения исследователя свойства делятся на внутренние, называемые параметрами объекта, и внешние, называемые факторами и представляющие собой свойства среды, влияющей на параметры исследуемого объекта или модели. Объект, с целью изучения которого проводятся исследования, называется оригиналом, а объект, исследуемый вместо оригинала для изучения определённых свойств, называется моделью. Модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что её изучение даёт новую информацию об этом объекте. Модель, представляющая собой совокупность математических соотношений, называется математической. В конечном итоге под моделью системы понимается описание системы (оригинала), отображающее определённую группу её свойств. Углубление описания – детализация модели.

1.2 Основные задачи моделирования управляемых процессов

Любой процесс, развитие – это движение. А раз это движение, то существуют определённые законы, закономерности, тенденции, направления этого движения. Научное управление – это такая целенаправленная деятельность людей, которая обеспечивает общественный прогресс, способствует, а не препятствует социально-экономическому движению, которое делает жизнь трудящихся «наиболее лёгкой, доставляющей им возможность благосостояния». Зная законы движения, можно с определённой точностью описать эти движения и даже экстраполировать на будущее. В реальной действительности развитие всегда прокладывает себе дорогу через массу случайностей – положительных и отрицательных, ускоряющих или тормозящих общественное развитие. Случайности искажают процесс движения общества, вызывая отклонения от нормального состояния. Не будь случайностей (объективных и субъективных) «применить теорию к любому историческому периоду было бы легче, чем решать простое уравнение первой степени». Задача научного управления заключается в этой связи в том, чтобы «выправить» эти случайные отношения, исключить «негативные», главным образом, влияния случайностей на ход общественного развития, скорректировать кривую движения. Мудрость руководства состоит в том, чтобы уметь вовремя увидеть опасность в зародышевом состоянии и не дать ей расти до размеров угрозы, вовремя устанавливать согласованность интересов и потребностей различных элементов общественной системы, возникающих из движения всей системы, в отличие от движения его самостоятельных частей. Та или иная общественная система ставит перед собой определённую цель и задачу, которой она подчиняет общественное производство. Зная эти цели, можно построить обобщённую систему координат, с помощью которой становится реальным исследование, измерение и сравнение между собой движения различных формаций, движения их самостоятельных частей.

Социально-экономические процессы «невидимы» и осуществляются параллельно во времени и в пространстве. Они объединяют множество объектов, субъектов, носителей сознания, связей и отношений и зависят от компонентов разной природы, характеризуются стохастичностью, многофакторностью, многоэкстремальностью функций цели. Исследования реальных процессов (объектов) обычно заменяются исследованиями их моделей, адекватно отражающих структуру и/или поведение объектов. Однако изменчивость и многообразие процессов, наличие качественных признаков вызывает трудности их моделирования, не позволяет достичь полной формализации задач управления. Так, при принятии решений, кроме количественных факторов, приходится принимать во внимание различные социальные, психологические, моральные и другие ограничения и обстоятельства. При изучении систем социально-экономической природы недостаточно, а иногда невозможно пользоваться методом их декомпозиции на элементы с последующим раздельным изучением этих элементов. Это объясняется важным качеством системы как эмерджентность, определяющим такие её свойства, которые неприсущие ни одному из элементов, входящих в систему. Поэтому в работе рассматривается общая теоретическая модель социально- экономической системы, в основу которой легли экономические отношения (производства, обмена, распределения и потребления) и социальные отношения (между людьми, группами, коллективами). Основным системообразующим элементом системы является человек, который непрерывно взаимодействует с окружающей средой и обладает такими свойствами, как «активность», целенаправленность, саморазвитие и саморегулирование. Элементы системы находятся в определённом функциональном отношении к системе и оказывают противодействие внешним воздействиям, изменяющим её равновесие. Равновесие систем возможно тогда, когда каждый элемент путём производства, обмена, распределения и потребления получают все необходимые средства и ресурсы для выполнения своей функции. Для того чтобы обеспечить нормальное движение системы, необходимо удовлетворить потребности элементов системы до какой-то определённой нормы. В действительности при развитии системы происходят колебания около нормы и колебания самой нормы. В силу исключительного разнообразия встречающихся в практике управления задач и недостаточной изученности их математического описания порядок структуризации объекта управления, а также выбор математических схем для описания элементов объекта нельзя считать окончательно сложившимся.

1.3 Управляемые процессы как объект моделирования

Большинство моделей в управлении относятся к моделям принятия решений, которые отражают и процесс выбора решений, и сами системы, на которые эти решения влияют. При этом задача принятия решений формулируется в следующем виде: отыскать те значения управляемых воздействий, которые при заданных ограничениях и при фиксированных неуправляемых воздействиях оптимизируют эффективность системы. Обычно цель исследования заключается в отыскании и установлении недостающих сведений в описании состояния социально-экономической системы с той степенью полноты, которая определяется существующим уровнем развития науки и техники. Перед исследователем часто ставятся две задачи. Прямая задача – на основании известного состава и структуры объекта исследования дать описание модели объекта и определить её поведение при различных внешних воздействиях и изменении состава и структуры. Обратная задача – на основании анализа поведения объекта, его откликов при различных воздействиях построить модель объекта с учётом имеющихся гипотез, а в дальнейшем определить состав и структуру объекта. В прямых задачах, как правило, известны уравнения, представляющие математическую модель, и ищется решение этих уравнений. В обратных задачах наоборот – из результатов исследований известно решение – отклик системы и (не всегда) воздействия, и требуется найти вид уравнений. Для прямой задачи, если известен состав и структура объекта, могут быть поставлены следующие подзадачи:

– составить математическую модель объекта, отражающую зависимость функции поведения от состава и структуры объекта, решить уравнения для определения отклика системы на заданные воздействия;

– экспериментально проверить адекватность модели реальному объекту;

– установить влияние того или иного параметра из состава и структуры объекта; – определить множество состояний объекта, функции переходов и функцию поведения для каждого из состояний;

– определить влияние внешних (иногда нежелательных) воздействий на функцию поведения при нормальном функционировании и т.п. Для обратной задач состав и структура объекта неизвестны. В этом случае могут быть сформированы следующие подзадачи:

– по экспериментальному исследованию отклика объекта на входные воздействия определить вид и характер функции поведения и, может быть, её математическое отображение (выдвинуть гипотезу и получить математическую модель);

– составить математическую модель и проверить её соответствие экспериментальным данным; – по математической модели восстановить состав и структуру объекта на основании известных аналогий и гипотез;

– по функции поведения разделить объекты исследования на некоторые группы (классы, типы) по заданным критериям, или признакам (критериям или признакам классификации являются форма и величина отклика, вид математической формулы, описывающей поведение объекта, значения коэффициентов, входящих в формулу и т.п.).

Рисунок 1. Схема исследования социально-экономической системы.

Для решения прямой и обратной задач особое значение придаётся чёткому определению объекта исследования и цели исследования. До начала решения задач должен быть алгоритмически определён и формализован весь процесс проведения исследования: сбор исходной информации, способы её обработки, определения видов и порядка выдачи управляющих воздействий, предполагаемый диапазон их изменений, характер и форма представления результатов обработки информации. На рисунке 1 представлена общая схема исследования социально-экономической системы.

1.4 Основные категории и понятия моделирования

Моделирование (в широком смысле) является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей (аналитических и имитационных), реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

ГЛАВА 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ, ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ

Управление как функция сложной системы.

Основные отличительные признаки сложных систем (по Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М. Наука, 1978г., с.25): Наличие большого количества взаимно связанных и взаимодействующих между собой элементов. Сложность функции, выполняемой системой и направленной на достижение заданной цели функционирования. Возможность разбиения системы на подсистемы, цели, функционирования которых подчинены общей цели функционирования всей системы. Наличие взаимодействия с внешней средой и функционирование в условиях воздействия случайных факторов. Наличие управления (часто имеющего иерархическую структуру), разветвлённой информационной сети и интенсивных потоков информации.

Управление – в широком смысле функция системы, ориентированная либо на сохранение основного качества, т.е. совокупности свойств, утрата которых ведёт к разрушению системы в условиях изменения среды, либо на выполнение некоторой программы, обеспечивающей устойчивость функционирования, гомеостаз, достижение определённой цели. Понятие управление не формализовано настолько, чтобы можно было дать его точное и при этом достаточно полное формальное описание. Систему, в которой реализуется функция управления, называется, системой управления и выделяют в ней две подсистемы: управляющую (осуществляющую функцию управления) и управляемую (объект управления). Однако разделение системы на управляющую и управляемую не всегда можно осуществить однозначно. В сложных развивающихся системах эти блоки могут быть совмещены. Такой режим называют саморегулированием.

В сложных системах важную роль играют вопросы управления. Управление представляет собой процесс сбора, передачи и переработки информации, осуществляемый специальными средствами. От элементов системы к управляющим устройствам поступает осведомительная информация, характеризующая состояние элементов системы. В сложных системах обычно выделяются специфические контуры управления, вдоль которых циркулируют потоки информации (осведомительной – от элементов системы к управляющим устройствам, и управляющей – от управляющих устройств к элементам системы). Часто контуры управления являются замкнутыми и носят характер обратной связи: фактическое значение регулируемого параметра сравнивается со значением этого параметра, требуемым программой управления; наличие уклонение от программы служит основанием для выработки корректирующих сигналов – управляющей информации. Применение принципа обратной связи позволяет избежать грубых ошибок, если только средства управления работают исправно. В связи с развитием электроники и вычислительной техники, в качестве средств управления часто используются цифровые вычислительные машины, выполняющие функции обработки информации, планирования и оперативного управления процессами в сложных системах. Выполняя последовательность арифметических и логических операций в соответствии с заданной программой, ЭВМ обеспечивает реализацию специального алгоритма переработки информации, который называется управляющим алгоритмом. Если управление сложной системой сосредоточено в едином центре, оно называется централизованным. На практике встречаются различные степени децентрализации управления, когда функция управления распределена между главным и периферийными центрами управления, а также свойственна в определённой мере и элементам системы. Пример: возможные варианты структуры управления (диспетчеризации) таксомоторным хозяйством крупного города. Децентрализация управления позволяет сократить объем передаваемой и перерабатываемой информации, однако в ряде случаев это приводит к снижению качества управления.

Отмеченные трудности в значительно меньшей степени проявляются при использовании систем управления с иерархической структурой – наличие нескольких уровней управления. Существенной особенностью управления иерархической структуры является то обстоятельство, что основная масса информации перерабатывается в соответствующих контурах низшего уровня, а не высшие уровни поступают лишь обобщённые данные, характеризирующие не отдельные элементы, а целые подсистемы сложной системы. Многим сложным системам свойственны в той или другой степени черты самоорганизации. Система называется самоорганизующейся, если она способна на основании оценки воздействий внешней среды, путём последовательного изменения своих свойств прийти к некоторому устойчивому состоянию, когда воздействия внешней среды окажутся в допустимых пределах. Многочисленные примеры самоорганизующихся систем можно наблюдать в живой природе. Реальные сложные системы функционируют в условиях действия большого количества случайных факторов. Источниками случайных факторов являются воздействие внешней среды, а также ошибки, шумы и отклонения различных величин, возникающие внутри системы.

2.1 Теория автоматического управления, фундаментальные принципы управления

Для исследования процессов управления в технических системах разработана теория автоматического управления. В этой теории термин управления используется в более узком смысле – как краткое название целенаправленного управляющего воздействия. Большим движением теории автоматического управления являются общие принципы управления, разработанные в этой теории, которые названы фундаментальными и являются достаточно общими. Их пытаются применить и для управления в социально-экономических системах. Основные фундаментальные принципы управления: 1. Принцип разомкнутого или программного управления. Сущность принципа состоит в том, что управление осуществляется с помощью заданного алгоритма или программы. В некоторых случаях блок выработки закона управления и управляющее устройство совмещены. Схема имеет вид разомкнутой цепи, в которой основное воздействие передаётся от входа к выходу, выполняя заданную программу (закон функционирования), что и дало название принципу. Обозначения: x(t) - устройство, вырабатывающее программу или закон функционирования устройство управления (которое принято обозначать специальным знаком – кругом, раздельным на секторы), вырабатывающее и(t) - совокупность управляющих воздействий, объект управления, Zj - помехи, Yвых - выходной результат

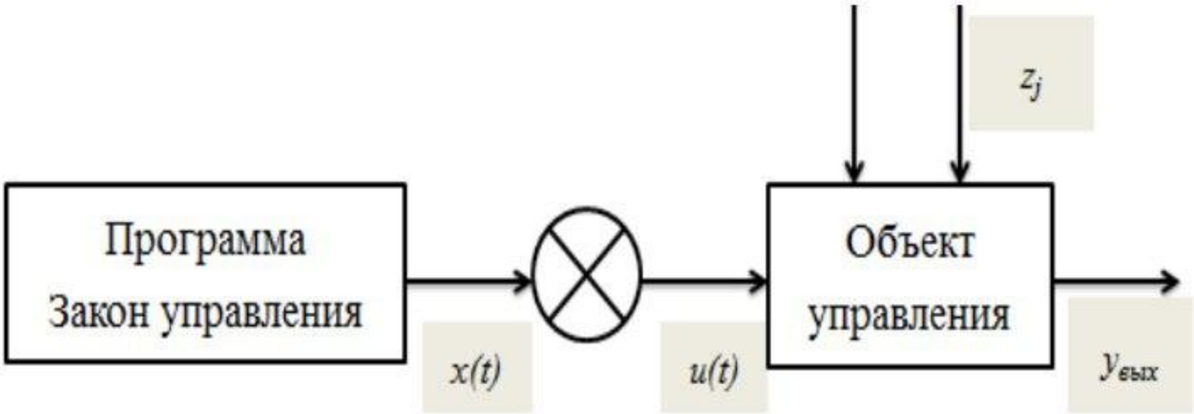

Рисунок 2. Принцип разомкнутого или программного управления.

При таком принципе управления помехи zj могут исказить желаемое Yвых. Тем не менее, благодаря простоте этот принцип широко используется. По разомкнутому принципу построены устройства пуска музыкальной шкатулки, магнитофона и др. аудиоустройств, станки с программным управлением, управление конвейером. Подобием этого принципа можно считать управление работой раба в рабовладельческом обществе на начальной ступени его развития при жестоких рабовладельцах, не учитывающих потребностей раба как человека, подавляющего его человеческое достоинство и принуждающего чётко выполнять предписанную программу. 2. Принцип компенсации или управления по возмущениям (или принцип управления с упреждением). При таком принципе используется устройство, измеряющее помехи и вырабатывающее компенсирующие воздействия, которые корректируют закон управления.

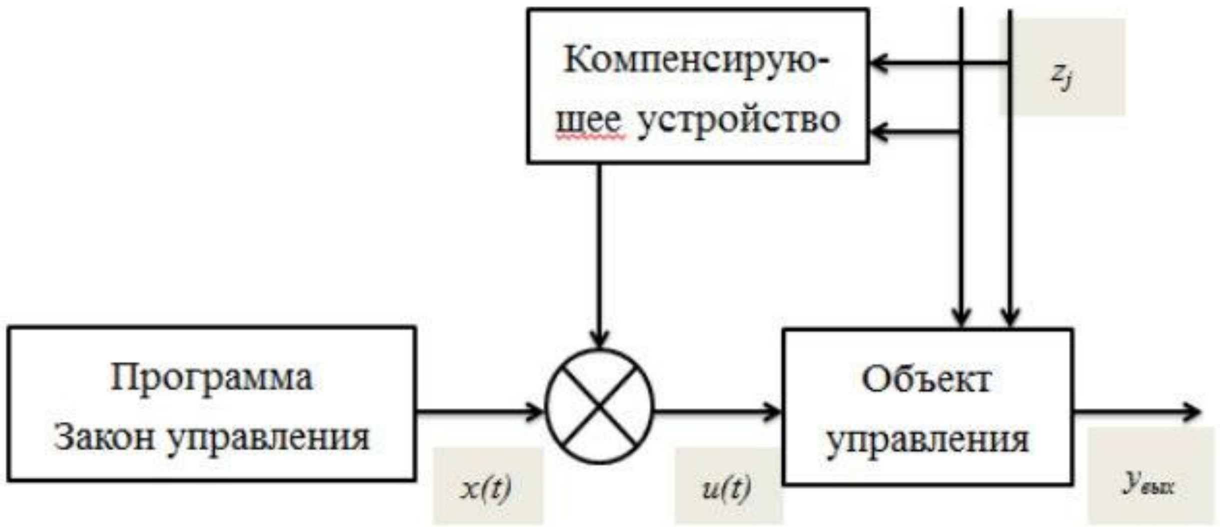

Рисунок 3 – Принцип управления с упреждением.

Устройство такого рода называют компенсирующим устройством. Простейшим примером такого принципа являются устройства, обеспечивающие стабилизацию напряжения при колебаниях постоянного тока. К настоящему времени в теории автоматического управления разработано много разнообразных компенсационных механизмов, в соответствующие подклассы устройств и даже детализируют принцип компенсационного управления в соответствии с этими видами устройств. Этот принцип используется при планировании на предприятиях: при разработке планов учитывается, что производительность труда зависит от износа оборудования, от квалификации рабочих, смены и т.п., и при расчёте времени на выполнение плановых заданий вводятся соответствующие корректировки в форме коэффициентов износа оборудования, коэффициентов сменности и т.п.

2.2 Основы моделирования управляемых решений

Математическое моделирование и оптимизация процессов управления - область научно-практической деятельности, получившая мощный стимул к развитию вовремя и сразу после второй мировой войны. Эта тематика развивалась в рамках интеллектуального движения, связанного с терминами «кибернетика», «исследование операций», а позже – «системный анализ», «информатика».

Математические методы управления можно разделить на несколько групп:

- методы оптимизации;

- методы, учитывающие неопределённость, прежде всего вероятностно-статистические;

- методы построения и анализа имитационных моделей;

- методы анализа конфликтных ситуаций (теории игр).

Математические методы управления - методы оптимизации - методы, учитывающие неопределённость (вероятностно-статистические) - методы построения и анализа имитационных моделей - методы анализа конфликтных ситуаций - (теории игр) Во всех этих группах можно выделить статическую и динамическую постановки. При наличии фактора времени используют дифференциальные уравнения и разностные методы. Моделирование процессов управления предполагает последовательное осуществление трёх этапов исследования. Первый - от исходной практической проблемы до теоретической чисто математической задачи. Второй – внутриматематическое изучение и решение этой задачи. Третий – переход от математических выводов обратно к практической проблеме. В области моделирования процессов управления, целесообразно выделять четвёрки составляющих: ЗАДАЧА – МОДЕЛЬ - МЕТОД - УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ. Задача, как правило, порождена потребностями той или иной прикладной области. Вполне понятно, что при этом происходит одна из возможных математических формализаций реальной ситуации. Например, при изучении предпочтений потребителей у экономистов - маркетологов возникает вопрос: различаются ли мнения двух групп потребителей. При математической формализации мнения потребителей в каждой группе обычно моделируются как независимые случайные выборки, т.е. как совокупности независимых одинаково распределённых случайных величин, а вопрос маркетологов переформулируется в рамках этой модели как вопрос о проверке той или иной статистической гипотезы однородности. Речь может идти об однородности характеристик, например, о проверке равенства математических ожиданий, или о полной (абсолютной однородности), т.е. о совпадении функций распределения, соответствующих двух совокупностям (Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. - М., 2002. – С.132.) Задача может быть порождена также обобщением потребностей ряда прикладных областей. Одна и та же математическая модель может применяться для решения самых разных по своей прикладной сущности задач. Важно подчеркнуть, что выделение перечня задач находится вне математики. Выражаясь инженерным языком, этот перечень является сутью технического задания, которое специалисты различных областей деятельности дают специалистам по математическому моделированию. Метод, используемый в рамках определённой математической модели - это уже во многом, если не в основном, дело математиков. В эконометрических моделях речь идёт, например, о методе оценивания, о методе проверки гипотезы, о методе доказательства той или иной теоремы, и т.д. В первых двух случаях алгоритмы разрабатываются и исследуются математиками, но используются прикладниками, в то время как метод доказательства касается лишь самих математиков. Ясно, что для решения той или иной задачи в рамках одной и той же принятой исследователем модели может быть предложено много методов.

2.3 Принципы системного подхода в моделировании систем

В настоящее время при анализе и синтезе сложных (больших) систем получил развитие системный подход, который отличается от классического (или индуктивного) подхода. Последний рассматривает систему путём перехода от частного к общему и синтезирует (конструирует) систему путём слияния её компонент, разрабатываемых раздельно. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причём исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Объект моделирования. Специалисты по проектированию и эксплуатации сложных систем имеют дело с системами управления различных уровней, обладающими общим свойством — стремлением достичь некоторой цели. Эту особенность учтём в следующих определениях системы. Система S — целенаправленное множество! взаимосвязанных элементов любой природы. Внешняя среда E— множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под её воздействием.

В зависимости от цели исследования могут рассматриваться разные соотношения между самим объектом S и внешней средой E. Таким образом, в зависимости от уровня, на котором находится наблюдатель, объект исследования может выделяться по-разному и могут иметь место различные взаимодействия этого объекта с внешней средой.

С развитием науки и техники сам объект непрерывно усложняется, и уже сейчас говорят об объекте исследования как о некоторой сложной системе, которая состоит из различных компонент, взаимосвязанных друг с другом. Поэтому, рассматривая системный подход как основу для построения больших систем и как базу создания методики их анализа и синтеза, прежде всего необходимо определить само понятие системного подхода.

Системный подход — это элемент учения об общих законах развития природы и одно из выражений диалектического учения. Можно привести разные определения системного подхода, но наиболее правильно то, которое позволяет оценить познавательную сущность этого подхода при таком методе исследования систем, как моделирование. Поэтому весьма важны выделение самой системы S и внешней среды E из объективно существующей реальности и описание системы исходя из общесистемных позиций.

При системном подходе к моделированию систем необходимо прежде всего чётко определить цель моделирования. Поскольку невозможно полностью смоделировать реально функционирующую систему (систему-оригинал, или первую систему), создаётся модель (система-модель, или вторая система) под поставленную проблему. Таким образом, применительно к вопросам моделирования цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель M. Поэтому необходимо иметь критерий отбора отдельных элементов в создаваемую модель.

2.4 Необходимые условия оптимальности управления, достаточные условия оптимальности управления и проблема существования оптимального управления

Приведённое в следующих разделах необходимые условия оптимальности управления для различного типа задач оптимизации получены на основе аналитических непрямых методов оптимизации и образуют совокупность функциональных соотношений, которым обязательно должно удовлетворять экстремальное решение. При выводе их сделано существенное для последующего применения предположение о существовании оптимального управления (оптимального решения). Другими словами, если оптимальное решение существует, то оно обязательно удовлетворяет приведённым (и поэтому необходимым) условиям. Однако этим же необходимым условиям могут удовлетворять и другие решения, не являющиеся оптимальными [подобно тому, как необходимому условию $\partial f(x)/\partial x=0$ для минимума функции одного переменного удовлетворяют также точки максимума и точки перегиба функции f(x). Поэтому если найденное решение удовлетворяет необходим условиям оптимальности, то это ещё не означает, что оно является оптимальным. Использование одних только необходимых условий даёт возможность в принципе найти все решения, им удовлетворяющие, и отобрать затем среди них те, которые действительно являются оптимальными. Однако практически найти все решения, удовлетворяющие необходимым условиям, чаще всего не представляется возможным в силу большой трудоёмкости такого процесса. Поэтому после того как найдено какое-либо решение, удовлетворяющее необходимым условиям, целесообразно проверить, является ли оно действительно оптимальным в смысле исходной постановки задачи. Аналитические условия, выполнимость которых на полученном решении гарантирует его оптимальность, называются достаточными условиями оптимальности управления. Формулировка этих условий и особенно их практическая (например, вычислительная) проверка часто оказывается весьма трудоёмкой задачей. Некоторые достаточные условия приведены в разд. 4.4. В общем случае применение необходимых условий оптимальности было бы более обоснованным, если бы для рассматриваемой задачи можно было установить факт существования или существования и единственности оптимального управления. Этот вопрос является математически весьма сложным. Проблема существования оптимального управления состоит из двух вопросов: 1) существование допустимого управления (т. е. управления, принадлежащего заданному классу функций), удовлетворяющего заданным ограничениям и переводящего систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Иногда граничные условия задачи выбраны так, что система - в силу ограниченности её энергетических ресурсов - не в состоянии их удовлетворить, т. е. не может быть указано хотя бы одно допустимое управление. В этом случае не существует решения задачи оптимизации; 2) существование в классе допустимых управлений оптимального управления и его единственность. Как первый, так и второй вопрос этой проблемы в случае нелинейных систем общего вида не решены ещё с достаточной для приложений полнотой. Проблема осложняется также тем обстоятельством, что из единственности оптимального управления не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям. К тому же обычно удовлетворяется какое-либо одно, наиболее важное необходимое условие (чаще всего - принцип максимума). Проверка дальнейших необходимых условий бывает достаточно громоздкой. Это по важность любой информации о единственности управлений, удовлетворяющих необходим условиям оптимальности, а также о конкретных свойствах таких управлений. [11] Необходимо предостеречь от заключений о существовании оптимального управления на основании того факта, что решается физическая задача. На самом деле при применении методов теории оптимальных процессов приходится иметь дело с математической моделью. Необходимым условием адекватности описания физического процесса математической моде- лью как раз и является существование решения для математической модели. Поскольку при формировании математической модели вводятся различного рода упрощения, влияние которых на существование решений трудно предсказать, доказательство существования является отдельной математической проблемой. Таким образом: 1) из существования оптимального управления вытекает существование, по крайней мере, одного управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности. Из существования управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности, не вытекает существование оптимального управления; 2) из существования оптимального управления и единственности управления, удовлетворяющего необходимым условиям, вытекает единственность оптимального управления. Из существования единственности оптимального управления не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности.

2.5 Условия рационального применения методов оптимизации. Методы оптимизации управления

Рационально применять:

1. В сложных комплексных системах, где отыскание приемлемых решений на основе опыта затруднительно. Опыт показывает, что оптимизация малых подсистем может приводить к большим потерям в критерии качества объединённой системы. Лучше приближённо решить задачу оптимизации системы в целом (пусть в упрощённой постановке), чем точно для отдельной подсистемы.

2. В новых задачах, в которых отсутствует опыт формирования удовлетворительных характеристик процесса управления. В таких случаях формулировка оптимальной задачи час- то позволяет установить качественный характер управления.

3. На возможно ранней стадии проектирования, когда имеется большая свобода выбора. После определения большого количества проектных решений система становится недостаточно гибкой и последующая оптимизация может не дать существенного выигрыша.

4. При необходимости определить направления изменения управления и параметров, дающих наибольшее изменение критерия качества (определение градиента качества). Следует отметить, что для хорошо изученных и долго эксплуатируемых систем методы оптимизации могут давать небольшой выигрыш, так как найденные из опыта практические решения обычно приближаются к оптимальным. Так, в традиционных задачах механики полёта (оптимальный набор высоты, по лет на максимальную дальность) в случае свободных граничных условий для большей части переменных оптимальные управления дают обычно выигрыш в 5 - 12 % по сравнению с ранее известными управлениями. В случае закреплённых граничных условий выигрыш может достигать 20 - 50 %.

В некоторых практических задачах механики полёта наблюдается определённая «грубость» оптимальных управлений и параметров, т. е. большим локальным изменениям управлений и параметров отвечают малые изменения критериев качества. Это даёт иногда повод к утверждению, что оптимумы на практике всегда пологие и строгие методы оптимизации не нужны. На самом деле «грубость» управления наблюдается лишь в случае, когда оптимальное управление соответствует стационарной точке критерия качества. В этом случае изменение управления на величину ε приводит к отклонению критерия качества на величину порядка ε 2 .

В случае управлений, лежащих на границе допустимой области, указанная грубость может и не иметь места. Это свойство должно исследоваться для каждой задачи специально. Кроме того, в некоторых задачах даже небольшие улучшения критерия качества, достигаемые за счёт оптимизации, могут иметь существенное значение (например, в механике космического полёта увеличение полезной нагрузки или конечной скорости на 0,5 % может давать значительную экономию стоимости системы).

Сложные задачи оптимизации управления часто предъявляют чрезмерные требования к характеристикам используемых при решении вычислительных машин. Поэтому целесообразно использовать рациональные упрощающие предположения в ходе постановки задачи с тем, чтобы объем вычислений был не слишком велик для современных ЦВМ и не приводил к слишком затянутым срокам получения решения.

Имеет дело с математическими моделями технических задач оптимизации процесса управления физическими системами. Математическая модель есть достаточно полная сводка функциональных соотношений, описывающих основные свойства физических объектов, процессов их функционирования и управления в рамках выбранной степени приближения и детализации и отражающая все существенные требования к конкретным техническим характеристикам системы. Математическая модель технической задачи оптимизации процесса управления ЛА состоит из ряда частных математических моделей, включая математическую модель управляемого процесса (например, уравнений движения ЛА и его рулевых приводов), математическую модель технических ограничений на величины управляющих воздействий и на возможное расположение ЛА на траектории математического описания показателя эффективности (критерия качества) процесса управления и т. д.

ГЛАВА 3 ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ.

3.1 Вводные замечания.

Фирмы часто делают различные запасы. Хранятся сырье, заготовки, готовая продукция, предназначенная для продажи.

Запасов не должно быть ни слишком много, ни слишком мало. В первом случае возникает необходимость неоправданных затрат на хранение, на амортизацию товара. Во втором случае может оказаться так, что на складе не будет нужного товара. Кроме того, малое количество запасов подразумевает их частое пополнение, что также требует затрат.

Задача управления запасами состоит в том, чтобы избежать обеих крайностей и сделать общие затраты по возможности меньше. Отметим, что в целом эта область науки управления развита довольно хорошо, разработаны многочисленные модели с применением различных математических методов. Мы рассмотрим несколько простейших детерминированных моделей управления запасами.

3.2 Основная модель

Важнейшую роль в наших рассмотрениях будет играть функция изменения запаса. Это связь между количеством единиц товара на складе (обозначим его через Q) и временем t. Будем считать, что имеется один вид товара.

Если на товар имеется спрос, то функция изменения запаса $Q = Q(t)$ убывает. Если товар, наоборот, завозят на склад, то эта функция возрастает. Мы будем считать возможным мгновенное пополнение запаса.

Затраты, связанные с запасами, можно разделить на три части.

А. *Стоимость товара.*

Б. *Организационные издержки.* Это расходы, связанные с оформлением товара, его доставкой, разгрузкой и т. д.

В. *Издержки на хранение товара*. Это затраты на аренду склада, амортизацию в процессе хранения и т. д.

Рассмотрим основные величины и предположения относительно них, принятые в рамках основной модели. Мы будем в основном использовать в качестве единицы измерения денежных средств условные единицы (УЕ), это могут быть рубли, доллары и т. п.; в качестве единицы измерения времени год, хотя можно было бы взять месяц, квартал и т. п.

1. *Цена единицы товара* — с УЕ. Цена постоянна, рассматривается один вид товара.

2. *Интенсивность спроса* — d единиц товара в год. Будем считать, что спрос постоянный и непрерывный.

3. *Организационные издержки* — s УЕ за одну партию товара. Будем считать, что организационные издержки не зависят от размера поставки, т. е. от количества единиц товара в одной партии.

4. *Издержки на хранение запаса* — h УЕ на единицу товара в год. Будем считать эти издержки постоянными.

5. *Размер одной партии товара постоянен* — q единиц. Партия поступает мгновенно в тот момент, когда возникает дефицит, т. е. когда запас на складе становится равным нулю.

При сделанных предположениях график функции изменения запаса будет таким, как показано на рис. 4: он состоит из повторяющихся циклов пополнения запаса между двумя соседними дефицитами. Вертикальные отрезки отвечают мгновенному пополнению запаса.

Параметры c, d, s, h считаются заданными. Задача управления запасами состоит в выборе параметра q таким образом, чтобы минимизировать годовые затраты.

Для решения сформулированной задачи надо прежде всего выразить эти затраты через параметры c, d, s, h, q.

А. Поскольку годовая интенсивность спроса равна d, а цена единицы товара — c, то общая стоимость товара в год равна cd.

Б. Поскольку в одной партии q единиц товара, а годовой спрос равен d, то число поставок равно d/q. В течение года организационные издержки равны:

$$\frac{d}{q} \cdot s.$$

В. Средний уровень запаса равен отношению площади под графиком за цикл к продолжительности цикла. Этот средний уровень равен $q/2$ (на рис. 4 обозначен пунктиром). Поскольку годовые издержки на хранение единицы товара равны h, то общие издержки на хранение составляют:

$$\frac{q}{2} \cdot h.$$

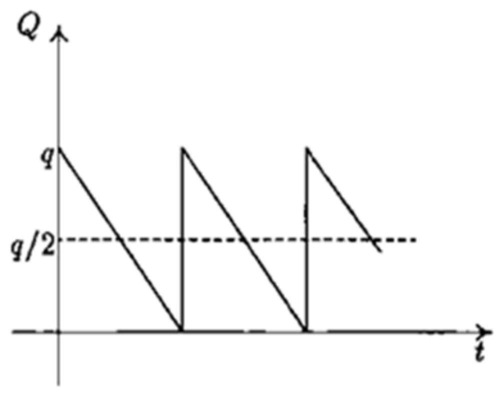

Рис. 4

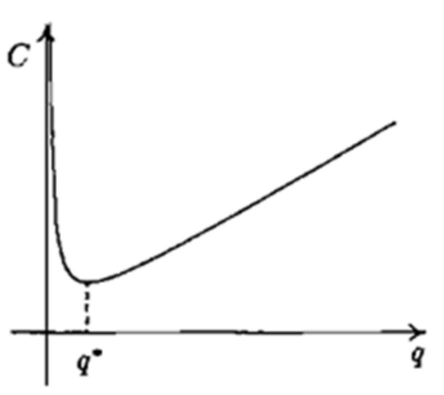

Рис. 5

Таким образом, общие издержки C вычисляются по формуле:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}.$$

Ещё раз напомним, что в рамках модели параметры *c, d, s, h* считаются заданными и требуется найти такое число $q*$, чтобы функция *C=C(q)* принимала наименьшее значение на множестве $q > 0$ именно в точке $q*$.

График функции C = C(q) показан на рис. 5.

Для нахождения точки $q*$ минимума функции C=$C(q)$ найдём её производную (*c, d, s, h* — фиксированные числа):

$$C'\ q\ =\ cd\ ' + \ \frac{sd}{q}\ ' + \ \frac{qh}{2}\ ' = -\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2}.$$

Приравнивая C' (q) к нулю, получаем:

$$-\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

Отсюда можно найти $q*$. Имеем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}.$$

Полученная формула называется *формулой оптимального запаса* или *формулой Харриса* (Harris).

Пример 1. Пусть интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение - 4 УЕ на единицу товара в год, цена товара - 5 УЕ.

Определить оптимальный размер партии в предположении, что система подчиняется основной модели.

Решение. Имеем:

$$d = 1000, \qquad s = 10, \qquad h = 4, \qquad c = 5.$$

Общие затраты равны:

$$C\ \ q\ = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2} = 5000 + \frac{10000}{q} + 2q.$$

Тогда:

$$C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + 2,$$

а оптимальный размер поставки $q*$ является решением уравнения:

$$-\frac{10000}{q^2} + 2 = 0,$$

т. е. $q^* = \sqrt{5000} \approx 71.$

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год $n*$ и соответствующую продолжительность цикла изменения запаса $t*$:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{71} \approx 14,$$

$$t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{14} \approx 26 \text{ дней.}$$

3.2.1 Модель производственных поставок

В основной модели предполагалось, что поступление товаров на склад происходит мгновенно. Это предположение достаточно хорошо отражает ситуацию, когда товар поставляется в течение одного дня (или ночи). Если товары поставляются с работающей производственной линии, необходимо модифицировать основную модель. В этом случае к параметрам *c, d, s* и *h* добавляется ещё один - производительность производственной линии *p* (единиц товара в год). Будем считать её заданной и постоянной.

Эта новая модель называется *моделью производственных поставок*. Величина q по-прежнему обозначает размер партии. В начале каждого цикла происходит “подключение” к производственной линии, которое продолжается до накопления q единиц товара. После этого пополнения запасов не происходит до тех пор, пока не возник дефицит.

График функции изменения запаса имеет вид, изображённый на рис. 6.

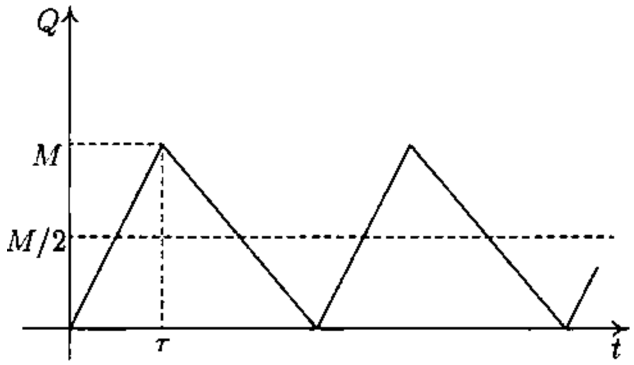

Рисунок 6.

Общие издержки $C(q)$, как и в основной модели, состоят из трёх частей.

А. Общая стоимость товара в год равна:

$$cd.$$

Б. Годовые организационные издержки равны:

$$\frac{sd}{q}.$$

В. Издержки на хранение вычисляются следующим образом. Пусть τ - время поставки (рис. 6). В течение этого времени происходит как пополнение (с интенсивностью p), так и расходование (с интенсивностью d) запаса. Увеличение запаса происходит со скоростью p - d. Поэтому достигнутый к концу периода пополнения запаса максимальный его уровень M вычисляется по формуле:

$$M = (p - d)\tau$$

(заметим, что $M < q$). Однако,

$$p\tau = q$$

(за время τ при интенсивности производства p произведено q единиц товара). Из последних двух равенств следует, что:

$$M = (p-d)\frac{q}{p}.$$

Средний уровень запаса, как и в основной модели, равен половине максимального, т. е. $M/2$. Таким образом, издержки на хранение запаса равны:

$$\frac{(p-d)qh}{2p}.$$

Общие издержки вычисляются по формуле:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)qh}{2p}.$$

Оптимальный размер поставок $q*$ получаем из уравнения:

$$C'(q) = -\frac{sd}{q^2} + \frac{(p-d)h}{2p} = 0.$$

Имеем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2psd}{(p-d)h}}.$$

Пример 2. Интенсивность равномерного спроса составляет 1 тыс. единиц товара в год. Товар поставляется с конвейера, производительность которого составляет 5 тыс. единиц в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение - 2 УЕ, цена единицы товара - 5 УЕ.

Чему равен оптимальный размер партии?

Решение. Имеем:

$$d = 1000, \qquad p = 5000, \qquad s = 10, \qquad h = 2, \qquad c = 5$$

Далее,

$$C(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)qh}{2p} = 5000 + \frac{10000}{q} + \frac{4}{5}q,$$

$$C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + \frac{4}{5}.$$

В итоге получаем:

$$q^* = \sqrt{10000 \times \frac{5}{4}} \approx 112.$$

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год n^* и соответствующие продолжительность поставки τ^* и продолжительность цикла пополнения запаса t^**:*

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{10000}{112} \approx 9,$$

$$\tau^* = \frac{q^*}{p} = \frac{112}{5000} \times 365 \approx 8 \text{ дней},$$

$$t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{9} \approx 41 \text{ день}.$$

3.2.2 Модель поставок со скидкой

Рассмотрим ситуацию, описываемую в целом основной моделью, но с одной особенностью, которая состоит в том, что товар можно поставлять по льготной цене (со скидкой), если размер партии достаточно велик. Иными словами, если размер партии q не менее заданного числа q_0, товар поставляется по цене C_0, где $C_0 < C$.

Функция общих издержек $C(q)$ задаётся в таком случае следующим образом:

$$C(q) = \begin{cases} cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, \text{если } q < q_0, \\ c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, \text{если } q \ge q_0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $C(q)$ в точке $q = q_0$ разрывна.

Обе функции:

$$f(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$$

и

$$f_0(q) = c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$$

имеют минимум в точке, где:

$$f'(q) = f_0'(q) = 0,$$

т. е. в точке:

$$q = \sqrt{\frac{2sd}{h}}.$$

Для выяснения вопроса о том, какой размер партии оптимален, следует сравнить значения функции $C(q)$ в точках q и q_0, и та точка, где функция $C(q)$ принимает меньшее значение, будет оптимальным размером партии q^* в модели поставок со скидкой (см. рис. 7, 8).

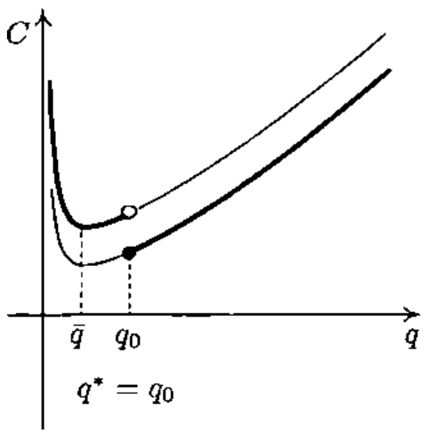

Рисунок 7.

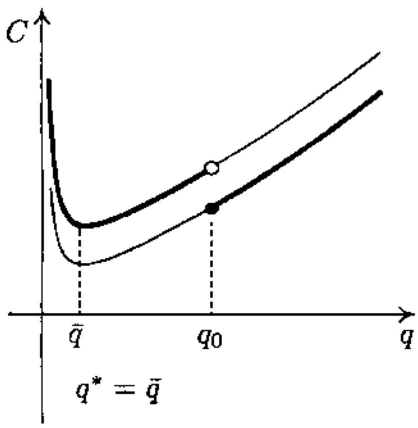

Рисунок 8

Замечание. Может случиться так, что $C(q) = C(q_0)$. Тогда в качестве q^* можно взять любое из чисел q и q_0.

Пример 3. Предположим, что интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение - 4 УЕ. Цена единицы товара равна 5 УЕ, однако, если размер партии не менее 500 единиц, цена снижается до 4 УЕ. Найти оптимальный размер партии.

Решение. Здесь

$$\mathrm{d} = 1000, \qquad \mathrm{s} = 10, \qquad \mathrm{h} = 4, \qquad \mathrm{c} = 5, \qquad \mathrm{q}_0 = 500, \qquad \mathrm{c}_0 4.$$

Общие издержки определяются функцией $C(q)$:

$$C\ \ q\ \ = \begin{array}{ll} f\ \ q\ \ = 5000 + \dfrac{10000}{q} + 2q, & \text{при } q < 500, \\ f_0\ \ q\ \ = 4000 + \dfrac{10000}{q} + 2q, & \text{при } q \geq 500. \end{array}$$

Найдём точку локального минимума. Имеем:

$$f'\ \ q\ \ = f_0\ \ q\ \ = -\frac{10000}{q^2} + 2 = 0,$$

откуда:

$$\overline{q} = \ \ \overline{5000} \approx 71.$$

Поскольку $\overline{q}$ < 500, то:

$$C\ \ \overline{q}\ \ = f\ \ \overline{q}\ \ = f\ \ 71\ \ \approx 5000 + \frac{10000}{71} + 2 \times 71 = 5283.$$

В точке q = q_0 получаем:

$$C\ \ q_0\ \ = f_0\ \ q_0\ \ = f_0\ \ 500\ \ \approx 4000 + \frac{10000}{500} + 2 \times 500 = 5020.$$

Таким образом, $q^* = 500$.

3.3 Модель Леонтьева

В этой главе на ряде простых примеров вы увидите, как можно определить эффективность производства экономической системы по имеющейся количественной информации об объёме необходимых затрат, неизбежно сопровождающих всякое производство.

3.3.1 Продуктивные матрицы

Пусть имеется экономическая система, сфера производства которой состоит из n отраслей, выпускающих n видов продукта, причём каждая отрасль выпускает ровно один вид.

Предположим, что для производства k-й отраслью единицы k-го продукта требуется $a_{ik} \geq 0$ единиц i-го продукта, производимого i-й отраслью. Соответствующая таблица затрат выглядит так:

	1-й продукт	…	k-й продукт	…	n-й продукт
1-я отрасль	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
… …	…	…	…	…	…
i-я отрасль	a_{i1}	…	a_{ik}	…	a_{in}
… …	…	…	…	…	…
n-я *отрасль*	a_{n1}	…	a_{nk}	…	a_{nn}

или короче:

$$A = \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{ik} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{matrix}$$

Полученная неотрицательная матрица А называется *матрицей материальных затрат* или *технологической матрицей*.

Замечание. Матрица А даёт информацию о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства и используется в текущем и долгосрочном планировании.

Будем считать дополнительно, что сложившаяся технология неизменна (стационарна) и что производство линейно. Последнее означает, что если для выпуска единицы k-го продукта требуется a_{ik} единиц i-го продукта, то для выпуска x_k единиц k-го продукта необходимо $a_{ik}x_k$ единиц i-го продукта.

Предположим, что за некоторый отрезок времени, фиксированный во всех дальнейших рассмотрениях (неделя, месяц, квартал или год), выпущено x_1 единиц 1-го продукта, x_2 единиц 2-го продукта,…, x_n единиц n-го продукта.

Тем самым, задан столбец

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

называемый *столбцом выпуска* или *режимом работы отраслей*.

При заданном столбце выпуска х совокупные затраты i-го продукта в рассматриваемой производственной сфере равны:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из этих величин составляется *столбец совокупных материальных затрат* в сфере производства:

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k \end{pmatrix}.$$

Матрица материальных затрат A ≥ O называется продуктивной, если найдётся такой столбец выпуска x > O, для которого выполняется неравенство

$$Ax < x.$$

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором каждого продукта выпускается больше, чем затрачивается на его производство. Другими словами, при этом режиме сфера производства создаёт положительный столбец прибавочного (конечного) продукта:

$$x - Ax > 0.$$

Возникает естественный вопрос: как следует поступить, чтобы сравнительно несложным путём и как можно раньше выяснить, является ли предъявленная матрица материальных затрат исследуемой сферы производства продуктивной или, напротив, производство убыточно и совокупные материальные затраты превышают объем выпуска?

Справедлив следующий общий факт.

Теорема. Для любой неотрицательной квадратной матрицы $A \geq 0$ формулируемые ниже условия равносильны.

(1) Матрица A продуктивна.

(2) Для любого столбца $c > 0$ существует, и притом ровно один, столбец выпуска $x > 0$ такой, что:

$$x - Ax = c.$$

(3) Столбца выпуска $x > 0$, совокупные затраты на создание которого удовлетворяют условию:

$$Ax \geq x,$$

не существует.

(4) Наибольшее собственное значение матрицы A удовлетворяет неравенству:

$$\lambda_A = \lambda_{max} < 1.$$

Сказанное выше означает, что при выполнении хотя бы одного из этих условий выполняются и три остальных. В частности, выполнение неравенства:

$$\lambda_A < 1$$

позволяет утверждать, что матрица продуктивна.

В приводимых ниже примерах мы ограничимся рассмотрением случая, когда $n = 2$, т. е. сфера производства экономической системы состоит из двух отраслей.

Пример 1 . Для ответа на вопрос, является ли матрица

$$A = \begin{matrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{matrix}$$

продуктивной, найдём её собственные значения.

Имеем:

$$\frac{1}{3} - \lambda \quad \frac{1}{4} - \lambda \quad = \frac{1}{24},$$

откуда

$$\lambda^2 - \frac{7}{12}\lambda + \frac{1}{24} = 0 .$$

Корни этого уравнения легко вычисляются по формуле:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{24}\right)^2 - \frac{1}{24}} = \frac{7}{24} \pm \frac{5}{24}.$$

и окончательно:

$$\lambda_1 = \frac{1}{12}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Тем самым,

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Ответ: матрица А продуктивна.

Из той же теоремы вытекает, что если матрица материальных затрат А продуктивна, то любой столбец прибавочного продукта может быть произведён при соответствующем режиме работы отраслей.

Итак, пусть матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

продуктивна и

$$\mathrm{c} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \end{pmatrix}$$

- столбец конечного продукта. Покажем, как найти режим работы отраслей, обеспечивающий этот продукт.

Запишем матричное равенство

$$x - Ax = c$$

более подробно:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} .$$

После перемножения:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$$

и вычитания:

$$\begin{matrix} x_1 - a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ x_2 - a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$$

окончательно получим:

$$\begin{matrix} 1 - a_{11} \;\; x_1 - a_{12}x_2 = c_1, \\ -a_{21}x_1 + \;\; 1 - a_{22} \;\; x_2 = c_2. \end{matrix}$$

Для продуктивной матрицы построенная система имеет решение при любых c_1 и c_2.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 2. Пусть:

$$A = \begin{matrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{matrix} , \qquad c = \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} .$$

Как было установлено в примере 1, матрица A продуктивна, $\lambda_{max} = \frac{1}{2} < 1$, и потому система:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} - \begin{matrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

имеет решение (всегда совместна).

После простых преобразований получаем:

$$\begin{matrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4, \\ -\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5. \end{matrix}$$

Найдем решение этой системы методом исключения неизвестной.

Умножая первое уравнение на 3/2 и складывая со вторым, получим:

$$1 - \frac{1}{12} \ x_1 = 11, \qquad \frac{11}{12} x_1 = 11$$

и далее

$$x_1 = 12.$$

Подобным же образом, умножая первое уравнение на $1/8$ и складывая со вторым, находим значение второй неизвестной. Имеем:

$$-\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \ x_2 = \frac{11}{2}, \ \ \frac{11}{16} x_2 = \frac{11}{2}.$$

Отсюда

$$x_2 = 8.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить прибавочный продукт:

$$\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix},$$

необходимо, чтобы столбец выпуска был равен: $\begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}$.

3.3.2. Ограничения на ресурсы

Модель Леонтьева отражает те потенциальные возможности, которые заложены в технологии производственного сектора. В этой модели предполагается, что все промежуточные продукты к тому моменту, когда они оказываются необходимыми, уже произведены. Однако в реальной ситуации нужно принимать в расчёт наличие таких ограничительных факторов производства, как мощность каждой отрасли (материальные ресурсы) и общее количество рабочей силы в системе (трудовые ресурсы).

Пусть L – общее число рабочих и $l = (l_1,\ l_2 \ldots\ l_n)$ — *матрица-строка затрат рабочей силы*: каждый её элемент $l_k > 0$ показывает количество рабочих, необходимое для производства единицы k-го продукта.

В предположении линейности производства произведение:

$$l_x = \begin{pmatrix} l_1, l_2 \ \ldots\ l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} l_k x_k$$

показывает количество рабочей силы, необходимое в сфере производства при режиме работы x.

Ясно, что оно не может превосходить общего числа рабочих $l_x \leq L$.

Ограничения на мощности отраслей можно описать при помощи столбца:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \ldots \\ m_n \end{pmatrix},$$

превзойти который столбец выпуска не может, $x \leq m$.

При ограниченных ресурсах уже нельзя ставить вопрос об удовлетворении любого конечного спроса с > О. Тем не менее продуктивная система может обеспечить любую структуру прибавочного продукта, т. е. соотношение между количеством прибавочных продуктов первой и второй отраслей.

ТЕОРЕМА. Пусть дана продуктивная матрица А > О, столбцы с > О и m > О, строка l > О и число L > 0. Тогда задача:

$$\begin{gathered} \mathrm{x} - \mathrm{A}_x \leq \alpha \mathrm{c}, \\ \mathrm{l_x} \leq L, \\ \mathrm{x} \leq \mathrm{m} \\ x \geq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\alpha \to \max$$

имеет, и притом ровно одно, решение.

Рассмотрим на конкретном примере, как можно решать такую задачу.

Пример 3. Итак, даны:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$l = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad L = 40.$$

Начнём с решения системы: $\mathrm{x} - \mathrm{A_x} = \alpha\mathrm{c}$

или подробнее:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Это можно записать в равносильной форме:

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4\alpha,$$
$$-\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5\alpha,$$

откуда:

$$x_1 = 12\alpha, \qquad x_2 = 8\alpha,$$

или

$$x = \begin{pmatrix} 12\alpha \\ 8\alpha \end{pmatrix}.$$

Полученный столбец должен подчиняться условиям:

$$lx \le L \text{ и } x \le m,$$

которые в данном случае принимают вид:

$$\begin{matrix} 4 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} 12\alpha \\ 8\alpha \end{matrix} \leq 40, \qquad \begin{matrix} 12\alpha \\ 8\alpha \end{matrix} \leq \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{matrix} 80\alpha \leq 40, \\ 12\alpha \leq 4, \\ 8\alpha \leq 3 \end{matrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{matrix} \alpha \leq 1/2, \\ \alpha \leq 1/3, \\ \alpha \leq 3/8. \end{matrix}$$

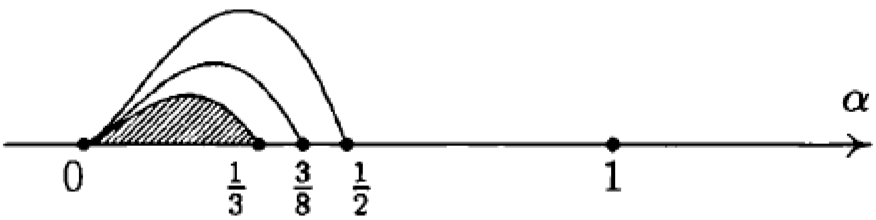

Рисунок 8.

Наибольшее значение α, удовлетворяющее всем трем условиям, равно 1/3 (рис. 8).

Ответ: $\alpha_{max} = 1/3$, столбец выпуска:

$$x = \begin{matrix} 4 \\ 8/3 \end{matrix},$$

конечный продукт:

$$\alpha_{max}c = \begin{matrix} 4/3 \\ 5/3 \end{matrix}.$$

Замечание 1 . Соотношение между количеством первого и количеством второго прибавочного продукта 4 : 5 - то же, что и в случае отсутствия каких-либо ограничений на материальные и трудовые ресурсы.

Замечание 2. При n=2 соотношения (1) принимают вид:

$$\begin{matrix} 1 - a_{11}\ \ x_1 - a_{12}x_2 = \alpha c_1, \\ -a_{21}x_1 + \ \ 1 - a_{22}\ \ x_2 = \alpha c_2, \end{matrix}$$

$$
\begin{aligned}
l_1x_1 + l_2x_2 &\le L,\\
x_1 &\le m_1,\\
x_2 &\le m_2,\\
\alpha &\to max
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Решение системы уравнений можно записать так:

$$x_1 = \alpha b_1, \qquad x_2 = \alpha b_2,$$

Где b_1 и b_2 выражаются через элементы матрицы А и столбца с.

Отсюда получаем:

$$\frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} = \alpha$$

или, исключая α,

$$b_2x_1 = b_1x_2$$

Полученное равенство на плоскости (x_1, x_2) описывает прямую, проходящую через начальную точку O(0, 0).

В свою очередь, неравенства (2) можно проиллюстрировать так, как показано на рис. 9.

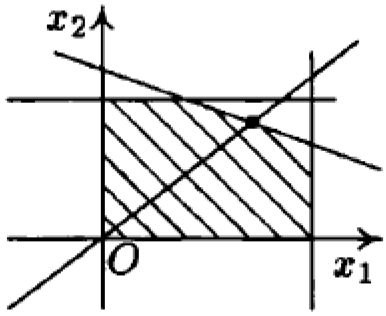

Рисунок 9. жирная точка отвечает $\alpha_{max.}$

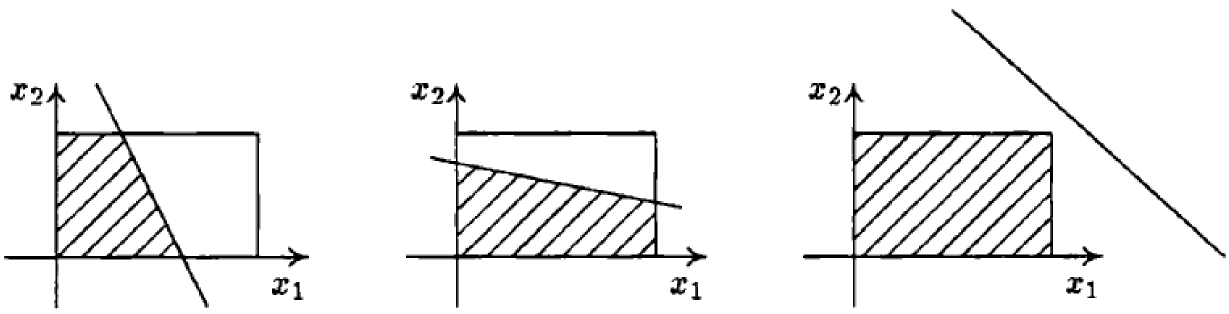

Рисунок 10, представлены все возможные случаи.

3.3.3 Прибыльные матрицы.

Предположим теперь, что отрасли закупают на внутреннем рынке системы (друг у друга) продукты, которые необходимы им как средства производства.

Пусть $p_i > 0$ – цена единицы $i -$ го продукта. Строка

$$p = \; p_1 \; p_2 \; \dots \; p_n \;,$$

каждый элемент, которой является ценой единицы соответствующего продукта, производимого системой, называется *строкой цен* на продукты или *ценовой строкой*.

Пусть

$$\mathrm{A} = (a_{ik})$$

— матрица материальных затрат системы. Тогда денежные издержки производства единицы $k -$ го продукта будут равны:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ik,} \;\; k = 1, \dots, n.$$

Из этих величин и складывается матрица-строка pA издержек производства:

$$\mathrm{pA} = (\sum_{i=1}^{n} p_1 a_{i1} \dots \sum_{i=1}^{n} p_1 a_{in})$$

Квадратная матрица $\mathrm{A} \geq 0$ называется *прибыльной*, если существует

такая строка $\mathrm{p} > 0$, что:

$$\mathrm{pA} < p.$$

Это означает, что существует хотя бы одна система цен p, при которой цена каждого продукта больше денежных издержек его производства и, следовательно, во всех отраслях обеспечивается положительная прибыль, выражаемая (в расчете на единицу продукции) разностью

$$p - pA.$$

Ясно, что возможность получения прибыли неразрывно связана с возможностью получения прибавочного продукта. Более того, условия продуктивности и прибыльности матрицы (материальных затрат) равносильны и всегда справедливо соотношение:

$$p(x - Ax) = (p - pA)x,$$

означающее, что прибыль есть лишь денежное выражение прибавочного продукта, а прибавочный продукт есть материальное выражение прибыли.

3.4 Математическая модель распределения времени между овладением знаниями и развитием умений.

Любое знание состоит частично из «информации» («чистое знание») и частично из «умения» («знаю как»). Умение – это мастерство, это способность использовать имеющиеся у вас сведения для достижения своих целей; умение можно ещё охарактеризовать как совокупность определённых навыков, в конечном счёте, умение – это способность методически работать.

3.4.1 Рассмотрение математической модели.

Рассмотрим структуру системы обучения, представленную на (рисунке 11). Данная структура может служить базовой основой для проектирования и разработки системы обучения любой степени автоматизации.

Автоматизированная обучающая система (АОС) представляет собой обучающую подсистему, включающую в себя модель обучающего и компьютерную обучающую систему (КОС). Компьютерная обучающая система (КОС) — это элемент АОС, включающий ПК и осуществляющий автоматическую реализацию функций по управлению обучением и отображению обучающей информации посредством программной реализации соответствующих алгоритмов управления [2].

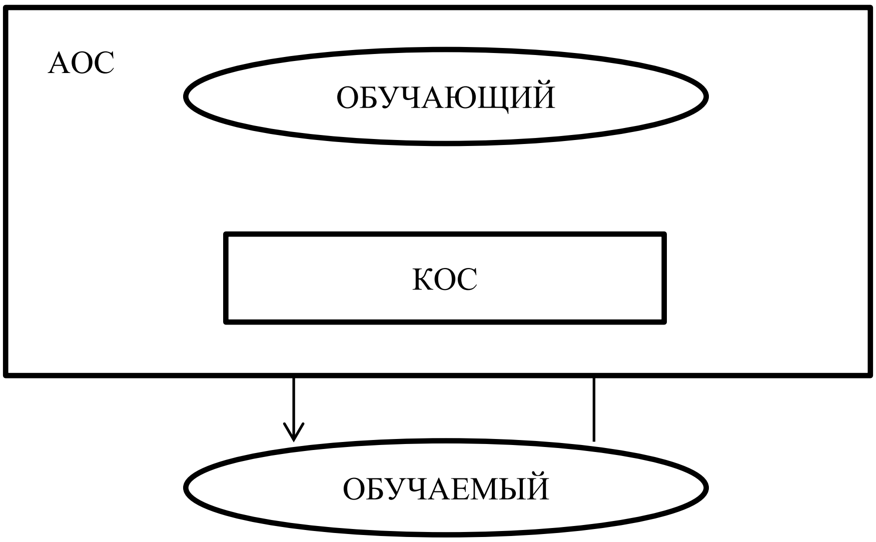

Рисунок 11. Структура системы обучения

Таким образом, управление обучением в АОС – это выбор путей достижения максимально возможной эффективности функционирования учебной структуры в конкретных условиях, т.е. при установленном контингенте обучаемых, составе учебных задач и имеющихся в наличии ресурсов обучения, таких как время, средства профессиональной подготовки, преподаватели и т.д. Система управления процессом обучения – сложная система, которую можно представить в виде подсистем, реализующих следующие функции: выбор сценария тренировки; определение состава учебных задач и последовательности их отработки для каждого субъекта обучения; управление ходом занятия, тренировки и оценка её результатов. В этом случае структуру взаимодействия подсистем, образующих в своей совокупности схему управления процессом обучения с применением технических средств обучения - (ТСО), можно представить как показано на рисунке 12.

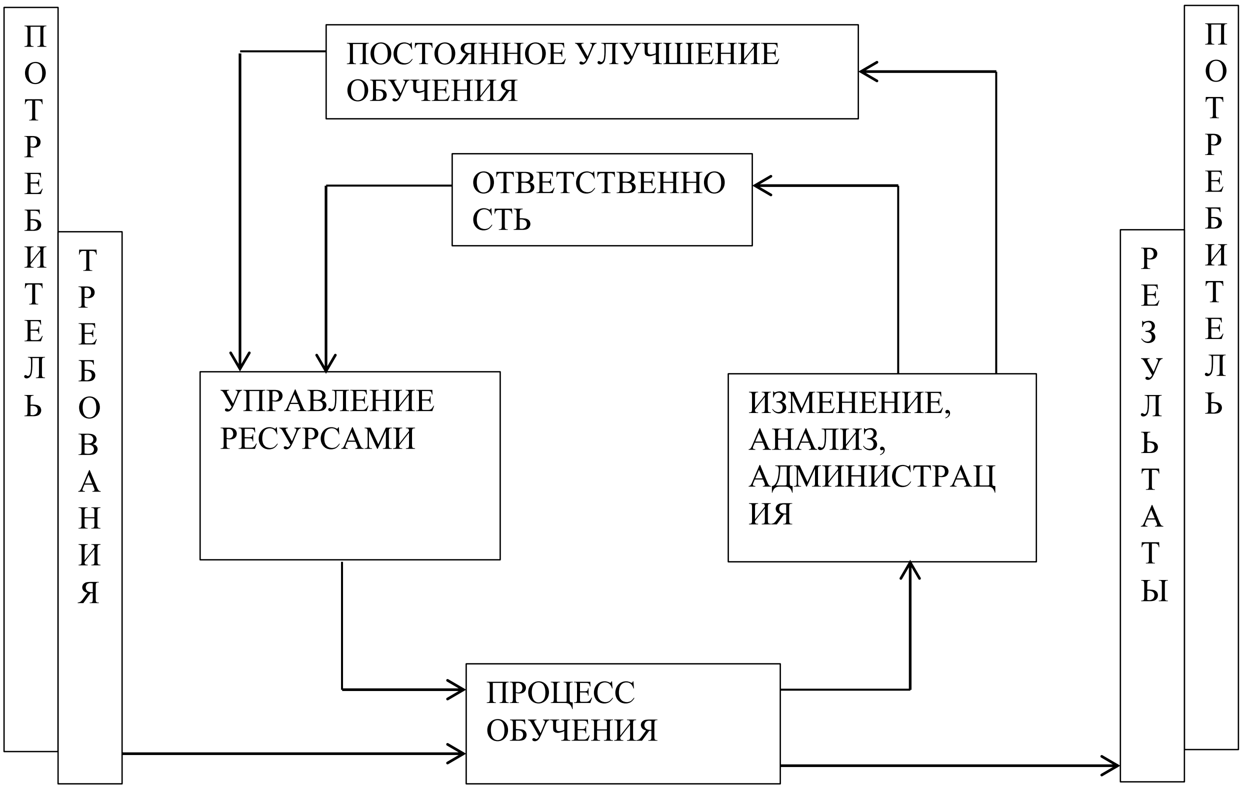

Рисунок 12. Структурная схема процесса управления процессом обучения.

Последовательность предъявления обучаемому той или иной порции обучающей информации - (ОИ) определяется обучающей программой, которая строится согласно алгоритму обучения, опирающемуся в свою очередь на некоторую модель процесса обучения. Широкое распространение получили два типа моделей — модели линейного и разветвлённого процесса обучения.

Цель обучения в линейной модели процесса обучения состоит в том, чтобы предъявить обучаемому все порции ОИ. В разветвлённой схеме целью обучения является, как и в линейной, усвоить все порции обучающей информации из имеющихся. В моделях с разветвлённым внешне регулируемым процессом обучения целью обучения является доведение обучаемого до последней порции обучающей информации.

Рассмотрим модель обучаемого (модель усвоения). Под ней понимается представление того процесса, который происходит в обучаемом в результате восприятия им той или иной обучающей информации. Тогда модель обучаемого есть модель научения.

Исключительно важную роль в изучении процессов научения и обучения играет исследование памяти. Память является одним из важнейших психических процессов, реализующих усвоение знаний. Начало экспериментальной психологии памяти связано с опытами Г. Эббингауза [6]. Он первый разработал количественные методы исследования запоминания и забывания, и им была построена кривая изменения объёма памяти в зависимости от времени, прошедшего после запоминания, т. е. кривая времени забывания (рис. 10). Эту кривую называют кривой забывания (или сохранения). Она выражает объем памяти через разные промежутки времени в «процентах сбережения». При этом под объёмом памяти (кратковременной) понимается наибольшее число единиц запоминаемого материала, которое может быть сразу воспроизведено при одном повторении [1, 3, 6]. Что касается долговременной памяти, то измеряют число повторений, необходимых для запоминания и безошибочного воспроизведения, предъявленного для запоминания материала, и объем памяти определяют как отношение числа запоминаемых символов к числу повторений [1, 3]. При этом кривая Эббингауза — это объём памяти как функция времени. Описывается она следующим выражением [6]:

$$b = \frac{100k}{(logt)^2 + k}$$

где b – процент удержанного в памяти материала в момент эксперимента, t – время с момента полного освоения материала в часах, k – константы, получаемые методом наименьших квадратов по экспериментальным данным.

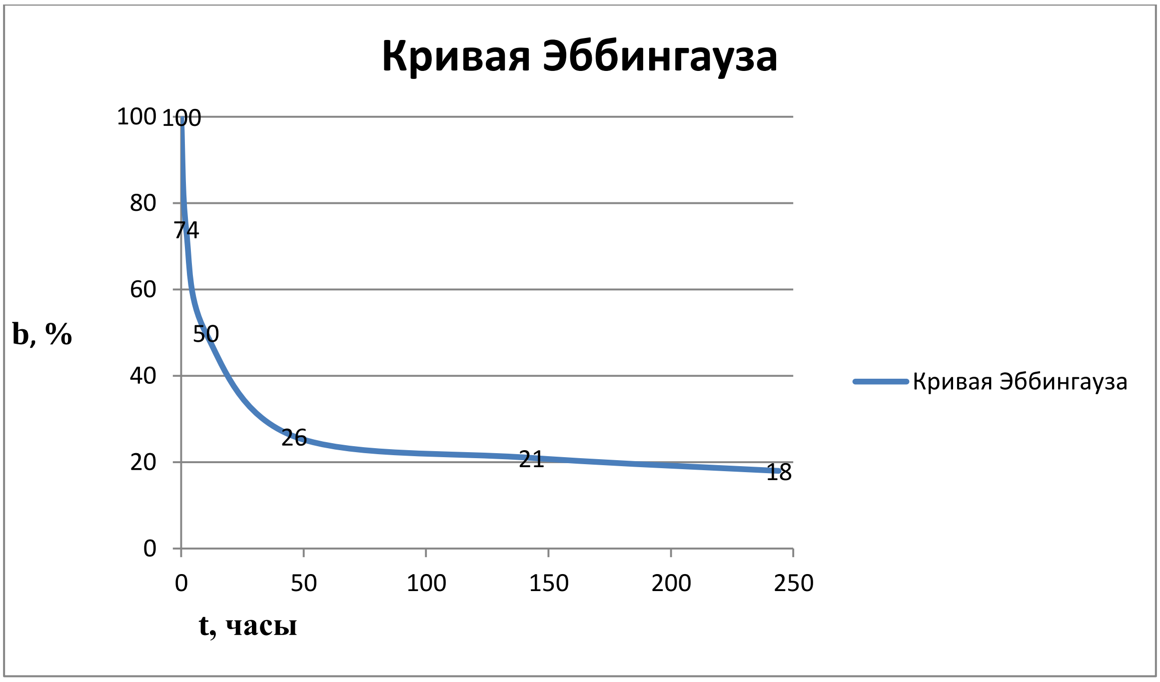

Рисунок 13. Кривая Эббингауза

Л.Терстоун предложил следующее аналитическое выражение (гиперболический закон обучения):

$$y = \frac{a(n + c)}{n + c \ \ + b}$$

где y – усвоение, n – число испытаний, a и c – константы; b – скорость научения.

В дальнейшем [6] процесс обучения рассматривался как стохастический процесс, поэтому модель Терстоуна приобретает вид:

$$p_n = \frac{n-1}{n-1+b}$$

где y интерпретируется как вероятность приобретения навыка (или правильного ответа) в n-ом испытании.

Линейная модель Буша—Мостеллера определяет вероятность усвоения какой-либо единицы знания после прохождения n-го этапа обучения:

$$q_n = 1 - (1-q)(1-c)^{n-1}$$

где q – вероятность усвоения знаний после первого этапа обучения, c – постоянная, характеризующая скорость обучения. Примером использования линейной модели Буша—Мостеллера является обучение операторов навыкам работы на пультах управления, работы по приёму, переработке и выдаче информации в зависимости от числа упражнений [6].

В настоящее время вопросы научения опираются на статистическую теорию обучения [1, 4, 5, 7]. В ней рассматриваются случайные процессы усвоения и забывания (приобретения и утраты умения, навыка).

Пусть существует программа контроля, содержащая N>>1 вопросов и заданий, причём в любой момент времени каждый вопрос может быть усвоен или не усвоен. Эти состояния обозначаются логическими единицей и нулём. Если в момент времени t = 0 учебный материал по какому-либо вопросу изучен и при задании этого вопроса обучаемый даёт правильный ответ, а при повторении того же вопроса в момент t=τ — неправильный ответ, то τ соответствует времени забывания.

Предположим, что время забывания τ является неотрицательной непрерывной случайной величиной, имеющей функцию распределения вероятностей:

$$P(t) = P\{\tau < t\}$$

с производной p(t)=P'(t). P(t) есть вероятность неправильного ответа до момента времени t. Тогда величина:

$$Q(t) = 1 - P(t) = P(\tau \geq t) = \int_t^{\infty} p(u)du$$

соответствует вероятности получения правильного ответа на вопрос в интервале (0, t), т. е. вероятности того, что в интервале (0, t) вопрос по какому-либо элементарному высказыванию не будет забыт.

Зная изменение во времени вероятности правильного ответа Q(t), можно определить математическое ожидание времени забывания вопросов определённого типа тем или иным обучаемым:

$$T = M(\tau) = \int_0^{\infty} tp(t)dt = \int_0^{\infty} Q(t)dt$$

Аналогично можно определить дисперсию времени забывания:

$$D(\tau) = M\{\tau - T\}^2 = 2\int_0^{\infty} tQ(t)dt - T^2$$

Введём характеристику знания обучаемого по какому-либо вопросу — интенсивность забывания или интенсивность потока забывания учебного материала. Пусть в момент времени t=0 все N вопросов программы усвоены обучаемым, а вероятность правильного ответа на каждый из них в момент времени t равна Q(t). Предположим, что знания по забытым вопросам не восстанавливаются (повторение отсутствует). При этом через время t в среднем будет забыто число вопросов M(t) = NP(t). Следовательно, число незабытых вопросов равно: N – M (t) =NQ(t). Зная M(t), можно определить частоту забывания вопросов:

$$\frac{dM(t)}{dt} = NP'(t) = Np(t)$$

где p(t) — плотность вероятности неправильного ответа. Тогда отношение λ(t) частоты забывания к ожидаемому числу незабытых вопросов в интервале времени (0, t)

$$\lambda(t) = \frac{dM(t)}{dt}[N - M(t)]^{-1} = \frac{p(t)}{Q(t)} = \frac{Q'(t)}{Q(t)}$$

Величина λ(t) представляет собой плотность условной вероятности неправильного ответа в момент времени t при условии, что до этого момента вопрос не был ещё забыт. Назовём её функцией интенсивности забывания (или просто интенсивностью забывания). Она может возрастать или убывать с течением времени.

Величины Q(t), p(t) и λ(t) связаны между собой:

$$Q(t) = \exp[-\int_0^t \lambda(t)\,dt]$$

$$p(t) = \lambda(t)\,exp[-\int_0^t \lambda(t)\,dt]$$

Интенсивность забывания λ(t) имеет следующий смысл. Величина λ(t)Δt представляет собой вероятность того, что обучаемый, знающий учебный материал по какому-либо вопросу в интервале времени (0, t), забудет его в интервале времени (t,t+Δt). Таким образом, среднее время забывания равно 1/λ (с).

Законы распределения случайной величины — времени забывания — могут быть различными и определяются в зависимости от характера деятельности обучаемого, типологии его личности, внешних условий. В [7] для описания процесса забывания предлагается использовать экспоненциальное распределение, распределения Вейбулла, Эрланга и гамма-распределение.

В случае экспоненциального распределения

$$P(t) = 1 - \exp[-\lambda t]$$

$$Q(t) = e^{-\lambda t}$$

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Тогда выражения для математического ожидания, дисперсии времени забывания и интенсивности забывания имеют вид:

$$M(\tau) = T = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\lambda(t) = \lambda$$

При λ=const вероятность правильного ответа на вопрос в интервале (t,t+Δt) не зависит от t, а зависит от ширины интервала Δt.

При распределении Эрланга плотность и функция распределения времени забывания определяются следующим образом:

$$p(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$P(t) = 1 - \sum_{r-0}^{a-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t}$$

где a – положительное целое число. Экспоненциальное распределение есть частный случай распределения Эрланга при a=1.

Распределение Вейбулла. Если $\lambda(t)$= λt, то

$$Q(t) = \exp(-\frac{1}{2}\lambda t^2)$$

в общем случае при λ(t) = λt^a

$$P\ t\ = 1 - \exp(-\frac{\lambda t^{\alpha+1}}{\alpha+1})$$

$$p\ t\ = \lambda t^2 \exp(-\frac{\lambda t^{\alpha+1}}{\alpha+1})$$

Таким образом, экспоненциальное распределение есть частный случай закона Вейбулла при α =0. Тогда путём выбора параметров α и λ можно достичь более точного соответствия экспериментальных данных и теоретического распределения.

Допустим, после изучения i-го вопроса в момент времени t=0 обучаемый даёт на него правильный ответ. Через время τ_1 он его забывает. В этот момент происходит в соответствии с теорией «внезапного» обучения восстановление знаний обучаемого. Процесс забывания и восстановления знаний i-го вопроса можно представить в виде чередующихся интервалов забывания или сохранения (состояние E_0) и восстановления знаний (состояние E_1) (рис. 14). Рассматриваемый процесс может быть описан следующим образом. В момент времени $t=t_0^{1i}$ в соответствии с учебной программой начинается изучение материала по какому-либо вопросу. Для этого требуется время Θ_1. Затем начинается забывание данного вопроса. Длительность этого промежутка времени равна τ_1. Для повторного восстановления знаний по данному вопросу обучаемому требуется время Θ_2. Пусть моменты времени:

$$\mathrm{tn}^{1\mathrm{i}} = \Theta_1 + \tau_1 + \Theta_2 + \tau_2 \ldots + \Theta_n + \tau_n$$

$$\mathrm{tn}^{2\mathrm{i}} = \Theta_1 + \tau_1 + \Theta_2 + \tau_2 \ldots + \Theta_n, \qquad \mathrm{T} = 1,2, \ldots$$

соответственно моменты забывания и восстановления знаний.

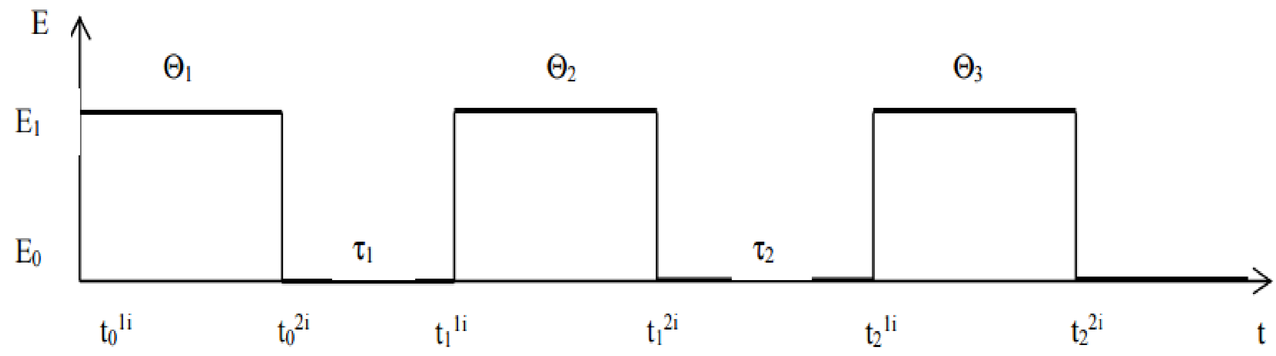

Рисунок 14. Чередующиеся процессы забывания и восстановления

Математической моделью рассматриваемого процесса является соответствующий случайный процесс. Если все интервалы τ_j имеют одно и то же распределение F(t), а все интервалы Θ_j— одно и то же распределение G(t), то математической моделью процесса забывания и восстановления знаний является альтернирующий процесс восстановления.

Таким образом, каждому вопросу или отдельной теме соответствует два отдельных потока: поток учебного материала ($П_{1i}$) и поток усвоения или восстановления знаний ($П_{2i}$).

Поток учебного материала $П_{1i}$ образован моментами времени t_0^{1i}, t_1^{1i}, t_2^{1i}, ...,. Момент времени t^{li}_{o} соответствует моменту первого изложения материала по i-му вопросу в соответствии с учебной программой, последующие же моменты времени t_1^{1i}, t_2^{1i} , … соответствуют моментам забывания знаний по данному вопросу.

Поток усвоения или восстановления знаний $П_{2i}$ для i-го вопроса образуется моментами времени t_0^{2i}, t_1^{2i}, t_2^{2i}, ...,. При этом t_0^{2i} соответствует моменту времени усвоения i-го вопроса после его первого изложения, моменты t_1^{2i}, t_2^{2i}, ..., соответствуют моментам восстановления знаний после их забывания.

Тогда суммарный поток учебного материала:

$$\pi_{уч} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{1i}$$

Аналогично, поток усвоения и восстановления знаний:

$$\pi_{\text{вос}} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{2i}$$

Среди суммарных потоков $\Pi_{\text{уч}}$ и $\Pi_{\text{вос}}$ в первую очередь рассмотрим простейшие или стационарные пуассоновские потоки. Вероятность появления k событий и математическое ожидание числа событий в интервале времени (0, t) равны:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$M(v(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

Можно показать, что суммарный поток $\Pi_{\text{уч}}$, получающийся в результате суммирования простейших потоков программы подготовки по отдельным вопросам, является простейшим:

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = N\lambda \text{, при } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = \lambda$$

Аналогичные соотношения справедливы для простейшего потока восстановления знаний.

Анализ процесса обучения, рассматриваемого как совокупность моделей обучения и обучаемого и представленного в виде простейших стохастических потоков, даёт возможность создать модель обучения без серьёзных ограничений, т. е. задача оптимизации успешно решена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование управляемых процессов достаточно сложный и глубокий процесс, который охватывает обширную область жизнедеятельности людей. Существующие в настоящее время управляемые процессы отличаются огромным разнообразием как по направлениям деятельности, так и по форме деятельности, масштабам, другим параметрам. При этом каждый управляемый процесс уникален. Однако для управления всеми процессами применяются одинаковые принципы, методы и способы. Чтобы приспособить их к особенностям конкретного процесса, чётко определить место управляющих структур в общей структуре процесса, а также их взаимодействие между собой и с другими, широко применяется моделирование. Поэтому изучение моделирования в управленческой деятельности является актуальной проблемой.

Для решения этих проблем в данном проекте были проанализированы цели и задачи математического моделирования, основные принципы математического моделирования. Также в работе были изучены основные понятия и виды управляемых процессов, были определены основные цели и задачи, которые должны быть реализованы при помощи математической модели. Ещё одной важной частью работы стал анализ и моделирование конкретных процессов. Определение целей которые стоят перед математической моделью, изучение их функций, которые возникают при функционировании данного процесса.

Итогом данной аналитической работы стало исследование и расчёт математических моделей: «Производственных поставок», «модель Леонтьева» и «Процесса обучения, с пошаговым выводом целей и созданием структуры». В рамках данного проекта были разработаны математические модели.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. А.А.Самарский, А.П.Михайлов. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. - М., Наука, 1997.

2. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей (под ред.В.Н.Вапника) М.,: Наука, 1983 - 816 с.

3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике - М., Наука, 1975

4. Redshift-3. - Maris Multimedia (CD-ROM) - Applications 1- 4.

5. Frank O.// Zeitschr.Biol. 1895. Bd 32. S 370-437.

6. Лищук В.А. Математические модели сердечно-сосудистой системы. Итоги науки и техники. Бионика, биокибернетика, биоинженерия (т.7) - М., ВИНИТИ - 1990 - 140 с.

7. Инженерная физиология и моделирование систем организма (ред.В.Н.Новосельцев). - 1987 - Новосибирск, Наука, 234 с.

8. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М.: Мир, - 1970, 620с.

9. Дозорцев В.М. Динамическое моделирование в оптимальном управлении и автоматизированном обучении операторов технологических процессов. Ч.1. Задачи оптимального управления // Приборы и системы управления, № 7, 1996, с. 46-51.

10. Дозорцев В.М. Динамическое моделирование в оптимальном управлении

и автоматизированном обучении операторов технологических процессов Ч.2.

Компьютерные тренажеры реального времени. // Приборы и системы управления, № 8,

1996, с. 41-50.

11. Ю.М.Свирежев, Д.О.Логофет. Устойчивость биологических сообществ М.,:Наука,

1978.

12. Антомонов Ю.Г. Моделирование биологических систем. Справочник. Киев.

Наукова думка. 1977 - 260 с.

13. Шумаков В.И., Новосельцев В.Н., Сахаров М.П., Штенгольд Е.Ш. Моделирование

физиологических систем организма. - 1971 - Москва, изд-во "Медицина"

14. Полетаев И.А. О математических моделях элементарных процессов

в биогеоценозах // Проблемы кибернетики, вып. 16, 1966, с.76-90.

15. Полетаев И.А. О математическом моделировании // Проблемы кибернетики,

вып.27, 1973, с.143-151.

16. Перельман И.И. Оперативная идентификация объектов управления. М.,

Энергоиздат, 1982.

17. Di Stefano III, J.J. The modeling methodology forum: an expanded department.

Additional guidelines / American Journal of Physiology, No 1, 1984.

18. Радченко С.В., Еремин С.А., Халитов Ф.Я. Реализация математической модели

отравления ФОВ на персональой ЭВМ // II Международная конференция

и дискуссионый научный клуб "Новые информационные технологии в медицине

и экологии" - Ялта-Гурзуф - 1996 - с.104 - 105.

19. Поспелов Г.С. Искусственный интеллект - основа новой информационной

технологии - М., Наука, 1988 - 279 с. ;

20. Vorontsov I.N. On the conceptual basis of a scientific knowlegde system langauge

/ Abstr. of 8th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, USSR, Aug 17-22, 1987, v.4, pt.2, pp.240-242.

21. Новосельцев В.Н. Междисциплинарное моделирование : возможный подход

к анализу катастроф / Автоматика и Телемеханика, 1998 - N 2, стр.101-111.

22. Дагаев В.Н., Казачков В.И., Литвинов Н.Н., Новосельцев В.Н. Об использовании

математических подходов к совершенствованию диагностики и лечения отравлений.

23. Беспалько В.П. Образование и обучение с участием компьютеров: М.: МПСИ, 2002.

24. Информатика и вычислительная техника в учебном процессе и управлении: Омск: ОГПИ, 1988. 202 с.

25. Краевский В.В. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности: Дидактика средней школы: М.: Педагогика, 1982.

26. Леонтьев Л.П., Гохман О.Г. Проблемы управления учебным процессом (математические модели): Рига: Зинанте, 1984.

27. Парфенова М.Я., Руденко Ю.С. Механизмы интеграции образования, науки и производства с применением подхода

диссимметрии//Образовательные ресурсы и технологии. 2013. №2(3). [Электронный ресурс]. URL:http://www.muiv.ru/vestnik/pdf/pp/ot_2013_2_067-073.pdf

28. Растригин Л.А., Эренштейн М.Х. Адаптивное обучение с моделью обучаемого: Рига: Зинатне, 1988.

29. Свиридов А.П. Основы статистической теории обучения и контроля знаний: М.: Высшая школа, 1981.

Магистерская диссертация выполнена мной совершенно самостоятельно. Все использованные в работе материалы и концепции из опубликованной научной литературы и других источников имеют ссылки на них.

«___» _________________ ______ г.

_____________________________ _________________________

(подпись) *(Ф.И.О.)*