# ОСНОВЫ КОНЦЕПЦИИ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ

**ВЛАДИМИР МОСКОВКИН**

ХАРЬКОВ

Современная экономическая теория научно-технического развития и инноваций была создана трудами Й. Шумпетера [1, 2], Н. Д. Кондратьева [3], З. Гриличеса [4, 5], Й. Шмуклера [7, 8], Э. Мэнсфилда [8 — 10], Д. Сахала [11], С. Кузнеца [12], Р. Нельсона [13], П. Нийкампа [14], Г. Менша [15], Дж. Мартино [16], Р. Фостера [17], Б. Твисса [18], Ю. Я. Яковца [19], Д. С. Львова [20], С. Ю. Глазьева [21 — 24], А. Г. Кругликова [25] и др. Наиболее формализованной ее ветвью является концепция диффузии инноваций, в основе которой лежит известное уравнение Ферхюльста[1], описывающее логистический рост и широко используемое при изучении динамики популяций [26 — 29]. Это уравнение встречалось в работе Э. Мэнсфилда [9] и описывало динамику роста количества инновационных фирм. Более широко оно использовано в работах Д. Сахала и его обобщающем труде [11] для описания процесса диффузии нововведений. При этом основная переменная этого уравнения трактовалась им как уровень диффузии нововведения или как некоторая мера внедрения новой техники (технологии, продукта). В дальнейшем данная концепция, построенная на основе логистической модели, была развита в работах [15, 22, 23, 25, 30, 31, 32].

Первые натурные данные, показавшие на логистический (S-образный) характер распространения инноваций, были получены на примере роста удельного веса ферм штата Айова (США), применявших гибридную кукурузу, в период с 1927 по 1941 г. и опубликованы в 1943 г. [33]. Позднее эти исследования были продолжены З. Гриличесом [4, 5]. Они и послужили основой для построения математической логистической модели Э. Мэнсфилдом [9].

Отметим, что в классических работах Й. Шумпетера [1, 2], легших в основу современных формализованных представлений Э. Мэнсфилда [8, 9], Дж. Фишера и Р. Прая [32], Д. Сахала [11] и др., это уравнение еще не встречалось.

В середине 30-х годов XX в., когда появились вышеуказанные работы Й. Шумпетера, русский ученый Н. Д. Кондратьев, работавший в этом же направлении (экономические циклы и волны, инноватика), в письме[2] от 5 сентября 1934 г. к своей жене Е. Д. Кондратьевой, написанном в Суздальском политизоляторе, впервые высказал идею о возможности математического описания процесса динамики трех кумулятивных величин — количества самодеятельного населения, национального капитала и уровня техники — уравнением Ферхюльста (логистической моделью). Одновременно он приводит решение этого уравнения в общем виде. Точно такие же решения были приведены в дальнейшем в работах Э. Мэнсфилда [9] и Д. Сахала [11], причем последний так же, как и Н. Д. Кондратьев, подчеркивал кумулятивный характер развития инновационного процесса, объясняя его эффектами обучения и накопления предшествующего опыта. Ниже приведем логистическую модель в обозначениях Н. Д. Кондратьева [3]:

$$\frac{dy}{dt} = ky(L-y); \qquad (1)$$

$$y(t) = \frac{L}{1 + C\exp(-kLt)}, \qquad (2)$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

Используя аналогии из популяционной экологии, где широко употребляется уравнение Ферхюльста, следует отметить, что параметр $kL$ можно назвать коэффициентом скорости роста диффузии инноваций, а параметр $k$ — коэффициентом внутриинновационной конкуренции[3].

Уравнение (1), в понимании Э. Мэнсфилда [9], нашло свое дальнейшее развитие в работе Дж. Меткалфа [30]. Последний под переменной $y(t)$ понимал количество реципиентов нововведения в момент времени $t$; под параметром $L$ — потенциальное число реципиентов нововведения; под начальным условием $y(t=0) = y_0$ — начальное число субъектов, принявших нововведение.

Автор подробно рассматривает сущность коэффициента $k$, зависящего от свойств нововведения. Данная модель [30] рассматривается С. Ю. Глазьевым и др. [23] как пример неошумпетеровской модели движения экономической системы от одного равновесного состояния к другому вследствие диффузии нововведений. Дальнейшее развитие логистическая модель получила в работе [15], в которой рассматривалась конечная совокупность уравнений для нормированного уровня зрелости $m_i$-того продукта. Построенная модель иллюстрировала синхронизацию жизненных циклов индивидуальных продуктов и механизмы их самореализации в длинной волне экономической конъюнктуры [23].

Логистическая модель в аспекте изучения распространения инноваций и развития инновационной деятельности нашла свое развитие и в работах отечественных исследователей [22, 23, 25, 31].

[1] Это название не используется в экономической теории научно-технического развития и инноваций в отличие от термина «логистическая кривая».

[2] См. тезисы неизданной работы Н. Д. Кондратьева «Модель экономической динамики капиталистического хозяйства» в книге [3]. Эти тезисы были впервые опубликованы в журнале «Экономика и математические методы» (1988.— Т. 24.— Вып. 2).

[3] В популяционной экологии такой коэффициент называется коэффициентом внутривидовой конкуренции.

В ряде работ вместо симметричных S-образных логистических кривых рассматриваются асимметричные S-образные кривые типа функций Гомпертца или логнормального распределения [11, 34, 35]. Существуют также попытки моделирования инновационной деятельности уравнением типа Лотки-Вольтерра, приводящим к периодическим решениям. Так, в работе П. Нийкампа [14] таким уравнением моделировалось взаимодействие инноваций с общественными капитальными вложениями.

Несмотря на то, что история использования логистической модели в рассматриваемой области насчитывает более 60 лет, до сих пор не построено систематической концепции диффузии инноваций на основе логистической модели, не говоря уже о более сложных конкурентных моделях вольтерровского типа и кинетико-диффузионных моделях типа «реакция — диффузия».

Далеко не исчерпаны многие содержательные аналогии, связанные с использованием этой модели в других областях. Ниже данную концепцию будем называть логистической концепцей диффузии инноваций и по аналогии с работой Ю. М. Свирежева [36] введем термин «логистическая инновация»[4]. Рассматриваемая простейшая логистическая концепция диффузии инноваций будет существенно развита нами в двух направлениях:

*1)* в рамках построения традиционных кинетических моделей с сосредоточенными параметрами[5] (кинетические уравнения Ферхюльста и построенные на его основе модели инновационных взаимодействий вольтерровского типа, включая межинновационные конкурентные взаимодействия);

2) в рамках построения новых для данной области исследований кинетико-диффузионных моделей с распределенными параметрами[6].

При рассмотрении первого направления нами будет сделан учет случайных возмущений и времени запаздывания в исходном уравнении Ферхюльста (1), а также построены модели конкуренции нескольких инноваций и взаимодействия производителей, распространителей и потребителей инноваций. По поводу второго направления необходимо сказать следующее. Когда в какой-либо области знаний говорят о диффузии некоторого процесса, то в дальнейшем всегда следует построение формализованной его модели (концепции) на основе уравнения диффузии. К сожалению, этого не произошло при построении концепции диффузии инноваций, которая изначально опиралась исключительно на кинетические уравнения с сосредоточенными параметрами. Но на это были и свои причины, которые мы рассмотрим в соответствующем разделе данной работы.

## 1. КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИННОВАЦИЙ

### 1.1. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ПРОЦЕСС ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ

Рассмотрим устойчивость уравнения Ферхюльста к случайным воздействиям[7]. При моделировании случайная составляющая в виде «белого шума»[8] добавляется аддитивно в уравнение Ферхюльста. Если случайное возмущение мало по сравнению с систематической составляющей, тогда может использоваться квазидетерминированный подход, развитый в работах [28, 29, 38, 39] и позволяющий оценивать среднее время деградации системы. В нашем случае это время можно рассматривать как среднее время полного прекращения инновационного цикла в результате действия «белого шума». Согласно общей теории [38, 39] малые случайные возмущения, вводимые в детерминированную систему, могут расшатать ее и привести к гибели (например, может происходить вымирание популяций [28, 29]), хотя сама система является устойчивой при отсутствии таких возмущений.

Вышеуказанный квазидетерминированный подход позволяет оценить среднее время перехода системы из устойчивого состояния в соседнее неустойчивое. В нашем случае речь идет о переходе из устойчивого состояния $y = L$ в нулевое состояние $y = 0$. Согласно работе [38] главный член математического ожидания времени выхода траектории системы из области притяжения устойчивой точки равен

$$M_y \tau_1^\varepsilon \approx \exp\left(\frac{C_1}{2\varepsilon^2}\right), \qquad (3)$$

где ε — малый параметр, входящий множителем в адитивную стохастическую добавку процесса «белого шума».

Если правая часть невозмущенной динамической системы[9] допускает потенциал $U(y)$[10], тогда искомая величина $C_1$ в предыдущей формуле равняется $C_1 = 4U(0)$ [38, 39]. Сама потенциальная функция для рассмотренного выше уравнения Ферхюльста (1) при условии $U(L) = 0$ примет вид

$$U(y) = -\frac{kL}{2}y^2 + \frac{k}{3}y^3 + \frac{(kL)^3}{6k^2}, \qquad (4)$$

откуда искомое время будет равно

$$M_y \tau_1^\varepsilon \approx \exp\left(\frac{kL^3}{3\varepsilon^2}\right). \qquad (5)$$

При практических количественных оценках параметр можно брать на несколько порядков меньше детерминированной составляющей исходного уравнения.

[4]В данной работе широко используется термин «логистическая популяция», то есть популяция, динамика которой подчиняется уравнению Ферхюльста и описывается логистической кривой.

[5]В таких моделях в качестве независимых переменных рассматривается только время. Они строятся на основе обыкновенных дифференциальных уравнений или их систем.

[6]В таких моделях помимо времени учитываются и пространственные переменные. Эти модели представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных или системы таких уравнений. В качестве аналогов таких моделей мы в дальнейшем будем использовать модели типа «реакция — диффузия» [26, 36, 37].

[7]Очевидно, что реальный инновационный процесс (цикл) развивается в условиях постоянных случайных воздействий.

[8]«Белый шум» представляет собой временную производную от простейшего диффузионного (винеровского) процесса.

[9]В общей теории в отличие от нашего уравнения Ферхюльста (одномерная система) рассматриваются многомерные динамические системы.

[10]По определению потенциальная функция в одномерном случае должна удовлетворять уравнению $\frac{dy}{dt} = -\frac{dU(y)}{dy}$.

Как и следовало ожидать, из последней временной ценки видим, что устойчивость одномерной инновационной системы к малым случайным возмущениям овышается с увеличением коэффициента скорости рота диффузии инноваций *(kL)* и величины устойчивого нновационного уровня *(L)*.

Отметим, что большой статистический материл, накопленный и обобщенный в работе Д. Сахаа [11], позволяет, после предварительного определения различных значений коэффициентов уравнения (1), делать временные оценки устойчивости по формуле (5).

Наряду с рассмотренным квазидетерминированным подходом имеется возможность рассмотрения полностью стохастического уравнения (1), учитывая реальные случайные флуктуации в процессе диффузии инноваций. В этом случае согласно классической работе Г. Хакена [40] уравнение (1) записывается в форме стохастического обыкновенного дифференциального уравнения Ито и далее в форме дифференциального уравнения в частных производных Фоккера — Планка для функции распределения вероятности. Близкая методология в привязке к кинетическим уравнениям типа «рождение — гибель», включая уравнение Ферхюльста, развита в работе Ю. М. Свирежева [36]. Отметим также, что основы и методы теории флуктуаций как одного из разделов статистической механики при анализе роли флуктуаций при спонтанном возникновении вероятностных распределений типа диссипативных структур рассмотрены в классической работе Г. Николиса и И. Пригожина [26].

## 1.2. УЧЕТ ВРЕМЕНИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В УРАВНЕНИИ ФЕРХЮЛЬСТА

В наиболее общем случае можно предположить, что экономические инновации не могут мгновенно реагировать на внешние воздействия. Здесь реакция наступает через некоторый промежуток времени $T$[11], которое называется временем запаздывания. Одна из первых математических моделей в популяционной экологии, учитывающая временные запаздывания, была предложена Хатчинсоном в 1948 г. на основе уравнения Ферхюльста [37, 41].

По аналогии с этой работой можно предположить, что в уравнении (1) сомножитель, учитывающий наличие верхней границы инновационнсго уровня $y = L$, вычисляется в некоторый период, предшествующий данному моменту времени:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left[L - y(t-T)\right]. \qquad (6)$$

Таким образом, если под *y(t)* понимать инновационный уровень в момент времени *t*, то из этого уравнения будет следовать, что достижение стационарного инновационного уровня $y(t - T) = L$ приводит к отсутствию его роста в момент времени *t*. Это уравнение имеет два равновесных состояния: 0 и *L*, причем оказывается, что $y = 0$ линейно неустойчиво при всех $kL > 0$, а $y = L$ линейно устойчиво при $kLT < \pi/2$ и линейно неустойчиво при $kLT > \pi/2$ [41]. Как известно, в уравнении (1) $y = L$ является всегда устойчивой точкой, а $y = 0$ — неустойчивой.

Уравнение (6) с помощью замены переменных $t = Ts_i$, $x(s) = \dfrac{y\left(Ts_i - L\right)}{L}$ приводится к уравнению

$$\frac{dx(s)}{ds} = -\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)x(s-1)\left[1 + x(s)\right], \qquad (7)$$

где $\frac{\pi}{2} + \mu = kLT$ [37, 41].

Задолго до 1948 г., когда появилась работа Хатчинсона [41], два экономиста — Фриш и Холм — выписывали и изучали такое же уравнение в связи с анализом цикличности деловой активности [42]. И только с 1955 г. это уравнение стало усиленно изучаться строгими математическими методами.

Наиболее полное аналитическое исследование этого уравнения было приведено в работе [37], где было показано, что при $\mu > 0$ в данном уравнении происходит бифуркация рождения цикла, при которой возникает устойчивый предельный цикл, соответствующий периодическим колебаниям с малой амплитудой.

В этой же работе было получено приближенное аналитическое решение, описывающее этот предельный цикл. Возвращаясь к старым переменным $y(t) = L[1 + x(s)]$, $s = t/T$, получим из него следующее автоколебательное решение для уравнения (6)

$$y(t) = L\left[1 + \left(\frac{40\mu}{3\pi - 2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\pi t}{2T} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{10\mu}{3\pi - 2}\right)\left(\frac{4}{5}\cos\frac{\pi t}{T} + \frac{2}{5}\sin\frac{\pi t}{T}\right) + O\left(\mu^{\frac{3}{2}}\right)\right], \qquad (8)$$

где $T_0 = 4T\left(1 + \frac{4\mu}{\pi(3\pi - 2)} + O\left(\mu^2\right)\right)$, $0 \le t \le T_0(\mu)$.

Таким образом, приближенный период автоколебаний инновационного процесса равен четырем временам запаздывания. С учетом порядка малости величины $\mu$ из решения (8) видим, что амплитуда автоколебаний является малой величиной, причем эти автоколебания совершаются в окрестности инновационного уровня $y = L$. Из решения (8) эта амплитуда находится в виде

$$A = \left(\frac{40\mu}{3\pi - 2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{16\mu}{3\pi - 2}\right). \qquad (9)$$

Рассмотренная задача является хорошим примером временной самоорганизации, происходящей при переходе бифуркационного параметра из области устойчивости в неустойчивую, с возникновением устойчивых автоколебаний. Любопытен тот факт, что такие автоколебания возникают в результате решения очень простого уравнения Ферхюльста при вводе в него временного запаздывающего фактора. В то же время гораздо более сложные динамические системы второго порядка, рассмотренные в следующем параграфе и построенные на основе вышеуказанного уравнения без учета запаздывания, не допускают таких периодических решений. Известно, что в такого рода динамических системах, рас-

[11] Оно характеризует время восстановления инновационного потенциала.

сматриваемых в химической кинетике, автоколебания (предельные циклы) возможны только при наличии кубических нелинейностей[12], что имеет место для тримолекулярных реакций [26][13].

### 1.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНЫХ МЕЖИННОВАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Дж. Фишер и Р. Прай [32], а также Д. Сахал [11] рассматривали совместную эволюцию двух технологий и процесс замещения одной технологии другой. При этом, например, в работе [11] вводились некоторые меры внедрения новой и использования старой техники, эволюция которых описывалась независимыми уравнениями (1). Эти авторы и их последователи не обратили внимания на возможность учета конкурентных межинновационных взаимодействий в своих моделях. В моделях популяционной экологии межвидовая конкуренция учитывается в виде члена, пропорционального произведению численностей взаимодействующих популяций. Аналогичные члены записываются в уравнениях химической и биохимической кинетики. Таким же способом следует поступать и при построении кинетических моделей конкурентных межинновационных взаимодействий.

Итак, при изучении процесса совместной диффузии двух инноваций на базе уравнения (1) положим в основу следующую систему уравнений:

$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1 \left(L_1 - y_1 - \beta y_2\right)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = k_2 y_2 \left(L_2 - y_2 - \beta y_1\right), \qquad (10)$$

где $k_1\beta$ и $k_2\beta$ — коэффициенты межинновационной конкуренции, $0 < \beta < 1$.

Эти системы уравнений соответствуют модели взаимодействия двух популяций в случае, если коэффициенты их гибели ($d_1$, $d_2$) равны нулю [26]. В случае $\beta = 0$ имеют место две генетически разнородные инновации, не оказывающие никакого влияния друг на друга. Фактически этот случай и был исследован в работе Д. Сахала [11]. При $\beta = 1$ (случай максимального конкурентного взаимодействия между двумя инновациями) имеем две однородные инновации, у которых коэффициенты внутриинновационной и межинновационной конкуренции совпадают. Дальнейшее исследование процесса конкурентного межинновационного взаимодействия проведем на основе фундаментальной работы Г. Николиса и И. Пригожина [26], которая показывает на возможность распространения структурной флуктуации в системах такого типа.

Итак, пусть вначале происходит процесс диффузии (эволюции) первой инновации. Как мы уже знаем, стандартное (стационарное) состояние такой одномерной системы имеет вид $y^0_1 = L_1$. Допустим, что в некоторый момент времени (случайно или неслучайно) появилась вторая инновация, отличная от первой[14]. Ее динамика описывается вторым уравнением системы (10). Как следует из этой системы, эволюция второй инновации может характеризоваться другими значениями $k$ и $L$ базового уравнения (1). В момент появления второй инновации система (10) находится в состоянии $y^0_1 = L, y^0_2 = 0$. Условие положительности действительной части корня характеристического уравнения для вышеуказанного стандартного состояния является критерием распространения структурной флуктуации. Это требование можно рассматривать как условие роста появившейся второй инновации или инновационного (технологического) скачка. В нашем случае это условие имеет вид

$$\left.\frac{\partial G(y_1, y_2)}{\partial y_2}\right|_{y^0_1, y^0_2} > 0,$$

где $\frac{dy_2}{dt} = G(y_1, y_2)$. Подставляя в это условие правую часть второго уравнения системы (10), получим

$$L_2 > \beta L_1. \qquad (11)$$

При выполнении этого условия вторая инновация эволюционирует до своего уровня насыщения, занимая в системе определенную «экономическую нишу». Рассмотрим все возможные варианты в зависимости от значения параметра $\beta$.

Если инновация $y_2$ занимает ту же экономическую нишу, что и $y_1$, то $\beta = 1$ и $y_2$ увеличивается (при условии $L_2 > L_1$) и полностью замещает $y_1$. При этом вся система движется к устойчивому стационарному состоянию $y^0_1 = 0$, $y^0_2 = L_2$, то есть происходит вытеснение $y_1$. Возникающие в дальнейшем инновации с величиной $L$, меньшей, чем у их предшественниц, вытесняются из данной ниши, а если новое значение $L$ больше предыдущего, то такие инновации вытесняют своих предшественниц и сами занимают экономическую нишу. Отсюда следует, что в процессе эволюции эксплуатация каждой ниши непрерывно усиливается и масштабы внедрения (диффузии) инновации возрастают.

Таким образом, по аналогии с работой [11] такая эволюция инновации хорошо согласуется с качественными схемами инновационных циклов и технологических скачков [10, 11, 17 и др.].

Когда $y_2$ и $y_1$ существуют за счет различных ресурсов и новая инновация использует новую нишу, $\beta = 0$ и условие (11) имеет вид $L_2 > 0$. Таким образом, если инновация $y_2$ способна развиваться в данной нише, то она эволюционирует до стационарных размеров $y^0_2 = L_2$ и сосуществует со стационарной инновацией $y^0_1 = L_1$. Здесь также вследствие эволюции эксплуатация среды усиливается. Рассматривая промежуточный случай частичного перекрывания ресурсов, поддерживающих эволюции инноваций, можно прийти к двум разным результатам.

Если в дополнение к условию (11) выполняется неравенство $\beta L_2 > L_1$, тогда $y_2$ замещает $y_1$ и инновационный уровень насыщения снова окажется выше исходного $L_1$. В случае же $L_2 > \beta L_1$ и $\beta L_2 < L_1$ рост $y_2$ происходит на фоне сосуществования с $y_1$ и в конечном (стационар-

[12] Кубические нелинейности в химической кинетике и физике кооперативных процессов (физика плазмы, лазерная физика) реализуют первую нетривиальную нелинейность, приводящую к согласованному поведению [26].

[13] Тримолекулярная модель впервые была предложена в 1968 г. Пригожиным и Лефевером и в дальнейшем была названа брюсселятором в честь всемирно известной брюссельской научной школы, возглавляемой Пригожиным.

[14] В работе [26] рассматривается появление мутантной особи, отличной от своих родителей.

ном) состоянии инновационные уровни имеют вид:

$$y_1^0 = \frac{L_1 - \beta L_2}{1-\beta^2}, \; y_2^0 = \frac{L_2 - \beta L_1}{1-\beta^2}. \quad (12)$$

При этом снова происходит увеличение суммарного инновационного уровня $y_1^0 + y_2^0 = \frac{L_1 + L_2}{1+\beta} > L_1$.

Данный анализ, проделанный на основе работы [26], согласуется с качественными выводами работы Д. Сахала [11], в которой процесс замещения старой технологии новой рассматривается как *неравновесный процесс, состоящий в переходе от одного равновесного уровня, отвечающего принятию существующей техники, к другому равновесному уровню, отвечающему принятию новой техники*. В этой же работе предлагается рассматривать социально-экономические системы как эндогенно управляемые гомеодинамические системы, *способные отыскивать новые пути эволюции через иерархию неустойчивостей*, тем самым процессы социально-экономического изменения интерпретируются как неравновесные.

Этот же анализ согласуется с исследованиями Симмондса [43, 44], который впервые показал, что некоторым видам технологий свойственна ступенчатая форма развития. Это было показано на примерах предприятий нефтехимической промышленности Канады и США. Мощность крупнейших из действующих в США турбин также увеличивалась ступенчато [45]. Аналогичная ситуация наблюдалась и для максимальной пропускной способности сетей электропередач в США в 1950 — 1970 гг.

Все это дало основание Д. Сахалу [11] высказаться в пользу выбора ступенчатой функции для описания роста максимальных характеристик, отражающих достигнутый уровень многих видов технологий. Рассмотренный нами ранее процесс замещения одной технологии другой, более конкурентоспособной, имеет все признаки ступенчатого процесса.

С использованием работы [26], в которой приведены система уравнений для взаимодействия $n$ популяций, система уравнений (6) может быть аналогичным образом распространена для описания взаимодействия $n$ различных инноваций. При $n = 3$ возможно аналитическое исследование динамической системы третьего порядка, так как ее восемь особых точек находятся в явном виде. Линейный анализ устойчивости этих точек громоздок и здесь не приводится. В зависимости от соотношения параметров динамической системы в ней возможны следующие ситуации:

*1)* подавление одной из наиболее конкурентоспособных инноваций двух других (три варианта);

*2)* подавление двумя инновациями третьей (три варианта);

*3)* сосуществование всех трех инноваций (один вариант).

Рассмотренная в настоящем параграфе модель может быть использована при решении задачи конкурентных взаимодействий нескольких (произвольного числа) дистрибьюторских (дилерских) сетей, распространяющих сходный товар (услуги). Данная модель хорошо описывает процессы прироста и отмирания вышеуказанных сетей и устанавливаемые между ними устойчивые количественные отношения.

## 1.4. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ, РАСПРОСТРАНИТЕЛЕЙ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ИННОВАЦИЙ

Рассмотрим совместную динамику фирм — производителей, распространителей и потребителей инноваций на основе кинетических уравнений типа «рождение — гибель», используемых в популяционной экологии [36]:

$$\frac{dG}{dt} = (b_1 - d_1)G, \; \frac{dN}{dt} = (b_2 - d_2)N, \; \frac{dP}{dt} = (b_3 - d_3)P, \quad (13)$$

где $G, N, P$ — соответственно количество фирм — производителей, распространителей и потребителей инноваций; $b_i, d_i$ — функции «рождаемости» и «гибели» фирм.

Отметим, что функции «рождаемости» характеризуют в нашей модели «демонстрационный эффект», известный в инноватике как «переход на сторону победителя».

Используя по аналогии с работой [36] разумные гипотезы относительно линейного вида функций $b_i, d_i$:

$$b_1 = b_{10} + b_{11}N + b_{12}P, \quad d_1 = d_{10} + d_{11}G,$$
$$b_2 = b_{20} + b_{21}G + b_{22}P, \quad d_2 = d_{20} + d_{21}N,$$
$$b_3 = b_{30} + b_{31}G + b_{32}N, \quad d_3 = d_{30} + d_{31}P,$$

получим следующую динамическую систему третьего порядка:

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = (b_{10} - d_{10} - d_{11}G + b_{11}N + b_{12}P)G \\ \frac{dN}{dt} = (b_{20} - d_{20} - d_{21}N + b_{21}G + b_{22}P)N \\ \frac{dP}{dt} = (b_{30} - d_{30} - d_{31}P + b_{31}G + b_{32}N)P. \end{cases} \quad (14)$$

Полученная система уравнений по своей структуре очень близка к модели конкурентных взаимодействий трех инноваций *(см. предыдущий параграф)*. Отличие состоит в том, что если в модели (14) коэффициенты $b_{ij} > 0$ $(i, j \neq 0)$, то в предыдущей модели аналогичные коэффициенты отрицательные. Как и в предыдущем случае, система уравнений (14) имеет восемь особых точек.

Рассмотрим двумерный случай при $P = 0$. В этом случае динамическая система имеет следующие особые точки:

$$(0,0), \left(0, \frac{b_{20} - d_{20}}{d_{21}}\right), \left(\frac{b_{10} - d_{10}}{d_{11}}, 0\right),$$

$$\left(\frac{(b_{10} - d_{10})d_{21} + (b_{20} - d_{20})b_{11}}{d_{11}d_{21} - b_{11}b_{21}}, \frac{(b_{20} - d_{20})d_{11} + (b_{10} - d_{10})b_{21}}{d_{11}d_{21} - b_{11}b_{21}}\right).$$

Нулевая особая точка, как и в системе уравнений (10), является неустойчивым узлом, следующие две особые точки являются седловыми, то есть неустойчивыми (в модели (10) аналогичные две точки в зависимости от соотношения параметров модели являлись либо седловыми, либо устойчивыми узлами). Последняя особая точка является физически реальной при $b_{i0} - d_{i0} > 0$, $d_{11}d_{21} - b_{11}b_{21} > 0$ и представляет собой устойчивый узел.

Линейный анализ особых точек динамической системы третьего порядка (14) показывает на наличие единственной устойчивой особой точки, соответствующей ненулевым значениям фазовых переменных. Таким образом, в отличие от модели конкурентных межинновационных взаимодействий в рассматриваемой модели (14) не могут возникать ситуации подавления одних фазовых переменных другими. Это также следует и из самой структуры системы уравнений (14), в которой увеличение числа фирм какого-либо класса стимулирует увеличение числа фирм других классов.

В первые два уравнения динамической системы (14) можно вводить управляющие факторы ($u_i$) в виде скоростей продуцирования ($u_i > 0$) или ликвидации ($u_i < 0$) инновационных фирм первых двух классов. Это практически может быть осуществлено в рамках инновационного инкубатора или управляемого технополиса, где возможно как искусственное продуцирование, так и ликвидация неэффективных инновационных фирм. После этого можно поставить ряд задач оптимального управления динамической инновационной системой по ее переводу из начального состояния в устойчивое стационарное состояние за минимальное время (задачи оптимального быстродействия) или с учетом оптимизации других факторов. Такие задачи решаются с помощью известного в математике принципа максимума Понтрягина [46, 47].

## 2. КИНЕТИКО-ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИННОВАЦИЙ

П. Нийкамп в своей работе [14] отмечал отсутствие общей теории пространственно-временной динамики инноваций и предлагал искать ее зачатки в работах ученых, исследующих процессы неравновесного роста и упадка городов.

Очевидно, что отсутствие обширных урбанизированных территориальных образований с хорошо развитой инновационной средой препятствовало использованию кинетико-диффузионных моделей при изучении пространственно-временной динамики инноваций. С другой стороны, современный информационный и инновационный взрыв, а также бурное развитие телекоммуникаций способствует достаточно быстрому распространению инноваций в пространстве от инновационных центров к периферии.

Члены, описывающие одномерную или двумерную диффузию, могут вводиться в уравнения (1, 10, 14). В первом случае имеет место одномерный линейный инновационный пояс, во втором — двумерная пространственная инновационная среда (например, крупный мегаполис). В общем случае коэффициенты диффузии в таких моделях могут зависеть от пространственных координат и времени. Возможна постановка краевых задач первого, второго и третьего рода для таких уравнений.

Ниже мы приведем систему одномерных кинетико-диффузионных уравнений для модели (10) с постоянными коэффициентами диффузии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = k_1 y_1 (L_1 - y_1 - \beta y_2) + D_1 \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} = k_2 y_2 (L_2 - y_2 - \beta y_1) + D_2 \dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (15)$$

В работе Ю. М. Свирежева [36] приведена методология по линейному анализу устойчивости стационарных однородных решений уравнений такого типа. Этот анализ позволяет определять условия диффузионной неустойчивости при конкурентном взаимодействии двух инноваций и описывать области устойчивости однородных стационарных решений $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial t} = 0,\ D_i = 0\right)$ системы уравнений (15).

Данный анализ может рассматриваться на конечном отрезке $0 \le x \le l$ при граничных условиях первого (условия Дирихле: $y_i \big|_{x = 0, l} = y_i^0,\ i = 1, 2;\ y_i^0$ — стационарные решения системы уравнений (10)) и второго (условия Неймана: $\dfrac{\partial y_i}{\partial x} \Big|_{x = 0, l} = 0,\ i = 1, 2$) рода.

Отметим, что в вышеуказанной работе [36] приведен соответствующий линейный анализ для пространственного аналога модели «хищник — жертва».

Для системы уравнений (15) можно поставить следующую задачу, следуя классической работе Г. Николиса и И. Пригожина [26]: могут ли две взаимодействующие сопряженные инновации приводить к спонтанному возникновению инновационного градиента $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x} \neq 0\right)$ на отрезке $0 \le x \le l$, что соответствует формированию диссипативной пространственной структуры?

Поскольку нас интересует спонтанное возникновение градиента, то в качестве граничных условий рассматриваются нулевые потоки в крайних точках рассматриваемого отрезка: $\dfrac{\partial y_i}{\partial x} \Big|_{x = 0, l} = 0$

Предположим, как и ранее, что ($y^0_1$, $y^0_2$) является однородным стационарным решением системы уравнений (15). Нас будет интересовать устойчивость этого решения по отношению к неоднородным возмущениям ($y^1_1$, $y^1_2$), которые в первом приближении удовлетворяют линеаризованной системе (15). Эта устойчивость определяется из некоторого характеристического уравнения [26], которое для стационарных особых точек (12) примет вид:

$$\Delta = D_1 D_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \left(k_1 D_2 y_1^0 + k_2 D_1 y_2^0\right)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + k_1 k_2 (L_2 - \beta L_1) y_1^0 = 0, \quad (16)$$

где $m$ — волновое целое число; $y^0_1$, $y^0_2$ — определяются из выражения (12).

Так как все члены этого уравнения положительны ($L_2 - \beta L_1 > 0$, что требуется для положительности $y^0_2$), то $\Delta > 0$ при любых $l$. Следовательно, однородное стационарное решение всегда устойчиво и возможность спонтанного образования инновационного градиента (источника, стока) отсутствует.

В отсутствие конкуренции ($\beta = 0$) система уравнений (15) распадается на два независимых кинетико-диффузионных уравнения, которые могут решаться с помощью стандартных методов математической физики. Можно показать, что решение стационарного уравнения, например при $\dfrac{\partial y_1}{\partial t} = 0$, сводится заменами переменных $\dfrac{dy_1}{dt} = P(x)$, $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dP}{dy_1}\dfrac{dy_1}{dx} = P\dfrac{dP}{dy_1}$, к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy_1}{dx}=\sqrt{\frac{2k_1}{3D_1}y_1^3-\frac{k_1L_1}{D_1}y_1^2+C_1}\text{, где } C_1 \text{ — постоянная}$$

интегрирования.

Стационарные решения одномерных кинетико-диффузионных моделей предлагаем называть *устойчивыми инновационными профилями*.

Имеет смысл постановка следующей краевой задачи для системы уравнений (15). Задаются начальные нулевые условия для распределения плотностей инноваций на отрезке $0 \le x \le l$: $y_i(x,0) = 0$. На границах могут задаваться ненулевые постоянные инновационные потоки, что говорит о продуцировании инноваций с некоторыми постоянными скоростями. В таком виде задача представляет собой диффузионное распространение инноваций от двух центров, лежащих на расстоянии $l$ друг от друга, и их (инноваций) конкурентное взаимодействие.

Следует иметь в виду, что пространственно однородная система может оказаться диссипативно неустойчивой, в результате чего могут возникнуть множественные стационарные состояния или колебания.

При продуцировании произвольного числа инноваций из точечных инновационных центров, расположенных в двумерном пространстве (на плоскости), систему кинетико-диффузионных уравнений можно записать в полярных координатах:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t}=k_i y_i\left[L_i-\sum_j \beta_{ij} y_j\right]+D_i\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial y_i}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y_i}{\partial y^2}\right], \quad (17)$$

φ

где $0 \le \beta_{ij} = \beta_{ji} \le 1$, $\beta_{ii} = 1$, $1 \le i \le n$.

Здесь каждый инновационный центр может продуцировать не более $n$ инноваций. Количество инновационных центров может быть произвольным, равным $m$ (например, $m$ может быть больше, чем $n$). Полярные координаты этих центров могут иметь следующий вид: $(r_1, \varphi_1) = (0,0)$, $(r_2, \varphi_2) = (a_2, 0)$, $(r_3, \varphi_3) = (a_3, \varphi_3)$, ..., $(r_m, \varphi_m) = (a_m, \varphi_m)$. Здесь первый центр помещен в начало координат, второй — расположен на луче $\varphi = 0$. Рассмотрим вопрос задания краевых условий для системы (17). В начальный момент времени может задаваться нулевая инновационная активность $y_i(r, \varphi, 0) = 0$. Можно также задавать в начальный момент времени определенные постоянные инновационные уровни в инновационных центрах. В качестве граничных условий задаются постоянные потоки инноваций в инновационных центрах: $\frac{\partial y_i}{\partial r} = q_i = const$ при $r = a_i$ и всех $0 \le \varphi \le 2\pi$. Кроме того, можно предположить, что $y_i = 0$ при $r \to \infty$ или $y_i = 0$ при некотором достаточно большом радиусе $r = R$.

Задача сложного кинетико-диффузионного взаимодействия $n$ инноваций, продуцируемых $m$ инновационными центрами, может решаться методами численного моделирования. Вместо задания потоков инноваций в инновационных точечных центрах можно вводить точечные источники — дельта функции — в продуцирующие коэффициенты кинетической составляющей системы уравнений (17). Например, кс$^{\Phi}$да точечный источник действует в начале координат, дельта функция $\delta(r)$ вводится сомножителем в параметр $L_r$.

В работе Г. Николиса и И. Пригожина [26] доказана теорема: «Если отдельные стадии двухстадийной реакции с двумя промежуточными продуктами являются моно- или бимолекулярными, то в такой системе не может реализовываться предельный цикл, окружающий неустойчивый узел или фокус». Таким образом, для согласованного во времени поведения необходимы тримолекулярные реакции или процесс более высокого порядка. Следовательно, для дестабилизации термодинамической ветви в уравнении для скоростей химической реакции должна иметься как минимум кубическая нелинейность [26], как это имеет место в «брюсселяторе». То же самое следует иметь в виду при построении более сложных моделей инновационных взаимодействий.

Рассмотрим динамику логистической инновации на бесконечном одномерном интервале $-\infty < x < +\infty$, описываемую, например, первым уравнением системы (15) при $\beta = 0$. Классический результат А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [36, 48] состоит в том, что в таком уравнении доказано существование решения типа бегущей волны $y_1(x + vt)$, распространяющейся влево со скоростью $v$, причем при достаточно больших $t$

$v \to v_0 = 2\sqrt{D_1 k_1 L_1}$ снизу, а форма волны стремится к функции $y^0_1(x)$, являющейся решением уравнения

$$\frac{d^2y_1^0}{dx^2}-\frac{v_0}{D_1}\frac{dy_1^0}{dx}+k_1y_1^0\left(L_1-y_1^0\right)=0$$

с граничными условиями $y^0_1(-\infty) = 0$, $y^0_1(+\infty) = L_1$. Доказано, что имеет место сходимость к этому решению для достаточно широкого класса реальных начальных распределений

$y_1(x,0)$, например для ступеньки $y_1(x,0)=\begin{cases}0, x<0\\ L_1, x\ge 0\end{cases}$.

Отметим, что вышеуказанный результат был получен для обобщенной логистической популяции, локальный закон роста которой описывается уравнением:

$\frac{dN}{dt}=F(N)$, где $F(N)$ удовлетворяет следующим условиям: а) $F(0) = F(K) = 0$, $0 < K < +\infty$; б) $F'(0) = r > 0$; в) $F'(N) < F'(0)$ для $N > 0$ [36].

О форме волны в логистической инновации, не решая кинетико-диффузионного уравнения, можно сказать следующее. При одинаковых коэффициентах диффузии ($D_1$) волна в инновации с большей активностью ($k_1L_1$) распространяется с большей скоростью и имеет более крутой фронт. Чем более полога волна, тем меньше скорость ее распространения (при одинаковых $D_1$). Чем больше коэффициент диффузии, тем быстрее распространяется инновационная волна и тем более пологий фронт она имеет.

Отметим, что для логистической инновации любая локальная вспышка порождает незатухающую волну. Доказано также, что волна Колмогорова — Петровского — Пискунова устойчива по отношению ко всем малым возмущениям в конечной области [36].

В работе [36] введено понятие нерегулярной волны как автомодельной (бегущей) волны в среде с коэффициентом диффузии, зависящем от плотности популяции. В этом случае перенаселение может приводить к скачкообразному увеличению коэффициента диффузии. Аналогичное имеет место при изучении диффузии инноваций. Здесь возможна ситуация, когда инновация начинает распространяться в пространстве при плотностях выше критической ($y_{кр}$), а до этого она является неподвижной. Тогда модель имеет следующий вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=ky\left(L-y\right),\ 0\le y\le y_{кр};$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+ky\left(L-y\right),\ y_{кр}\le y\le y_{max}. \tag{18}$$

Детальный анализ этой модели при обобщенной логистической популяции проделан в работе [36]. В той же работе отмечается практическое отсутствие теории нерегулярных волн.

Отметим, что диффузионные операторы могут вводиться и в систему уравнений (14).

Таким образом, в данной работе удалось существенно продвинуть концепцию диффузии инноваций в сфере развития кинетических моделей с сосредоточенными параметрами *(раздел 1)* и в сфере построения новых для данной области исследования кинетико-диффузионных моделей с распределенными параметрами. Отметим также, что в тезисном виде результаты данного исследования были опубликованы в работе [49].

ЛИТЕРАТУРА


1. **SCHUMPETER J.** BUSINESS CYCLES: A THEORETICAL,HISTORICAL AND STATISTICAL ANALYSIS OF CAPITALIST PROCESS.— NEW YORK: MCGRAW — HILL, 1939.
2. **ЕГО ЖЕ.** ТЕОРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ.— М.,1982.
3. **КОНДРАТЬЕВ Н. Д.** ПРОБЛЕМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ.— М.,1989.
4. **GRILICHES Z.** HIBRID CORN: A EXPLORATION IN THE ECONOMICS OF TECHNOLOGICAL CHANGE // ECONOMETRICA, 1957. 25. P. 501 — 522.
5. **GRILICHES Z.** HYBRID CORN AND THE ECONOMICS OF INNOVATION // SCIENCE. 1960. JULY. P. 275 — 280.
6. **SCHMOOKLER J.** ECONOMIC SOURCES OF INVENTIVE ACTIVITY // JOURNAL OF ECONOMIC HISTORY. 1962. 22. P. 1 — 20.
7. **SCHMOOKLER J.** INVENTION AND ECONOMIC GROQTH.— CAMBRIDGE, MASS.: HARVARD UNIVERSITY PRESS, 1966.
8. **MANSFIELD E.** TECHNICAL CHANGE AND THE RATE OF IMITATION // ECONOMETRICA. 1961. 29. P. 741 — 765.
9. **HIS THE SAME.** INDUSTRIAL RESEARCH AND TECHNOLOGICAL INNOVATION.— NEW YORK, 1968, CH. 7.
10. **ЕГО ЖЕ.** ЭКОНОМИКА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА.— М.,1970.
11. **САХАЛ Д.** ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС: КОНЦЕПЦИИ,МОДЕЛИ,ОЦЕНКИ.— М.,1985.
12. **KUZNETS S.** INNOVATION AND ADJUSTMENTS IN ECONOMIC GROWTH // SWEDISH JOURNAL OF ECONOMICS, 1972. 74. P. 431 — 451.
13. **NELSON R. R., PECK M. J., KALACHECK E. D.** TECHNOLOGY,ECONOMIC GROWTH AND PUBLIC POLICY.— WASHINGTON, D. S., THE BROOKINGS INSTITUTION, 1967. P. 97 — 98.
14. **NIJKAMP P.** NEW TECHNOLOGY AND REGIONAL DEVELOPMENT / THE LONG-WAVE DEBATE.— BERLIN, 1987.
15. **MENCH G. O., WEIDLICH W., HAAG O.** OUTLINE OF A FORMAL THEORY OF LONG-TERM ECONOMIC CYCLES / THE LONG-WAVE DEBATE.— BERLIN. 1987.
16. **МАРТИНО ДЖ.** ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ.— М.,1977.
17. **ФОСТЕР Р.** ОБНОВЛЕНИЕПРОИЗВОДСТВА: АТАКУЮЩИЕ ВЫИГРЫВАЮТ.— М.,1987.
18. **ТВИСС Б.** УПРАВЛЕНИЕНАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИМИ НОВОВВЕДЕНИЯМИ. — М.,1989.
19. **ЯКОВЕЦ Ю. В.** УСКОРЕНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА: ТЕОРИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ.— М., 1988.
20. **ЛЬВОВ Д. С.** ЭФФЕКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИМ РАЗВИТИЕМ.— М.,1990.
21. **ГЛАЗЬЕВ С. Ю.** ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ.— М.,1990.
22. **ЕГО ЖЕ.** ТЕОРИЯ ДОЛГОСРОЧНОГО ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ.— М., 1993.
23. **ГЛАЗЬЕВ С. Ю., МИКЕРИН Г. И., ТЕСЛЯ П. Н., КОВАЛЕВА Г. Д., НИКОЛАЕВ И. Г.** ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ: НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС И СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ.— НОВОСИБИРСК, 1991.
24. **ГЛАЗЬЕВ С. Ю., ЛЬВОВ Д. С., ФЕТИСОВ Г. Г.** ЭВОЛЮЦИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ВОЗМОЖНОСТИ И ГРАНИЦЫ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.— М., 1992.
25. **КРУГЛИКОВ А. Г.** СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ НОВОВВЕДЕНИЙ.— М., 1991.
26. **НИКОЛИС Г., ПРИГОЖИН И.** САМООРГАНИЗАЦИЯ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ. ОТ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР К УПОРЯДОЧЕННОСТИ ЧЕРЕЗ ФЛУКТУАЦИИ.— М., 1979.
27. **MAY R. M.** STABILITY AND COMPLEXITY IN MODEL ECOSYSTEMS.— PRINCETON: PRINCETON UNIV. PRESS, 1973.
28. **СВЕТЛОСАНОВ В. А.** О СТАБИЛЬНОСТИ ЭКОСИСТЕМ // ВЕСТНИК МГУ,СЕР. ГЕОГРАФИЯ.— 1976.— № 4.— С. 12 — 25.
29. **ЕГО ЖЕ.** ТРУДНОСТИ И УСПЕХИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕО- И ЭКОСИСТЕМ // ТАМ ЖЕ.— 1977.— № 4.— С. 13 — 19.
30. **METCALFE I. S.** IMPULSE AND DIFFUSION IN THE STUDY OF TECHNICAL CHANGE // FUTURES, 1981. № 5.
31. **ПОЛТЕРОВИЧ В. М., ХЕНКИН А. А.** ДИФФУЗИЯ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ.— М., 1988.
32. **FISHER I. S., PRY R. H.** A SIMPLE SUBSTITUTION MODEL OF TECHNOLOGICAL CHANGE // TECHNOLOGICAL FORECASTING AND SOCIAL CHANGE. 1971. 3. P. 75 — 88.
33. **RYAN B., GROSS N.** THE DIFFUSION ON HYBRID SEED CORN IN TWO IOWA COMMUNITIES // RURAL SOCIOLOGY, 1943. MARCH.
34. **BAIN A. D.** THE GROWTH OF DEMAND FOR NEW COMMODITIES // JOURNAL OF THE ROYAL STATISTICAL SOCIETY, 1963. A 126. P. 285 — 299.
35. **CHOW G. C.** TECHNOLOGICAL CHANGE AND THE DEMAND FOR COMPUTERS // AMERICAN ECONOMIC REVIEW, 1967. 57. P 1117 — 1130.
36. **СВИРЕЖЕВ Ю. М.** НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ И КАТАСТРОФЫ В ЭКОЛОГИИ.— М., 1987.
37. **ХЭССАРД Б., КАЗАРИНОВ Н., ВЭН И.** ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА.— М., 1985.
38. **ВЕНТЦЕЛЬ А. Д., ФРЕЙДЛИН М. И.** О МАЛЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ // УСПЕХИ МАТЕМ. НАУК.— 1970.— Т. 25.— № 1(151).—С. 3 — 55.
39. **ИХ ЖЕ.** УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ // ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ.— 1972.— Т. 17.— № 2.— С. 281 — 295.
40. **ХАКЕН Г.** СИНЕРГЕТИКА.— М.,1980.
41. **HUTCHINSON G. E.** CIRCULAR CAUSAL SYSTEMS IN ECOLOGY / ANN. N. Y. ACAD. SCI., 1948. № 50. P. 221 — 246.
42. **FRISH R., HOLME H.** THE CHARACTERISTIC SOLUTIOS OF A MIXED DIFFERENCE AND DIFFERENTIAL EQUATION OCCURING IN ECONOMIC DYNAMICS // ECONOMETRICA, 1935. № 3. P. 225 — 239.
43. **SIMMONDS W. H.** STEP-WISE EXPANSION AND PROFITABILITY // CHEMISTRY IN CANADA, 1969. SEPTEMBER. P. 16 — 18.
44. **HIS THE SAME.** THE CANADA — U. S. SCALE PROBLEM // CHEMISTRY IN CANADA, 1969. OCTOBER. P. 39 — 41.
45. **MARTINO J. P, CONVER S. K.** STEP-WISE GROWTH OF ELECTRIC GENERATOR SIZE // TECHNOLOGICAL FORECASTING AND SOCIAL CHANGE, 1972. 3. P. 465 — 471.
46. **ПОНТРЯГИН Л. С.** ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ.— М.,1989.
47. **ПОНТРЯГИН Л. С., БОЛТЯНСКИЙ В. Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р. В., МИЩЕНКО Е. Ф.** МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ.— М., 1961.
48. **КОЛМОГОРОВ А. Н., ПЕТРОВСКИЙ И. Г., ПИСКУНОВ Н. С.** ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИФФУЗИИ, СОЕДИНЕННОЙ С ВОЗРАСТАНИЕМ КОЛИЧЕСТВА ВЕЩЕСТВА, И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ // БЮЛЛ. МГУ, СЕР. А, 1937.— № 6.— С. 1 — 26.
49. **МОСКОВКИН В. М.** К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВ КОНЦЕПЦИИ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ // СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ХАРЬКОВСКОГО ИНСТИТУТА СОЦИАЛЬНОГО ПРОГРЕССА, ВЫП. 2.— Х., 1997.— С. 109 — 112.


Материал предоставлен 16.12.97 г.