ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Магистерская диссертация

обучающегося по направлению подготовки 01.04.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001534
Удовиченко Михаила Валерьевича

Научный руководитель
Д.ф.-м.н., профессор Глушак А.В.

Рецензент
Ст. преп. Чернова О.В.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

0.1 Современное состояние темы и актуальность.

Неуклонно растущий интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется, во-первых, расширяющимся объёмом их приложений и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со своими специфическими задачами.

Изучаются однородные и неоднородные краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений математической физики.

Заданное в n—мерной области Ω евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнение

$$\mathbb{A}u(x) = f(x) \tag{0.1.1}$$

называется *нагруженным*, если оно содержит *след* некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности $< n$.

Нагруженное уравнение (0.1.1) называется *нагруженным дифференциальным уравнением* в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, если его можно представить в виде

$$\mathbb{A}u \equiv \mathbb{L}u(x) + \mathbb{M}u(x) = f(x), \tag{0.1.2}$$

где $\mathbb{L}$ – дифференциальный оператор, а $\mathbb{M}$ – дифференциальный или интегродифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих $\overline{\Omega}$ многообразиях ненулевой меры строго меньше n.

Например, к простейшему уравнению вида (0.1.2) приводит задача о колебаниях струны, нагруженной сосредоточенными массами, которая находит широкое применение в физике и технике. Ещё Пуассон решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к упругой нити. А.Н. Крылов показал, что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода дрожащих клапанов. Для теории многих измерительных приборов важно изучение крутильных колебаний нити, к концу которой подвешена масса, например, зеркальце.

Подобного типа задачи приобрели особую актуальность в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолёта, так как для решения этой задачи необходимо вычисление собственных частот крыла (балки переменного сечения), нагруженного массами (моторами). Помимо этого, такие задачи встречаются при расчёте собственных колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными ёмкостями и самоиндукциями.

Также необходимо отметить, что решение многих задач по оптимальному управлению агроэкосистемой, например, задач долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, сводятся к изучению уравнений вида (0.1.2). Такого рода уравнения, естественным образом, возникают при исследовании нелинейных уравнений, уравнений переноса частиц, задач оптимального управления, обратных задач, при численном решении интегродифференциальных уравнений, при эквивалентном преобразовании нелокальных краевых задач и т.д.

Основные вопросы, возникающие в теории граничных задач для уравнений в частных производных, остаются таковыми же и для краевых задач для нагруженных уравнений вида (0.1.2). Однако, наличие нагруженного оператора $\mathbb{M}$ не всегда позволяет без изменений применять известную теорию краевых задач для уравнений вида

$$\mathbb{L}u(x) = f(x), \;\; x \in \Omega. \tag{0.1.3}$$

Например, один из центральных вопросов – вопрос о корректном выборе функциональных пространств решения задач (0.1.3), когда $\mathbb{L}$ – является оператором гиперболического, параболического, эллиптического или смешанного типа, достаточно подробно исследован в работах многих математиков. Так как уравнения с частными производными образуют сегодня огромную и необозримую область математики и математической физики, использующую методы всей остальной математики, то мы естественно сможем указать лишь небольшую часть этих работ: С.Л. Соболева, С.М. Никольского, М.И. Вишика, В.С. Владимирова, О.А. Ладыженской, Ж.-Л. Лионса, П Гривара, В.А. Солонникова, и многих других математиков. Однако, как отмечено выше, эти результаты не всегда применимы к нагруженным уравнениям вида (0.1.2).

По всей видимости, первые исследования по нагруженным уравнениям были проведены для нагруженных интегральных уравнений, то есть для уравнений вида (0.1.2), где $\mathbb{L}$ – интегральный оператор, оператор $\mathbb{M}$ также интегральный, но взятый по многообразиям размерности строго меньше n. Здесь уместно отметить работы A. Knezer, L. Lichtenstein, Н.М., А.Н.Крылова и более поздние, А.Ш. Габиб-заде, Н.Н. Назарова, C.W. Bitzer, М.Г. Крейн, W. Gibson, J. Groh, C.S. Hönig, А.С. Калитвина .

Одними из первых, кто применял в своих работах нагруженные дифференциальные и интегродифференциальные уравнения были С.М. Тарг, Н.Н. Кочина и др.

Наиболее общее определение нагруженного уравнения впервые было дано А.М. Нахушевым. В монографии им даются понятия и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, нагруженных интегральных, нагруженных интегродифференциальных, нагруженных функциональных уравнений, и их многочисленные приложения и к задачам биологии. Необходимо отметить, что работы А.М.Нахушева и его учеников способствовали интенсивному и систематическому изучению краевых задач для нагруженных уравнений вида (0.1.2).

Достаточно широкий круг вопросов: исследование обобщенной разрешимости неоднородных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в соболевских пространствах; описание пространств решений и функций, задающих правые части и граничные условия; доказательство априорных оценок, которые обеспечивают корректность краевых задач и точность выбранных пространств исследован в работах М.Т. Дженалиева. Помимо этого, в его работах приводится обзор по нагруженным уравнениям.

Отметим, что некоторыми авторами, исследованы нагруженные дифференциальные уравнения, которые содержат дробные производные от следов искомой функции по временной переменной, но порядок производной в нагруженном слагаемом строго меньше соответствующего порядка дифференциальной части уравнения и точка нагрузки фиксирована, то есть, неподвижна.

В рассматриваемой работе, впервые исследуются граничные задачи для нагруженного оператора теплопроводности в ограниченной и неограниченной областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения, причём, что оказалось существенным, точка нагрузки движется с постоянной или переменной скоростью.

На практике такого рода задачи возникают, например, при необходимости движущейся точки наблюдения, когда требуется вести наблюдение, делать всевозможные измерения и передавать информацию, с помощью устройства обратной связи управляющему устройству о протекающем процессе, в каждой точке некоторого непрерывного множества.

Особенностью рассматриваемых задач является то, что, во-первых, спектральный параметр служит коэффициентом при нагруженном слагаемом, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения (такие уравнения названы *"существенно" нагруженными*) и, в третьих, точка нагрузки движется (с постоянной и переменной скоростями). В этом случае, в отличии от ранее изученных нагруженных дифференциальных уравнений, нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части. Здесь проявляются новые свойства нагруженного дифференциального оператора, не присущие операторам со слабым возмущением. Например, граничная задача с движущейся точкой нагрузки по пространственной переменной является нётеровой, и для некоторых, строго описываемых в комплексной плоскости, значений спектрального параметра она имеет конечный положительный индекс, поэтому эти задачи также можно назвать *спектрально–нагруженными.*

Всё это подчёркивает как теоретическую, так и практическую актуальность постановки и изучения краевых задач для спектрально – нагруженных дифференциальных уравнений, на предмет выяснения вопросов спектра этих задач, установления критериев дающих полное описание (в терминах данных задачи) классов корректных граничных задач.

0.2 Цель и научная новизна

Цель – это постановка однородных и неоднородных краевых задач для: "существенно" нагруженных (спектрально-нагруженных) уравнений параболического типа в ограниченной и неограниченной областях, нагруженных уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического) типа и исследование их обобщённой разрешимости в различных классах функций. Описание пространств решений, свободных членов и граничных условий. Получение априорных оценок, которые бы обеспечивали корректность исследуемых задач и правильность выбора пространств функций. Исследование спектральных вопросов соответствующих однородных задач.

Применяется метод априорных оценок исследования краевых задач, метод интегральных преобразований, используются методы общей теории дифференциальных уравнений с частными производными,функционального анализа, теории функций комплексного переменного, в частности теории краевых задач функций комплексного переменного. Отметим, что одновременно с исходными краевыми задачами исследуются соответствующие им сопряжённые краевые задачи.

Научная новизна. Предлагаются постановки новых краевых задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений и нагруженных уравнений смешанного (эллиптико – гиперболического) типа. Основные результаты:

1^0 Для спектрально-нагруженных по пространственной переменной параболических уравнений, когда порядок производной в нагруженном слагаемом равен и выше порядка дифференциальной части уравнения, сформулированы полупериодические (периодические по временной переменной) задачи в ограниченной области. Доказаны теоремы об их однозначной разрешимости при выполнении соответствующих условий.

2^0 Указаны функциональные пространства и получен критерий однозначной сильной разрешимости для многомерного обобщения задачи.

3^0 Показано, что спектральная задача для "существенно" нагруженного по пространственной переменной параболического уравнения в ограниченной области имеет счетный спектр, расположенный на строго описываемой кривой комплексной плоскости значений спектрального параметра.

4^0 Для нагруженного линейного дифференциально-операторного уравнения первого порядка показано, что спектральный параметр λ принадлежит одному из следующих множеств: резольвентному множеству, точечному спектру или непрерывному спектру.

5^0 Для нагруженного линейного дифференциально-операторного уравнения высокого порядка с периодическими граничными условиями найден критерий однозначной сильной разрешимости.

6^0 Для спектрально-нагруженного параболического оператора исследованы взаимно-сопряженные граничные задачи в четверти плоскости, когда нагрузка задаётся по пространственной переменной и, при этом, точка нагрузки движется с постоянной и с переменной скоростями. Особенностью рассматриваемых задач, является то, что, во-первых, *спектральный параметр служит коэффициентом при нагруженном слагаемом*, во-вторых, *порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части уравнения* и, в третьих, *точка нагрузки движется* (с постоянной и переменной скоростями). Выявлены новые свойства нагруженного дифференциального оператора, не присущие операторам со слабым возмущением. Показано, что рассматриваемые задачи являются нетеровыми, и для некоторых, строго описанных в комплексной плоскости, значений спектрального параметра они имеют ненулевой индекс, который определяется непосредственно значением модуля этого спектрального параметра. Сформулированы теоремы о разрешимости этих задач в естественным образом введенных функциональных классах.

7 0 Изучены граничные задачи (задача Коши, задача Коши – Дирихле, задача Дирихле) для спектрально-нагруженного параболического уравнения с нагрузкой при фиксированной временной переменной. Особенностью рассматриваемых задач является наличие нагруженного слагаемого с производной любого целого порядка от искомого решения. Для каждой из этих задач решены по две проблемы: первая – это установлены размерности ядра оператора соответствующей задачи (результаты представлены в виде таблиц); вторая — найдены критерии и определены классы сильной однозначной разрешимости соответствующих неоднородных задач.

8 0 Изучается граничная задача для нагруженного уравнения Лаврентьева – Бицадзе в прямоугольной области, которая отличается от изученных ранее тем, что, во-первых, область в гиперболической части является не характеристической, во-вторых, в уравнении имеются нагруженные слагаемые. Доказана теорема и некоторые следствия из неё , которые в терминах данных, дают полное описание корректных граничных задач рассматриваемого вида.

9 0 Исследуются граничные задачи для нагруженных уравнений смешанного эллиптико–гиперболического типа в прямоугольной области, являющиеся моделью замкнутых управляемых систем, когда управляющее устройство формирует воздействия на объект управления, в фиксированные моменты времени, пропорционально следу функциисостояния. Особенностью подобных задач является то ,что здесь не удается непосредственно обратить оператор гиперболической и эллиптической частей и свести исходную задачу к исследованию разрешимости сингулярных интегральных уравнений. Найдены условия существования единственного L_2–сильного решения, удовлетворяющего на линии изменения типа уравнения, условиям непрерывности решения и непрерывности его производной по времени с логарифмическим весом.

1. СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В данном разделе исследуются вопросы сильной разрешимости для некоторых спектрально-нагруженных ("существенно" нагруженных) дифференциальных уравнений параболического типа в ограниченной области. Особенность рассматриваемых задач заключается в том что, например в пространстве $L_2(Q)$ соответствующие дифференциальные операторы не являются замыкаемыми, так как, во-первых, нагрузка не подчинена соответствующей дифференциальной части рассматриваемого оператора, т.е. не является слабым возмущением для его дифференциальной части. Во-вторых, как известно, сами операторы нагрузок в пространствах $L_2(0,1)$ и $L_2(Q)$ не являются замыкаемыми операторами.

Всё это не позволяет непосредственно исследовать вопросы сильной разрешимости граничных задач для незамыкаемых нагруженных дифференциальных уравнений. Однако исследование таких уравнений представляет не только чисто теоретический , но и определенный прикладной интерес.

В подразделах 1.1 и 1.2 предлагается один из подходов исследования вопросов сильной разрешимости сопряжённых граничных задач для спектрально – нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа в ограниченной области.

Для многомерного обобщения этих задач, также с помощью введения вспомогательной нелокальной задачи в подразделе 1.3 получены представление и априорные оценки классического решения.

Для полноты исследования рассматриваемых граничных задач для "существенно" нагруженных дифференциальных уравнений в ограниченной области, в подразделе 1.4 изучаются соответствующие спектральные задачи.

Предметом исследования подраздела 1.5.1 является изучение спектральных свойств нагруженного дифференциального оператора L, определяемого граничной задачей

$$[D_{t} - A + N]u(t) = f(t), \quad t \in (0, b), \qquad \mu u(0) - u(b) = 0,$$

где

$$D_{t} = \frac{\partial}{\partial t},\ N[u(t)] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(t_k),\ \mu,\ \alpha_{k} \in \mathbb{C},\ k = 1, \ldots, m,\ f \in \mathcal{H},$$

В подразделе 1.5.2 исследуются вопросы корректной постановки граничных задач для одного класса нагруженных линейных дифференциально-операторных уравнений высокого порядка с периодическими граничными условиями. Показано, что, во-первых, условия корректности этих задач не зависят от точек нагружения, во-вторых, корректность рассматриваемых задач не зависит также от коэффициентов при нагруженных слагаемых.

1.1 Полупериодическая граничная задача

Дадим постановки двух граничных задач для спектрально-нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа в ограниченной области.

1.1.1 Постановки граничных задач

Постановка граничной задачи 1.

Рассмотрим в области $Q = \{x, t|\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 2\pi\}$ следующую граничную задачу:

$$\mathbb{L}_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \cdot x \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\bar{x}} = f(x,t),\ \{x,t\} \in Q; \quad (1.1.1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = u(x,2\pi); \quad (1.1.2)$$

где $\overline{x} \in (0,1)$ – фиксированная точка, $\alpha \in \mathbb{C}$ – заданное число,

$$f \in L_2(0, 2\pi; W_2^2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)) \text{ – заданная функция.} \quad (1.1.3)$$

Постановка граничной задачи 2.

В области $Q = \{x, t|0 < x < 1, 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости следующей граничной задачи:

$$\mathbb{L}_3 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\Big|_{x=\bar{x}} = f(x,t),\ \{x,t\} \in Q; \quad (1.1.4)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = u(x,2\pi); \quad (1.1.5)$$

где

$$\begin{cases} \overline{x} \in (0,1) \text{ – фиксированная точка, } \alpha \in W_2^{2m}(0,1), \\ f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(0'1)) \text{ – заданные функции,} \\ k \geqslant 2,\ m = \begin{cases} k/2, & \text{если } k \text{ – четное число,} \\ (k-1)/2, & \text{если } k \text{ – нечетное число.} \end{cases} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Замечание 1.1. *Нагруженный дифференциальный оператор $\mathbb{L}_1$, определяемый соотношениями* (1.1.1)–(1.1.2), *в пространстве* $L_2(Q)$ *не замыкаем, поэтому для изучения задачи* (1.1.1)–(1.1.2) *введем в рассмотрение следующую вспомогательную нелокальную задачу:*

$$\mathbb{L}_2 u \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \{x,t\} \in Q; \tag{1.1.7}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ u(x,0) = u(x,2\pi); \tag{1.1.8}$$

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u(\overline{x},t)}{\partial x^2} = 0. \tag{1.1.9}$$

Отметим, что (в отличие от оператора $\mathbb{L}_1$) оператор $\mathbb{L}_2$ граничной задачи (1.1.7)–(1.1.9) *является замыкаемым оператором в* $L_2(Q)$. *Кроме того, очевидно, что граничные задачи* (1.1.1)–(1.1.2) *и* (1.1.7)–(1.1.9) *взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи* (1.1.7)–(1.1.9) *будет таковым и для задачи* (1.1.1)–(1.1.2). *Обратно, если регулярное решение задачи* (1.1.1)–(1.1.2) *обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи* (1.1.7)–(1.1.9).

Уравнения (1.1.1), (1.1.4) являются нагруженными [87]. Особенность данных уравнений заключается в том, что нагруженное слагаемое здесь входит в главную часть оператора, определяемого левой частью данного уравнения. В ранее проведенных исследованиях [7, 70, 1, 71], в основном, рассматривались уравнения с такими нагруженными операторами, в которых нагруженные слагаемые играли роль слабого возмущения для их дифференциальной части. Для уравнений (1.1.1), (1.1.4) последнее не выполняется, поэтому дифференциальные уравнения (1.1.1), (1.1.4) являются спектрально или "существенно" нагруженными.

Замечание 1.2. *Для изучения задачи* (1.1.4)–(1.1.5) *введем в рассмотрение в области Q следующую вспомогательную нелокальную задачу:*

$$\mathbb{L}_4 u \equiv \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \alpha^{(2m)}(x)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}; \tag{1.1.10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ u(x,0) = u(x,2\pi); \tag{1.1.11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} - \alpha(0)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0,\\ \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} - \alpha(1)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0;\end{gathered} \tag{1.1.12}$$

$$\frac{\partial^{j+1}u(0,t)}{\partial x^j\partial t} - \frac{\partial^{j+2}u(0,t)}{\partial x^{j+2}} + \alpha^{(j)}(0)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0; \qquad (1.1.13)$$

$$\frac{\partial^{j+1}u(1,t)}{\partial x^j\partial t} - \frac{\partial^{j+2}u(1,t)}{\partial x^{j+2}} + \alpha^{(j)}(1)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0; \qquad (1.1.14)$$

$$j = 1,...,m-1.$$

Заметим, что граничные задачи (1.1.4)—(1.1.5) *и* (1.1.10)—(1.1.14) *взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи* (1.1.10)—(1.1.14) *будет таковым и для задачи* (1.1.4)—(1.1.5). *Обратно, если регулярное решение задачи* (1.1.4)—(1.1.5) *обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи* (1.1.10)—(1.1.14).

Приведём некоторые, необходимые в дальнейшем определения.

Положим: $\tilde{C} = \Big\{u|\, u \in C^{2,\,1}_{x,\,t}(\overline{Q}),\ u_t,\ u_{xx} \in C^{2,\,0}_{x,\,t}(Q),$ и пусть выполнены условия $(1.1.8)-(1.1.9)\Big\}$.

Определение 1.1. *Функцию $u(x,t)$ будем называть сильным решением граничной задачи* (1.1.7)—(1.1.9), *если существует последовательность функций $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{C}$, таких, что выполнены следующие условия:*

$$1^0.\ \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t) \text{ в } L_2(Q);\ \ 2^0.\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{L}_2 u_n(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ в } L_2(Q).$$

Определение 1.2. *Сильное решение граничной задачи* (1.1.7)—(1.1.9) *будем называть сильным решением граничной задачи* (1.1.1)—(1.1.2).

1.1.2 Теоремы единственности и существования сильного решения

Вначале рассмотрим граничную задачу **1**, и покажем, что для неё имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1.1. *Для любой функции $f \in L_2(0,2\pi; W^2_2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1))$ граничная задача* (1.1.1)—(1.1.2) *имеет единственное сильное решение $u(x,t)$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

$$\delta_s \equiv 1 - \frac{\alpha\cdot \mathrm{sh}\{\lambda\overline{x}\}}{\mathrm{sh}\{\lambda\}} \neq 0,\ \forall s \in \mathscr{S}, \qquad (1.1.15)$$

где $\mathscr{S} = \{s|s = 0; \pm1; \pm2; ...\},\ \lambda^2 = is,\ i = \sqrt{-1}.$

Следствие 1.1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}^1$. *В этом случае для справедливости утверждения теоремы 1.1.1, необходимо и достаточно, выполнение условия*

$$1 - \alpha\overline{x} \neq 0. \tag{1.1.16}$$

Утверждение следствия 1.1 является простым следствием того факта, что мнимая часть выражения $\dfrac{\operatorname{sh}\{\lambda\overline{x}\}}{\operatorname{sh}\{\lambda\}}$ для любого $s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$ не может быть равной нулю, так как знаменатель этого выражения есть число, у которого и действительная и мнимая части всегда отличны от нуля.

Следствие 1.2. *Пусть* $1 - \alpha\overline{x} = 0$. *Тогда оператор граничной задачи* (1.1.1)—(1.1.2) *имеет нулевое собственное значение, и соответствующая ему собственная функция равна:*

$$w_0(x) = x(1 - x^2). \tag{1.1.17}$$

Доказательство теоремы 1.1.1. В доказательстве этой и ряда последующих теорем мы основываемся на результатах Дезина А.А. [124], по развитию метода разделения переменных для исследования сильной разрешимости линейных граничных задач.

Будем искать решение задачи (1.1.7)—(1.1.9) на основе следующих разложений:

$$u(x,t) = \sum_{s\in\mathscr{S}} u_s(x)e^{is\cdot t},\ f(x,t) = \sum_{s\in\mathscr{S}} f_s(x)e^{is\cdot t}. \tag{1.1.18}$$

Для Фурье-коэффициентов граничной задачи (1.1.1)—(1.1.2) получим следующую краевую задачу для нагруженного, обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} isu_s(x) - u_s''(x) + \alpha x u_s''(\overline{x}) = f_s(x),\ x \in (0,1), \\ u_s(0) = u_s(1) = 0, \end{cases} \quad \forall s \in \mathscr{S}. \tag{1.1.19}$$

Единственное решение задачи (1.1.19) представимо в виде:

$$\begin{cases} u_s(x) & = \alpha\delta_s^{-1}\left[\int\limits_{0-}^{1} G_s(\overline{x},\xi)f_s(\xi)d\xi - \dfrac{1}{\lambda^2}f_s(\overline{x})\right]\cdot \\ & \quad \cdot\left[\dfrac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda)} \quad x\right] + \int\limits_0^1 G_s(x,\xi)f_s(\xi)d\xi, \quad \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}, \\ u_0(x) & = 6^{-1}\delta_0^{-1}\alpha x(x^2 - 1)f_0(\overline{x}) + \int\limits_0^1 G_0(x,\xi)f_0(\xi)d\xi, \end{cases} \tag{1.1.20}$$

где

$$G_s(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\{\lambda\xi\}\operatorname{sh}\{\lambda(1-x)\}}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda)}, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\operatorname{sh}\{\lambda x\}\operatorname{sh}\{\lambda(1-\xi)\}}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda)}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \end{cases} \quad \forall s \in \mathscr{S}, \quad (1.1.21)$$

в том и только в том случае, когда

$$\delta_s = 1 - \frac{\alpha \cdot \operatorname{sh}(\lambda\overline{x})}{\operatorname{sh}(\lambda)} \neq 0, \quad \forall s \in \mathscr{S}. \quad (1.1.22)$$

Справедливость соотношений (1.1.20) и (1.1.21) показывается в Приложении А.

Выражения для $G_0(x,\xi)$ и δ_0 можно получить непосредственно, при $s = 0$, или же из формул (1.1.21) и (1.1.22) путем предельного перехода при $\lambda \to 0$ $(s \to 0)$,

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \\ x(1-\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\delta_0 = 1 - \alpha\bar{x}.$$

Можно показать, что при достаточной гладкости функций $f_s(x)$ формулы (1.1.20) будут определять регулярные решения граничных задач, поставленных для Фурье-коэффициентов задачи (1.1.7)—(1.1.9). Таким образом, любые конечные суммы вида

$$u^N(x,t) = \sum_{s=-N}^{s=N} u_s(x) e^{is\cdot t},$$

где функции $u_s(x)$ найдены согласно формулы (1.1.20) для соответствующей гладкости функций $f_s(x)$, будут определять регулярные решения граничной задачи (1.1.7)—(1.1.9).

Далее, на основе формул (1.1.20) мы получаем априорные оценки

$$\|u_s(x)\|_{L_2(0,1)} \leqslant K \cdot \|f_s''(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad s \in \mathscr{S}, \quad (1.1.23)$$

где постоянная K не зависит от s, т.е. оценки (1.1.23) являются равномерными по s.

В дальнейшем, при доказательстве оценок (1.1.23) будет использовано то, что для функции Грина $G(x,\xi)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|G_s(x,\xi)\right|^2 dxd\xi \leqslant \frac{C}{|\lambda|^3} \leqslant K = \text{const}, \quad \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}\,, \ \ (\lambda^2 = is).$$

Действительно

$$\int\limits_0^1 \left|G_s(x,\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{|\lambda|^2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\left[|\operatorname{sh}\lambda(1-x)|^2\int\limits_0^x|\operatorname{sh}\lambda\xi|^2d\xi + \right.$$

$$\left. +|\operatorname{sh}\lambda x|^2\int\limits_x^1|\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)|^2d\xi\right] =$$

$$= \|\lambda = \lambda_1 + i\lambda_1\| =$$

$$= \frac{1}{2|\lambda|^2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\left[|\operatorname{sh}\lambda(1-x)|^2\int\limits_0^x(\operatorname{ch}2\lambda_1\xi - \right.$$

$$\left. -\cos 2\lambda_1\xi)\,d\xi + |\operatorname{sh}\lambda x|^2\int\limits_x^1(\operatorname{ch}2\lambda_1(1-\xi) - \cos 2\lambda_1(1-\xi))\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{8\lambda_1|\lambda|^2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\cdot\{[\operatorname{ch}2\lambda_1(1-x) - \cos 2\lambda_1(1-x)]\,(\operatorname{sh}2\lambda_1 x - \sin 2\lambda_1 x) +$$

$$+ (\operatorname{ch}2\lambda_1 x - \cos 2\lambda_1 x)\,[\operatorname{sh}2\lambda_1(1-x) - \sin 2\lambda_1(1-x)]\} =$$

$$= \frac{1}{8\lambda_1|\lambda|^2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\,[\operatorname{sh}2\lambda_1 x + \sin 2\lambda_1 x - \operatorname{ch}2\lambda_1(1-x)\sin 2\lambda_1 x -$$

$$\operatorname{sh}2\lambda_1 x\cos 2\lambda_1(1-x) - \operatorname{ch}2\lambda_1 x\sin 2\lambda_1(1-x) - \; - \operatorname{sh}2\lambda_1(1-x)\cos 2\lambda_1 x]\,.$$

Далее, окончательно имеем

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|G_s(x,\xi)\right|^2 dxd\xi = \frac{1}{8\lambda_1|\lambda|^2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\left(\operatorname{sh}2\lambda_1 x + \sin 2\lambda_1 x - \frac{\operatorname{ch}2\lambda_1}{\lambda_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos 2\lambda_1}{\lambda_1}\right) \leqslant \frac{C}{|\lambda|^3}\,, \ \text{ здесь } \lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda = \mathrm{Im}\lambda\,, \ \text{ и } \ 2|\lambda_1|^2 = |\lambda|^2\,.$$

Для получения оценок (1.1.23) из представления (1.1.20) для $s \neq 0$ будем иметь:

$$\lambda^2 \cdot \frac{d^2 u_s}{dx^2} = -\lambda^2 f_s(x) + \lambda^4 \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi + \alpha \cdot \delta_s^{-1} \lambda^4 \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda} \cdot$$
$$\cdot \left[\int\limits_0^1 G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi) d\xi - \frac{f_s(\bar{x})}{\lambda^2} \right]; \tag{1.1.24}$$

$$\frac{d^4 u_s(x)}{dx^4} = -\frac{d^2 f_s(x)}{dx^2} + \lambda^4 \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi - \lambda^2 f_s(x) +$$
$$+ \alpha \delta_s^{-1} \left[\int\limits_0^1 G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi) d\xi - \frac{f_s(\bar{x})}{\lambda^2} \right] \cdot \lambda^4 \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda}; \tag{1.1.25}$$

Для отдельных слагаемых представления решения (1.1.20) и их производных (1.1.24)—(1.1.25) получаем:

$$\left\| \lambda^2 f_s(x) \right\|^2_{L_2(0,1)} = \left\| |\lambda|^2 f_s(x) \right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \left\| |\lambda|^{5/2} f_s(x) \right\|^2_{L_2(0,1)},$$

(при этом учитывается то, что $\lambda^2 = is$, $s = \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$\int\limits_0^1 \left| \lambda^4 \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| |\lambda|^{5/2} f_s \right\|^2_{L_2(0,1)} \cdot \int\limits_0^1 \left\| |\lambda|^{3/2} G_s \right\|^2_{L_2(0,1)} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| |\lambda|^{5/2} f_s \right\|^2_{L_2(0,1)} \cdot |\lambda|^3 \cdot \frac{C^2}{|\lambda|^3} = C^2 \left\| |\lambda|^{5/2} f_s \right\|^2_{L_2(0,1)},$$

$$\int\limits_0^1 \left| \lambda^4 \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda} \int\limits_0^1 G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi) d\xi \right|^2 dx =$$

$$= \frac{|\lambda|^8}{|\operatorname{sh} \lambda|^2} \int\limits_0^1 |\operatorname{sh} \lambda x|^2 dx \left(\int\limits_0^1 |G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi)|\, d\xi \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant K_1|\lambda|^4 \|f_s(x)\|^2_{L_2(0,1)} = K_1 \left\||\lambda|^2 f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Здесь воспользовались тем, что

$$\int_0^1 |\operatorname{sh}\lambda x|^2 dx = \frac{1}{2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\int_0^1 (\operatorname{ch} 2\lambda_1 x - \cos 2\lambda_1 x)\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2\lambda_1 - \sin 2\lambda_1}{4\lambda_1|\operatorname{sh}\lambda|^2} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Получим оценку последнего слагаемого

$$\left\|\lambda^4 \frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda}\cdot\frac{f_s(\bar{x})}{\lambda^2}\right\|^2_{L_2(0,1)} = \frac{|\lambda|^4}{|\operatorname{sh}\lambda|^2}\int_0^1 |\operatorname{sh}\lambda x|^2 dx \cdot \left(\int_0^{\bar{x}} |f_s'(\xi)|\, d\xi\right) \leqslant C$$

$$\leqslant \left\||\lambda|^{3/2} f_s'(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant C \left\||\lambda|^{3/2} f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)}.$$

Таким образом, имеем

$$\left\||\lambda|^2\cdot\frac{d^2u_s}{dx^2}\right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K_1\left[\left\||\lambda|^{5/2} f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} + \left\||\lambda|^{3/2} f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)}\right].$$

Учитывая, что слагаемые правой части равенства (1.1.24) содержатся и в правой части равенства (1.1.25), нетрудно получить следующую оценку

$$\left\|\frac{d^4u_s(x)}{dx^4}\right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K_2\left[\left\||\lambda|^{5/2} f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left. + \left\||\lambda|^{3/2} f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)} + \|f_s(x)\|^2_{W_2^2(0,1)}\right].$$

Теперь легко можно установить справедливость оценок (1.1.23). Действительно имеем

$$\|u_s(x)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K\left[\left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|}\right\|^2_{L_2(0,1)} + \left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|^{3/2}}\right\|^2_{L_2(0,1)} + \left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|^2}\right\|^2_{L_2(0,1)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant K_1\left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|}\right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K_2\|f_s(x)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K_3\|f_s''(x)\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Для $s = 0$ подобные выкладки (на основе формулы (1.1.20) получаются достаточно просто.

Учитывая оценки (1.1.23), на основе результатов, доказываем однозначную сильную разрешимость граничной задачи (1.1.7)—(1.1.9). Отсюда следует утверждение доказываемой нами теоремы.

Кроме этого, из наших рассмотрений следуют оценки вида:

$$\|\lambda^2 \frac{d^2u_s(x)}{dx^2}\|^2_{L_2(0,1)} + \|\frac{d^4u_s(x)}{dx^4}\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant K\left[\left\| |\lambda|^{5/2} f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} + \right.$$
$$\left. + \left\||\lambda|^{3/2} f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)} + \|f_s(x)\|^2_{W_2^2(0,1)}\right], \quad (1.1.26)$$

равномерные по $s \in \mathscr{S}$, также справедливы следующие оценки для производных

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right\|_{L_2(Q)} \leqslant K\left[\|f(x,t)\|_{W_2^{5/4}(0,2\pi;L_2(0,1))} + \right.$$
$$\left. + \|f_x(x,t)\|_{W_2^{3/4}(0,2\pi;L_2(0,1))} + \|f(x,t)\|_{L_2(0,2\pi\; W_2^2(0,1)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))}\right].$$

Оценки (1.1.26) вместе с (1.1.23) указывают на наличие дифференциальных свойств сильного решения исходной граничной задачи.

В завершение, заметим, что в условии (1.1.3) требование на функцию $f(x,t)$ можно заменить на следующее, – $f \in L_2(0,2\pi; W_2^2(0,1))$. В этом случае, оценки (1.1.23) принимают вид:

$$\|u_s(x)\|_{L_2(0,1)} \leqslant K \cdot \|f_s(x)\|_{W_2^2(0,1)}, \quad s \in \mathscr{S}.$$

Приступим к рассмотрению граничной задачи **2**.

Определение 1.3. *Функцию* $u(x,t)$ *будем называть сильным решением граничной задачи* (1.1.10)—(1.1.14), *если существует последовательность функций* $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{C}$, *таких, что выполнены следующие условия:* $1^0. \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t)$ *в* $L_2(Q)$; $2^0. \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{L}_4 u_n(x,t) = \dfrac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}$ *в* $L_2(Q)$.

Здесь мы считаем, что $u \in \tilde{C}$, если $u \in C(\overline{Q})$, $u \in C(0,2\pi; C^{2m+2}(0,1) \cap C^{m+1}[0,1])$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(0,2\pi; C^{2m}(0,1) \cap C^m[0,1])$ и выполнены условия (1.1.11)—(1.1.14).

Определение 1.4. *Сильное решение граничной задачи* (1.1.10)–(1.1.14) *будем называть сильным решением граничной задачи* (1.1.4)–(1.1.5).

Из этих определений следует, что области определения замкнутых операторов $\mathbb{L}_3$ и $\mathbb{L}_4$ совпадают. Будем иметь:

$$D(\mathbb{L}_3) \equiv D(\mathbb{L}_4) \equiv \Big\{ u | u \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m+2}(0,1)),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0, 1)), \text{ граничные условия } (1.1.11) - (1.1.14) \Big\}. \tag{1.1.27}$$

Для граничной задачи **2** справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1.2. *Для любых* $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(0,1))$ $\alpha \in W_2^{2m}(0,1)$ *граничная задача* (1.1.4)–(1.1.5) *имеет единственное сильное решение* $u(x,t)$, *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

$$\delta_s \equiv 1 + \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^1 G_s(\overline{x}, \xi)\alpha(\xi)d\xi \neq 0, \ \ \forall s \in \mathscr{S}, \tag{1.1.28}$$

где $\mathscr{S} = \{s | s = 0; \pm 1; \pm 2; ...\}$, $\lambda^2 = is$, $i = \sqrt{-1}$, *функция* $G_s(x, \xi)$ *определена формулой* (1.1.21).

Доказательство теоремы 1.1.2 мы опускаем, так как оно проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.1.

1.1.3 Сопряженная задача

Рассмотрим сопряженную к (1.1.1)—(1.1.2) задачу:

$$\mathbb{L}_1^* \psi \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \delta''(x - \bar{x}) \otimes \int_0^1 \bar{\alpha} \cdot \xi \cdot \psi(\xi, t)d\xi = g(x, t), \{x, t\} \in Q, \tag{1.1.29}$$

$$\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0; \ \psi(x, 0) = \psi(x, 2\pi), \ \bar{x} \in (0, 1). \tag{1.1.30}$$

Здесь учтен тот факт, что $\operatorname{supp}\{\psi(x, t)\} \subseteq \overline{Q}$. Слабое решение $\psi \in L_2(Q)$ этой задачи определим интегральным тождеством:

$$(w, \mathbb{L}_1^* \psi) = (\mathbb{L}_1 w, \psi) = (w, g) \ \text{ для любых } \ w \in \tilde{C} \text{ из определения 1.1.}$$

Вначале покажем, что оператор $\mathbb{L}^*$ действительно является сопряжённым оператору $\mathbb{L}_1$. Для этого достаточно убедиться в справедливости следующего соотношения

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2}\psi(x,t)dxdt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta''(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)u(x,t)dxdt.$$

Действительно

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2}\psi(x,t)dxdt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 x\psi(x,t)\left[\int_0^1 \delta(\xi-\bar{x})\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2}d\xi\right]dxdt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dxdt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Bigg|_0^1 dt -$$

$$- \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta'(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dxdt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \delta(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)u(x,t)\Big|_0^1 dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta''(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)u(x,t)dxdt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \delta''(x-\bar{x})\left(\int_0^1 \xi\psi(\xi,t)d\xi\right)u(x,t)dxdt.$$

Как и ранее, применяя метод разделения переменных к задаче (1.1.29)—(1.1.30), получим систему соответствующих задач для коэффициентов Фурье $\psi_s(x),\ s\in\mathscr{S}\setminus\{0\}$

$$\begin{cases} -is\psi_s(x)-\psi_s''(x)+\delta''(x-\bar{x})\displaystyle\int\limits_0^1\bar{\alpha}\cdot\xi\cdot\psi_s(\xi)d\xi=g_s(x),\ x\in(0,1),\\ \psi_s(0)=\psi_s(1)=0,\quad \forall s\in\mathscr{S}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

Решения этих задач имеют следующее представление $\{g_s(x)$ – соответственно коэффициенты Фурье функции $g(x,t)\}$:

$$\psi_s(x)=\int\limits_0^1\tilde{G}_s(x,\xi)g_s(\xi)d\xi+\int\limits_0^1\xi\psi_s(\xi)d\xi\cdot\left[\lambda^2\cdot\tilde{G}_s(x,\bar{x})\right];$$

где

$$\tilde{G}_s(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\{\lambda\xi\}\sin\{\lambda(1-x)\}}{\lambda\sin(\lambda)},\ \ 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{\sin\{\lambda x\}\sin\{\lambda(1-\xi)\}}{\lambda\sin(\lambda)},\ \ 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant 1,\end{cases}\qquad \forall s\in\mathscr{S},\ \ (1.1.31)$$

в том и только в том случае, когда

$$\tilde{\delta}_s=1+\bar{\alpha}\overline{x}-\bar{\alpha}\frac{\sin(\lambda\overline{x})}{\sin\lambda}\neq 0,\quad \forall s\in\mathscr{S}\ \ (\lambda^2=is).\qquad (1.1.32)$$

Выражения для $\tilde{G}_0(x,\xi)$ и $\tilde{\delta}_0$ также можно получить непосредственно, или же получить из формул (1.1.31) и (1.1.32) путем предельного перехода при $s\to 0$ $(\lambda\to 0)$,

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x),\ \ 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant 1,\\ x(1-\xi),\ \ 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_0=1.$$

Замечание 1.3. *Если* $\alpha\in R^1$, *то сопряженная задача* (1.1.29)–(1.1.30) *однозначно слабо разрешима для всех функций* $g(x,t)$, *ортогональных собственной функции* $w_0(x)$ (1.1.17) *исходной граничной задачи* (1.1.1) – (1.1.2) *(согласно следствия 1.2). В этом случае, условие* (1.1.32) *выполняется для всех* $s\in\mathscr{S}$.

Замечание 1.4. *При* $g(x,t)\equiv 0$ *граничная задача* (1.1.29)–(1.1.30) *в классе* $L_2(0,2\pi;D'(0,1))$ *имеет единственное решение* $\psi(x,t)=\delta(x-\overline{x})$.

1.2 Одномерное обобщение граничной задачи 2.

В области $Q = \{x,t|0 < x < 1,\ 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости граничной задачи

$$\mathbb{L}_3 u \ \equiv\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = f(x,t),\ \{x,t\} \in Q; \quad (1.2.1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = u(x,2\pi); \quad (1.2.2)$$

при условиях

$$\begin{cases} \overline{x} \in (0,1) - \text{ фиксированная точка, } \ \alpha \in W_2^{2m}(0,1), \\ f \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(0,1)) - \text{ заданные функции, } \ k \geq 2, \\ m = \begin{cases} k/2, & \text{если } k - \text{ четное число,} \\ (k-1)/2, & \text{если } k - \text{ нечетное число.} \end{cases} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

В этом случае граничная задача (1.2.1)—(1.2.2) сводится к изучению следующей нелокальной задачи:

$$\mathbb{L}_4 u \equiv (-1)^m \frac{\partial^{2m} v(x,t)}{\partial x^{2m}} = F(x,t),\ \{x,t\} \in Q, \quad (1.2.4)$$

$$u(x,t) = 0,\ \ \frac{\partial^j v(x,t)}{\partial x^j} = G_j(x,t),\ \{x,t\} \in \Sigma,\ j = \overline{0,m-1}, \quad (1.2.5)$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in (0,1), \quad (1.2.6)$$

где $\Sigma = \{0 \cup 1\} \times (0,2\pi)$,

$$F(x,t) \equiv (-1)^m \frac{\partial^{2m} f(x,t)}{\partial x^{2m}},\ G_j(x,t) \equiv \frac{\partial^j f(x,t)}{\partial x^j},\ j = \overline{0,m-1},$$

$$v(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \alpha(x)\frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k},\ \{x,t\} \in Q.$$

Очевидно, что уравнения (1.1.10) и (1.2.4) совпадают. Однако граничные условия (1.1.12)—(1.1.14) отличаются от условий (1.2.5)—(1.2.6). Утверждение теоремы 1.1.2, очевидно, остается справедливым и в этом случае.

Теорема 1.2.1. *Для любых* $f \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(0,1))$, $\alpha \in W_2^{2m}(0,1)$ *граничная задача* (1.2.4)—(1.2.6) *имеет единственное сильное решение* $u(x,t)$, *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

$$\delta_s \equiv 1 + \frac{\partial^k}{\partial x^k}\int_0^1 G_s(\overline{x},\xi)\alpha(\xi)d\xi \neq 0,\ \ \forall s \in \mathscr{S},$$

где $\mathscr{S} = \{s|s = 0; \pm 1; \pm 2; ...\}$, $\lambda^2 = is$, $i = \sqrt{-1}$, *функция* $G_s(x,\xi)$ *определена формулой* (1.1.21).

1.3 Многомерное обобщение граничной задачи 2.

1.3.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^n-$ ограниченная область. В области $Q = \{x,t|\, x \in \Omega,\ 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости следующей граничной задачи

$$\mathbb{L}_5 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int\limits_{\Gamma_1} \alpha(x,\xi')\frac{\partial^k u(\overline{x}_1,\xi',t)}{\partial x_1^k} d\xi' = f, \quad \text{в} \quad Q; \quad (1.3.1)$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{в} \quad \Sigma = \{x,t|x \in \partial\Omega,\ t \in (0,2\pi)\}, \quad (1.3.2)$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in \Omega; \quad (1.3.3)$$

где $\partial\Omega-$ граница области Ω, $x' = \{x_2,...,x_n\}$, $\xi' = \{\xi_2,...,\xi_n\}$,

$$\begin{cases} \Gamma_1 - \text{ сечение области } \Omega \text{ при фиксированном } x_1 = \overline{x}_1, \\ \alpha \in L_2(\Gamma_1; W_2^{2m}(\Omega)),\ f \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(\Omega)) - \text{ заданные функции,} \\ k \geqslant 2, \quad m = \begin{cases} k/2, & \text{если } k - \text{ четное число,} \\ (k-1)/2, & \text{если } k - \text{ нечетное число.} \end{cases} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

1.3.2 Представление и априорная оценка классического решения

Для изучения задачи (1.3.1)—(1.3.3) рассмотрим в области Q следующую вспомогательную нелокальную задачу:

$$\mathbb{L}_6 u \equiv (-1)^m \Delta^m v(x,t) = F(x,t),\ \{x,t\} \in Q, \quad (1.3.5)$$

$$u(x,t) = 0,\ \ \frac{\partial^j v(x,t)}{\partial \vec{n}^j} = G_j(x,t),\ \{x,t\} \in \Sigma,\ j = \overline{0,m-1}, \quad (1.3.6)$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in (0,1), \quad (1.3.7)$$

где $\vec{n}-$ внешняя нормаль к $\partial\Omega$,

$$F(x,t) \equiv (-1)^m \Delta^m f(x,t),\ G_j(x,t) \equiv \frac{\partial^j f(x,t)}{\partial \vec{n}^j},\ j = \overline{0,m-1},$$

$$v(x,t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int\limits_{\Gamma_1} \alpha(x,\xi') \frac{\partial^k u(\overline{x}_1,\xi',t)}{\partial x_1^k} d\xi',\ \{x,t\} \in Q.$$

Заметим, что граничные задачи (1.3.1)—(1.3.3) и (1.3.5)—(1.3.7) взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи (1.3.5)—(1.3.7) будет таковым и для задачи (1.3.1)—(1.3.3). Обратно, если регулярное решение задачи (1.3.1)—(1.3.3) обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи (1.3.5)—(1.3.7).

Задачу (1.3.5)—(1.3.7) будем рассматривать как следующие две подзадачи относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$:

$$\mathbb{L}_5 u = v,\ \{x,t\} \in Q;\ u(x,t) = 0,\ \{x,t\} \in \Sigma;\ u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in \Omega; \tag{1.3.8}$$

$$(-1)\Delta^m v = F,\ \{x,t\} \in Q;\ \frac{\partial^j v(x,t)}{\partial \vec{n}^j} = G\ \{x,t\} \in \Sigma,\ j \in \overline{1, m-1}. \tag{1.3.9}$$

Сначала решается задача Дирихле (1.3.9) для эллиптического уравнения, затем — граничная задача (1.3.8) и находится функция $u(x,t)$, которая, очевидно, и будет решением задачи (1.3.5)—(1.3.7).

Задача Дирихле (1.3.9), как известно имеет единственное обобщенное решение $v(x,t) \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(\Omega))$, удовлетворяющее оценке:

$$\|v\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m}(\Omega))} \leqslant K_1 \left[\|F\|_{L_2(Q)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|G_j\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m-j-1/2}(\partial\Omega))} \right],$$

или то же самое в терминах функции $f(x,t)$:

$$\|v\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m}(\Omega))} \leqslant K_1 \left[\|\Delta^m f\|_{L_2(Q)} + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial \vec{n}^j} \right\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m-j-1/2}(\partial\Omega))} \right]. \tag{1.3.10}$$

Таким образом, нам остается только рассмотреть вопросы разрешимости граничной задачи (1.3.8). Методом разделения переменных в задаче (1.3.8) (аналогично как в п.1) для коэффициентов Фурье $u_s(x)$ будем иметь:

$$\begin{cases} is \cdot u_s(x) - \Delta u_s(x) + \alpha \displaystyle\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi' = f_s(x),\ \ x \in \Omega, \\ u_s(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ s \in \mathscr{S}. \end{cases} \tag{1.3.11}$$

Если $(\forall s \in \mathscr{S})$ задача (1.3.11) имеет решение, тогда используя соответствующую функцию Грина $G(x,\ \xi)$, запишем следующее представление решения

$$u_s(x) = \int\limits_{\Omega} G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi - \int\limits_{\Gamma_1} \left[\int\limits_{\Omega} G_s(x,\eta)\alpha(\eta,\xi') d\eta \right] \frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi'. \tag{1.3.12}$$

Продифференцируем обе части этого равенства k раз по x_1 и положим $x_1 = \bar{x}_1$, тогда будем иметь

$$\frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,x')}{\partial x_1^k} = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int\limits_{\Omega} G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi \right) \Big|_{x_1=\bar{x}_1} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int\limits_{\Omega} G_s(x,\eta)\alpha(\eta,\xi') d\eta \right) \Big|_{x_1=\bar{x}_1} \frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi' \tag{1.3.13}$$

Введём следующие обозначения:

$$F_s(x') = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int\limits_{\Omega} G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi \right) \Big|_{x_1=\bar{x}_1},$$

$$g(\xi',x') = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int\limits_{\Omega} G_s(x,\eta)\alpha(\eta,\xi') d\eta \right) \Big|_{x_1=\bar{x}_1},$$

тогда равенство (1.3.13) запишется в виде

$$\frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,x')}{\partial x_1^k} = F(x') - \int\limits_{\Gamma_1} g_s(\xi',x') \frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi'. \tag{1.3.14}$$

Умножив обе части этого соотношения на $g(\xi',x')$ и проинтегрировав по ξ в области Γ_1, получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $h_s(x')$

$$h_s(x') + \int\limits_{\Gamma_1} g_s(\xi',x') h_s(\xi') d\xi' = \int\limits_{\Gamma_1} g_s(\xi',x') f_s(\xi') d\xi', \tag{1.3.15}$$

где

$$h_s(x') = \int\limits_{\Gamma_1} g_s(\xi',x') \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,\xi')}{\partial \bar{x}_1^k} d\xi'.$$

Решив интегральное уравнение (1.3.15), и подставив найденное значение функции $h_s(x')$ в равенство (1.3.14) найдём значение выражения

$$\frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1, \xi')}{\partial x_1^k},$$

и подставляя его в представление (1.3.12) получим искомое решение задачи (1.3.11).

Замечание 1.5. *Если задачу (1.3.1)—(1.3.3) видоизменить следующим образом:*

В области $Q = \{x, t|\, x \in \Omega,\ 0 < t < 2\pi\}$ исследовать вопросы разрешимости граничной задачи

$$\mathbb{L}_\Delta u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int\limits_{\Gamma_1} \alpha(x,\xi')\Delta_\xi^m u(\xi,t)|_{\xi_1=\bar{x}_1} d\xi' = f, \ \textit{в}\ \ Q, \tag{1.3.16}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \textit{в}\ \ \Sigma = \{x,t|x \in \partial\Omega,\ t \in (0,2\pi)\}, \tag{1.3.17}$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in \Omega; \tag{1.3.18}$$

где $\partial\Omega-$ граница области Ω, $x' = \{x_2, ..., x_n\}$, $\xi' = \{\xi_2, ..., \xi_n\}$,

$$\begin{cases} \Gamma_1 - \ \textit{сечение области}\ \ \Omega\ \textit{при фиксированном}\ x_1 = \overline{x}_1, \\ \qquad \alpha \in L_2(\Gamma_1; W_2^{2m}(\Omega)),\ f \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(\Omega))- \\ \qquad\qquad\qquad \textit{- заданные функции,} \end{cases} \tag{1.3.19}$$

то соответствующие выражения для $g_s(x',\xi')$, $F_s(x')$ примут более явный вид.

Действительно, в этом случае (1.3.11), будет соответствовать следующее семейство задач:

$$\begin{cases} is \cdot u_s(x) - \Delta u_s(x) + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} \dfrac{\partial^k u_s(\overline{x}_1, \xi')}{\partial x_1^k} d\xi' = f_s(x),\ \ x \in \Omega, \\ u_s(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ s \in \mathscr{S}. \end{cases} \tag{1.3.20}$$

Теперь, используя следующие соотношения справедливые для функции Грина:

$$\Delta_x G_s(x,\xi) \triangleq is \cdot G_s(x,\xi) - \delta(x-\xi),$$

$$\Delta_x^m G_s(x,\xi) \triangleq (is)^m \cdot G_s(x,\xi) - \sum_{k=1}^m (is)^{m-k} \Delta_x^{k-1} \delta(x-\xi),$$

будем иметь

$$g_s(x',\xi') = (is)^m \left(\int\limits_\Omega G_s(x,\eta)\alpha(\eta,\xi')d\eta\right)\Big|_{x_1=\bar{x}_1} - $$
$$- \left(\sum_{k=1}^m (is)^{m-k}\Delta_x^{k-1}\alpha(x,\xi')\right)\Big|_{x_1=\bar{x}_1},$$

$$F_s(x') = (is)^m \left(\int\limits_\Omega G_s(x,\eta)f_s(\eta)d\eta\right)\Big|_{x_1=\bar{x}_1} - $$
$$- \left(\sum_{k=1}^m (is)^{m-k}\Delta_x^{k-1}f_s(x)\right)\Big|_{x_1=\bar{x}_1}.$$

Как известно, для произвольной области Ω решение семейства задач (1.3.11) достаточно не просто, например, даже для такой простой области как круг.

Поэтому при дальнейшем изучении граничной задачи (1.3.1)—(1.3.3) , ради простоты, будем предполагать, что $\alpha = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$ и что Ω представляет собой либо единичный круг (для $n = 2$), либо единичный шар (для $n \geqslant 3$) с центром в начале координат. Ниже рассмотрены эти случаи по-отдельности.

1.3.3 Ω – единичный круг.

Учитывая круговую симметрию, для $s = 0$ в задаче (1.3.11) имеем:

$$u_0(r) = \int\limits_0^1 G_0(r,\rho)f_0(\rho)d\rho - \alpha\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial^k u_0(\overline{x}_1,\xi_2)}{\partial x_1^k}d\xi_2\cdot\frac{1-r^2}{4}, \qquad (1.3.21)$$

где $G_0(r,\rho)-$ функция Грина эллиптической части оператора задачи (1.3.11),

$$G_0(r,\rho) = \begin{cases} -\rho\cdot\ln r, & 0\leqslant\rho\leqslant r,\\ -\rho\cdot\ln\rho, & r\leqslant\rho\leqslant 1,\end{cases}$$

Действительно, в этом случае задача (1.3.11) примет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left(ru'(r)\right)' = f_0(r), \;\; u(1) = 0,$$

и $\{1, \ln r\}$—фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Тогда, представление (1.3.21) очевидным образом следует из

$$\int\limits_0^1 G_0(r,\rho)d\rho = -\ln r\int\limits_0^r \rho d\rho - \int\limits_r^1 \rho\ln\rho d\rho = \frac{1-r^2}{4}.$$

Далее из (1.3.21) получаем, что решение задачи имеет вид

$$u_0(r) = \int\limits_0^1 G_0(r,\rho)f_0(\rho)d\rho -$$

$$-\alpha\delta_0^{-1}\int\limits_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}\int\limits_0^1 G_0(r,\rho)f_0(\rho)d\rho\right)_{|x_1=\overline{x}_1} dx_2 \cdot \frac{1-r^2}{4}, \qquad (1.3.22)$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha\cdot\mathrm{meas}\{\Gamma_1\}\neq 2, & \text{если } k=2,\\ \text{для любых } \alpha, & \text{если } k\geqslant 3; \end{cases}, \\ \text{так как } \ \delta_0 = \begin{cases} 1-\alpha\cdot\mathrm{meas}\{\Gamma_1\}/2, & \text{если } k=2,\\ 1, & \text{если } k\geqslant 3. \end{cases} \end{cases} \qquad (1.3.23)$$

Здесь meas$\{\Gamma_1\}$– длина соответствующей хорды.

Далее, для $s\neq 0$ имеем:

$$u_s(r) = \int\limits_0^1 G_s(r,\rho)f_s(\rho)d\rho - \alpha\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial^k u_s(\overline{x}_1,\xi_2)}{\partial x_1^k}d\xi_2 \cdot \int\limits_0^1 G_s(r,\rho)d\rho, \quad (1.3.24)$$

где $\lambda\ {}_2 = is$, $G_s(r,\rho)$ – функция Грина эллиптической части оператора задачи (1.3.11):

$$G_s(r,\rho) = \begin{cases} -\rho\cdot\dfrac{[I_0(\lambda)K_0(\lambda r) - I_0(\lambda r)K_0(\lambda)]\cdot I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda)}, & 0\leqslant\rho\leqslant r,\\ -\rho\cdot\dfrac{[I_0(\lambda)K_0(\lambda\rho) - I_0(\lambda\rho)K_0(\lambda)]\cdot I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda)}, & r\leqslant\rho\leqslant 1, \end{cases} \qquad (1.3.25)$$

здесь $I_0(z)$, $K_0(z)$– модифицированные функции Бесселя.

Доказательство формулы (1.3.25) приведено ниже для любого $n\geqslant 2$.

Из (1.3.7)—(1.3.9) получаем искомое представление решения граничной задачи Дирихле (1.3.3):

$$u_s(r) = \int_0^1 G_s(r,\rho) f_s(\rho) d\rho - \alpha \delta_s^{-1} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\int_0^1 G_s(r,\rho) f_s(\rho) d\rho \right)_{|x_1=\overline{x}_1} dx_2 \cdot$$
$$\cdot \int_0^1 G_s(r,\rho) d\rho, \qquad (1.3.26)$$

тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\delta_s = 1 + \alpha \cdot \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_0^1 G_s(r,\rho) d\rho \right)_{|x_1=\overline{x}_1} dx_2 \neq 0, \ \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}, \qquad (1.3.27)$$

Теперь нам нужно показать, что для решений (1.3.22) и (1.3.26) справедливы L_2-оценки. Для первого слагаемого в решении (1.3.22) это следует из Предложения 1.2. Для второго слагаемого из (1.3.22), получение требуемой оценки не вызывает затруднений. Анализ соотношений (1.3.25) — (1.3.27) также позволяет получить требуемые оценки, равномерные по $s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$.

Таким образом, для решений, представленных формулами (1.3.22) и (1.3.26), с учетом оценок (1.3.10) справедливы оценки:

$$\|u_s\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \|f_s\|, \quad \forall s \in \mathscr{S}.$$

Далее, остается только применить лемму 1 из [124], с.118. Итак, доказана

Теорема 1.3.1. *Пусть $n = 2$, $\Omega-$ единичный круг с центром в начале координат. В этом случае для любых $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0, 1)), \in \mathbb{C}$ граничная задача* (1.3.1)*–*(1.3.3) *имеет единственное сильное решение $u(x,t)$, тогда и только тогда, когда выполнены условия* (1.3.23) *и* (1.3.27).

1.3.4 Ω – единичный шар.

Пусть теперь Ω – единичный шар с центром в начале координат, тогда учитывая сферическую симметрию, для $s = 0$ в задаче (1.3.11) имеем:

$$u_0(r) = \int\limits_0^1 G_0(r,\rho) f_0(\rho) d\rho - \alpha \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial^k u_0(\overline{x}_1, \xi')}{\partial x_1^k} d\xi' \cdot \frac{1-r^2}{2n}, \qquad (1.3.28)$$

где $G_0(r,\rho)$– функция Грина эллиптической части оператора задачи (1.3.11),

$$G_0(r,\rho) = \begin{cases} \dfrac{(1-r^{2-n})\rho^{n-1}}{2-n}, & 0 \leqslant \rho \leqslant r, \\ \dfrac{(1-\rho^{2-n})\rho^{n-1}}{2-n}, & r \leqslant \rho \leqslant 1. \end{cases}$$

Действительно, в этом случае задача (1.3.11) запишется так

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-1} u'(r) \right)' = f_0(r), \ \ u(1) = 0,$$

и фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\left\{ 1, \ \frac{r^{2-n}}{2-n} \right\}.$$

Тогда, представление (1.3.28) очевидным образом следует из легко проверяемого равенства

$$\int\limits_0^1 G_0(r,\rho) d\rho = \frac{1-r^2}{2n},$$

$r\ {}_2 = x^2 + ... + x_n^2,\ \ \rho\ {}_2 = \xi^2\ {}_1 + ... + \xi_n^2,\ \ x' = \{x_2, ..., x_n\},\ \ \xi' = \{\xi_2, ..., \xi_n\}$. Далее из (1.3.4) получаем

$$\begin{aligned} u_0(r) \ &= \ \int\limits_0^1 G_0(r,\rho) f_0(\rho) d\rho - \\ &- \ \alpha \delta_0^{-1} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int\limits_0^1 G_0(r,\rho) f_0(\rho) d\rho \right)_{|x_1 = \overline{x}_1} dx_2 \cdot \frac{1-r^2}{2n}, \qquad (1.3.29) \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha \cdot \mathrm{meas}\{\Gamma_1\} \neq n, & \text{если } k = 2, \\ \text{для любых } \alpha, & \text{если } k \geqslant 3; \end{cases}, \\ \text{так как } \ \delta_0 = \begin{cases} 1 - \alpha \cdot \mathrm{meas}\{\Gamma_1\}/n, & \text{если } k = 2, \\ 1, & \text{если } k \geqslant 3. \end{cases} \end{cases} \qquad (1.3.30)$$

Здесь $\mathrm{meas}\{\Gamma_1\}$ – $(n-1)$-мерная мера множества Γ_1.

Далее, для $s \neq 0$, $(\lambda^2 = is)$ имеем:

$$\begin{aligned} u_s(r) &= \int_0^1 G_s(r,\rho) f_s(\rho) d\rho - \\ &- \alpha \delta_s^{-1} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_0^1 G_s(r,\rho) f_s(\rho) d\rho \right)_{|x_1=\overline{x}_1} dx_2 \cdot \beta(r), \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

где используются обозначения:

$$\delta_s = 1 + \alpha \cdot \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^k \beta_s(\overline{x}_1, x')}{\partial x_1^k} dx' \neq 0, \ \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}, \quad (1.3.32)$$

$$\beta_s(r) = \int_0^1 G_s(r,\rho) d\rho, \ \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}.$$

Отметим, что в случае $n = 3$, выражение для $\beta_s(r)$ имеет простой вид

$$\beta_s(r) = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \lambda r}{\operatorname{sh} \lambda} \right), \ \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}.$$

В соотношении (1.3.31), $G_s(r,\rho)$ – функция Грина эллиптической части оператора задачи (1.3.11)

$$G_s(r,\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \dfrac{[I_\nu(\lambda) K_\nu(\lambda r) - I_\nu(\lambda r) K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda \rho)}{I_\nu(\lambda)}, & 0 \leqslant \rho \leqslant r, \\ \dfrac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \dfrac{[I_\nu(\lambda) K_\nu(\lambda \rho) - I_\nu(\lambda \rho) K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda r)}{I_\nu(\lambda)}, & r \leqslant \rho \leqslant 1, \end{cases} \quad (1.3.33)$$

здесь $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$– модифицированные функции Бесселя, $\nu = n/2 - 1$.

Замечание 1.6. *Во первых, из формулы (1.3.33) при $n = 2$ следует формула (1.3.25), во вторых при $n = 3$ можно получить более простое представление функции Грина через элементарные функции*

$$\begin{cases} \dfrac{\rho}{r} \cdot \dfrac{\operatorname{sh} \lambda(1-r) \cdot \operatorname{sh} \lambda \rho}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & 0 \leqslant \rho \leqslant r, \\ \dfrac{\rho}{r} \cdot \dfrac{\operatorname{sh} \lambda(1-\rho) \cdot \operatorname{sh} \lambda r}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & r \leqslant \rho \leqslant 1. \end{cases} \quad (1.3.34)$$

Вначале покажем справедливость формулы (1.3.34), используя равенства:

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{sh}\, z, \quad K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\mathrm{ch}\, z.$$

Пусть для определённости $0 \leqslant \rho \leqslant r$, тогда

$$G_s(z,\rho) = \frac{\rho^{3/2}}{r^{1/2}} \cdot \frac{\left[I_{1/2}(\lambda)K_{1/2}(\lambda r) - I_{1/2}(\lambda r)K_{1/2}(\lambda)\right] \cdot I_{1/2}(\lambda\rho)}{I_{1/2}(\lambda)} =$$

$$= \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\lambda\rho}{\mathrm{sh}\,\lambda}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda r}}\,e^{-\lambda r}\,\mathrm{sh}\,\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda r}}\,e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}\,\lambda r\right] =$$

$$= \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\lambda\rho}{\mathrm{sh}\,\lambda}\left[\frac{1}{2}e^{\lambda(1-r)} - \frac{1}{2}e^{\lambda(1+r)} - \frac{1}{2}e^{-\lambda(1-r)} + \frac{1}{2}e^{\lambda(1+r)}\right] =$$

$$= \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\lambda(1-r) \cdot \mathrm{sh}\,\lambda\rho}{\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda}.$$

Аналогично получается выражение для $G_s(r,\rho)$ из (1.3.34) при $r \leqslant \rho \leqslant 1$.

Кстати, здесь хотелось бы отметить, что формула Грина (1.3.34) может быть построена и следующим, более простым способом. Действительно, задача (1.3.11) при $n = 3$, в случае отсутствия нагрузки имеет вид $(\lambda^2 = is)$

$$-\frac{1}{r^2}(r^2 u'(r))' + \lambda^2 u(r) = f_s(r)\,,\; u(1) = 0. \qquad (1.3.35)$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{r^2}(r^2 u')' = \frac{1}{r^2}(2ru' + r^2 u'') = \frac{1}{r}(ru)'',$$

перепишем задачу (1.3.35)

$$-(ru)'' + \lambda^2 u = -rf_s(r)\,,\; u(1) = 0,$$

которая после замены $v(r) = ru(r)$, сведётся к следующей простейшей задаче

$$-v'' + \lambda^2 v = -rf_s(r)\,,\; v(0) = v(1) = 0.$$

Решение этой задачи хорошо известно

$$v(r) = \int\limits_0^1 \tilde{G}_s(r,\rho) f_s(\rho) d\rho,$$

где

$$\tilde{G}_s(r,\rho)=\begin{cases}\rho\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\lambda(1-r)\cdot\operatorname{sh}\lambda\rho}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & 0\leqslant\rho\leqslant r,\\ \rho\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\lambda(1-\rho)\cdot\operatorname{sh}\lambda r}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & r\leqslant\rho\leqslant 1,\end{cases}$$

или возвращаясь к прежней переменной имеем

$$u(r)=\int\limits_0^1 G_s(r,\rho)f_s(\rho)d\rho,$$

здесь

$$G_s(r,\rho)=\frac{1}{r}\cdot\tilde{G}_s(r,\rho)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{r}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\lambda(1-r)\cdot\operatorname{sh}\lambda\rho}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & 0\leqslant\rho\leqslant r,\\ \dfrac{\rho}{r}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\lambda(1-\rho)\cdot\operatorname{sh}\lambda r}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & r\leqslant\rho\leqslant 1.\end{cases}$$

Теперь докажем справедливость формулы (1.3.33). Задача (1.3.11) в случае сферической симметрии, при $n\geqslant 3$, $s\neq 0$ имеет вид $(\lambda^2=is)$

$$-\frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}u'\right)'+\lambda^2 u=f_s(r)\,,\ u(1)=0,$$

или после простейших преобразований она сведётся к следующей задаче для модифицированного дифференциального уравнения Бесселя

$$r^2u''(r)+(n-1)ru'(r)-\lambda^2r^2u(r)=-f_s(r)\,,\ u(1)=0. \qquad (1.3.36)$$

Будем строить функцию Грина этой задачи используя метод Коши. Нормальная фундаментальная система решений рассматриваемого уравнения — $\{r^{-\nu}\cdot I_\nu(\lambda r)\ ;\ r^{-\nu}\cdot K_\nu(\lambda r)\}$. Частное решение уравнения (1.3.36) ищем в виде

$$u_{1s}(r)=-\int\limits_0^r \eta(r,\rho)f_s(\rho)d\rho,$$

где функция $\eta(r,\rho)$ удовлетворяет условиям: $\eta(\rho,\rho)=0,\ \eta'_r(\rho,\rho)=1$ и ищется в виде:

$$\eta(r,\rho)=\varphi_1(\rho)\cdot r^{-\nu}I_\nu(\lambda r)+\varphi_2(\rho)\cdot r^{-\nu}K_\nu(\lambda r).$$

Для определения функций $\varphi_1(\rho)$ и $\varphi_2(\rho)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \eta(\rho,\rho) = \varphi_1(\rho)\cdot\rho^{-\nu}I_\nu(\lambda\rho) + \varphi_2(\rho)\cdot\rho^{-\nu}K_\nu(\lambda\rho) = 0, \\ \eta'_r(\rho,\rho) = \varphi_1(\rho)\left[-\nu\rho^{-\nu-1}I_\nu(\lambda\rho) + \rho^{-\nu}\lambda I'_\nu(\lambda\rho)\right] + \\ +\varphi_2(\rho)\left[-\nu\rho^{-\nu-1}K_\nu(\lambda\rho) + \rho^{-\nu}\lambda K'_\nu(\lambda\rho)\right] = 1. \end{cases}$$

Используя, то что функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ являются линейно независимыми, а их вронскиан $W\left[I_\nu(z), K_\nu(z)\right] = -z^{-1}$, решаем эту систему и находим

$$\varphi_1(\rho) = \rho^{\nu+1}\cdot K_\nu(\lambda\rho)\,,\ \ \varphi_2(\rho) = -\rho^{\nu+1}\cdot I_\nu(\lambda\rho).$$

Таким образом получили

$$\eta(r,\rho) = \frac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu}\left[K_\nu(\lambda\rho)\cdot I_\nu(\lambda r) - K_\nu(\lambda r)\cdot I_\nu(\lambda\rho)\right].$$

Теперь ищем общее решение неоднородной задачи (1.3.36) в следующем виде

$$u_s(r) = Cr^{-\nu}I_\nu(\lambda r) - \int\limits_0^r \frac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu}\left[K_\nu(\lambda\rho)I_\nu(\lambda r) - K_\nu(\lambda r)I_\nu(\lambda\rho)\right]f_s(\rho)d\rho, \tag{1.3.37}$$

где $C = \mathrm{const}$ определяется из условия $u(1) = 0$, т.е.

$$C = \int\limits_0^1 \rho^{\nu+1}\frac{K_\nu(\lambda\rho)\cdot I_\nu(\lambda r) - K_\nu(\lambda r)\cdot I_\nu(\lambda\rho)}{I_\nu(\lambda)}f_s(\rho)d\rho.$$

Подставляя найденное значение C в равенство (1.3.37) получим решение задачи (1.3.36)

$$u_s(r) = \int\limits_0^1 \frac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu}\frac{I_\nu(\lambda r)}{I_\nu(\lambda)}\left[K_\nu(\lambda\rho)\cdot I_\nu(\lambda r) - K_\nu(\lambda r)\cdot I_\nu(\lambda\rho)\right]f_s(\rho)d\rho -$$
$$- \int\limits_0^r \frac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu}\left[K_\nu(\lambda\rho)\cdot I_\nu(\lambda r) - K_\nu(\lambda r)\cdot I_\nu(\lambda\rho)\right]f_s(\rho)d\rho. \tag{1.3.38}$$

Разбивая первый интеграл в формуле (1.3.38) на два интеграла, первый - от 0 до r, второй от r до 1, после упрощений окончательно получим

$$u_s(r) = \int\limits_0^1 G_s(r,\rho)f_s(\rho)d\rho,$$

где функция $G_s(r,\rho)$- функция Грина и имеет вид $(\nu = n/2-1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \dfrac{[I_\nu(\lambda)K_\nu(\lambda r) - I_\nu(\lambda r)K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda\rho)}{I_\nu(\lambda)}, & 0 \leqslant \rho \leqslant r, \\ \dfrac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \dfrac{[I_\nu(\lambda)K_\nu(\lambda\rho) - I_\nu(\lambda\rho)K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda r)}{I_\nu(\lambda)}, & r \leqslant \rho \leqslant 1, \end{cases}$$

т.е. равенство (1.3.33), а вместе с ним (1.3.25) доказаны.

В завершение покажем, что для решений (1.3.29) и (1.3.31) справедливы L_2-оценки. Для первого слагаемого в решении (1.3.29) это, как и в доказательстве теоремы 1.3.1. Для второго слагаемого из (1.3.29) это является очевидным. Анализ соотношений (1.3.31)—(1.3.32) также позволяет получить требуемые оценки, равномерные по $s \in \mathscr{S}$.

Таким образом, для решений, представленных формулами (1.3.29) и (1.3.31), с учетом соотношений (1.3.10), справедливы оценки:

$$\|u_s\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|f_s\| \; \forall s \in \mathscr{S}.$$

Далее, остается только применить лемму 1 из [124] (с.118). Итак, доказана

Теорема 1.3.2. *Пусть* $n \geqslant 3$, $\Omega-$ *единичный шар с центром в начале координат. В этом случае для любых* $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0,1))$, $\in C$ *граничная задача* (1.3.1)— (1.3.3) *имеет единственное сильное решение* $u(x,t)$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (1.3.30) *и* (1.3.32).

1.4 О точечном спектре

Естественно, представляют интерес спектральные задачи, соответствующие изученным полупериодическим граничным задачам, для "существенно" нагруженных параболических уравнений в ограниченной области.

1.4.1 Обобщенная спектральная задача 1

Рассматривается следующая обобщенная спектральная задача:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -\alpha \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\bar{x}}, \ \ \{x,t\} \in Q; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u(x,2\pi), \end{cases} \tag{1.4.1}$$

где α — спектральный параметр, $a = 1 - 2\overline{x}$, $\overline{x} \in (0,1)$ — задано.

Предварительно покажем, что изучение этой задачи сводится к исследованию разрешимости уравнения:

$$\operatorname{ch} z = \alpha \operatorname{ch} az, \tag{1.4.2}$$

$$z \in Z_0 = \{z | z \in \mathbb{C}, \ z = x(1 \pm i), \ x = (|s|/8)^{1/2}, \ s \in \mathscr{S}\}, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Действительно, будем искать ненулевые решения задачи (1.4.1) в виде

$$u(x,t) = \sum_{s \in \mathscr{S}} u_s(x) e^{ist}, \text{ где } s \in \mathscr{S},$$

тогда для искомых Фурье-коэффициентов $u_s(x)$ получим следующую краевую задачу для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} isu_s(x) - u_s''(x) = -\alpha u_s''(\bar{x}), \ x \in (0,1), \\ u_s(0) = u_s(1) = 0, \ \ is = \lambda^2, \end{cases} \quad \forall s \in \mathscr{S}. \tag{1.4.3}$$

Используя функцию Грина (см. Приложение Б) и, считая временно известной правую часть уравнения (1.4.3) запишем представление решения этой задачи

$$u_s(x) = -\alpha u_s''(\bar{x}) \int_0^1 G_s(x,\xi) d\xi, \ \ \forall s \in \mathscr{S} \setminus \{0\}, \tag{1.4.4}$$

где

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} \lambda\xi \operatorname{sh} \lambda(1-x)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, \ \ 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\operatorname{sh} \lambda x \operatorname{sh} \lambda(1-\xi)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, \ \ 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1. \end{cases}$$

Правую часть равенства (1.4.4) представим в явном виде, используя соотношение

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi)d\xi = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda\xi\operatorname{sh}\lambda(1-x)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}d\xi + \int\limits_x^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda x\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}d\xi =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-x)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\cdot\frac{\operatorname{ch}\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^x - \frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\cdot\frac{\operatorname{ch}\lambda(1-\xi)}{\lambda}\Big|_x^1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2\operatorname{sh}\lambda}\left[\operatorname{sh}\lambda(1-x)\left(\operatorname{ch}\lambda x-1\right) - \operatorname{sh}x\left(1-\operatorname{ch}\lambda(1-x)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2\operatorname{sh}\lambda}\left[\operatorname{sh}\lambda - 2\operatorname{sh}\frac{\lambda}{2}\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}(1-2x)\right] = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2\operatorname{ch}\lambda/2}\cdot\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}(1-2x).$$

Таким образом, равенство (1.4.4) примет вид

$$u_s(x) = -\alpha u_s''(\bar{x})\left[\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2\operatorname{ch}\lambda/2}\cdot\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}(1-2x)\right],\ \ \forall s\in\mathscr{S}\backslash\{0\},\quad (1.4.5)$$

Для определения неизвестной величины $u_s''(\bar{x})$ продифференцируем равенство (1.4.5) по переменной x дважды и, полагая, $x=\bar{x}$, получим

$$u_s''(\bar{x})\cdot\left[1-\alpha\frac{\operatorname{ch}\lambda/2(1-2\bar{x})}{\operatorname{ch}\lambda/2}\right] = 0.\quad (1.4.6)$$

Таким образом, действительно, отыскание нетривиальных решений задачи (1.4.1) свелось к исследованию разрешимости уравнения (1.4.2), т.к. по условию $u_s''(\bar{x})\not\equiv 0$.

Прежде всего, покажем, что для любых $\alpha\in\mathbb{C}$, $a\in(-1,1)$ уравнение $\operatorname{ch}z=\alpha\operatorname{ch}az$ на множестве Z_0 имеет не более одного решения.

I. Пусть $a=0$. Тогда исследуемое уравнение принимает вид:

$$\operatorname{ch}z=\alpha.\quad (1.4.7)$$

Введем следующее представление числа α :

$$\alpha=\operatorname{ch}b,\ \ b=b_1\pm ib_2,\ \ b_j\in\mathbb{R}^1,\ \ j=1,2.\quad (1.4.8)$$

Заметим, во-первых, что числа b определяются неоднозначно, с точностью до чисто мнимого слагаемого $i2\pi k$, $k=0,1,2...$, во-вторых, в формуле (1.4.8) имеет место либо случай знака "$+$ либо — "$-$". Таким образом, из (1.4.7) и (1.4.8) мы получаем уравнение:

$$\operatorname{ch}z=\operatorname{ch}b,\quad (1.4.9)$$

решениями которого являются корни: $z_l^{\pm} = b_1 + i(\pm b_2 + 2\pi l)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Только в четырех случаях среди этих корней найдутся числа из множества Z_0: 1). $b_1 = b_2$, значит $l = 0$; 2). $b_1 = -b_2$, значит $l = 0$; 3). $b_1 \neq b_2$, но существует число $\bar{l}_+ : b_1 = b_2 + 2\pi \bar{l}_+$; 4). $b_1 \neq -b_2$, но существует число $\bar{l}_- : b_1 = -b_2 + 2\pi \bar{l}_-$. Во всех случаях искомые корни имеют вид: $z^{\pm} = b_1(1 \pm i) \in Z_0$, а соответствующие этим корням числа b имеют представления $b = b_1(1 \pm i)$. В противном случае, уравнение (1.4.9) на множестве Z_0 не имеет корней!

Итак, доказано следующее

Утверждение 1.4.1. *Уравнение* (1.4.7) *имеет единственное решение* $z^{\pm} = b_1(1 \pm i) \in Z_0$ *(либо со знаком плюс, либо со знаком минус), тогда и только тогда, когда число* b *имеет представление* $b = b_1(1 \pm i)$. *В противном случае, уравнение* (1.4.7) *не имеет решения на множестве* Z_0.

II. Пусть $a \neq 0$. Тогда исследуемое уравнение имеет вид:

$$\operatorname{ch} = \alpha \operatorname{ch} az. \tag{1.4.10}$$

Введем комплексное число c, такое, что

$$\operatorname{ch} z = \alpha \operatorname{ch} az = \operatorname{ch} c, \quad \text{где } c = c_1 + ic_2, \quad \text{либо } c = c_1 - ic_2, \tag{1.4.11}$$

т.е. из (1.4.11) получаем систему, состоящую из двух следующих уравнений:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} c, \quad \operatorname{ch} az = \operatorname{ch} d \equiv \frac{\operatorname{ch} c}{\alpha}, \quad \text{где } d = d_1 + id_2, \quad \text{либо } d = d_1 - id_2. \tag{1.4.12}$$

Очевидно, что здесь числа $c,\ d$ задаются с точностью до чисто мнимого слагаемого $i2\pi k,\ k = 0, 1, 2...$ Кроме того отметим, что для каждого корня уравнения (1.4.12) соответствует свое число c (и подходящее для этого c число d).

Аналогично тому как п.I, решая каждое из уравнений (1.4.12) находим соответствующие единственные решения из множества Z_0: $z_1^{\pm} = c_1(1 \pm i)$, $z_2^{\pm} = \dfrac{d_1}{a}(1 \pm i)$. Эти корни могут совпадать только при выполнении условия:

$$c_1 = \frac{d_1}{a}, \tag{1.4.13}$$

т.е. только при выполнении условия (1.4.13) уравнение (1.4.10) на множестве Z_0 имеет единственное решение, в противном случае уравнение (1.4.10) на множестве Z_0 не имеет решения!

С другой стороны, из соотношений (1.4.12) получаем, что параметр α может принимать только следующие значения:

$$\alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1+i)}{\operatorname{ch} ac_1(1+i)}, \quad \text{либо} \quad \alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1-i)}{\operatorname{ch} ac_1(1-i)}.$$

Наконец, учитывая дискретность в определении множества Z_0, окончательно получаем

Утверждение 1.4.2. *Уравнение* (1.4.10) *имеет единственное решение* $z^{\pm} = c_1(1 \pm i)$ *(либо со знаком плюс, либо со знаком минус), тогда и только тогда, когда*

$$\alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1 \pm i)}{\operatorname{ch} ac_1(1 \pm i)}, \tag{1.4.14}$$

где $c_1 \in G = \left\{ c | c = (|s|/8)^{1/2},\ s = 0; \pm 1; \pm 2; ... \right\}$.

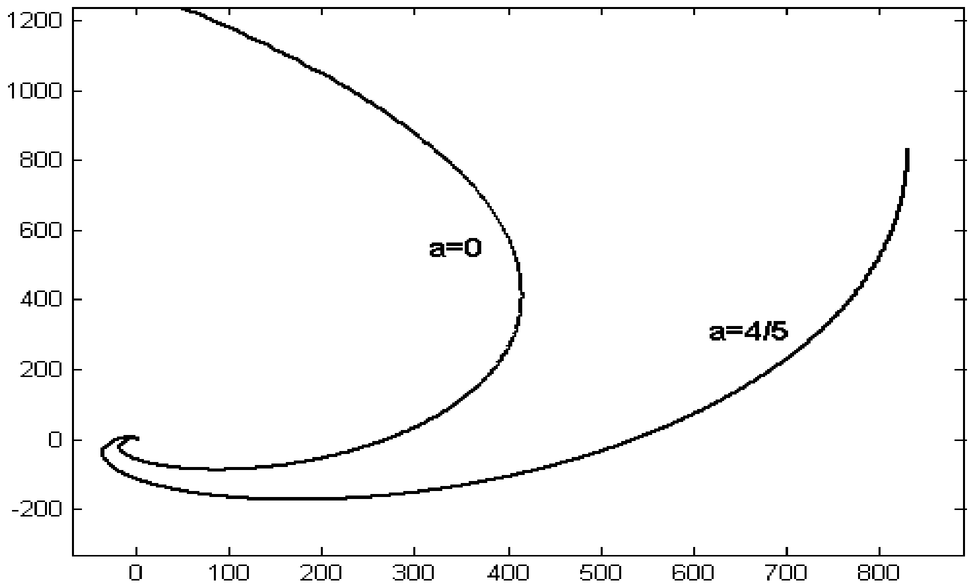

Рисунок 1.1 – Кривые, на которых расположены точки спектра

Графики кривых в комплексной плоскости (для двух значений параметра a, а именно, для $a = 0$, $a = 4/5$), на которых расположены точки, координаты которых определяются комплексным числом α, приведены на следующем рисунке. Отметим, что на этом рисунке приведены графики только для неотрицательных s. Для отрицательных значений s данные графики дополнятся своими зеркальными отображениями относительно вещественной оси. Далее, если точка, соответствующая числу
α лежит вне кривой для $a = 4/5$, то уравнение (1.4.10) при $a = 4/5$ не

имеет решения на множестве Z_0. Это означает, что ядро нагруженного оператора нульмерно. Если же точка комплексной плоскости α лежит на кривой для $a = 4/5$ и ее координаты определяются согласно формулы (1.4.14) где $c_1 \in G$, то уравнение (1.4.10) при $a = 4/5$ имеет единственное решение на множестве Z_0, определяемое как $z^+ = c_1(1+i)$ (для положительных s), т.е. в этом случае ядро нагруженного оператора одномерно! Это же остается справедливым и для отрицательных s.

Определяя множество $Q = \{x, t | 0 < x < 1,\ \ 0 < t < 2\pi\}$, мы получаем следующее

Утверждение 1.4.3. *Обобщенная спектральная задача:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -\alpha \dfrac{\partial^2 u(\overline{x}, t)}{\partial x^2}, & \{x, t\} \in Q; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u(x, 2\pi); \end{cases}$$

имеет счетный точечный спектр, расположенный на кривой комплексной плоскости (см.рис. 1.2),

$$\alpha_{\{s \geq 0\}} = \frac{\operatorname{ch} c_1(1+i)}{\operatorname{ch} ac_1(1+i)},\ \ s = 0, 1, 2, ...;$$

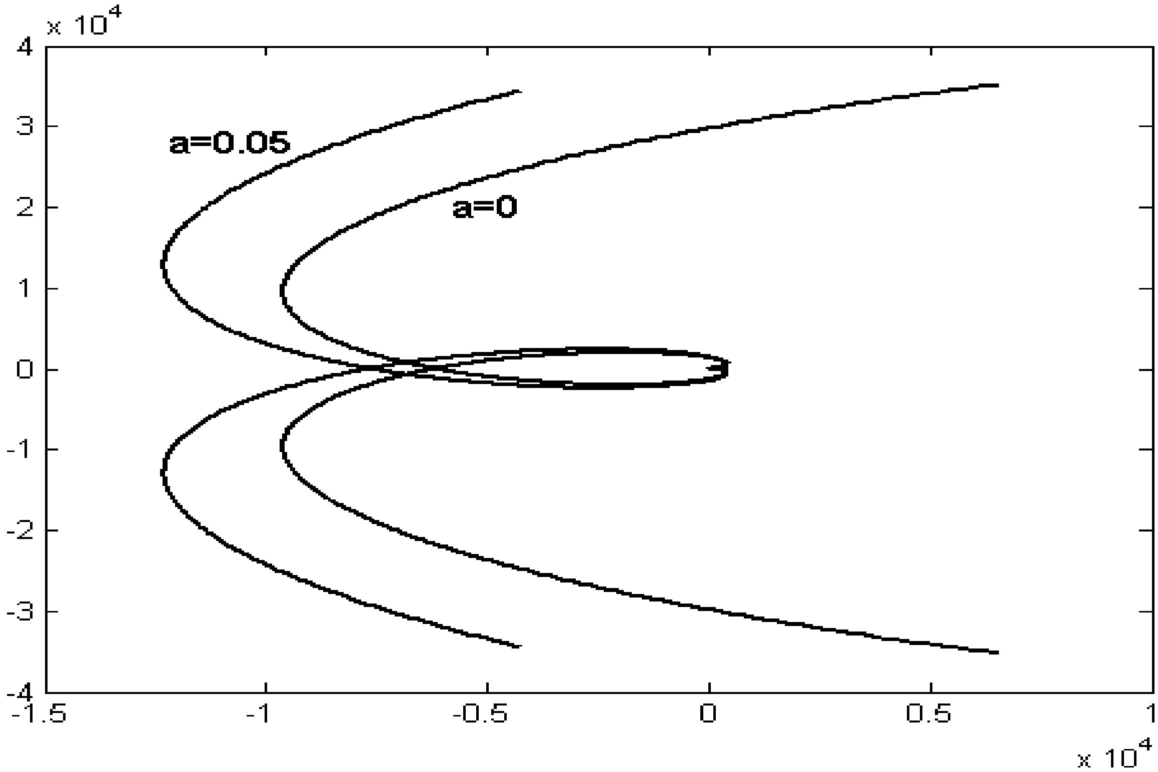

Рисунок 1.2 – Кривые, на которых расположены точки спектра (увеличенный масштаб)

$$\alpha_{\{s<0\}} = \frac{\operatorname{ch} c_1(1-i)}{\operatorname{ch} ac_1(1-i)}, \ s = -1, -2, ...; \tag{**}$$

где $c_1 \in G = \left\{c \mid c = (|s|/8)^{1/2}, \ s = 0; \pm 1; \pm 2; ...\right\}$, *соответствующей заданному значению параметра* $a = 1 - 2\overline{x}$. *Собственные функции имеют вид:*

$$u_s(x,t) = \frac{1}{is}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{(1-2x)\sqrt{is}}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{is}}{2}}\right)e^{ist}, \quad s \in \mathscr{S},$$

$$u_0(x,t) = x(1-x).$$

1.4.2 Обобщенная спектральная задача 2

Рассматривается следующая обобщенная спектральная задача :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \dfrac{\partial^2 u(x_j, t)}{\partial x^2}, \quad \{x,t\} \in Q; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u(x,2\pi), \end{cases} \tag{1.4.15}$$

где $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ — векторный спектральный параметр, числа $a_j = 1 - 2x_j, \ x_j \in (0,1), \ j = 1, ..., m,$ — заданы.

Изучение этой задачи, совершенно аналогично как и в случае одной точки "нагружения сводится к исследованию разрешимости уравнения:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{ch} a_j z, \tag{1.4.16}$$

$$z \in Z_0 = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \ z = x(1 \pm i), \ x = (|s|/8)^{1/2}, \ s \in \mathscr{S}\}, \ \alpha_j \in \mathbb{C},$$

где $j = 1, ..., m, \ \mathscr{S} = \{s \mid s = 0; \pm 1; \pm 2; ...\}$.

Прежде всего, требуется показать, что для любых $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $a_j \in (-1,1)$ уравнение $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{ch} a_j z$ (1.4.16) на множестве Z_0 имеет не более одного решения.

Пусть z_k является некоторым корнем уравнения (1.4.16). Тогда существуют числа $c^k = c_1^k + ic_2^k$, $c_j^k = c_{j1}^k + ic_{j2}^k$, $j = 1, ..., m$, такие, что справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{ch}\, z_k = \mathrm{ch}\, c\, k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, \mathrm{ch}\, c_j^k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, \mathrm{ch}\, a_j z_k. \tag{1.4.17}$$

Из первого равенства в (1.4.17) получаем, что $z_k = c_1^k(1 + i)$, а из третьего равенства в (1.4.17) — соответственно $z_k = \dfrac{c_{j1}^k}{a_j}(1 + i)$. Отсюда имеем, что должны иметь равенства: $c_1^k = \dfrac{c_{j1}^k}{a_j}$, $j = 1, ..., m$. Среднее равенства в (1.4.17) дает равенство: $\mathrm{ch}\, c_1^k(1 + i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j\, \mathrm{ch}\, a_j c_1^k(1 + i)$. Из последнего равенства коэффициенты α_j, $j = 1, ..., m$, определяются в виде $\alpha_j = \gamma_j \dfrac{\mathrm{ch}\, c_1^k(1 + i)}{\mathrm{ch}\, a_j c_1^k(1 + i)}$. Таким образом, мы свели задачу определения коэффициентов α_j, $j = 1, ..., m$, к нахождению чисел γ_j, $j = 1, ..., m$, удовлетворяющих условиям: $\sum\limits_{j=1}^{k} \gamma_j = 1$, $\gamma_j \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \{1, ..., m\}$ (так как нулевой вектор $\{\alpha_j\}_{j=1}^m = 0$ не является собственным значением в рассматриваемой спектральной задаче).

Итак, решение поставленной выше обобщенной спектральной задачи имеет вид:

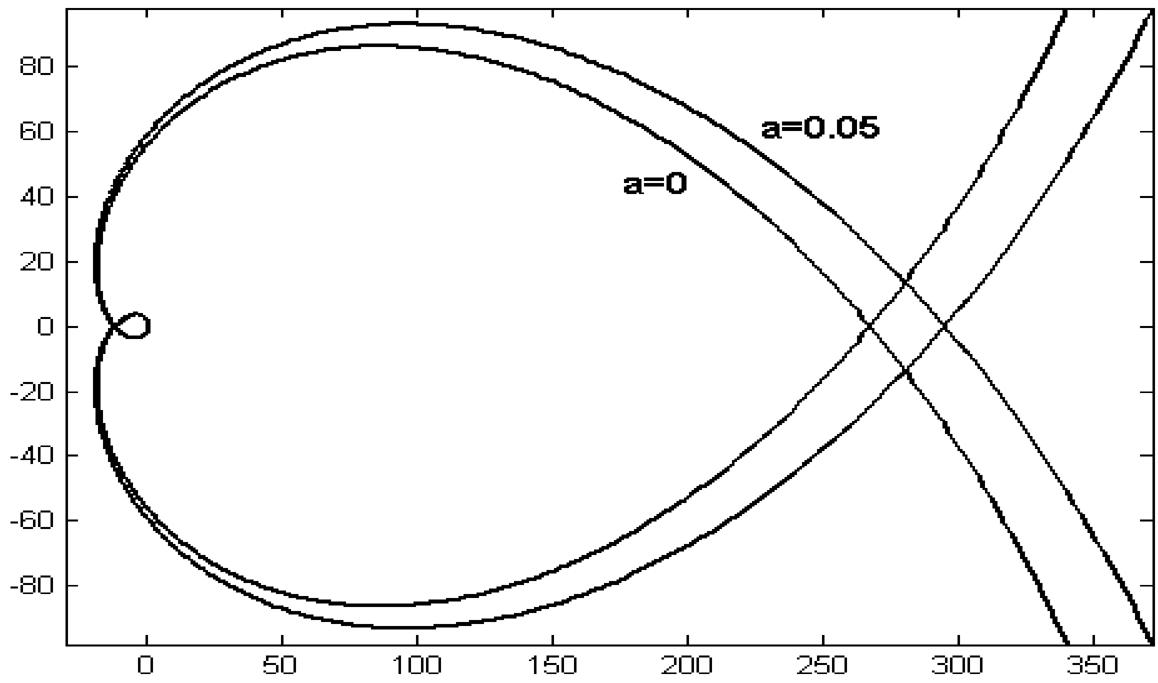

Рисунок 1.3 – Кривые, на которых расположены точки спектра (уменьшенный масштаб)

$$u_s(x,t)=\frac{1}{is}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\dfrac{(1-2x)\sqrt{is}}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{is}}{2}}\right]e^{ist},\ s\in\mathscr{S}\setminus\{0\},\ u_0(x,t)=x(1-x),$$

$$\{\alpha_j(s)\}_{j=1}^m=\left\{\gamma_j\frac{\operatorname{ch}c_1(1+i)}{\operatorname{ch}a_jc_1(1+i)}\right\}_{j=1}^m,\ c_1=\sqrt{|s|/8},\ s\in\mathscr{S},$$

где $\gamma_j,\ j=1,...,m$, удовлетворяют условиям: $\sum\limits_{j=1}^k\gamma_j=1,\ \gamma_j\neq 0,$ хотя бы для одного $j\in\{1,...,m\}$. Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^m\alpha_j(0)=\sum\limits_{j=1}^m\gamma_j=1.$

1.5 О нагруженных дифференциально-операторных уравнениях первого порядка

Различные задачи для нагруженных дифференциально - операторных уравнений первого порядка возникают и находят широкое применение во многих приложениях . Известно, что нагрузка уравнения существенно влияет на корректность задачи и, вследствие этого, они не всегда оказываются поставленными корректно.

В данном разделе рассматриваются спектральные вопросы для нагруженного дифференциального оператора L, определяемого граничной задачей

$$[D_t-A+N]u(t)=f(t),\quad t\in(0,b),\qquad \mu u(0)-u(b)=0,$$

где $D_t=\dfrac{\partial}{\partial t},\ N[u(t)]=\sum\limits_{k=1}^m\alpha_k u(t_k),\ \mu,\ \alpha_k\in\mathbb{C},\ k=1,\dots,m,\ f\in\mathcal{H}.$

Также исследуются вопросы корректной постановки граничных задач для нагруженных линейных дифференциально-операторных уравнений высокого порядка с периодическими граничными условиями

$$Lu\equiv\ (D_t^N+A)u(t)+\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^N\alpha_{jk}D_t^{N-j}u(t_k)=f(t)\quad\text{на}\quad(0,2\pi),$$
$$D_t^ju(0)=D_t^ju(2\pi),\quad j=0,1,\dots,N-1,$$

где $D_t=\partial/\partial t,\quad \alpha_{jk},\in\mathbf{C},\quad k=\overline{1,m},$ — (комплексные) постоянные, $0<t_1<\dots<t_m<2\pi.$

1.5.1 О спектре нагруженного дифференциального оператора первого порядка

Предметом исследования данного раздела будут спектральные вопросы для нагруженного дифференциального оператора L, определяемого граничной задачей

$$[D_t - A + N]u(t) = f(t), \quad t \in (0, b), \qquad \mu u(0) - u(b) = 0,$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $N[u(t)] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u(t_k)$, μ, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, $f \in \mathcal{H}$, и будет показано, что произвольное комплексное число λ принадлежит одному из следующих множеств: резольвентному множеству, точечному спектру или непрерывному спектру.

Постановка задачи и определения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный куб с ребрами длины 2π. Пусть $\mathcal{P}^\infty$ — линейное многообразие гладких, периодических по всем переменным комплексных функций, а H_x — гильбертово пространство суммируемых в квадрате на Ω функций, в котором множество $\mathcal{P}^\infty$ плотно. Полиному $A(s)$ с постоянными комплексными коэффициентами

$$A(s) = \sum_{|\beta| \leqslant \overline{\beta}} a_\beta s^\beta, \; s^\beta = s_1^{\beta_1} \cdots s_n^{\beta_n}, \; |\beta| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j,$$

$\overline{\beta}$ — заданное целое число, сопоставим дифференциальную операцию $A(-iD)$ таким образом, что

$$A(-iD)e^{is\cdot x} = A(s)e^{is\cdot x}, \; s \cdot x = \sum_{j=1}^{n} s_j x_j.$$

Соответствующий оператор $A : H_x \to H_x$ определим как замыкание в H_x операции $A(-iD)$, определенной первоначально на функциях, принадлежащих $\mathcal{P}^\infty$. Такие операторы A называют П-операторами.
Пусть $\mathscr{S} = \{s = (s_1, \ldots, s_n) | s_j = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots, \; j = 1, \ldots, n\}$. Тогда совокупность экспонент $\{e^{is\cdot x}\}$, $s \in \mathscr{S}$ образует ортогональный базис в H_x и является одновременно набором собственных элементов для каждого из операторов A. А соответствующий набор чисел $\{A(s)\}$, $s \in \mathscr{S}$ — собственными значениями оператора A. Пусть $\mathcal{H} \equiv L_2(0, b; H_x)$.

Рассматриваются спектральные вопросы для нагруженного дифференциального оператора L, определяемого граничной задачей

$$[D_t - A + N]u(t) = f(t), \quad t \in (0, b), \qquad \mu u(0) - u(b) = 0, \tag{1.5.1}$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $N[u(t)] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u(t_k)$, μ, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, $f \in \mathcal{H}$.

Дадим необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1.5. *Элемент $u \in \mathcal{H}$ будем называть решением задачи* (1.5.1)*, если существует последовательность гладких функций $u_l(x,t)$, сходящаяся в $\mathcal{H}$ к u, такая, что u_l 2π-периодичны по переменным x_j, удовлетворяют условиям из* (1.5.1) *по t и $L(D)u_l = f_l \to f$ при $l \to \to \infty$ в $\mathcal{H}$.*

Пусть $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — некоторый фиксированный замкнутый оператор (вообще говоря, неограниченный) с областью определения $\mathcal{D}(T)$, плотной в $\mathcal{H}$, E– тождественный оператор.

Определение 1.6. *Открытое множество $\rho T \subset \mathbb{C}$ называется резольвентным множеством оператора T, если для любого $\lambda \in \rho T$ оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем пространстве $\mathcal{H}$.*

Определение 1.7. *Замкнутое множество $\sigma T = \mathbb{C} \setminus \rho T$ называется спектром оператора T.*

Определение 1.8. *Точка $\lambda \in \sigma T$ принадлежит точечному спектру $\mathrm{P}\sigma T$ оператора T, если оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ не существует.*

Определение 1.9. *Точка $\lambda \in \sigma T$ принадлежит непрерывному спектру $\mathrm{C}\sigma T$ оператора T, если оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ существует, множество $\mathcal{D}((T - \lambda E)^{-1})$ плотно в $\mathcal{H}$, но оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ неограничен.*

Определение 1.10. *Точка $\lambda \in \sigma T$ принадлежит остаточному спектру $\mathrm{R}\sigma T$ оператора T, если оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ существует, но множество $\mathcal{D}((T - \lambda E)^{-1})$ не плотно в $\mathcal{H}$.*

Основные результаты. Прежде всего заметим, что поскольку $D_t - A - \lambda + N = D_t - (A + \lambda) + N$, где $A + \lambda$– снова П-оператор, достаточно изучить случай $\lambda = 0$.

Введем обозначения: $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k$, , $\quad s \in \mathscr{S}$,

$$\mathrm{D}(s) \equiv \frac{[\mu - \exp\{b \cdot A(s)\}] \cdot [A(s) - \alpha] + [\mu - 1] \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{k} \exp\{t_k A(s)\}}{A(s)}. \tag{1.5.2}$$

Замечание 1.7. *Если s такое, что $A(s) = 0$, то в (1.5.2)* $\mathrm{D}(s)$ *определяется следующим предельным соотношением:*

$$\mathrm{D}(s) = b\alpha + (\mu - 1)[1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k t_k] =$$

$$= \lim_{A(s) \to 0} \frac{[\mu - \exp\{b \cdot A(s)\}] \cdot [A(s) - \alpha] + [\mu - 1] \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{k} \exp\{t_k A(s)\}}{A(s)}.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1.5.1. $0 \in \rho L$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$\mathrm{D}(s) \neq 0 \; \forall s \in \mathscr{S}$.

Замечание 1.8. *Если нагрузка в* (1.5.1) *отсутствует, то есть* $\alpha_{k} = 0$, $k = 1, \ldots, m$, *то условие леммы совпадает с условиями* $\mu - \exp\{b \cdot A(s)\} \neq 0 \; \forall s \in \mathscr{S}$,

Лемма 1.5.2. $0 \in \mathrm{P}\sigma L$ *тогда и только тогда, когда для какого-либо* $s_{0} \in \mathscr{S}$ *выполняется условие* $\mathrm{D}(s^0) = 0$, *где* $\mathrm{D}(s)$ *определено в (1.5.2).*

Лемма 1.5.3. $0 \in \mathrm{C}\sigma L$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность*
$\{s^l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}$ *такая, что* $|\mathrm{D}(s^l)| \to 0$ *при* $l \to \infty$.

Из вышеуказанных лемм следует справедливость основного результата.

Теорема 1.5.1. *Точка* $\lambda \in \mathbb{C}$ *принадлежит одному из множеств* ρL, $\mathrm{P}\sigma L$, $\mathrm{C}\sigma L$.

Доказательство леммы 1.5.1. Доказательство леммы основано на изучении соответствующей (1.5.1) цепочки задач:

$$[D_{t} - A(s) + N]u_s(t) = f_s, \qquad \mu u_s(0) - u_s(b) = 0, \qquad s \in \mathscr{S}, \tag{1.5.3}$$

где $u_s(t),\ f_s(t)$ — зависящие от t коэффициенты разложений

$$u = \sum_{s\in\mathscr{S}} u_s(t)\mathrm{e}^{is\cdot x},\ f = \sum_{s\in\mathscr{S}} f_s(t)\mathrm{e}^{is\cdot x}. \tag{1.5.4}$$

Используется аналог леммы из [124], с.118:

Лемма 1.5.4. *Задача* (1.5.1) *однозначно разрешима при любом элементе $f \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда все задачи цепочки* (1.5.3) *однозначно разрешимы и существует не зависящая от s постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|u_s\|_{L_2(0,b)} \leqslant C\|f_s\|_{L_2(0,b)} \text{ при любом } s \in \mathscr{S}.$$

Найдем представление решений задач (1.5.3). Интегрируя эти задачи, имеем:

$$u_s(t) = u_s(0)\mathrm{e}^{A(s)^t} + N[u_s(t)]\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{A(s)t}}{A(s)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{A(s)(t-\tau)} f_s(\tau)d\tau,$$
$$\text{если } A(s) \neq 0, \tag{1.5.5}$$

$$u_s(t) = u_s(0) - t\cdot N[u_s(t)] + \int\limits_0^t f_s(\tau)d\tau, \quad \text{если} \quad A(s) = 0, \tag{1.5.6}$$

где

$$N[u_s(t)] = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_s(t_k).$$

Отсюда при $t = b$ получаем:

$$[\mu - \mathrm{e}^{A(s)b}]u_s(0) + \frac{1-\mathrm{e}^{A(s)t}}{A(s)}\cdot N[u_s(t)] = \int\limits_0^b \mathrm{e}^{A(s)(b-\tau)} f_s(\tau)d\tau,$$
$$\text{если } A(s) \neq 0, \tag{1.5.7}$$

$$[\mu - 1]u_s(0) + b\cdot N[u_s(t)] = \int\limits_0^b f_s(\tau)d\tau, \quad \text{если} \quad A(s) = 0. \tag{1.5.8}$$

Далее, приравнивая t и t_k в (1.5.5)—(1.5.6), умножая результат соответственно на α_k и суммируя полученные соотношения по k от 1 до m,

будем иметь:
при $A(s)\neq 0$

$$-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \mathrm{e}^{A(s)t_k}\cdot u_s(0)+\frac{A(s)-\alpha+\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{e}^{A(s)t_k}}{A(s)}\cdot N[u_s(t)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\int_0^{t_k}\mathrm{e}^{A(s)(t_k-\tau)}f_s(\tau)d\tau,\quad (1.5.9)$$

при A(s)=0

$$-\alpha\cdot u_s(0)+[1+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k t_k]\cdot N[u_s(t)]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\int_0^{t_k}f_s(\tau)d\tau.\qquad (1.5.10)$$

Из систем уравнений (1.5.7), (1.5.9) и (1.5.8), (1.5.10) соответственно определяем, неизвестные величины $u_s(0)$ и $N[u_s(t)]$, и получаем, что решения задач цепочки (1.5.3) имеют следующее представление:

$$u_s(t)=[D(s)]^{-1}\left[\Delta_{u_s(0)}\mathrm{e}^{tA(s)}+\Delta_{N_s}[A(s)]^{-1}(1-\mathrm{e}^{tA(s)}\right]+$$

$$+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau,\quad \text{если}\quad A(s)\neq 0,\quad (1.5.11)$$

где

$$\Delta_{u_s(0)}=\begin{Vmatrix}\int\limits_0^b\mathrm{e}^{(b-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau & [A(s)]^{-1}[\mathrm{e}^{bA(s)}-1]\\ \sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\int\limits_0^{t_k}\mathrm{e}^{(t_k-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau & [A(s)]^{-1}\left[A(s)-\alpha+\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{e}^{t_kA(s)}\right]\end{Vmatrix},$$

$$\Delta_{N_s}=\begin{Vmatrix}\mu-\mathrm{e}^{bA(s)} & \int\limits_0^b\mathrm{e}^{(b-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau\\ -\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{e}^{t_kA(s)} & \sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\int\limits_0^{t_k}\mathrm{e}^{(t_k-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau\end{Vmatrix},$$

и $\mathrm{D}(s)$ определено согласно (1.5.2);

$$u_s(t) = [\mathrm{D}(s)]^{-1}\left[\Delta_{u_s(0)} - \Delta_{N_s} \cdot t\right] + \int\limits_0^t f_s(\tau)d\tau, \quad \text{если} \quad A(s) = 0, \tag{1.5.12}$$

где

$$\Delta_{u_s(0)} = \begin{vmatrix} \int\limits_0^b f_s(\tau)d\tau & b \\ \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} f_s(\tau)d\tau & 1 + \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k t_k \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{N_s} = \begin{vmatrix} \mu - 1 & \int\limits_0^b f_s(\tau)d\tau \\ -\alpha & \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} f_s(\tau)d\tau \end{vmatrix},$$

и $\mathrm{D}(s)$ определено в замечании (1.7).

Из (1.5.11) и (1.5.12) непосредственно следует однозначная разрешимость каждой задачи цепочки (1.5.3).

Осталось установить априорные оценки, равномерные относительно индекса s.

Пусть $A(s) = 0$. С учетом представления решения (1.5.12) непосредственно устанавливаем требуемые оценки. Пусть теперь $A(s) \neq 0$. В этом случае, в силу условия леммы (1.5.1) и условия $A(s) \neq 0$ получаем, что существуют постоянные δ_1, δ_2 такие, что $|\mathrm{D}(s)| \geqslant \delta_1 > 0$, $|A(s)| \geqslant \delta_2 > 0\ \forall s \in \{\mathcal{S} | A(s) \neq 0\}$. Дальнейшее доказательство леммы 1.5.1 проводится аналогично тому, как это сделано в для доказательства теоремы об однозначной сильной разрешимости граничной задачи (1.5.1). Лемма 1.5.1 полностью доказана.

Доказательство леммы 1.5.2. Дополнительно к условию леммы 1.5.2 положим, что $A(s^0) \neq 0$. Тогда, если при каком-то $s^0 \in \mathscr{S}$: $\mathrm{D}(s^0) = 0$, то функция

$$\left[\mathrm{e}^{tA(s^0)} + \frac{1 - \mathrm{e}^{tA(s^0)}}{A(s^0)}\right] \mathrm{e}^{is^0 \cdot x}$$

дает нетривиальное решение однородной задачи, соответствующей (1.5.1), так как

$$\mu = \mathrm{e}^{bA(s^0)} + \frac{1 - \mathrm{e}^{bA(s^0)}}{A(s^0)}$$

в силу граничного условия из (1.5.1). Пусть теперь $A(s^0) = 0$. Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей (1.5.1), будет функция $(1-t)\mathrm{e}^{is^0\cdot x}$. В этом случае из граничного условия (1.5.1) будем иметь $\mu = 1 - b$.

Обратно, при существовании нетривиального решения однородной задачи, соответствующей (1.5.1), нарушение условия леммы 1.5.2 невозможно. Это противоречит утверждению леммы 1.5.1.

Доказательство леммы 1.5.3. Так как $0 \notin \mathrm{P}\sigma L$, то заключаем, что оператор L^{-1} существует и область $\mathcal{D}(L^{-1})$ плотна в $\mathcal{H}$ (содержит заведомо все конечные суммы вида (1.5.4)). Докажем неограниченность оператора L^{-1}. Согласно предположению леммы 1.5.3 существует последовательность $\{s^l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}$ такая, что

$$\varepsilon_l = |\mathrm{D}(s^l)| \to 0 \ \text{ при } \ l \to \infty. \tag{1.5.13}$$

Обозначим: $A_l = A(s^l)$. В качестве правых частей в уравнении (1.5.1) возьмем последовательность функций

$$f_l = \exp{(is^l \cdot x)}, \quad \|f_l\|^2_{\mathcal{H}} = (2\pi)^n b. \tag{1.5.14}$$

Покажем, что норма решений u_l задачи (1.5.1) при правых частях вида (1.5.14) неограниченно растет при $l \to \infty$. Вид u_l в этом случае дается формулой

$$u_l = u_l(t)\exp{(is^l \cdot x)}, \quad \|u_l\|^2_{\mathcal{H}} = (2\pi)^n \|u_l(t)\|^2_{H^1(0,b)},$$

где $u_l(t)$ имеет следующее представление (в уравнениях (1.5.3) $f_{s^l}(t) \equiv 1$)

$$u_l(t) = [\mathrm{D}(s^l)]^{-1}\left\{\Delta_{u_l(0)}\mathrm{e}^{tA_l} + \Delta_{N_l}\frac{1-\mathrm{e}^{tA_l}}{A_l}\right\} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A_l}d\tau, \tag{1.5.15}$$

где

$$\Delta_{u_l(0)} = \frac{\left(A_l - \alpha + \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \mathrm{e}^{t_k A_l}\right)\int\limits_0^b \mathrm{e}^{(b-\tau)A_l}d\tau - \left(\mathrm{e}^{bA_l} - 1\right)\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} \mathrm{e}^{(t_k-\tau)A_l}d\tau}{A_l},$$

$$\Delta_{N_l} = (\mu - \mathrm{e}^{bA_l}) \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int_0^{t_k} \mathrm{e}^{(t_k-\tau)A_l} d\tau + \int_0^{b} \mathrm{e}^{(b-\tau)A_l} d\tau \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathrm{e}^{t_k A_l}.$$

Производя интегрирование и исключая из рассмотрения случай $A_l = 0$ (что возможно за счет перехода, если необходимо, к соответствующей подпоследовательности), получим

$$u_l(t) = \frac{1}{A_l} \left(\frac{\mu - 1}{\mathrm{D}(s^l)} \mathrm{e}^{tA^l} - \frac{\mu - \mathrm{e}^{bA_l}}{\mathrm{D}(s^l)} \right). \qquad (1.5.16)$$

Если $\mu = 1$, то $u_l(t)$ не зависит от t и условие леммы равносильно соотношению $|A_l - \alpha| \to 0$ при $l \to \infty$ (в частности, при $\alpha = 0$ имеем $|A_l| \to 0$ при $l \to \infty$), так как при $\mu = 1$

$$u_l(t) = -\frac{1}{A_l - \alpha}.$$

Таким образом, в этом случае мы имеем неограниченность оператора L^{-1}.

Если $\mu \neq 1$, то в формуле (1.5.16) второе слагаемое

$$-(\mu - \mathrm{e}^{bA_l})[A_l \mathrm{D}(s^l)]^{-1}$$

ограничено, так как для достаточно больших l имеем $|A_l - \alpha| \geq \eta > 0$, и при $|A_l| \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому, в (1.5.16) достаточно показать, что неограниченно растут нормы функций

$$v_l = \mathrm{e}^{tA_l} [\mathrm{D}(s^l)]^{-1} A_l^{-1}.$$

Положим $A_l = r_l + iq_l$, где r_l, q_l вещественны. Имеем:

$$\|v_l\|^2_{H(0,b)} = \frac{\mathrm{e}^{2br^l} - 1}{2r_l \left| (\mu - \mathrm{e}^{bA_l})(A_l - \alpha) + (\mu - 1) \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \mathrm{e}^{t_k A_l} \right|^2}. \qquad (1.5.17)$$

Если $\mu = 0$, то правая часть (1.5.17) стремится к величине $\mathrm{e}^{-2t_k r_l}$, которая в свою очередь стремится к $+\infty$ при $r_l \to -\infty$. Последнее соответствует условию леммы $\mathrm{D}(s^l) \to 0$.

Если $\mu = \infty$, то из условия леммы следует, что $r_l \to +\infty$. Отсюда получаем неограниченность правой части (1.5.17).

Если $\mu \neq 0, 1, \infty$, то для достаточно больших l имеем $0 < \eta_1 \leqslant |A_l - \alpha| \leqslant \eta_2 < \infty$. Поскольку $|r_l|^{-1} |\mathrm{e}^{2br^l} - 1| \geqslant \beta > 0$ (для достаточно больших l $|\mathrm{e}^{2br^l} - 1| \geqslant \delta_1 > 0$, $r_l > +N$), видим, что $\|v_l\|^2_{H(0,b)}$ растет вместе с $|\mathrm{D}(s^l)|^{-2}$. Это завершает доказательство леммы 1.5.3.

Замечание 1.9. *При $\mu = 0, \infty$ и произвольном операторе A точечный спектр оператора L не всегда пуст (в отличие от случая, когда отсутствует нагрузка.*

Замечание 1.10. *Остаточный спектр оператора L пуст, как и у оператора A, то есть $\sigma L = \overline{\mathrm{P}\sigma L}$, $\mathrm{C}\sigma L = \sigma L \setminus \mathrm{P}\sigma L$.* Оказалось, что это свойство оператора L не зависит от наличия нагрузки.

Множество $\mathrm{P}\sigma L$ описывается корнями λ уравнения

$$\left\{\left[|\mu|\mathrm{e}^{i\arg\mu+2\pi li} - \mathrm{e}^{b[A(s)+\lambda]}\right][A(s)+\lambda]\alpha + \left[|\mu|\mathrm{e}^{i\arg\mu+2\pi li} - 1\right]\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \mathrm{e}^{t_k[A(s)+\lambda]}\right\} \cdot [A(s)+\lambda]^{-1} = 0, \quad s \in \mathcal{S}, \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Примеры. Рассмотрим два примера на применение полученных результатов.

1^0. Пусть $A(s) = s^2$, $\mu = 1$, $\alpha = 0$. Тогда условие (1.5.2) принимает вид $\mathrm{D}(s) = 1 - \exp bs^2$, если $s \neq 0$; в частности, $\mathrm{D}(0) = 0$. Итак, имеем

Утверждение 1.5.1. *Пусть $A(s) = s^2$, $\mu = 1$, $\alpha = 0$. Тогда $0 \in \mathrm{P}\sigma L$. Точечный спектр $\mathrm{P}\sigma L$ оператора L описывается множеством: $\lambda = -s^2 + i2\pi(b)^{-1}l$, $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$*

2^0. Пусть $A(s) = s^2$, $\mu = 0$, $\alpha = 0$. Тогда условие (1.5.2) принимает вид $\mathrm{D}(s) = -\exp(bs^2) - s^{-2}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k \exp(s^2 t_k)$, если $s \neq 0$; в частности, $-\mathrm{D}(0) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k t_k$.

Таким образом, получаем

Утверждение 1.5.2. *Пусть $A(s) = s^2, \mu = 0, \alpha = 0$,*

$$B_s = B(s, \alpha_k, t_k) \equiv \sum_{k=1}^{m}\alpha_k s^{-2} \cdot \exp(-s^2(b - t_k)).$$

Тогда $0 \in \rho L$, если $B_s \neq -1$ $\forall s \in \mathcal{S}$; $0 \in \mathrm{P}\sigma L$, если $B_s = -1$ хотя бы для одного $s \in \mathcal{S}$. В этом случае точечный спектр $\mathrm{P}\sigma L$ описывается корнями уравнения:

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \frac{\exp[-(b - t_k)(s^2 + \lambda)]}{s^2 + \lambda} = -1, \; s \in \mathcal{S}.$$

Отметим, что в работе рассматривались спектральные вопросы для нагруженных обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка на ограниченном интервале.

1.5.2 О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями

В данном разделе рассматриваются вопросы корректной постановки граничных задач для нагруженных линейных дифференциально – операторных уравнений высокого порядка с периодическими граничными условиями.

Пусть Ω — n-мерный куб с ребрами длины 2π; $\mathcal{P}^{\infty}$ — линейное многообразие гладких периодических по всем переменным комплекснозначных функций, $H \equiv H(\Omega)$ — гильбертово пространство интегрируемых в квадрате на Ω функций, в котором множество $\mathcal{P}^{\infty}$ плотно. Полиному

$$A(s) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} a_\alpha s^\alpha, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

с постоянными комплексными коэффициентами поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD)$, где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D \equiv \partial/\partial x_j$, $i = \sqrt{-1}$, таким образом, что $A(-iD)\exp\{is\cdot x\} = A(s)\exp\{is\cdot x\}$, $s\cdot x = s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n$.

Оператор $A : H \to H$ зададим как замыкание в H операции $A(-iD)$, определенной первоначально на функциях из $\mathcal{P}^{\infty}$.Оператор A назовем П-оператором.

Обозначим через $\mathscr{S}$ множество n-мерных целочисленных векторов $\{s_1, \dots, s_n\}$, где $s = 0, \pm1, \pm2, \dots$. Очевидно, что совокупность экспонент вида $\{\exp\{is\cdot x\},\ s \in \mathscr{S}\}$ образует ортогональный базис в H и является одновременно набором собственных элементов для оператора A, а каждое из чисел $A(s)$, $s \in \mathscr{S}$, — соответствующим собственным значением.

Задача 1. Исследовать вопросы разрешимости краевой задачи:

$$Lu \equiv (D_t^N + A)u(t) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{jk} D_t^{N-j} u(t_k) = f(t) \quad \text{на} \quad (0, 2\pi),$$
$$D_t^j u(0) = D_t^j u(2\pi), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \tag{1.5.18}$$

где $D_t = \partial/\partial t$, $\alpha_{jk}, \in \mathbf{C}$, $k = \overline{1,m}$, — (комплексные) постоянные, $0 < t_1 < \cdots < t_m < 2\pi$.

Определение 1.11. *Для задачи (1.5.18) функцию $u(t) \in L_2(0, 2\pi; H)$ назовем сильным решением, если существует последовательность $\{u_n(t)\} \subset \{C^N((0,2\pi); \mathcal{P}^\infty) \cap C^{N-1}([0,2\pi]; \mathcal{P}^\infty),\ D_t^j u(0) = D_t^j u(2\pi),\ j = 0, 1, \ldots, N-1\}$, для которой имеют место соотношения: $Lu_n(t) \to f(t)$, $u_n(t) \to u(t)$ в $L_2(0, 2\pi; H)$.*

Основные результаты по задаче 1 формулируются в виде следующих утверждений.

Теорема 1.5.2. *Задача (1.5.18) при любом $f \in L_2(0, 2\pi; H)$ однозначно сильно разрешима в пространстве $L_2(0, 2\pi; H)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{N_k} + A(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathscr{S}, \quad -A(s) \neq (iq)^N \quad \forall s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}^0, \tag{1.5.19}$$

где $q = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\mathscr{S}^0 = \{s | s \in \mathscr{S},\ A(s) = 0\}$.

Теорема 1.5.3. *При $N = 3$ задача (1.5.18) для любого $f \in L_2(0, 2\pi; H)$ однозначно сильно разрешима в пространстве $L_2(0, 2\pi; H)$, тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{3_k} + A(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathscr{S}, \quad A(s) \neq iq^3 \quad \forall s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}^0, \quad q = 1, 2, \ldots \tag{1.5.20}$$

Замечание 1.11. *Утверждения теорем 1.5.2 и 1.5.3 показывают, что, во-первых, условия корректности задачи (1.5.18) не зависят от точек нагружения $\{t_k\}_{k=1}^m$, во-вторых, корректность задачи (1.5.18) не зависит также от коэффициентов α_{jk}, $j = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1,m}$.*

Доказательство теоремы 1.5.2. Используем метод Фурье, т. е. решение и правую часть уравнения (1.5.18) представим в виде

$$u = \sum_{s \in \mathcal{S}} u_s(t) \exp\{is \cdot x\}, \quad f = \sum_{s \in \mathcal{S}} f_s(t) \exp\{is \cdot x\}. \tag{1.5.21}$$

В задаче (1.5.18) для коэффициентов разложений (1.5.21) будем иметь

$$D_t^N u_s(t) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{jk} u_s(t_k) = f_s(t) \quad \text{на} \quad (0, 2\pi),$$

$$u_s(0) = u_s(2\pi), \quad \text{если} \quad s \in \mathscr{S}^0; \tag{1.5.22}$$

$$D_t^N u_s(t) + A(s)u_s(t) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{jk} u_s(t_k) = f_s(t) \quad \text{на} \quad (0,2\pi),$$
$$u_s(0) = u_s(2\pi), \quad \text{если} \quad s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}^0. \quad (1.5.23)$$

Определение 1.12. *Будем говорить, что задачи (1.5.22), (1.5.23) регулярно разрешимы, если для* $f_s \in C((0,2\pi))$ *эти задачи разрешимы в классе* $C^N((0,2\pi)) \cap C^{N-1}([0,2\pi])$.

Сформулируем аналог леммы из [124] (с. 118).

Лемма 1.5.5. *Утверждение теоремы 1.5.2 будет иметь место тогда и только тогда, когда каждая из задач (1.5.22), (1.5.23) однозначно регулярно разрешима и выполнены оценки*

$$\|u_s(t)\|_{L^2(0,2\pi)} \leqslant C\|f_s(t)\|_{L^2(0,2\pi)} \quad \text{для} \quad \forall s \in \mathscr{S}, \qquad (1.5.24)$$

где постоянная C *не зависит от* s.

Для задач (1.5.22), (1.5.23) справедливы следующие леммы.

Лемма 1.5.6. *Задачи (1.5.22) при любом* $f_s \in C((0,2\pi))$ *однозначно регулярно разрешимы и верны оценки (1.5.24) тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{N_k} \neq 0$.

Лемма 1.5.7. *Задачи (1.5.23) при любом* $f_s \in C((0,2\pi))$ *однозначно регулярно разрешимы и справедливы оценки (1.5.24) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{N_k} + A(s) \neq 0, \quad -A(s) \neq (iq)^N \quad \forall s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}^0, \quad q = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1.5.25)$$

Для случая $s \in \mathscr{S}^0$ из (1.5.22) мы получаем

$$D_t^{N-p} u_s(t) = \sum_{j=N-p}^{N-1} \frac{t^{j-N+p}}{(j-N+p)!} D_t^j u_s(0) + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} f_s(\tau)d\tau - \frac{t^p}{p!} M_s, \ p = 1, \ldots, N; \quad (1.5.26)$$

где

$$M_s = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{jk} D_t^{N-j} u_s(t_k).$$

Из соотношения (1.5.26) для $p = 1,\ t = 2\pi$ будем иметь:

$$M_s = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_s(t)dt. \tag{1.5.27}$$

Используя равенство (1.5.27), из соотношения (1.5.26) для $p = 2,\ t = 2\pi$ мы находим $D_t^{N-1}u_s(0)$ и т.д. В (1.5.26) для $p = N$ мы должны найти только $u_s(0)$. Для этого, сначала фиксируя $t = t_k,\ k = 1,\dots,m,$ в (1.5.26) для всех $p = 1,\dots,N,$ и далее умножая полученные формулы соответственно на $\alpha_{pk},$ мы просуммируем их по k от 1 до m. Таким образом, отсюда мы находим искомое значение $u_s(0),$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{N_k} \neq 0. \tag{1.5.28}$$

Таким образом, для всех $s \in \mathscr{S}^0$ граничная задача (1.5.22) имеет единственное решение $u_s(t)$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.5.28).

Рассмотрим случай $s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}^0$. Из равенства (1.5.23) мы получаем

$$\prod_{j=1}^{N}(D_t^1 - \lambda_{js})u_s(t) = f_s(t) - M_s,\ t \in (0, 2\pi),$$
$$D_t^j u_s(0) = D_t^j u_s(2\pi),\ j = 0, 1, \dots, N-1; \tag{1.5.29}$$

где λ_{j_s} являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^N + A(s) = 0.$$

Из (1.5.29) мы имеем

$$u_s(t) = F_{0s}(t) - M_s[A(s)]^{-1}; \quad D_t^j u_s(t) = D_t^j F_{0s}(t),\ j = 1, \dots, N-1; \tag{1.5.30}$$

где (мы принимаем $t_{N+1} = t$):

$$F_{0s}(t_{j+1}) = \underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}}_{N} f_s(t_1)\prod_{j=1}^{N} G_{js}(t_{j+1}, t_j)dt_j;$$

$$M_s = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{jk} D_t^{N-j} u_s(t_k)\,;$$

$$[A(s)]^{-1} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{N} \prod_{j=1}^{N} G_{js}(t_{j+1}, t_j)\,dt_j\,;$$

$$G_{js}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\exp\{\lambda_{js}(t-\tau)\}}{1-\exp\{\lambda_{j_s}\cdot 2\pi\}}, & 0 \leqslant \tau \leqslant t; \\[2ex] \dfrac{\exp\{\lambda_{js}(2\pi + t-\tau)\}}{1-\exp\{\lambda_{js}\cdot 2\pi\}}, & t \leqslant \tau \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Заметим, что равенства (1.5.30) справедливы тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$-A(s) \neq (iq)^N,\ \forall q = \pm 1, \pm 2, \ldots,\ i = \sqrt{-1}. \qquad (1.5.31)$$

Далее, фиксируя $t = t_k$ в (1.5.30),затем умножая соответствующие формулы на $\alpha_{N-j,k}$ и суммируя их по k от 1 до m и по j от 0 до $N-1$, мы получаем

$$\Delta_s M_s [A(s)]^{-1} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{N-j,k} D_t^j F_{0s}(t_k),$$

где $\Delta_s \equiv A(s) + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{Nk}$. Следовательно, мы определим однозначно M_s, если и только если выполнено условие

$$\Delta_s \neq 0\ \forall s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}^0. \qquad (1.5.32)$$

Таким образом, используя (1.5.30), мы получим решения (1.5.29)

$$u_s(t) = F_{0s}(t) - [\Delta_s]^{-1} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{jk} D_t^{N-j} F_{0s}(t_k). \qquad (1.5.33)$$

Заметим, что условия (1.5.28), (1.5.31) и (1.5.32) совпадают с условиями (1.5.19) теоремы 1.5.2.

Согласно выше установленных результатов для решений граничных задач (1.5.22)–(1.5.23) оценки (1.5.24) имеют место.

Для завершения доказательства теоремы 1.5.2 необходимо показать замыкаемость оператора граничной задачи (1.5.18) в пространстве $L_2(0, 2\pi;\, H)$.

Утверждение 1.5.3. *Оператор $T + E$ замкнут, если T замкнут и E ограничен в $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(E)$. Здесь $\mathcal{D}(X)$ — область определения оператора X.*

Примеры

Пусть $Q = \{x, t |\, 0 < x, t < 2\pi$.

1^0. Для граничной задачи:

$$(D_t^3 - D_x^2)u + M_1 u = f \quad \text{на} \quad Q; \tag{1.5.34}$$

$$\begin{cases} D_x^j u(0,t) &= D_x^j u(2\pi, t), \; j = 0,1; \\ D_t^j u(x,o) &= D_t^j u(x, 2\pi), \; j = 0,1,2; \end{cases} \tag{1.5.35}$$

где

$$M_1 u \equiv \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk} D_t^{N-j} u(x, t_k),$$

(в силу $-s^2 \neq iq^3 \,\forall s$, $q = \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет место следующее утверждение:

Следствие 1.3. *Задача (1.5.34)–(1.5.35) для $\forall f \in L_2(Q)$ допускает единственное сильное решение $u \in L_2(Q)$, если и только если*

$$\operatorname{sh}\left(\pi \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_{3k}\right]^{1/2}\right) \neq 0. \tag{1.5.36}$$

2^0. Для граничной задачи:

$$D_t^3 u + D_x^2 u + M_1 u = f \quad \text{на} \quad Q; \tag{1.5.37}$$

(1.5.35) следующее утверждение имеет место (в силу $s^2 \neq iq^3 \,\forall s$, $q = \pm 1, \pm 2, \dots$):

Следствие 1.4. *Задача (1.5.37), (1.5.35) для $\forall f \in L_2(Q)$ допускает единственное сильное решение $u \in L_2(Q)$, если и только если выполнено условие*

$$\sin\left(\pi \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_{3k}\right]^{1/2}\right) \neq 0.$$

3^0. Для граничной задачи:

$$D_t^4 u - D_x^2 u + M_2 u = f \quad \text{на} \quad Q; \tag{1.5.38}$$

$$\begin{cases} D_x^j u(0,t) = D_x^j u(2\pi, t), \; j = 0,1; \\ D_t^j u(x,o) = D_t^j u(x, 2\pi), \; j = 0,1,2,3; \end{cases} \tag{1.5.39}$$

где

$$M_2 u \equiv \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{4} \alpha_{jk} D_t^{N-j} u(x, t_k),$$

(в силу $s^2 + q^4 \neq 0 \ \forall s,\ q = \pm 1, \pm 2, \ldots$) следующее утверждение имеет место:

Следствие 1.5. *Задача (1.5.38)–(1.5.39) для* $\forall f \in L_2(Q)$ *имеет единственное сильное решение* $u \in L_2(Q)$*, если и только если выполнено условие (1.5.36).*

2. ЗАДАЧА КОШИ С НАГРУЗКОЙ ПО ВРЕМЕНИ

На практике, достаточно часто возникают нагруженные уравнения, где присутствуют следы искомой функции, получающиеся при фиксированной "временной" переменной. К такого рода уравнениям приводят, например: задачи импульсного управления, задачи механики вязкоупругости с "памятью", проблемы, появляющиеся при эквивалентном преобразовании нелокальных задач к локальным и др. Сюда, также могут быть отнесены нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения. В данном разделе изучаются две задачи: первая — это установление размерности ядра оператора задачи Коши для одномерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности с нагрузкой при фиксированной временной переменной; вторая — это вопросы сильной однозначной разрешимости задачи Коши для вышеназванного уравнения. Особенностью рассматриваемых здесь задач является наличие нагруженного слагаемого с производной от искомого решения более высокого порядка, чем в главной дифференциальной части уравнения. Такие нагрузки названы "существенными".

2.1.1 Постановка задачи

Задача 1. Рассматривается следующая однородная задача Коши:

$\mathbb{L}u = 0 \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \dfrac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_{+} = (0, +\infty)$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, ...$

<u>**Задача 2.**</u> Рассматривается следующая неоднородная задача Коши:

$$\mathbb{L}u = \{f, \phi\} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \dfrac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\; t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_{+}$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, ...,$

$$f \in W^k_{2\,,0}(\mathbb{R}_+; L_2(\mathbb{R})),\;\; \phi \in L_2(\mathbb{R}). \tag{2.1.3}$$

Здесь 0 в обозначении пространства означает, что $\dfrac{\partial^m f(x,0)}{\partial t^m} = 0$, $m = 0, 1, ..., k-1$.

2.1.2 О размерности ядра оператора, соответствующего задаче Коши

Применяя преобразование Фурье по переменной x, из (2.1.1) для Фурье-образа $U(s,t)$ получаем:

$$U'(s,t) + s^2 U(s,t) + \alpha U^{(k)}(s,\bar{t}) = 0,\;\; U(s,0) = 0, \tag{2.1.4}$$

где $s \in \mathbb{R}$ (вещественная) переменная преобразования Фурье. Из (2.714) непосредственно следует справедливость утверждения

Предложение 2.1.1. *Для того чтобы задача Коши* (2.1.1) *имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall s \in \mathbb{R}$ *были выполнены условия:*

$$0 \neq \Delta_k(s) = \begin{cases} 1 + \alpha \dfrac{1 - e^{-s^2\bar{t}}}{s^2}, & \text{если } k = 0, \\ 1 + (-1)^{k+1} \alpha s^{2(k-1)} e^{-s^2\bar{t}}, & \text{если } k = 1, 2, 3, ... \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Обсудим условия (2.7.5).

1. <u>Пусть $k = 0$.</u> В этом случае условие (2.1.5) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_0(s) \equiv \frac{1 - e^{-s^2\bar{t}}}{s^2} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.1.6}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_0(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{0\,\max} = \overline{t},\ \varphi_{0\,\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R},\ 0 < \varphi_0(s) \leqslant \overline{t} = \lim\limits_{s\to 0} \varphi_0(s)$.

Последние неравенства позволяют получить утверждения, которые представлены в таблице.

Таблица 2.1 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.1.6)
1.	Im $\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	Im $\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -\overline{t}^{-1}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -\overline{t}^{-1}$	1	нарушается в единственной точке $s = 0$
	c). $\alpha < -\overline{t}^{-1}$	2	нарушается в 2-х точках $\pm s_1$

Из Таблицы 2.1 следует, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0\} \cup \{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha > -\overline{t}^{-1}\}$, то задача (2.7.1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha = -\overline{t}^{-1}\}$, то задача (2.1.1) имеет ровно одно нетривиальное решение; если же $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha < -\overline{t}^{-1}\}$, то задача (2.1.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения.

2. Пусть $k = 1$. В этом случае условие (2.1.5) записывается в виде:

$$\varphi_1(s) \equiv e^{-s^2\overline{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.1.7}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_1(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{1\,\max} = \varphi_1(0) = 1,\ \varphi_{1\,\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_1(s) = 0 < \varphi_1(s) \leqslant 1$.

Полученное сведем в таблицу.

Таблица 2.2 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.1.7)
1.	Im $\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	Im $\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -1$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -1$	1	нарушается в единственной точке $s = 0$
	c). $\alpha < -1$	2	нарушается в 2-х точках $\pm s_1$

Результаты Таблицы 2.2 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha > -1\}$, то задача (2.1.1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha = -1\}$, то задача (2.1.1) имеет ровно одно нетривиальное решение; если же $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha < -1\}$, то задача (2.1.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения.

3. Пусть $k = 2m,\ m = 1, 2, ...$ В этом случае условие (2.1.5) принимает вид:

$$\varphi_{2m}(s) \equiv s^{2(2m-1)} e^{-s^2 \bar{t}} \neq \frac{1}{\alpha}. \tag{2.1.8}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m}(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{2m\max} = \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}$, $\varphi_{2m\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{s\to\infty} \varphi_{2m}(s) = 0 < \varphi_{2m}(s) \leqslant \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}$.

Отсюда непосредственно следует:

Таблица 2.3 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.1.8)
1.	$\operatorname{Im}\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\operatorname{Im}\alpha = 0$		
	a). $\alpha < \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}$	2	наруш. в 2-х точ. $\pm s_0$
	c). $\alpha > \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}$	4	нар. в 4-х точ. $\pm s_1,\ \pm s_2$

Итак, данные Таблицы 2.3 показывают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha < \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}\}$, то задача (2.1.1) не имеет нетривиального решения. Если

$$\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha = \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}\},$$

то задача (2.1.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения; если же $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha > \big[(2m-1)/(\bar{t}e)\big]^{2m-1}\}$, то задача (2.1.1) имеет четыре нетривиальных линейно независимых решения.

4. Пусть $k = 2m+1,\ m = 1, 2, ...$ В этом случае условие (2.1.5) может быть записано в виде:

$$\varphi_{2m+1}(s) \equiv s^{4m} e^{-s^2 \bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.1.9}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m+1}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{2m+1\,\max} = \left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$, $\varphi_{2m+1\,\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_{2m+1}(s) = 0 < \varphi_{2m+1}(s) \leqslant \left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$.

Отсюда непосредственно следует:

Таблица 2.4 – Размерность ядра

		$\dim\{\mathrm{Ker\ L}\}$	условие (2.1.9)
1.	$\mathrm{Im}\ \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\mathrm{Im}\ \alpha = 0$		
	a). $\alpha > -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	2	нарушается в 2-х точках $\pm s_0$
	c). $\alpha < -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	4	наруш. в 4-х точках $\pm s_1,\ \pm s_2$

Таким образом, результаты Таблицы 2.4 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0\} \cup \{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha > -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}\}$, то задача (2.1.1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha = -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}\}$, то задача (2.1.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения; если же $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha < \left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}\}$, то задача (2.1.1) имеет четыре нетривиальных линейно независимых решения.

5. <u>О нетривиальных решениях задачи (2.1.1).</u> Если $\{\alpha,\ \bar{t}\}$ заданы согласно таблиц 2.1 — 2.4, то им соответствующие нетривиальные решения задачи (2.1.1) определяются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
&u_{(s=0)}(x,t) = -\alpha \cdot t,\\
&u_{(s=\pm s_j)}(x,t) = -\frac{\alpha}{s_j^2}\left(1 - e^{-s_j^2 t}\right) e^{\pm i s_j x},\ \ j = 0,1,2,\\
&\frac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = e^{i\bar{s}x},
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

где вещественные числа $\bar{s} = \{0,\ \pm s_0,\ \pm s_1,\ \pm s_2\}$ являются соответствующими корнями уравнений

$$
1 + \alpha\frac{1 - e^{-s^2\bar{t}}}{s^2} = 0, \qquad \text{если}\ \ k = 0,
$$

$$
1 + (-1)^{k+1}\alpha s^{2(k-1)} e^{-s^2\bar{t}} = 0, \quad \text{если}\ \ k = 1,2,3,\dots
$$

Заметим, что ни одна из функций (2.1.10) не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Это означает, что в пространстве $L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ядро оператора L задачи (2.1.1) нульмерно. Однако, каждая из функций
(8) принадлежит пространству с весом:

$$L_{2,\, e^{-\varepsilon t}} \equiv \{v|\, v(x,t) \cdot e^{-\varepsilon t} \in L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \ \text{для} \ \ \forall\, \varepsilon > 0\}, \tag{2.1.11}$$

а это означает, что ядро оператора L задачи (2.1.1) в пространстве $L_{2,\, e^{-\varepsilon t}}$ не всегда пусто и имеет соответствующую размерность согласно данным вышеуказанных таблиц 2.1 — 2.4.

2.1.3 Класс и критерий однозначной сильной разрешимости

Дадим следующее

Определение 2.1. *Функцию $u(x,t) \in L_{2,\, e^{-\varepsilon t}}$ будем называть сильным решением неоднородной задачи Коши (2.1.2), если существует последовательность*

$$\{u_n(x,t),\ n = 1, 2, ...\} \subset \{v|\, v \in L_{2,\, e^{-\varepsilon t}},\ v(x,0) = \phi(x)\},$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \to u(x,t) \ \text{в пространстве} \ L_{2,\, e^{-\varepsilon t}},$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^k [Lu_n](x,t)}{\partial t^k} \to \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \ \text{в пространстве} \ L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+).$$

Применяя преобразование Фурье по переменной x, из (2.1.2) будем иметь:

$$\begin{cases} U'(s,t) + s^2 U(s,t) + \alpha U^{(k)}(s,\bar{t}) = F(s,t), \\ U(s,0) = \Phi(s), \end{cases} \tag{2.1.12}$$

где $F\,(s,\,t)$, $\Phi(s)$ — образы Фурье для функций $f(x,\,t)$, $\phi(x)$ соответственно. При выполнении условий (2.1.5) предложения 2.1.1, интегрируя уравнение (2.1.12), получим следующее представления единственного решения задачи Коши (2.1.12):

$$U(s,t) = -\Delta_k^{-1}\alpha\frac{1-e^{-s^2t}}{s^2}\Big[(-1)^k s^{2k}\Phi(s)e^{-s^2\bar{t}}+$$
$$+(-1)^k s^{2k}\int\limits_0^{\bar{t}} F(s,\tau)e^{-s^2(\bar{t}-\tau)}d\tau + \sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{m-1}s^{2(m-1)}F^{(m-1)}(s,\bar{t})\Big]+$$
$$+\Phi(s)e^{-s^2t}+\int\limits_0^t F(s,\tau)e^{-s^2(t-\tau)}d\tau, \quad (2.1.13)$$

где $\Delta_k(s)$ определено в (2.1.5). Из (2.7.5) видим, что $U(t,s)$ удовлетворяет следующей, равномерной по s, априорной оценке:

$$\|U(s,t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\left[|\Phi(s)| + \sum_{m=0}^{k}\|F^{(m)}(s,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\right], \qquad (2.1.14)$$

где постоянная C не зависит от s, и $\varepsilon > 0$. Из оценки (2.1.14), используя равенство Парсеваля, получим

$$\|u(x,t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\left[\|\phi(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|f(x,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|f^{(k)}(x,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\right], \qquad (2.1.15)$$

На основе оценки (2.1.15) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.1.2. *Задача Коши* (2.1.2) *при любых* $\{f,\ \phi\}$, *удовлетворяющих условиям* (2.1.2), *однозначно сильно разрешима в пространстве* $L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$ (2.1.11), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.1.5).

Замечание. *Таким образом, классом сильных решений задачи Коши* (2.1.2) *является пространство с весом* $L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$, *которое определяется условием* (2.1.11).

2.3 Задача Коши-Дирихле на четверти плоскости

В этом разделе рассматривается первая гранично-начальная задача в полуограниченной области для одномерного уравнения теплопроводности с "существенной" нагрузкой при фиксированной временной переменной. Устанавливается размерность ядра соответствующего оператора в зависимости от точки "нагружения коэффициента и порядка нагруженного слагаемого. Получены необходимые и достаточные условия сильной однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

2.2.1 Постановка задачи

Задача 1. Однородная задача Коши-Дирихле:

$$\mathbb{L}u = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \dfrac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = 0, & x \in \mathbb{R}_+,\; t > 0, \\ u(0,t) = 0,\; u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, ...$

Задача 2. Неоднородная задача Коши-Дирихле:

$$\mathbb{L}u = \{f, \phi\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \dfrac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}_+,\; t > 0, \\ u(0,t) = \psi(t),\; u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, ...,$

$$f \in W^k_{2,0}(\mathbb{R}_+; L_2(\mathbb{R}_+)),\; \phi \in L_2(\mathbb{R}_+),\; \psi(t) \in L_2(R_+). \tag{2.2.3}$$

Здесь 0 в обозначении пространства означает, что $\dfrac{\partial^m f(x,0)}{\partial t^m} = 0$, $m = 0, 1, ..., k-1$.

2.2.2 О размерности ядра оператора

Применяя синус-преобразование Фурье по переменной x, из (2.2.1) для Фурье-образа $U(s,t)$ получаем:

$$U'(s,t) + s^2 U(s,t) + \alpha U^{(k)}(s,\bar{t}) = 0,\;\; U(s,0) = 0, \tag{2.2.4}$$

где

$$U(s,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u(x,t) \sin sx \, dx,$$

$s \in \mathbb{R}_+$ (вещественная) переменная преобразования Фурье. Из (2.2.4) непосредственно следует справедливость утверждения

Предложение 2.2.1. *Для того чтобы задача* (2.2.1) *имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall s \in \mathbb{R}_+$ *были выполнены условия)*

$$0 \neq \Delta_k(s) = \begin{cases} 1+\alpha\dfrac{1-e^{-s^2\bar{t}}}{s^2}, & \text{если} \;\; k=0, \\ 1+(-1)^{k+1}\alpha s^{2(k-1)}e^{-s^2\bar{t}}, & \text{если} \;\; k=1,2,3,... \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Обсудим условия (2.2.5).

1. Пусть $k=0$. В этом случае условие (2.2.5) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_0(s) \equiv \frac{1-e^{-s^2\bar{t}}}{s^2} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.2.6}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_0(s)$, $s \in \mathbb{R}_+$, соответственно равны: $\varphi_{0\max} = \bar{t}$, $\varphi_{0\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $0 < \varphi_0(s) \leqslant \bar{t} = \lim\limits_{s\to 0}\varphi_0(s)$.

Последние неравенства позволяют получить утверждения, которые представлены в таблице.

Таблица 2.5 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.2.6)
1.	$\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\mathrm{Im}\,\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -\bar{t}^{-1}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -\bar{t}^{-1}$	1	нарушается в единственной точке $s=0$
	c). $\alpha < -\bar{t}^{-1}$	1	нарушается также в одной точке s_1

Из Таблицы 2.5 следует, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0\} \cup \{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha > -\bar{t}^{-1}\}$, то задача (2..1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha \leqslant \bar{t}^{-1}\}$, то задача (2.2.1) имеет ровно одно нетривиальное решение.

2. Пусть $k=1$. В этом случае условие (2.2.5) записывается в виде:

$$\varphi_1(s) \equiv e^{-s^2\bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.2.7}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_1(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{1\max} = \varphi_1(0) = 1,\ \varphi_{1\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_1(s) = 0 < \varphi_1(s) \leqslant 1$.

Полученное сведём в таблицу.

Таблица 2.6 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.2.7)
1.	$\mathrm{Im}\ \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\mathrm{Im}\ \alpha = 0$		
	a). $\alpha > -1$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -1$	1	нарушается в единственной точке $s = 0$
	c). $\alpha < -1$	1	нарушается в одной точке s_1

Результаты Таблицы 2.6 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0\} \cup \{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha > -1\}$, то задача (2.2.1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha \leqslant -1\}$, то задача (2.2.1) имеет ровно одно нетривиальное решение.

3. Пусть $k = 2m,\ m = 1, 2, ...$ В этом случае условие (2.2.5) принимает вид:

$$\varphi_{2m}(s) \equiv s^{2(2m-1)} e^{-s^2\bar{t}} \neq \frac{1}{\alpha}. \tag{2.2.8}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m}(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{2m\max} = \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}$, $\varphi_{2m\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_{2m}(s) = 0 < \varphi_{2m}(s) \leqslant \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}$.

Отсюда непосредственно следует:

Таблица 2.7 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.2.8)
1.	$\mathrm{Im}\ \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\mathrm{Im}\ \alpha = 0$		
	a). $\alpha < \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}$	1	наруш. в одной точке s_0
	c). $\alpha > \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}$	2	нар. в 2-х точках $s_1,\ s_2$

Итак, данные Таблицы 2.7 показывают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha < \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}\}$, то задача (2.2.1) не имеет нетривиального решения. Если

$$\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha = \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}\},$$

то задача (2.2.1) имеет одно нетривиальное решение; если же $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha > \left[(2m-1)/(\bar{t}e)\right]^{2m-1}\}$, то задача (2.2.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения.

4. Пусть $k = 2m+1,\ m = 1, 2, ...$ В этом случае условие (2.2.5) может быть записано в виде:

$$\varphi_{2m+1}(s) \equiv s^{4m} e^{-s^2 \bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.2.9}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m+1}(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{2m+1\,\max} = \left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$, $\varphi_{2m+1\,\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{s\to\infty} \varphi_{2m+1}(s) = 0 < \varphi_{2m+1}(s) \leqslant \left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$.

Отсюда непосредственно следует:

Таблица 2.8 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.2.9)
1.	Im $\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	Im $\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	1	нарушается в одной точке s_0
	c). $\alpha < -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	2	нарушается в 2-х точках , s_1 s_2

Таким образом, результаты Таблицы 2.8 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha > -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}\}$, то задача (2.2.1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha = -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}\}$, то задача (2.2.1) имеет одно нетривиальное решение; если же $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha < -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}\}$, то задача (2.2.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения.

5. О нетривиальных решениях задачи (2.2.1). Если $\{\alpha,\ \bar{t}\}$ заданы согласно таблиц 2.5 — 2.8, то им соответствующие нетривиальные решения задачи (2.2.1) определяются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
&u_{(s=0)}(x,t) = -\alpha \cdot t,\\
&u_{(s=s_j)}(x,t) = -\frac{\alpha}{s_j^2}\left(1 - e^{-s_j^2 t}\right) e^{is_j x}, \;\; j = 0, 1, 2,\\
&\frac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = e^{i\bar{s}x},
\end{aligned} \tag{2.2.10}
$$

где вещественные числа $\overline{s} = \{0,\ s_0,\ s_1,\ s_2\}$ являются соответствующими корнями уравнений

$$
\begin{aligned}
1 + \alpha\frac{1 - e^{-s^2\bar{t}}}{s^2} = 0, &\qquad \text{если} \;\; k = 0,\\
1 + (-1)^{k+1}\alpha s^{2(k-1)} e^{-s^2\bar{t}} = 0, &\quad \text{если} \;\; k = 1, 2, 3, ...
\end{aligned}
$$

Заметим, что ни одна из функций (2.2.10), не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$. Это означает, что в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ ядро оператора L задачи (2.2.1) нульмерно. Однако, каждая из функций (2.2.10) принадлежит пространству с весом:

$$
L_{2,\,e^{-\varepsilon t}} \equiv \{v|\; v(x,t)\cdot e^{-\varepsilon t} \in L_2(\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}_+) \;\; \text{для} \;\; \forall\, \varepsilon > 0\}, \tag{2.2.11}
$$

т.е. ядро оператора L задачи (2.2.1) в пространстве $L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$ не всегда пусто и имеет соответствующую размерность согласно данным таблиц 2.5 — 2.8.

2.2.3 Класс и критерий однозначной сильной разрешимости

Определение 2.2. *Функцию $u(x,t) \in L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$ будем называть сильным решением задачи (2.2.2), если существует последовательность*

$$
\{u_n(x,t),\ n = 1, 2, ...\} \subset \{v|\; v \in L_{2,\,e^{-\varepsilon t}},\ v(x,0) = \phi(x)\}, \textit{ такая,}
$$

что

$$
\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \to u(x,t) \;\; \textit{в пространстве } L_{2,\,e^{-\varepsilon t}},
$$

и

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^k [Lu_n](x,t)}{\partial t^k} \to \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \;\; \textit{в пространстве } L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+).
$$

Применяя синус-преобразование Фурье по переменной x, из (2.2.2) будем иметь:

$$\begin{cases} U'(s,t) + s^2 U(s,t) + \alpha U^{(k)}(s,\bar{t}) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \;\; s\psi(t), \\ U(s,0) = \Phi(s), \end{cases} \tag{2.2.12}$$

где $F(s,\,t),\ \Phi(s)$ —синус-образы Фурье для функций $f(x,\,t),\ \phi(x)$ соответственно. При выполнении условий (2.2.5) Предложения (2.2.1), интегрируя уравнение (2.2.12), получим следующее представления единственного решения задачи Коши—Дирихле (2.2.2):

$$U(s,t) = -\Delta_k^{-1}\alpha \frac{1-e^{-s^2 t}}{s^2} \Big[(-1)^k s^{2k} \Phi(s) e^{-s^2 \bar{t}} +$$

$$+ (-1)^k s^{2k} \int\limits_0^{\bar{t}} F(s,\tau) e^{-s^2(\bar{t}-\tau)} d\tau + \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{m-1} s^{2(m-1)} F^{(m-1)}(s,\bar{t}) \Bigg] +$$

$$+ \Phi(s) e^{-s^2 t} + \int\limits_0^t F(s,\tau) e^{-s^2(t-\tau)} d\tau, \quad (2.8.13)$$

где $\Delta_k(s)$ определено в (2.2.5). Из (2.2.13) видим, что $U(t,\ s)$ удовлетворяет следующей, равномерной по s, априорной оценке:

$$\|U(s,t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \left[|\Phi(s)| + \sum_{m=0}^{k} \|F^{(m)}(s,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \right], \tag{2.2.14}$$

где постоянная C не зависит от $s,\ \ \varepsilon > 0$. Из оценки (2.2.14), используя равенство Парсеваля, получим

$$\|u(x,t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \left[\|\phi(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|f(x,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \right.$$

$$\left. + \|f^{(k)}(x,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \right], \tag{2.2.15}$$

На основе оценки (2.2.15) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.2.2. *Задача Коши—Дирихле* (2.2.2) *при любых* $\{f,\ \phi\}$, *удовлетворяющих условиям* (2.2.3), *однозначно сильно разрешима в пространстве* $L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$ (2.2.11), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.2.2).

Замечание. *Таким образом, классом сильных решений задачи Коши —Дирихле* (2.2.2) *является пространство с весом* $L_{2,\, e^{-\varepsilon t}}$, *опре деляемое условием* (2.2.11).

2.3 Задача Коши-Дирихле на полуполосе

В данном разделе также исследуются две задачи: первая — это определение размерности ядра оператора задачи Коши-Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности с "существенной" нагрузкой при фиксированной временной переменной в ограниченной области; вторая
— это вопросы сильной однозначной разрешимости задачи Коши для вышеназванного уравнения. Показано, что размерность ядра зависит от коэффициента нагрузки, дифференциального порядка нагруженного слагаемого, и места расположения точки нагрузки.

2.3.1 Постановка задачи

Задача 1. Рассматривается следующая однородная задача:

$$\mathbb{L}u = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \dfrac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = 0, & x \in (0,1),\; t > 0, \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = u(1,t) = 0, & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.3.1}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, ...$

Задача 2. Рассматривается следующая неоднородная задача:

$$\mathbb{L}u = \{f, \phi\} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \dfrac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} = f(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x),\; u(0,t) = u(1,t) = 0,\; x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.3.2}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, ...,$

$$f \in W^k_{2,0}(\mathbb{R}_+; L_2(0,1)),\; \phi \in L_2(0,1). \tag{2.3.3}$$

Здесь 0 в обозначении пространства означает, что $\dfrac{\partial^m f(x,0)}{\partial t^m} = 0$, $m = 0, 1, ..., k-1$.

2.3.2 О размерности ядра

Применяя синус-преобразование Фурье с конечными пределами по переменной x, к задаче (2.3.1)

$$U(n,t) = \int\limits_0^1 u(x,t)\sin n\pi x dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \mathbb{N}=1,2,3,\ldots$$

для Фурье-образа $U(n,t)$ получаем следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$U'(n,t) + (n\pi)^2 U(s,t) + \alpha U^{(k)}(n,\bar{t}) = 0, \quad U(n,0) = 0, \tag{2.3.4}$$

где $n = 1,2,3,\ldots$. Из (2.3.4) непосредственно следует справедливость утверждения

Предложение 2.3.1. *Для того чтобы задача Коши-Дирихле* (2.3.1) *имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall n\in\mathbb{N}$ *были выполнены условия*

$$0 \neq \Delta_k(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1+\alpha\dfrac{e^{-(n\pi)^2\bar{t}}}{(n\pi)^2}, & \textit{если}\ \ k=0, \\ 1+(-1)^{k+1}\alpha(n\pi)^{2(k-1)}e^{-(n\pi)^2\bar{t}}, & \textit{если}\ \ k=1,2,3,... \end{array} \right\}. \tag{2.3.5}$$

Исследуем подробно условия (2.3.5) при различных значениях k.

1. Пусть $k=0$. В этом случае условие (2.3.5) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_0(n) \equiv \frac{1-e^{-(n\pi)^2\bar{t}}}{(n\pi)^2} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.3.6}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_0(n)$, $n\in\mathbb{N}$, соответственно равны: $\varphi_{0\,\max} = \dfrac{1-e^{-\pi^2\bar{t}}}{(\pi)^2}$, $\varphi_{0\,\inf} = 0$, то есть имеем, что $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<\varphi_0(n)\leqslant\dfrac{1-e^{-\pi^2\bar{t}}}{\pi^2} = M_0.$

Последние неравенства позволяют получить утверждения, которые представлены в таблице.

Таблица 2.9 – Размерность ядра

		$\dim\{\text{Ker L}\}$	условие (2.3.6)
1.	$\operatorname{Im}\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\operatorname{Im}\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -M_0$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -M_0$	1	нарушается в одной точке при $n = 1$
	c). $\alpha < -M_0$	1	нарушается при $n = n_1$, если $\alpha = \dfrac{(\pi n_1)^2}{e^{-(\pi n_1)^2\bar{t}} - 1}$

Из Таблицы 2.9 следует, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha > -\bar{t}^{-1}\}$, то задача (2.3.1) не имеет нетривиального решения. Если же $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha \leqslant -M_0\}$, то задача (2.3.1) имеет ровно одно нетривиальное решение; если $\alpha = \dfrac{(\pi n_1)^2}{e^{-(\pi n_1)^2\bar{t}} - 1}$

2. <u>Пусть $k = 1$.</u> В этом случае условие (2.9.5) записывается в виде:

$$\varphi_1(n) \equiv e^{-(\pi n)^2\bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{2.3.7}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_1(n),\ n \in \mathbb{N}$, соответственно равны: $\varphi_{1\max} = \varphi_1(1) = e^{-\pi^2\bar{t}} = M_1,\ \varphi_{1\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R},\ 0 < \varphi_1(n) \leqslant e^{-\pi^2\bar{t}} = M_1$.

Полученное сведем в таблицу.

Таблица 2.10 – Размерность ядра

		$\dim\{\text{Ker L}\}$	условие (2.3.7)
1.	$\operatorname{Im}\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\operatorname{Im}\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -M_1$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -M_1$	1	наруш. в единственной точке при $n = 1$
	c). $\alpha < -M_1$	1	наруш. при $n = n_1$, если $\alpha = -e^{(\pi n_1)^2\bar{t}}$

Результаты Таблицы 2.10 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что

$$\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha > -M_1\},$$

то задача (2.3.1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha \leqslant -M_1\}$, то задача (2.3.1) имеет ровно одно нетривиальное решение, если $\alpha = -e^{(\pi n_1)^2 \bar t}$.

3. <u>Пусть $k = 2m,\ m = 1, 2, ...$</u> В этом случае условие (2.3.5) принимает вид:

$$\varphi_{2m}(n) \equiv (\pi n)^{2(2m-1)} e^{-(\pi n)^2 \bar t} \neq \frac{1}{\alpha}. \tag{2.3.8}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m}(s),\ s \in \mathbb{R}$, соответственно равны: $\varphi_{2m\max} = \big[(2m-1)/(\bar t e)\big]^{2m-1} = M_{2m},\ \ \varphi_{2m\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \varphi_{2m}(n) \leqslant \left(\frac{2m-1}{\bar t e}\right)^{2m-1} = M_{2m}.$$

Отсюда непосредственно следует:

Таблица 2.11 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.3.8)
1.	Im $\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	Im $\alpha = 0$		
	a). $\alpha < M_{2m}^{-1}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = M_{2m}^{-1}$	1	наруш., если $\bar t$ таково, что $n_1 = \pi^{-1}\sqrt{(\bar t e)^{-1}(2m-1)} \in \mathbb{N}$
	c). $\alpha > \big[(2m-1)/(\bar t e)\big]^{2m-1}$	4	нарушается в 4-х точках $\pm s_1,\ \pm s_2$

Таким образом, из данных Таблицы 2.11 следует, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\operatorname{Im}\alpha \neq 0\} \cup \{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha \neq \varphi_{2m}^{-1}(n),\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, то задача (2.3.1) не имеет нетривиального решения. Задача (2.3.1) может иметь одно нетривиальное решение, если $\bar t$ таково, что существует единственное значение $n \in \mathbb{N}$, для которого $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ \alpha = \varphi_{2m}^{-1}(n)\}$. Если $\{\operatorname{Im}\alpha = 0,\ M_2^{-1} < \alpha \leqslant \pi^{-2(2m-1)} e^{2\bar t}\}$, то задача (2.3.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения если $\bar t$ таково, что существуют два значения $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, для которых $\varphi_2^{-1} = \varphi_{2m}^{-1} = \alpha$. Покажем, что такой вариант возможен. Действительно, пусть например $\bar t = \dfrac{2}{\pi^2} \ln 2$ тогда существуют два нетривиальных решения задачи при $n_1 = \sqrt{(2m-1)/3},\ n_2 = 2\sqrt{(2m-1)/3}$, где, например, $m = 2, 14, 38,$

и др. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при $\alpha = \pi\left(\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2m-1}\right)$ выполняется равенство $\varphi_{2m}(n_1) = \varphi_{2m}(n_2)$.

4. Пусть $k = 2m+1,\ m = 1, 2, ...$ В этом случае условие (2.9.5) может быть записано в виде:

$$\varphi_{2m+1}(n) \equiv (\pi n)^{4m} e^{-(\pi n)^2 \bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \qquad (2.3.9)$$

Тогда для/, $\forall n \in \mathbb{N}$ будет справедливо соотношение:

$$0 < \varphi_{2m+1}(n) \leqslant \left(\frac{2m}{\bar{t}e}\right)^{2m} = M_{2m+1}.$$

Отсюда непосредственно следует:

Таблица 2.12 – Размерность ядра

		dim{Ker L}	условие (2.3.9)
1.	Im $\alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	Im $\alpha = 0$		
	a). $\alpha > -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	0	не нарушается
	b). $\alpha = -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	2	нарушается в 2-х точках $\pm s_0$
	c). $\alpha < -\left[2m/(\bar{t}e)\right]^{2m}$	4	наруш. в 4-х точках $\pm s_1,\ \pm s_2$

Таким образом, результаты Таблицы 2.12 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $\{\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0\} \cup \{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha \neq -\varphi^{-1}_{2m+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, то задача (2.3.1) имеет только тривиальное решение. Задача (2.3.1) имеет одно тривиальное решение, если $\bar{t}$ таково, что существует только единственное значение $n \in \mathbb{N}$, для которого $\{\mathrm{Im}\,\alpha = 0,\ \alpha = \varphi^{-1}_{2m+1}(n)\}$. При $\{\mathrm{Im}\ \alpha = 0,\ -\pi^{-4m}e^{\pi^2 \bar{t}} \leqslant \alpha < -M^{-1}_{2m+1}\}$, задача (2.3.1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения если, $\bar{t}$ таково, что существует два значения $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, для которых $\varphi^{-1}_{2m+1}(n_1) = \varphi^{-1}_{2m+1}(n_2) = \alpha$.

5. О нетривиальных решениях задачи (2.3.1). Если $\{\alpha,\ \bar{t}\}$ заданы согласно таблиц 1 — 4, то соответствующие им нетривиальные решения задачи (2.3.1)(определяются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
&u_{(n=1)}(x,t) = -\frac{\alpha}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin \pi x,\\
&u_{(n=n_j)}(x,t) = -\frac{\alpha}{\pi n_j^2}\left(1-e^{-(\pi n_j)^2 t}\right)\sin \pi n_j x, \quad j=1,2,
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

где вещественные числа n_{j} являются соответствующими корнями уравнений

$$
\begin{aligned}
1+\alpha\frac{1-e^{-(\pi n)^2\bar{t}}}{(\pi n)^2} &= 0, \qquad \text{если} \quad k=0,\\
1+(-1)^{k+1}\alpha(\pi n)^{2(k-1)}e^{-(\pi n)^2\bar{t}} &= 0, \quad \text{если} \quad k=1,2,3,...
\end{aligned}
$$

Заметим, что ни одна из функций (2.3.10) не принадлежит пространству $L_2((0,1)\times\mathbb{R}_+)$. Это означает, что в пространстве $L_2((0,1)\times\mathbb{R}_+)$ ядро оператора L задачи (2.3.1) нульмерно. Однако, каждая из функций (2.3.10) принадлежит пространству с весом:

$$
L_{2,\,e^{-\varepsilon t}} \equiv \{v|\, v(x,t)\cdot e^{-\varepsilon t} \in L_2((0,1)\times\mathbb{R}_+) \ \ \text{для} \ \ \forall\ \varepsilon>0\}, \tag{2.3.11}
$$

т.е. ядро оператора L задачи (2.3.1) в пространстве $L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$ не всегда пусто и имеет соответствующую размерность согласно данным таблиц 2.9 — 2.12.

2.3.3 Класс и критерий однозначной сильной разрешимости

Дадим следующее

Определение 2.3. *Функцию $u(x,t)\in L_{2,\,e^{-\varepsilon t}}$ будем называть сильным решением задачи (2.3.2), если существует последовательность*

$$
\{u_n(x,t),\ n=1,2,...\}\subset\{v|\, v\in L_{2,\,e^{-\varepsilon t}},\ v(x,0)=\phi(x)\},\ \textit{такая,}
$$

что

$$
\lim_{n\to\infty} u_n(x,t)\to u(x,t)\ \ \textit{в пространстве}\ L_{2,\,e^{-\varepsilon t}},
$$

и

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^k[Lu_n](x,t)}{\partial t^k}\to\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}\ \ \textit{в пространстве}\ L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+).
$$

Применяя синус-преобразование Фурье по переменной x, из (2.3.2) будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{dU(n,t)}{dt} + (n\pi)^2 U(n,t) + \alpha \dfrac{d^k U(n,\bar{t})}{dt^k} = F(n,t), \\ U(n,0) = \Phi(n), \end{cases} \tag{2.3.12}$$

где $F\,(n,\,t)$, $\Phi(n)$ — образы Фурье для функций $f(x,\,t)$, $\phi(x)$ соответственно. При выполнении условий (2.3.5) Предложения (2.3.1), интегрируя уравнение (2.3.12), получим следующее представления единственного решения задачи (2.3.12):

$$U(n,t) = -\Delta_k^{-1}\alpha \frac{1-e^{-(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^2}\Big[(-1)^k (n\pi)^{2k}\Phi(n)e^{-(n\pi)^2\bar{t}} + \\ + (-1)^k (n\pi)^{2k}\int\limits_0^{\bar{t}} F(n,\tau)e^{-(n\pi)^2(\bar{t}-\tau)}d\tau + \\ + \sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{m-1}(n\pi)^{2(m-1)}F^{(m-1)}(n,\bar{t})\Bigg] + \Phi(n)e^{-(n\pi)^2 t} + \\ + \int\limits_0^t F(n,\tau)e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}d\tau, \tag{2.3.13}$$

где $\Delta_k(n)$ определено в (2.3.5). Из (2.3.13) видим, что $U(n,\,t)$ удовлетворяет следующей, равномерной по n, априорной оценке:

$$\|U(n,t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\left[|\Phi(n)| + \sum_{m=0}^{k}\|F^{(m)}(n,t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\right], \tag{2.3.14}$$

где постоянная C не зависит от n, где $\varepsilon > 0$. Из оценки (2.3.14), используя равенство Парсеваля, получим

$$\|u(x,t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2((0,1),\mathbb{R}_+)} \leqslant C\,\big[\|\phi(x)\|_{L_2(0,1)} + \|f(x,t)\|_{L_2((0,1),\mathbb{R}_+)} + \\ + \|f^{(k)}(x,t)\|_{L_2((0,1),\mathbb{R}_+)}\big]. \tag{2.3.15}$$

На основе оценки (2.3.15) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.3.2. *Задача Коши-Дирихле* (2.3.2) *при любых* $\{f,\ \phi\}$, *удовлетворяющих условиям* (2.3.3), *однозначно сильно разрешима в пространстве* $L_{2,\, e^{-\varepsilon t}}$, *определяемом условием* (2.3.11), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.3.5).

Замечание. *Классом сильных решений задачи* (2.3.2) *является пространство с весом* $L_{2,\, e^{-\varepsilon t}}$, *которое определено условием* (2.3.11).

Заключение

Получены и обоснованы следующие результаты:

1. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости полупериодических (периодических по временной переменной) задач в ограниченной области для спектрально-нагруженных по пространственной переменной параболических уравнений, когда порядок производной в нагруженном слагаемом равен и выше порядка дифференциальной части уравнения.

2. Получен критерий однозначной сильной разрешимости для многомерного обобщения полупериодической граничной задачи (область – $n-$ мерный шар) для спектрально-нагруженного по пространственной переменной параболического уравнения, когда порядок производной в нагруженном слагаемом выше порядка дифференциальной части уравнения.

3. Найден счетный точечный спектр полупериодической граничной задачи для спектрально-нагруженного по пространственной переменной параболического уравнения в ограниченной области. Показано, что спектр расположен на строго описываемой кривой комплексной плоскости значений спектрального параметра.

4. Показано, что для нагруженного дифференциально – операторного уравнения первого порядка спектральный параметр λ принадлежит одному из следующих множеств: резольвентному множеству, точечному спектру или непрерывному спектру.

5. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости граничной задачи для нагруженного линейного дифференциально – операторного уравнения высокого порядка с периодическими граничными условиями.

6. Показано, что первая краевая задача для спектрально-нагруженного параболического уравнения в четверти плоскости, когда нагрузка задаётся по пространственной переменной и, при этом, точка нагрузки движется с постоянной или с переменной скоростью является нетеровой. Доказано, что индекс задачи определяется непосредственно значением модуля спектрального параметра, то есть коэффициента при нагруженном слагаемом. Доказаны теоремы о разрешимости этой и сопряженной к ней задачи, в естественным образом введенных, функциональных классах.

7. Найдены критерии и определены классы сильной однозначной разрешимости граничных задач (Коши, Коши – Дирихле, Дирихле) для спектрально-нагруженного параболического уравнения с фиксированной нагрузкой по временной переменной. Установлены размерности ядра оператора соответствующих задач.

8. Доказана теорема и некоторые следствия из неё , которые в терминах данных, дают полное описание корректных граничных задач для нагруженного уравнения Лаврентьева – Бицадзе в прямоугольной области.

9. Найдены условия существования единственного L_2–сильного решения, удовлетворяющего на линии изменения типа уравнения, условиям непрерывности решения и непрерывности его производной по времени с логарифмическим весом, нелокальной граничной задачи для нагруженного уравнения смешанного эллиптико–гиперболического типа в прямоугольной области.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995, 205 с.

2 Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, М.: Наука, 1950, 470 с.

3 Кожанов А.И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Математические заметки, 2004, Т. 76, вып. 6, С. 840–853.

4 Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи //ЖВМ и МФ., 2004, Т. 44, № 4, С. 694–716.

5 Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера //Дифференц. уравнения, 2004, Т. 40, № 6, С. 763–774.

6 Кожанов А.И. Нелокальные по времени краевые задачи для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. мат., 2004, 7, № 1, С. 51–60.

7 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения, 1983, Т. 19, № 1, С. 86–94.

8 Соболев С.Л. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966, 443 с.

9 Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988, 333 с.

10 Соболев С.Л. Некоторые вопросы теории функциональных пространств и обобщённых функций, М.: Наука, 1989, 254 с.

11 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.: Наука, 1977, 456 с.

12 Вишик М.И., Соболев С.Л. Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР., 1956, Т. III, № 3, С. 521-523.

13 Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб., 1951, Т. 29(71), № 3, С. 615-676.

14 Вишик М.И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами и смешанные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений // Матем. сб., 1956, Т. 39(81), № 3, С. 50-148.

15 Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидродинамики, М.: Наука, 1980, 440 с.

16 Вишик М.И., Шилов Г.Е. Общая теория уравнений с частными производными и некоторые проблемы теории краевых задач // Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, Ленинград, 1961, Ленинград: Наука, 1963, С. 55-85.

17 Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1981, 512 с.

18 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике, М.: Наука, 1979, 320 с.

19 Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИ АН СССР, М., 1961, С. 1-158.

20 Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М.: Наука, 1970, 288 с.

21 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука, 1973, 407 с.

22 Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Матем. сб., 1958, Т.45(87), № 2, С. 123–158.

23 Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб., 1956, Т.39(81), № 4, С. 491–524.

24 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.: Наука, 1967, 736 с.

25 Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, М.: Мир, 1971, 371 с.

26 Lions J.-L. Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Berlin: Springer –Verlag, 1961, 371 p.

27 Grisvard P. Equations operationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problemes aux limites dans des ouverts cylindriques // Annali Sc.Norm.Sup.Pisa., 1967, V.XXI, № 3, P. 307–347.

28 Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИ АН СССР., Т.83, М., 1965, 163 с.

29 Knezer A. // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1914, V.37, P. 169–197.

30 Lichtenstein L. // Studia Math., 1931, V .IV, P. 61–77.

31 Lichtenstein L. Vorlesunger übereinige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integraldifferentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin: Springer, 1931, 224 p.

32 Гюнтер Н.М. // Studia Math., 1932, T.III, P. 109–117.

33 Гюнтер Н.М. К теории интегралов Стилтьеса-Радона и интегральных уравнений // Докл. АН СССР., 1938, Т. 21, С. 219–223.

34 Гюнтер Н.М. К общей теории интегральных уравнений // Докл. АН СССР., 1939, Т. 22, С. 215–219.

35 Габиб-заде А.Ш. Исследование решения одного класса линейных нагруженных интегральных уравнений // Тр. ин-та физ. и матем. АН АзССР, Сер. матем, Баку, 1959, Т. 8, С. 177-182.

36 Назаров Н.Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Тр. ин-та матем. и мех. АН УзССР, Ташкент, 1948, Вып. 4,
С. 77-106.

Приложение А

К подразделу 1.1.2

Если ввести обозначение $\lambda^2 = is$, то задача (1.1.19) запишется в виде

$$\begin{cases} u_s''(x) - \lambda^2 u_s(x) = \alpha x u_s''(\overline{x}) - f_s(x), \ x \in (0,1), \\ u_s(0) = u_s(1) = 0, \end{cases} \quad \forall s \in \mathscr{S}. \qquad (1)$$

Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\{\operatorname{ch}\lambda x\,, \operatorname{sh}\lambda x\}$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения методом Коши [126], в виде:

$$\eta(t,\tau) = \varphi_1(\tau)\cdot\operatorname{ch}\lambda t + \varphi_2(\tau)\cdot\operatorname{sh}\lambda t,$$

где неизвестные пока функции $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ находятся из условий:

$$\begin{cases} \eta(\tau,\tau) = \varphi_1(\tau)\cdot\operatorname{ch}\lambda\tau + \varphi_2(\tau)\cdot\operatorname{sh}\lambda\tau = 0, \\ \eta_t'(t,\tau)|_{t=\tau} = \varphi_1(\tau)\cdot\operatorname{sh}\lambda\tau + \varphi_2(\tau)\cdot\operatorname{ch}\lambda\tau = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Отсюда имеем

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{\operatorname{sh}\lambda\tau}{\lambda}\,,\ \varphi_2(\tau) = \frac{\operatorname{ch}\lambda\tau}{\lambda}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения из (1.1.19) имеет вид

$$X(x) = \int\limits_0^x \left(-\frac{\operatorname{sh}\lambda\xi\cdot\operatorname{ch}\lambda x}{\lambda} + \frac{\operatorname{ch}\lambda\xi\cdot\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda}\right)[\alpha\cdot\xi u_s''(\bar{x}) - f_s(\xi)]\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)}{\lambda}\,[\alpha\cdot\xi u''(\bar{x}) - f_s(\xi)]\,d\xi = \int\limits_0^x \frac{1}{\lambda}\alpha\cdot\xi u_s''(\bar{x})\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_0^x \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)f_s(\xi)d\xi = \frac{\alpha}{\lambda}u_s''(\bar{x})\left[-\xi\frac{\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)}{\lambda}\Big|_0^x + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^x \frac{\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)}{\lambda}d\xi\right] - \int\limits_0^x \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)f_s(\xi)d\xi =$$

$$= -\frac{\alpha u_s''(\bar{x})}{\lambda^2}\cdot x + \frac{\alpha u_s''(\bar{x})}{\lambda^3}\cdot \operatorname{sh}\lambda x - \int\limits_0^x \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(x-\xi) f_s(\xi)d\xi.$$

Отсюда получим общее решение уравнения из (1)

$$u_s(x) = -\frac{\alpha u_s''(\bar{x})}{\lambda^2}\left(x - \frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda}\right) - \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)}{\lambda} + f_s(\xi)d\xi + .$$
$$+C_1 \operatorname{ch}\lambda x + C_2 \operatorname{sh}\lambda x. \qquad (3)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 определим из граничных условий (1):

$$C_1 = 0\,,\quad C_2 = \frac{\alpha(\lambda - \operatorname{sh}\lambda)}{\lambda^3 \operatorname{sh}\lambda}\cdot u_s''(\bar{x}) + \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi. \qquad (4)$$

Или, с учётом (4) из равенства (3) будем иметь

$$u_s(x) = \left.\frac{\alpha(\lambda - \operatorname{sh}\lambda)}{\lambda^3 \operatorname{sh}\lambda}\cdot \operatorname{sh}\lambda x - \frac{\alpha(\lambda x - \operatorname{sh}\lambda x)}{\lambda^3}\right\} \cdot u_s''(\bar{x} -)$$
$$-\int\limits_0^x \left\{\frac{\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)}{\lambda} f_s(\xi)d\xi + \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi.\right.$$

После упрощения этого выражения получим окончательное представление решения задачи (1)

$$u_s(x) = \frac{\alpha}{\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda}(\operatorname{sh}\lambda x - x\operatorname{sh}\lambda)\cdot u_s''(\bar{x}) + \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

где

$$G_s(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\lambda\xi\operatorname{sh}\lambda(1-x)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\operatorname{sh}\lambda x\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1. \end{cases} \quad \forall s \in \mathscr{S} \qquad (6)$$

Действительно

$$I_s(x) = -\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)}{\lambda} f_s(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_x^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi = \int\limits_x^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x - \operatorname{sh}\lambda\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi.$$

После несложных преобразований будем иметь

$$I_s(x) = \int\limits_x^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda\xi\operatorname{sh}\lambda(1-x)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f_s(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi)d\xi.$$

Из соотношения (5) найдём значение $u_s''(\bar{x})$, для этого продифференцируем (5) дважды по переменной x и положим $x = \bar{x}$. Используя равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi)d\xi\right\} = \lambda^2 \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi)d\xi - f_s(x),$$

(которое непосредственно следует из соотношения (6)) получим

$$u_s''(\bar{x}) = \delta_s^{-1}\left\{\lambda^2 \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\operatorname{sh}\lambda\bar{x}\operatorname{sh}\lambda(1-\bar{x})}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} - \frac{\operatorname{sh}\lambda\bar{x}\operatorname{sh}\lambda(1-\bar{x})}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\right] f_s(\bar{x}) - f_s(\bar{x})\right\} =$$

$$= \delta_s^{-1}\left\{\lambda^2 \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi)d\xi - f_s(\bar{x})\right\}, \quad (7)$$

где

$$\delta_s = 1 - \frac{\alpha\operatorname{sh}\lambda\bar{x}}{\operatorname{sh}\lambda}. \quad (8)$$

Подставляя полученное выражение $u_s''(\bar{x})$, (7) в соотношение (5) окончательно получим

$$\begin{cases} u_s(x) & = \alpha\delta_s^{-1}\left[\int\limits_0^1 G_s(\overline{x},\xi)f_s(\xi)d\xi - \dfrac{1}{\lambda^2}f_s(\overline{x})\right]\cdot \\ & \cdot\left[\dfrac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda)} - x\right] + \int\limits_0^1 G_s(x,\xi)f_s(\xi)d\xi, \quad \forall s \in \mathscr{S}\setminus\{0\}. \end{cases} \tag{9}$$

В случае $s = 0$ выражения для $G_0(x,\xi)$ и δ_0 можно получить непосредственно из (1), или же путём предельного перехода при $\lambda \to 0$ из (6) и (8),

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \\ x(1-\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\delta_0 = 1 - \alpha\bar{x},$$

$$u_0(x) = 6^{-1}\delta_0^{-1}\alpha x(x^2 - 1)f_0(\overline{x}) + \int\limits_0^1 G_0(x,\xi)f_0(\xi)d\xi.$$

Приложение Б

К подразделу 1.4.1. Построение функции Грина.

Рассмотрим ещё один способ построения функции Грина для следующей граничной задачи

$$-u''(x) + \lambda^2 u(x) = f(x)\,, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{10}$$

Умножим обе части уравнения на функцию $\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)$ и проинтегрируем по переменной ξ в пределах от 0 до x

$$\int\limits_0^x \left[-u''(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)\right]d\xi + \lambda^2\int\limits_0^x u(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi = \int\limits_0^x f(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi. \tag{11}$$

Проинтегрируем первое слагаемое равенства (11) дважды по частям, тогда

$$-\int\limits_0^x u''(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi = -u'(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)\big|_0^x - \lambda\int\limits_0^x u'(\xi)\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)d\xi =$$

$$= u'(0)\operatorname{sh}\lambda x - \lambda u(\xi)\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)\big|_0^x - \lambda^2 \int_0^x u(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi =$$

$$= u'(0)\operatorname{sh}\lambda x - \lambda u(x) - \lambda^2 \int_0^x u(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (11) получим

$$u'(0)\operatorname{sh}\lambda x - \lambda u(x) = \int_0^x f(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)d\xi. \tag{12}$$

Положим в этом равенстве $x = 1$ и найдём

$$u'(0) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)}{\operatorname{sh}\lambda} f(\xi)d\xi.$$

Подставляя найденное значение $u'(0)$ в (12) найдём

$$u(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f(\xi)d\xi - \int_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)}{\lambda} f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_0^x \left[\frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} - \frac{\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)\operatorname{sh}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\right] f(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_x^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f(\xi)d\xi.$$

После упрощения подинтегрального выражения будем иметь

$$u(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-x)\operatorname{sh}\lambda\xi}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f(\xi)d\xi + \int_x^1 \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)\operatorname{sh}\lambda x}{\lambda\operatorname{sh}\lambda} f(\xi)d\xi.$$

Отсюда непосредственно заключаем, что искомая функция Грина имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\lambda\xi\operatorname{sh}\lambda(1-x)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\lambda x\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение задачи (10) тогда запишется в виде

$$u(x) = \int_0^1 G(x.\xi)f(\xi)d\xi.$$