

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**ДИФФУЗИОФОРЕЗУМЕРЕННО КРУПНЫХ ВЫСОКОТЕПЛОПРО-
ВОДНЫХ НЕЛЕТУЧИХ КАПЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.03.02 Физика
очной формы обучения, группы 07001310
Стародубцевой Веры Михайловны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

БЕЛГОРОД 2017

Содержание

Введение.	3
I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия	7
II. Решение уравнений теплопроводности и диффузии.....	15
III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления.....	20
IV. Вывод выражения для силы и скорости диффузиофореза умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли сферической формы. Анализ полученных результатов.....	27
Заключение.	32
Литература.	33

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В дипломной работе исследуется поведение высокотеплопроводных умеренно крупных нелетучих капель сферической формы в вязких неоднородных по концентрации бинарных газообразных средах при малых относительных перепадах температуры в их окрестностях. В современной науке и технике, в областях химических технологий, гидрометеорологии, охраны окружающей среды и т.д. широко применяют многофазные системы. Наибольший интерес представляют аэродисперсные системы, состоящие из двух фаз, одна из которых есть вязкая газообразная среда, а вторая – взвешенные в ней частицы, которые называют аэрозолями[1-2]. Аэрозольные частицы могут оказать значительное влияние на протекание физических и физико – химических процессов различного вида в аэродисперсных системах. В связи с этим изучение закономерностей движения отдельных частиц в газообразных средах является важной актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

Для классификации аэрозольных частиц по размерам в бинарных газовых смесях применяют критерий Кнудсена[1]: $Kn = \frac{\lambda}{R}$, где $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ – средняя длина свободного пробега молекул газообразной среды; R – радиус частицы.

Аэрозольные частицы называют крупными, если $Kn \leq 0.01$, умеренно крупными при $0.01 \leq Kn \leq 0.3$ и мелкими при $Kn \gg 1$.

Если на поверхности вещества происходит испарение или конденсация частиц вещества, то такие частицы называются летучими. Нелетучими называются частицы, на поверхности которых фазовый переход не происходит.

Важным понятием при рассмотрении явления диффузиофореза – относительный перепад температуры в окрестности частицы. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней тем-

пературой поверхности частицы T_{is} и температурой вдали от нее T_∞ к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если имеет место следующее неравенство $(T_{is} - T_\infty)/T_\infty \ll 1$, и значительным в противном случае, т.е. $(T_{is} - T_\infty)/T_\infty \sim 0(1)$.

На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частицы могут действовать силы различной природы, вызывающие их упорядоченное движение относительно центра инерции газообразной среды [2]. Так, например, седиментация и электрофорез происходят в поле гравитации и электрической силы. В газообразных средах с неоднородным распределением теплофизических свойств может возникнуть упорядоченного движения частиц обусловлено действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей некомпенсированного импульса аэрозольным частицам молекулами газообразной среды. В частности, движение частиц относительно центра инерции неоднородной по составу газовой смеси при наличии градиентов относительных концентраций ее компонентов называется диффузиофоретическим. Скорость, которую приобретают частицы, когда сила вязкого сопротивления среды уравнивает диффузиофоретическую, называется скоростью диффузиофореза.

Проблема вынужденного переноса аэрозольных частиц под действием градиентов концентраций в газах имеет большое научное и прикладное значение. Явление диффузиофореза практически всегда сопутствует термодинамическим неравновесным системам.

Рассмотрение диффузиофоретического движения аэрозольных частиц является достаточно сложной задачей. Это связано с тем, что в газе движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями (обусловленные непосредственным взаимодействием молекул газообразной среды с поверхностью частицы), так и с объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и диффузионного полей.

Одна из задач, возникающая при практических приложениях вызвана тем, что многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и в природе, имеют различную форму, например, сферическую. В связи с этим возникает как теоретический, так и практический интерес рассмотрение диффузиофореза умеренно крупных высокотеплопроводных нелетучих капель сферической формы.

В дипломной работе рассматривается влияние нагрева поверхности на диффузиофорез умеренно крупных высокотеплопроводных нелетучих капель сферической формы при малых относительных перепадах температуры. В этом случае коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) можно считать зависящими от средней температуры поверхности капли, а газ рассматривать как несжимаемую среду.

Тема исследования – диффузиофорез умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Объектом исследования изучение явления диффузиофореза в газообразной среде.

Предметом исследования: влияние нагрева поверхности умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли на ее диффузиофорез при малых относительных перепадах.

Цель исследования – получить аналитические выражения для диффузиофоретической силы и скорости умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие **задачи исследования:**

- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в сферической системе координат;

- решить уравнения теплопроводности, диффузии и систему уравнений Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями;
- получить аналитические выражения для диффузионной скорости и скорости умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности;
- провести качественный анализ влияния средней температуры поверхности частицы незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси на диффузионную скорость умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли.

Научная новизна исследования. В дипломной работе изучается влияние средней температуры поверхности частицы незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси на диффузионную скорость умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его материалы и выводы дополняют и углубляют исследования по данной проблеме и могут быть использованы при разработке общих курсов и факультативов, например, по экологическим вопросам для школ, гимназий и лицеев.

Апробация исследования. По теме дипломной работы было сделано выступление на заседании кафедры теоретической и математической физики.

Структура работы.

Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Глава I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим задачу о диффузиофореze умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли сферической формы радиуса R , взвешенную в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси с температурой T_e , плотностью ρ_e , теплопроводностью λ_e и вязкостью μ_e . Обозначим через T_{is} среднюю температуру ее поверхности. До средней температуры поверхности частицы T_{is} незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси можно нагреть, например, в поле лазерного излучения. При этом распределение температуры вдоль поверхности частицы близко к однородному, если коэффициент теплопроводности частицы значительно больше коэффициента теплопроводности газа или длина волны излучения много больше радиуса частицы, т.е. частица считается высокотеплопроводной. Это означает, что тепловое скольжение вдоль поверхности нелетучей капли отсутствует [1].

С помощью внешних источников в объеме бинарной газовой смеси поддерживается постоянный малый градиент относительных концентраций ее компонентов, которые мы обозначим, соответственно, $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$. Здесь $C_1 = n_1/n_e$, $C_2 = n_2/n_e$, $C_1 + C_2 = 1$, $n_e = n_1 + n_2$ – полное количество молекул в единице объема, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ – плотность бинарной газовой смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, n_1, m_1 и n_2, m_2 – соответственно, концентрация и масса молекул первого и второго компонента бинарной газовой смеси. Поскольку $C_1 + C_2 = 1$, то $\nabla C_1 = -\nabla C_2$ и, следовательно, для описания полей относительных концентраций бинарной газовой смеси достаточно описать одну из компонент смеси, например, первую компоненту C_1 (решить уравнение диффузии с соответствующими граничными условиями).

Заданный вдали от нелетучей капли (на бесконечности) малый постоянный градиент относительной концентрации $\nabla C_{1\infty}$ вызывает неоднородное распределение концентрации в окрестности капли, что приводит к ее диффузиофоретическому движению. Индексы «e» и «i» здесь и далее будем относить к газу и капле, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли равной T_{is} , а индексом « ∞ » – обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду в отсутствии внешнего градиента концентрации $\nabla C_{1\infty}$.

Остановимся на некоторых аспектах при описании диффузиофореза высокотеплопроводной нелетучей капли:

1. характерные значения времен установления распределения полей концентраций, температуры и скорости течения в среде малы по сравнению с характерным временем ее нагрева. Будем считать, что в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процессы теплопереноса и массопереноса в системе капля – газ протекают квазистационарно;
2. предполагается, что примеси в капле отсутствуют, т.е. она образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

При теоретическом описании явления диффузиофореза будем предполагать, что капля в процессе движения сохраняет сферическую форму. Это справедливо, если силы внешнего давления малы по сравнению с давлением, вызванным межфазным (жидкость – газ) поверхностным натяжением. Тогда справедливо условие $\sigma/R \gg \mu_e U/R$. Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела капля – бинарная газовая смесь, U – абсолютная величина скорости газовой смеси относительно капли.

Динамика высокотеплопроводной умеренно крупной капли происходит при малых числах Рейнольдса и Пекле (тепловом и диффузионном) и при

малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т.е. $(T_{is} - T_{\infty}) / T_{\infty} \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, диффузии, динамической и кинематической вязкости можно считать зависящими от средней температуры поверхности капли - постоянными величинами. Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения газовой динамики с соответствующими граничными условиями.

Движение капли удобно описывать в сферической системе координат r, θ, φ , с началом в центре капли; вектор $\nabla C_{1\infty}$ направлен вдоль полярной оси $z = r \cos \theta$. В системе отсчета, связанной с центром масс капли, задача сводится к стационарному обтеканию капли плоскопараллельным потоком, скорость которого равна U_{∞} (см. рис.1.).

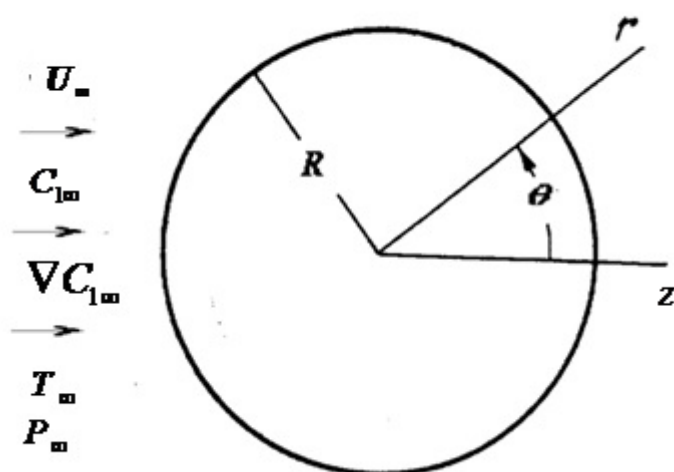


Рис. 1.

Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком скорости диффузиофореза ($U_{dh} = -U_{\infty}$, U_{dh} - скорость диффузиофореза).

При введенных выше предположениях состояние газообразной смеси описывается в рамках гидродинамического анализа в квазистационарном приближении - векторное поле скорости U_e , распределения давления P_e , от-

носительной концентрации C_{1e} летучего компонента в бинарной газовой смеси, скалярные поля температур T_e , T_i вне и внутри частицы считаются как установившиеся в любой момент времени и удовлетворяют осесимметричным уравнениям Стокса, непрерывности и Лапласа [3,4]:

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla P_e, \quad \text{div } \mathbf{U}_e = 0, \quad (1)$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{U}_i = \nabla P_i, \quad \text{div } \mathbf{U}_i = 0, \quad (2)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_i = 0, \quad \Delta C_1 = 0. \quad (3)$$

На поверхности нелетучей аэрозольной крупной частицы ($r = R$) учитываются:

– непроницаемость поверхности капли для радиального потока второго компонента бинарной газовой смеси

$$n_2 U_r^e + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r} - Kn C_V^T \frac{n_2 v_e}{RT_e} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \\ + Kn C_V^D \frac{n_2 D_{12}}{R} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (4)$$

– непроницаемость поверхности капли для радиального потока первого компонента бинарной газовой смеси

$$n_1 U_r^e - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r} - Kn C_V^T \frac{n_1 v_e}{RT_e} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) - \\ - Kn C_V^D \frac{n_1 D_{12}}{R} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5)$$

Здесь в (4) – (5) $n_2 U_r^e, n_1 U_r^e$ – радиальные конвективные потоки соответствующих компонентов, а $D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r}, D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r}$ – радиальные диффузионные потоки.

– непроницаемость поверхности капли для радиальной компоненты массовой скорости внутри капли

$$U_r^i = 0, \quad (6)$$

– разность касательных составляющих скоростей внешней и внутренних сред

$$U_\theta^e - U_\theta^i = C_m KnR \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} \right) + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \left\{ \left[1 + Kn(\beta'_{RC} + \beta^B_{RC}) \right] \frac{\partial C_1}{\partial \theta} + Kn(\beta_{RC} - \beta^B_{RC}) R \frac{\partial^2 C_1}{\partial r \partial \theta} \right\}, \quad (7)$$

– скачок температуры и непрерывность радиального потока тепла с учетом тепла, идущего на излучение

$$T_e - T_i = K_T^T KnR \frac{\partial T_e}{\partial r} + K_T^n KnRT_e \frac{\partial C_1}{\partial r}, \quad (8)$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} - KnC_q^T \frac{\lambda_e}{R} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) - \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_\infty^4) - KnC_q^D \frac{P_e D_{12}}{R} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (9)$$

– непрерывность касательных составляющих тензора напряжений на поверхности капли

$$\mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right) = \mu_i \left(\frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^i}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^i}{r} \right). \quad (10)$$

Граничные условия на поверхности нелетучей капли (4) – (10) записаны с учётом всех эффектов, линейных по числу Кнудсена в случае высоко-теплопроводной умеренно крупной нелетучей капли. Входящие в граничные условия газокINETические коэффициенты K_{DS} , C_m - коэффициенты диффузионного и изотермического скольжений; β'_{RC} , β_{RC} , β^B_{RC} - поправки на кривизну и барнеттовское скольжение, C_q^T , C_V^T , C_q^D , C_V^D - коэффициенты потоков тепла, концентрации и среднемассового переноса, растекающихся в слое Кнудсена; коэффициент K_T^T , K_T^n - коэффициент скачка температуры и кон-

центрации. Выражения для газокинетических коэффициентов приведены в [1].

Рассмотрим граничные условия вдали от умеренно крупной капли, т.е. при $r \rightarrow \infty$:

– в качестве граничных условий для радиальной U_r^e и тангенциальной U_θ^e составляющих массовой скорости U_e можно записать:

$$U_r^e(r, \theta) = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta^e(r, \theta) = -U_\infty \sin \theta, \quad (11)$$

– для температуры T_e , давления P_e и относительной концентрации C_1 справедливы условия:

$$T_e = T_\infty, \quad P_e = P_\infty, \quad C_1 = C_{1\infty} + \nabla C_{1\infty} / r \cos \theta, \quad (12)$$

Учтем конечность температуры, скорости и давления в центре капли, при $r \rightarrow 0$:

$$T_i \neq \infty, \quad P_i \neq \infty, \quad |U_i| \neq \infty. \quad (13)$$

В приведенных выше уравнениях газовой динамики и граничных условиях для умеренно крупной частицы введены следующие обозначения: σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ_1 – интегральная степень черноты; D_{12} – коэффициент взаимной диффузии; λ_e, λ_i – коэффициенты теплопроводности газообразной среды и капли; $U_\infty = |U_\infty|$ – величина скорости набегающего потока вдали от частицы ($\mathbf{U}_\infty \parallel OZ$).

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты ρ_e, μ_e, λ_e и сохраняющиеся в процессе движения сферической частицы величины –

$R, T_\infty, \nabla C_{1\infty}$. Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: $\varepsilon = R / \nabla C_{1\infty} \ll 1$, где $\nabla C_{1\infty} = \left| \frac{\Delta C_1}{L} \right|$ – средний градиент концентрации во внешней к капле среде, равный отношению перепада концентрации ΔC_1 на некотором отрезке L к величине этого отрезка. Условие $\varepsilon = R / \nabla C_{1\infty} \ll 1$ всегда справедливо с огромным запасом, т.к. градиент относительной концентрации в реальных системах не может превышать $10^3 \text{ м}^{-1} \div 10^4 \text{ м}^{-1}$. В свою очередь, для умеренно крупных капель в атмосферных условиях, $2 \cdot 10^{-6} \text{ м} \leq R \leq 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, получаем $\varepsilon = R / \nabla C_{1\infty} \sim 10^{-3}$, числа Рейнольдса $Re = (\rho_e U_\infty R) / \mu_e \ll 1$ и Пекле – тепловое $Pe_T = (c_p U_\infty R \rho_e) / \lambda_e \ll 1$ и диффузионное $Pe_D = (U_\infty R) / D_{12} \ll 1$, где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Обезразмерим уравнения и граничные условия следующим образом:

$$V_e = U_e / U_\infty, t_k = T_k / T_\infty \quad (k = e, i), p_e = P_e / P_\infty.$$

При $\varepsilon \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений газовой динамики можно использовать метод теории возмущения, т.е.

$$V_e = V_e^{(0)} + \varepsilon V_e^{(1)} + \dots, p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots, \\ C_1 = C_1^{(0)} + \varepsilon C_1^{(1)} + \dots (14)$$

С учетом этого, при нахождении силы и скорости диффузиофореза умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли мы ограничимся первым приближением.

При нахождении силы и скорости диффузиофореза мы ограничимся поправками первого порядка малости по ε .

Общая сила, действующая на частицу в сферической системе координат, определяется по формуле [3]:

$$F = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Здесь σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в сферической системе ко-

ординат [3], $\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^e}{\partial r}$, $\sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right)$.

Глава II. Решение уравнений теплопроводности и диффузии

Чтобы найти силу и скорость диффузиофореза необходимо знать поле температуры и распределение концентрации в окрестности аэрозольной частицы. Для этого необходимо решить уравнения (3). В общем случае стационарное уравнение теплопереноса имеет следующий вид [3]:

$$\rho_e c_p (U_e \cdot \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e. \quad (16)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Здесь слева – конвективный перенос тепла (за счет движения бинарной газовой смеси), а справа – перенос тепла, обусловленный теплопроводности.

Линеаризуем это уравнение следующим образом. Скорость диффузиофореза равна взятой с обратным знаком скорости центра инерции среды на большом расстоянии от частицы, поэтому

$$|U_e| \sim |K_{DS} D_{12} \left| \frac{\Delta C_1}{L} \right| \sim |K_{DS} D_{12} |\nabla C_{1\infty}|. \quad (17)$$

Отношение правой части уравнения (16) к его левой части равно

$$\left| \frac{c_p \rho_e (U_e \cdot \nabla T_e)}{\lambda_e \Delta T_e} \right| \sim \frac{K_{DS} D_{12}}{\chi_e} R / \nabla C_{1\infty} /, \quad (18)$$

где $\chi_e = \frac{\lambda_e}{c_p \rho_e}$ – коэффициент температуропроводности.

Для большинства газов величина $\frac{K_{DS} D_{12}}{\chi_e}$ всегда меньше единицы. По-

этому величина, стоящая в (18), всегда меньше $R / \nabla C_{1\infty} /$. Следовательно, в

уравнении (16) можно пренебречь правой нелинейной частью, и мы получаем уравнения (3), т.е.

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_i = 0. \quad (19)$$

Чтобы найти распределение концентрации в окрестности аэрозольной частицы необходимо решить уравнение конвективной диффузии:

$$(U_e \cdot \nabla) C_1 = D_{12} \Delta C_1 \quad (20)$$

где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии.

По аналогии линеаризуем это уравнение и получаем:

$$\Delta C_1 = 0. \quad (21)$$

Таким образом, рассматривая задачу о диффузиофорезе умеренно крупной нелетучей высокотеплопроводной капли сферической формы радиуса R , температура внутри и вне его и концентрация первого компонента бинарной газовой смеси подчиняются уравнениям Лапласа:

$$\Delta T_i = 0 \quad r \leq R \quad (22)$$

$$\Delta T_e = 0, \Delta C_1 = 0 \quad r \geq R \quad (23)$$

Эта система уравнений решается с граничными условиями (8), (9), (12), (13).

Уравнения (23) решаются в сферической системе координат методом разделения переменных. Общее решение уравнения Лапласа в сферической системе координат имеет известный вид (см., например, [5–7]) и таким образом, мы получаем:

$$t_e(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_n}{y^{n+1}} + A_n y^n \right) P_n(\cos \theta), \quad y = r/R,$$

$$t_i(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{D_n}{y^{n+1}} + B_n y^n \right) P_n(\cos \theta),$$

$$C_1(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{y^{n+1}} + N_n y^n \right) P_n(\cos \theta),$$

Здесь $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра, $A_n, B_n, M_n, N_n, \Gamma_n, D_n$ – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (4) – (13).

Вид граничных условий вдали от нелетучей капли ($y \rightarrow \infty$) показывают, что: $A_0 = 1, A_n = 0 (n \geq 1), N_0 = C_{1\infty}, N_1 = R|\nabla C_{1\infty}|, N_n = 0 (n \geq 2)$. Из граничного условия конечности температуры при $y \rightarrow 0$ имеем: $D_n = 0 (n \geq 0)$.

Таким образом, имеем следующие выражения для распределения полей температуры и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли, удовлетворяющие граничным условиям при $y \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow 0$:

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n}{y^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

$$t_i(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^n P_n(\cos \theta),$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \frac{M_0}{y} + \cos \theta \varepsilon \left(\frac{M_1}{y^2} + y \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M_n}{y^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

и оставшиеся неизвестные постоянные интегрирования определяем из граничных условий на поверхности нелетучей капли, которые имеют следующий вид: $M_0 = 0$, $M_1 = 1/2$, $M_n = 0$ ($n \geq 2$), $\Gamma_n = 0$ ($n \geq 1$), $B_n = 0$ ($n \geq 1$).

Из граничным условий на поверхности умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли определяется средняя температура ее поверхности T_{is} . Средняя относительная температура $T_{eS} = T_{\infty} t_{eS}$ связана со средней температурой поверхности умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли $T_{iS} = T_{\infty} t_{iS}$ соотношением (24):

$$\begin{cases} t_{eS} - t_{iS} = -KnK_T^T (t_{eS} - 1) \\ \frac{\lambda_e}{\lambda_i} (t_{eS} - 1) = \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_{\infty}^3}{\lambda_i} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (24)$$

в котором $t_{eS} = 1 + \Gamma_0$, $t_{iS} = B_0$.

При нахождении постоянных интегрирования из граничных условий мы воспользовались свойствами полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (x = \cos \theta)$$

и их ортогональностью:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

Таким образом, мы получили следующие выражения для распределения полей температур и относительной концентрации первого компонента в бинарной газовой смеси в окрестности умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли, удовлетворяющие граничным условиям (8), (9), (12) и (13):

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{t_{es} - 1}{y}, \quad t_i(y, \theta) = t_{is}, \quad (25)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \cos \theta \varepsilon \left(\frac{1}{2y^2} + y \right). \quad (26)$$

Глава III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давлений

Уравнения гидродинамики, описывающие течение газа в окрестности умеренно крупной нелетучей капли (уравнение Навье-Стокса и непрерывности) имеют вид [3,4]:

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e + \rho_e (U_e \cdot \nabla) U_e, \quad \text{div}(\rho_e U_e) = 0 \quad \text{при } r > R, \quad (27)$$

и

$$\mu_i \Delta U_i = \nabla P_i + \rho_i (U_i \cdot \nabla) U_i, \quad \text{div}(\rho_i U_i) = 0 \quad \text{при } r < R. \quad (28)$$

Движение частицы происходит при числах Рейнольдса много меньших единицы. Это позволяет линеаризовать уравнения гидродинамики.

Градиент скорости возникает в связи с возмущением среды из-за присутствия частицы, поэтому справедливо условие

$$|\nabla U_e| \sim U_e / R,$$

по аналогии

$$|\Delta U_e| \sim U_e / R^2.$$

Однако, как мы показывали выше, скорость аэрозольной частицы в поле градиента концентрации по порядку величины равна:

$$|U_e| \sim |K_{DS} D_{12} \left| \frac{\Delta C_1}{L} \right| \sim |K_{DS} D_{12} |\nabla C_{1\infty}|.$$

Скорость диффузиофореза равна, взятой с обратным знаком, скорости центра инерции среды на большом расстоянии от частицы, поэтому справедливы следующие условия

$$|\nabla U_e| \sim U_e / R \sim \frac{K_{DS} D_{12}}{R} |\nabla C_{1\infty}|, |\Delta U_e| \sim U_e / R^2 \sim \frac{K_{DS}}{R^2} D_{12} |\nabla C_{1\infty}|. (29)$$

Найдем отношение конвективного члена к вязкому в уравнении Навье-Стокса и, учитывая (29), имеем:

$$\frac{\rho_e (U_e \cdot \nabla) U_e}{\mu_e \Delta U_e} \sim R / \nabla C_{1\infty} \neq \varepsilon \ll 1.$$

При выполнении этого условия нелинейный член значительно меньше линейного и его рассмотрением можно пренебречь. Таким образом, в линеаризованном виде уравнение Навье-Стокса запишется так:

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e. (30)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения непрерывности. По правилу векторного дифференцирования левую часть этого уравнения можно записать в виде:

$$\operatorname{div}(\rho_e U_e) = U_e \nabla \rho_e + \rho_e \nabla U_e. (31)$$

Поскольку мы рассматриваем диффузиофорез при малых относительных перепадах температуры, то плотность можно считать постоянной величи-

нойне зависящей от температуры окружающей жидкости. Учитывая это, имеем следующей вид уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} U_e = 0. \quad (32)$$

Поэтому вместо уравнений (27) – (28) мы можем использовать линейризованное уравнение Навье-Стокса (система уравнений Стокса):

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e, \quad \operatorname{div} U_e = 0 \text{ при } r > R, \quad (33)$$

и

$$\mu_i \Delta U_i = \nabla P_i, \quad \operatorname{div} U_i = 0 \text{ при } r < R. \quad (34)$$

Найдем сначала решение уравнения (33). В сферической системе координат уравнение непрерывности и линейризованного уравнение Навье-Стокса (33) имеют вид[3]:

$$\frac{\partial U_r^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2U_r^e}{r} + \frac{U_\theta^e}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (35a)$$

$$\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial P_e}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU_r^e)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} U_r^e - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} U_\theta^e, \quad (35b)$$

$$\frac{1}{\mu_e r} \frac{\partial P_e}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU_\theta^e)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta^e}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (35b)$$

и аналогично запишется система (34).

Исходя из граничных условий на бесконечности для компонент массовой скорости, решение для радиальной и тангенциальной компонент массовой скорости будем искать в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [3,4]:

$$U_r^e(y, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) P_n(\cos \theta), \quad (36a)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) G_n(\cos \theta), \quad (36б)$$

где $P_n(\cos \theta)$ и $G_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра и Гегенбауэра соответственно [5–7] и $y = r/R$ – обезразмеренная радиальная координата.

В разложениях (36a) и (36б) ограничимся только первыми членами, т.к. только они вносят вклад в силу, действующую на частицу, исходя из граничных условий вдали от нелетучей капли.

Рассмотрим решение системы уравнений Стокса для случая $r > R$. Подставляя (36a) и (36б) в уравнение непрерывности, получаем связь между функциями $\varphi(y)$ и $f(y)$:

$$\varphi(y) = \frac{y}{2} \frac{df(y)}{dy} + f(y). \quad (37)$$

С учетом (36a), (36б) и (37) линейризованное по скорости уравнение Навье-Стокса для случая $r > R$ принимает вид:

$$\frac{\partial P_e}{\partial y} = \mu_e \frac{\cos \theta}{R} \left\{ \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \frac{2df(y)}{ydy} - \frac{4(f(y) - \varphi(y))}{y^2} \right\}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial \theta} = \mu_e \frac{\sin \theta}{R} \left\{ -y \frac{d^2 \varphi(y)}{dy^2} - \frac{2d\varphi(y)}{dy} - \frac{2(\varphi(y) - f(y))}{y} \right\}. \quad (39)$$

Продифференцировав (38) по углу θ , а (39) по узатем, вычитая из первого второе и учитывая (37), получаем следующее уравнение для функции $f(y)$:

$$y^3 \frac{d^4 f}{dy^4} + 8y^2 \frac{d^3 f}{dy^3} + 8y \frac{d^2 f}{dy^2} - 8 \frac{df}{dy} = 0. \quad (40)$$

Это дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами и его решение имеет вид (41)[3]:

$$f = \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} + C + D y^2. \quad (41)$$

где C, D, A_1 и A_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий для компонент массовой скорости.

Таким образом, получаем общее решение нашей системы уравнений при $r > R$ имеет вид

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta \left(C + D y^2 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right) \quad (42)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta \left(C + 2D y^2 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right) \quad (43)$$

Из граничного условия на бесконечности (11), имеем $C = 1$, $D = 0$ и, следовательно

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta \left(1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right) \quad (44)$$

Подставляя (44) в (39) получаем следующее выражение и для давления

$$P_e(y, \theta) = P_\infty + \frac{\mu_e U_\infty}{y^2 R} A_2 \cos \theta. \quad (45)$$

Входящие в (44) - (45) постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяются из граничных условий на поверхности умеренно крупной нелетучей капли.

Аналогично решаются уравнения (34). В конечном результате мы должны поставить другие постоянные интегрирования и учесть конечность физических величин в центре нелетучей капли.

Таким образом, в приближении Стокса нами получены выражения для компонент массовой скорости и давления вне и внутри умеренно крупной нелетучей высокотеплопроводной капли, и они имеют следующий вид:

$$U_r^e(y, \theta) = \frac{d_0}{y} + U_\infty \cos \theta \left(1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right),$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right), \quad r > R$$

$$P_e(y, \theta) = P_\infty + \frac{\mu_e U_\infty}{y^2 R} A_2 \cos \theta.$$

и

$$U_r^i(y, \theta) = \frac{d_1}{y} + U_\infty \cos \theta (A_4 + A_5 y^2),$$

$$U_\theta^i(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_4 + 2A_5 y^2), \quad r < R$$

$$P_i(y, \theta) = P_{i0} + 10 \frac{\mu_i U_\infty}{R} A_5 y^2 \cos \theta$$

Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости диффузиофореза умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли сферической формы. Анализ полученных результатов

В главе 3 в приближении Стокса нами были получены выражения для полей скорости и давления в окрестности умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли сферической формы.

– вне нелетучей капли ($r > R$):

$$U_r^e(y, \theta) = \frac{d_0}{y} + U_\infty \cos \theta \left(1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right),$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right), \quad (46)$$

$$P_e(y, \theta) = P_\infty + \frac{\mu_e U_\infty}{y^2 R} A_2 \cos \theta.$$

и внутри нелетучей капли ($r < R$):

$$U_r^i(y, \theta) = \frac{d_1}{y} + U_\infty \cos \theta (A_4 + A_5 y^2),$$

$$U_\theta^i(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_4 + 2A_5 y^2), \quad (47)$$

$$P_i(y, \theta) = P_{i0} + 10 \frac{\mu_i U_\infty}{R} A_5 y^2 \cos \theta.$$

Общая сила, действующая со стороны газа на умеренно крупную высокотеплопроводную нелетучую каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы [3]:

$$F = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (48)$$

Здесь σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в сферической системе коор-

$$\text{динат [3], } \sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial V_r^e}{\partial r}, \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial V_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^e}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^e}{r} \right)$$

Подставляя выражения (46) в (48) и после интегрирования получаем:

$$\mathbf{F} = -4\pi R U_\infty \mu_e A_2 \mathbf{n}_z, \quad (49)$$

где \mathbf{n}_z – единичный вектор в направлении оси z.

Постоянная интегрирования A_2 определяется из граничных условий на поверхности капли и она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} A_2 = & -\frac{3}{2} \frac{1 + \frac{2\mu_e^{(s)}}{3\mu_i^{(s)}}}{1 + \frac{\mu_e^{(s)}}{\mu_i^{(s)}}} + \frac{gpad C_{1\infty}}{U_\infty \left(1 + \frac{\mu_e^{(s)}}{\mu_i^{(s)}} + 3C_m Kn \right)} \times \\ & \times \left\{ K_{DS} D_{12}^{(s)} \left[1 + Kn \left(\beta'_{RC} + \beta_{RC} + \frac{1 - 2KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2}}{2 \left(1 + KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2} \right)} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\beta'_{RC} - 2\beta_{RC} + 3\beta_{RC}^B \right) \right] - 3 \frac{KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2}}{1 + KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2}} D_{12}^{(s)} \frac{n_e^2}{4\rho_e^{(s)}} \left(\frac{m_1}{n_2} - \frac{m_2}{n_1} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(1 + 6C_m Kn + 2 \frac{\mu_e^{(s)}}{\mu_i^{(s)}} \right) \right\}, \quad C_V^{*D} = C_V^D / K_{DS}. \end{aligned} \quad (50)$$

В формуле (50) индексом "s" – обозначены значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности нелетучей умеренно круп-

ной высокотеплопроводной капли, равной T_{is} , которая определяется из решения системы уравнений (24):

$$\begin{cases} t_{eS} - t_{iS} = -KnK_T^T(t_{eS} - 1) \\ \frac{\lambda_e}{\lambda_i}(t_{eS} - 1) = \frac{\sigma_0\sigma_1RT_\infty^3}{\lambda_i}(t_{iS}^4 - 1) \end{cases}$$

Подставляя A_2 в выражение (49), получаем, что общая сила, действующая на умеренно крупную высокотеплопроводную нелетучую каплю аддитивно складывается из силы вязкого сопротивления среды F_μ и диффузионной силы F_{dh} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{dh}, \quad (51)$$

$$\text{где } \mathbf{F}_\mu = 6\pi R \mu_e^{(S)} U_\infty f_\mu^{(S)} \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_{dh} = 6\pi R \mu_e^{(S)} f_{dh} \text{grad } C_{1\infty}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} f_\mu &= \frac{1 + \frac{2\mu_e^{(S)}}{3\mu_i^{(S)}}}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}}, \quad f_{dh} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}} + 3C_m Kn} \times \\ &\times \left\{ K_{DS} D_{12}^{(S)} \left[1 + Kn \left(\beta'_{RC} + \beta_{RC} + \frac{1 - 2KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2}}{2 \left(1 + KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2} \right)} \right) \right] \right. \\ &\times \left. \left(\beta'_{RC} - 2\beta_{RC} + 3\beta_{RC}^E \right) \right] - 3 \frac{KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2}}{1 + KnC_V^{*D} \frac{n_1 n_2}{n_e^2}} D_{12}^{(S)} \frac{n_e^2}{4\rho_e^{(S)}} \left(\frac{m_1}{n_2} - \frac{m_2}{n_1} \right) \times \end{aligned} \quad (53)$$

$$\times \left(1 + 6C_m Kn + 2 \frac{\mu_e^{(s)}}{\mu_i^{(s)}} \right) \Bigg\}, \quad C_V^{*D} = C_V^D / K_{DS}.$$

Приравнивая полную силу F к нулю, получаем выражение для диффузиофоретической скорости U_{dh} ($U_{dh} = -U_\infty$)

$$U_{dh} = - \frac{f_{dh}}{f_\mu} \text{grad } C_{1\infty}. \quad (54).$$

В дипломной работе получены аналитические выражения, позволяющие оценивать общую силу, действующую на умеренно крупную высокотеплопроводную нелетучую каплю сферической формы во внешнем заданном поле градиента концентрации. В граничном условии на поверхности аэрозольной частицы учтены все эффекты, линейные по числу Кнудсена в данной постановке задачи: газокинетические коэффициенты K_{DS} , C_m - коэффициенты диффузионного и изотермического скольжений; β'_{RC} , β_{RC} , β_{RC}^B - поправки на кривизну и барнеттовское скольжение, C_q^T , C_V^T , C_q^D , C_V^D - коэффициенты потоков тепла, концентрации и среднемассового переноса, растекающихся в слое Кнудсена; коэффициент K_T^T , K_T^n - коэффициент скачка температуры и концентрации. Выражения для газокинетических коэффициентов приведены в работе [1].

Полученные аналитические выражения для силы и скорости диффузиофореза позволяют провести качественный и количественный анализ влияния средней температуры поверхности частицы (нагрев поверхности) незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси на диффузиофорез умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли.

Из приведенных выше формул видно, что в случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы T_{is} на диффузиофорез умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли. Это вытекает, как видно из формул (52) - (53), коэффициент динамической вязкости и коэффициент диффузии экспоненциально зависят от температуры. В случае малых относительных перепадов температуры в окрестности нелетучей капли будет иметь место линейная зависимость и вклад будет не более 10 %.

Если не учитывать влияния средней температуры поверхности частицы на диффузиофорез умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли, полученные выше формулы переходят в известные ранее полученные формулы [1].

Заключение

В квазистационарном приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле (тепловом и диффузионном) получены аналитические выражения, позволяющие оценивать диффузионную силу и скорость умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли сферической формы, когда средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуры вдали от нее. Проведенный качественный анализ показал, что в случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы (нагрев поверхности) на силу и скорость диффузии за умеренно крупной высокотеплопроводной нелетучей капли сферической формы, который дает вклад не более 10 %.

Литература:

1. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Движение капель в вязких средах. Ереван: Луйс. 1985. – 209 с
2. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. Учебное пособие для студентов и аспирантов. М.: МПУ. 1992. 297 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. Москва: Технико-теоретической литературы. 1954. 795 с
4. Дж. Хаппель, Г. Бреннер Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
5. Н.М. Матвеев Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 409 с.
6. В.А. Шалдырван, В.С. Герасимчук Методы математической физики. М.: Вузовская книга. 2006. 511 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.