ВЛАДИМИР МОСКОВКИН
ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВ
ХАРЬКОВ

УДК 330.42:519.86

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНЦЕПЦИИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА В ЭКОНОМИКЕ

Концепция жизненного цикла в экономике, относящаяся к товару, технологии, проекту, предприятию и т. д., достаточно хорошо описана в экономической литературе. Здесь только отметим достаточно детальную схему основных этапов инновационного процесса, приведенную в работе [1], а также статью [2], в которой приведены наиболее подробные схемы жизненного цикла продукта и механизма стимулирования инновационного процесса в условиях рыночной экономики от времени зарождения идеи до времени возврата инвестиций в рамках действующих в Европейском Союзе ограничений. Ниже мы остановимся исключительно на математических основах вышеуказанной концепции.

В работе [3] для описания полного жизненного цикла продукции (товара) была предложена процедура склеивания двух логистических кривых[1]

$$P(t)=\begin{cases}\dfrac{P_1}{1+P_2\exp(-P_3t)}, & t\le\tau\\[2ex] \dfrac{P_1}{1+P_2\exp(-P_3\tau)}+\dfrac{P_4}{1+P_5}-\\[2ex] -\dfrac{P_4}{1+P_5\exp\left[-P_6(t-\tau)\right]}, & t>\tau\end{cases} \qquad (1)$$

где $P(t)$ — функция спроса на товар (текущий объем товарной массы) *(рис. 1)*.

Отметим, что в условиях неизбежного упадка многих отраслей промышленности С. Кузнец брал максимальную величину, достигнутую производством, за верхнюю границу переменного и предполагал падение до нуля по обращенной логистической кривой [4] , то есть он фактически знал процедуру склеивания двух логистических кривых.

Но формальная процедура склеивания двух логистических кривых никак не объясняет сущность процесса формирования жизненного цикла продукции. Чтобы разобраться в этом вопросе необходимо понимать происхождение самой логистической кривой. В экономике в целом, а также в инновационном менеджменте и маркетинге, в частности, при записывании уравнения логистической кривой обычно опускают (умышленно или по не знанию) исходное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого является уравнение логистической кривой, не говоря уже о имени первооткрывателя этого уравнения — Пьера-Франсуа Верхульста (P.— F. Verhulst) [5, 6]. Так для первой ветви кривой $P(t)$, показанной на рис. 1, и являющейся классической логистической кривой, исходное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dP}{dt}=P_3P\left(1-\frac{P}{P_1}\right), \qquad (2)$$

где $P_2=\dfrac{P_1}{P_0}-1$, $P_0=P(t=0)$ — начальное условие, необходимое при решении уравнения (2) (решение задачи Коши для уравнения (2)).

В уравнении (2) коэффициент P_3 обычно называется коэффициентом роста (в нашем случае коэффициент роста продаж или увеличения спроса на товар), а коэффициент $\dfrac{P_3}{P_1}$ можно назвать коэффициентом сдерживания роста, или коэффициентом внутритоварной конкуренции по аналогии с коэффициентом внутривидовой конкуренции в популяционной динамике [6, 7].

Сейчас мы покажем, как в рамках логистической модели (2) можно описывать жизненный цикл товара (продукции, предприятия, проекта и т. д.). Рассмотрим два подхода — *стохастический* и *детерминированный*. В рамках первого подхода в уравнение (2) следует аддитивно добавить малые случайные возмущения в виде белого шума (случайные возмущения малы по сравнению с систематической составляющей) и использовать результаты работ [6, 8 — 11]. Отметим, что в ряде этих работ рассматривалось уравнение типа (2) для задач популяционной [10], береговой [11] и инновационной [6] динамики. Согласно общей теории [8, 9] малые случайные возмущения, вводимые аддитивно в детерминированную динамическую систему, допускающую потенциал, могут расшатать ее и привести к гибели (вымирание популяции [10], исчезновение морского пляжа [11], гибель инновации [6]), хотя сама система является устойчивой в отсутствии возмущений.

Согласно работе [9] главный член математического ожидания времени выхода траектории системы из области притяжения устойчивой точки[2] равен

$$M_P\tau_1^{\varepsilon}\approx\exp\left(\frac{C_1}{2\varepsilon^2}\right), \qquad (3)$$

где $C_1=4U(0)$, $U(W)$ — потенциальная функция для правой части рассматриваемой динамической системы, ε — малый параметр, входящий множителем в аддитивную стохастическую добавку процесса белого шума.

Для уравнения (2) формула (3) примет вид [10]

$$M_P\tau_1^{\varepsilon}\approx\exp\frac{P_3^3}{3\left(\dfrac{P_3}{P_1}\right)^2\varepsilon^2}=\exp\left(\frac{P_3P_1^2}{3\varepsilon^2}\right), \qquad (4)$$

[1] В работе [3] вторая экспонента в нижней части формулы (1) была ошибочно записана в виде $P_5exp(-P_6t)$.

[2] Для уравнения (2) эта точка имеет координату $P_{ст.}=P_1$. Рассматривается время перехода из устойчивой особой точки $P_{ст.}=P_1$ в нулевую неустойчивую $P=0$.

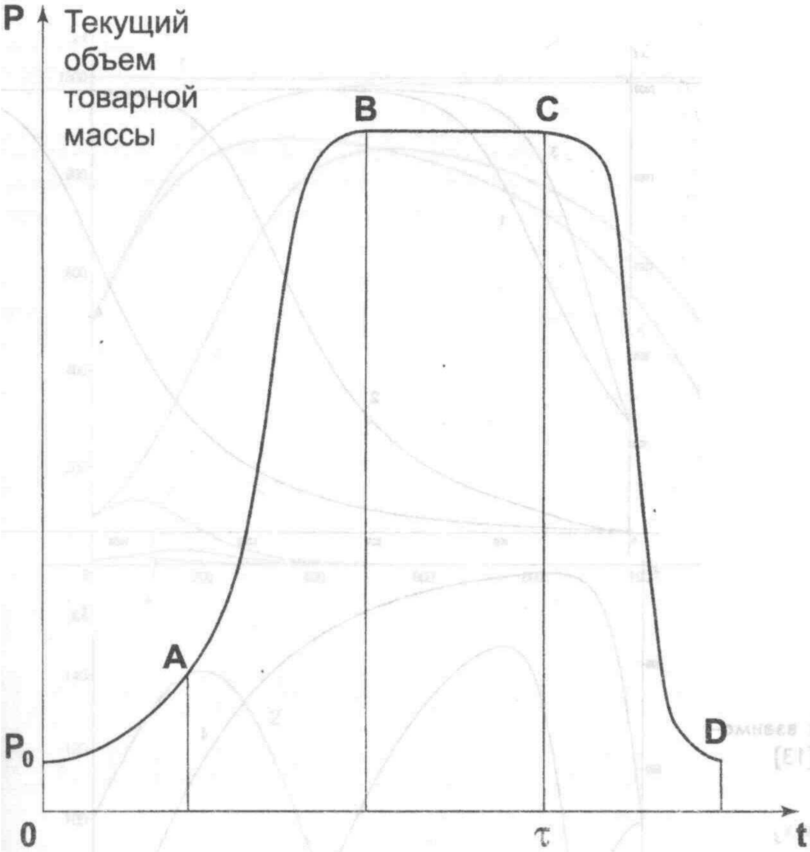

Рис. 1. Идеализированная схема поэтапного изменения спроса на товар

ОА – стадия внедрения; АВ – стадия роста;
ВС – стадия зрелости; CD – стадия спада.
Параметры функции (1) выбирались таким образом, что $P_0 = P_\infty \approx 0$

Критериальное значение подэкспоненциального выражения (4), разделяющего большие и малые времена, найдем в виде

$$\frac{P_3 P_1^2}{3\varepsilon^2} = 1\,, \qquad (5)$$

Например, при $\frac{P_3 P_1^2}{3\varepsilon^2} >> 1$ возникают большие времена деградации (гибели) системы и, следовательно, она устойчива к малым случайным возмущениям, а при $\frac{P_3 P_1^2}{3\varepsilon^2} << 1$ искомые времена очень малы, и система становится неустойчивой к вышеуказанным возмущениям. В последнем случае происходит быстрая гибель системы. Для уравнения (2) это означает обращение в ноль спроса на товар ($P = 0$) через промежуток времени, определяемый по формуле (4) и отсчитываемый от момента времени $t = \tau$ (рис. 1). Таким образом, возмущенная, случайным образом, экономическая среда может приводить к полному вытеснению с рынка товара (рис. 1), даже в условиях отсутствия конкурентного давления. Речь идет об редком и эксклюзивном товаре долгое время не имеющего конкурента, а в качестве возмущений можно рассматривать случайно распределенные во времени, в виде белого шума, флуктуации потребительских предпочтений. Для моделирования жизненного цикла товара можно предложить численные имитации для модели (2) в условиях малых случайных возмущений в виде белого шума.

Теперь выясним, каким образом можно моделировать жизненный цикл товара в рамках логистической модели (2) без учета малых случайных возмущений. В этом случае ясно, что ветвь спада спроса на определенный товар (рис. 1) (уменьшение его продаж) связана с конкурентным давлением на него со стороны других товаров, имеющих лучшие характеристики конкурентоспособности. Поэтому следует попытаться моделировать жизненный цикл товара в рамках детерминированных моделей конкурентных взаимодействий [6, 7, 12, 13], основу которых составляет все та же логистическая модель или уравнение Верхульста. Запишем двумерную модель конкурентных взаимодействий в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1^2 - \gamma_{12} x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^2 - \gamma_{21} x_1 x_2 \end{cases}, \qquad (6)$$

где x_i – спрос на i-тый товар (или ежемесячные объемы продаж i-го товара), α_i – коэффициент роста продаж для i-го товара, β_i – коэффициент внутритоварной конкуренции для i-го товара, γ_{ij} – коэффициент межтоварной конкуренции (например, γ_{12} – коэффициент конкурентного давления второго товара на первый).

Для системы (6) нас будут интересовать условия действия закона конкурентного исключения, впервые предложенного в биологии русским ученым Г. Гаузе [14], когда один, наиболее конкурентоспособный товар, вытесняет с рынка другой товар[3]. В этом случае, на основе численных экспериментов с системой (6), мы покажем, что временная функция спроса (или продаж) на вытесняемый с рынка товар имеет вид качественно похожий на рис. 1. Рассмотрим следующие параметры модели (6) [12]: $\alpha_1 = 0{,}01$; $\beta_1 = 2\cdot10^{-5}$; $\gamma_{12} = \frac{3}{4}10^{-5}$; $\alpha_2 = 0{,}02$; $\beta_2 = 2\cdot10^{-5}$; $\gamma_{21} = 2\cdot10^{-5}$. Этот случай соответствует ситуации, когда первый товар со временем полностью вытесняет с рынка второй товар. На фазовой плоскости (x_1, x_2) все траектории, расположенные в ее первом квадранте, стягиваются в точку (2000, 0), которая является устойчивым узлом [12].

Если предположить, что спрос на товар измеряется в тысячах гривень в неделю, то коэффициенты модели (6) имеют следующие размерности: α_i – нед.$^{-1}$; β_i, γ_{ij} –

[3] Использование этого закона в моделировании социально-экономических систем предложено в работе [7].

(нед.·тыс. долл.)$^{-1}$.В результате численных экспериментов с системой уравнений (6) при заданном выше количественном наборе параметров мы получили временные решения, приведенные на *рис. 2*. Видим, что кривые $x_1(t)$ имеют в основном логистический характер, а кривые $x_2(t)$ имеют локальный максимум с дальнейшим обращением в ноль. Локальные максимумы тем более выражены, чем меньше начальные значения для $x_1(t)$ (кривые 2, 4 на рис. 2). Численные эксперименты показали синхронный выход на стационарные уровни по $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Например, для кривых 2 этот выход соответствует 1400 ÷ 1500 нед. Из рис. 2 мы видим, что кривые 2 и 4 описывают классический полный жизненный цикл товара. Если в дальнейшем появится третий товар, который окажется более конкурентоспособным по сравнению с первым, то он со временем вытеснит первый товар с рынка и жизненный цикл первого товара примет классический вид (рис. 1).

Запишем модель конкурентных взаимодействий для трех товаров в виде [13]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1^2 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^2 - \gamma_{21} x_2 x_1 - \gamma_{23} x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \alpha_3 x_3 - \beta_3 x_3^2 - \gamma_{31} x_3 x_1 - \gamma_{32} x_3 x_2 \end{cases} \quad (7)$$

Некоторые временные решения системы уравнений (7) при $\alpha_1 = 0{,}01$, $\alpha_2 = 0{,}02$, $\alpha_3 = 0{,}03$, $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-5}$, $\beta_3 = 2\cdot10^{-5}$, $\gamma_{12} = \gamma_{32} = 10^{-5}$, $\gamma_{13} = \frac{3}{2}10^{-5}$, $\gamma_{31} = 3\cdot10^{-5}$, $\gamma_{23} = \gamma_{21} = 4\cdot10^{-5}$ показаны на *рис. 3*. Видим, что в начале с рынка вытесняется второй товар, а через определенное время эта же участь постигает и первый товар. Спрос на третий товар достигает максимального стационарного уровня $x_{3\,ст.} = 1500$. Для первого и второго товара характерно достижение нулевого стационарного уровня через прохождение локальных максимумов, что говорит о наличии классических кривых жизненного цикла для этих товаров. Если в дальнейшем появится четвертый, более конкурентоспособный по сравнению с третьим, товар, то он со временем вытеснит с рынка третий товар и жизненный цикл третьего товара примет классический вид (рис. 1). Все вышесказанное справедливо и для многомерного случая.

На наш взгляд, модели конкурентных взаимодействий рассмотренного вида могут успешно применяться при прогнозировании и управлении спросом (продажами) на лекарственные препараты, но для этого необходимо иметь надежные временные ряды по продажам нескольких конкурирующих препаратов вплоть до момента полного вытеснения с рынка

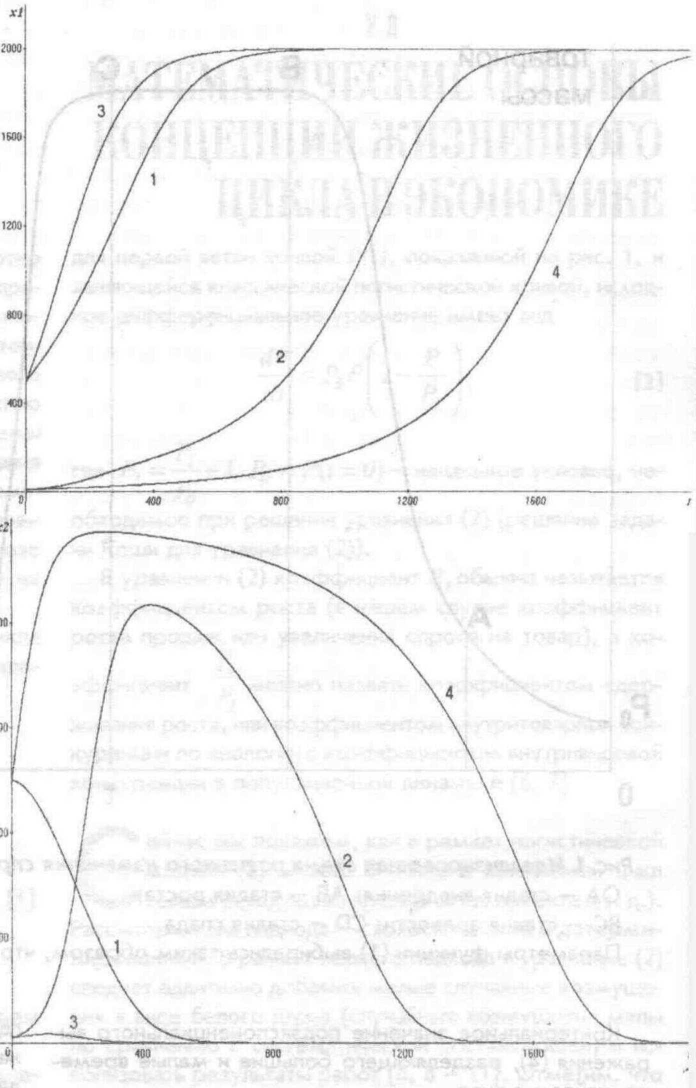

Рис. 2. Временные решения динамической системы (6). Начальные условия: (500; 500)-1; (10; 10)-2; (500; 10)-3; (10; 500)-4.

одного из них с целью калибровки вышеуказанных моделей.

Итак, нами в данной работе сделана попытка заложить математические основы концепции жизненного цикла товара (продукции) в условиях, как отсутствия, так и наличия конкуренции на базе логистической модели. В то же время следует отметить, что цель стратегического управления производством продукции должна состоять в том, чтобы не дожидаясь окончания жизненного цикла товара вовремя переходить на производство нового товара. Это проблема в целом решена Р. Фостером [15], который в качестве инструмента технологического прогнозирования и стратегического управления технологическими разрывами использовал все те же S-образные логистические кривые.

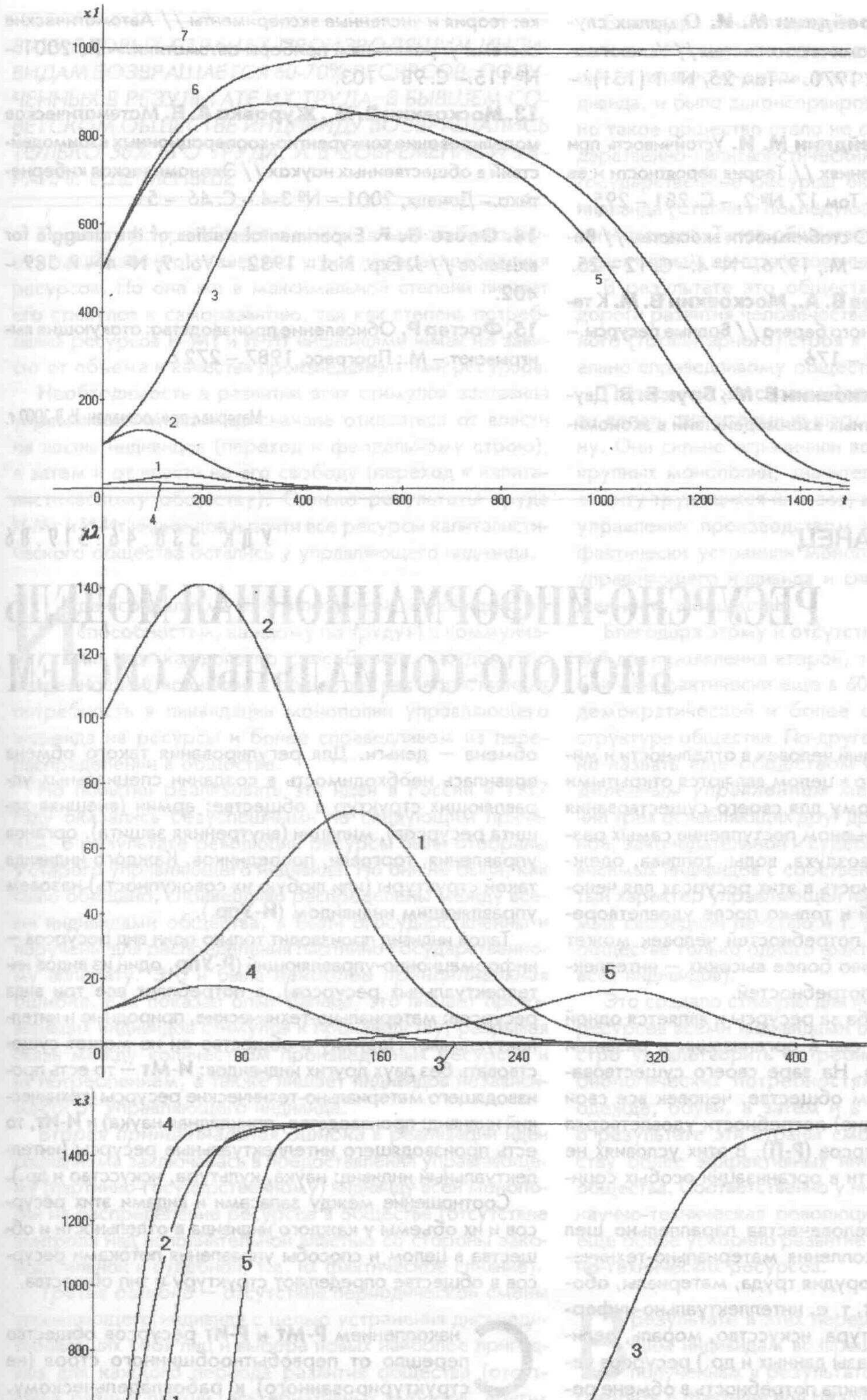

Рис. 3. Временные решения динамической системы [7].

Начальные условия: (10; 10; 10)-1; (100; 100; 100)-2; (100; 0,1; 0,1)-3; (10; 10; 100)-4; (500; 0,1; 0,1)-5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Завлин П. Н., Васильев А. В.** Оценка эффективности инновации. – Спб.: Издательский дом «Бизнес-пресса», 1998. – 216 с.

2. **Ридер В.** О некоторых закономерностях инновационного процесса в условиях рыночной экономики // Ремедиум. – М., 1999. – № 3. – С. 36 – 40; № 4. – С. 46 – 48.

3. **Дабагян А. В.** Теория и модели экономических и социально-политических волн. – Х.: Интехпром, 2000. – 597 с.

4. **Митчелл У. К.** Экономические циклы. Проблема и ее постановка. – М.-Л.: Госиздат, 1930. – 504 с.

5. **Verhulst P. – F.** Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondence mathematique et physique. – Bruxelles, 1838. – Tome 10. – P. 113-121.

6. **Московкин В.** Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес Информ. – Х., 1998. – № 17-18. – С. 41 – 48.

7. **Московкин В., Журавка А.** Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (Контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 5-6. – С. 27 – 34.

8. **Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.** О малых случайных возмущениях динамических систем // Успехи математических наук.– М., 1970. – Том 25, № 1 (151). – С. 3 – 55.

9. **Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.** Устойчивость при малых случайных возмущениях // Теория вероятности и ее применение. – М., 1972.– Том 17, № 2. – С. 281 – 295.

10. **Светлосанов В. А.** О стабильности экосистем // Вестник МГУ. Сер. географ. – М., 1976.– № 4.– С. 12 – 25.

11. **Есин Н. В., Дмитриев В. А., Московкин В. М.** К теории эволюции абразионного берега // Водные ресурсы.– М., 1984. – № 1.– С. 172 – 176.

12. **Журавка А. В., Московкин В. М., Брук В. В.** Двумерная модель конкурентных взаимодействий в экономике: теория и численные эксперименты // Автоматические системы управления и приборы автоматики. – Х., 2001.– № 115.– С. 98 – 103.

13. **Московкин В. М., Журавка А. В.** Математическое моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий в общественных науках // Экономическая кибернетика.– Донецк, 2001.– № 3-4.– С. 46 – 51.

14. **Gause G. F.** Experimental studies of the struggle for existence // J. Exp. Biol.– 1932. – Vol. 9, № 4.– P. 389 – 402.

15. **Фостер Р.** Обновление производства: атакующие выигрывают.– М.: Прогресс, 1987.– 272 с.

Материал предоставлен 16.11.2002 г.

ВЛАДИМИР ГЕТМАНЕЦ

ХАРЬКОВ

УДК 330.46:519.86

РЕСУРСНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ БИОЛОГО-СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Известно, что каждый человек в отдельности и мировое сообщество в целом являются открытыми системами. Поэтому для своего существования они нуждаются в непрерывном поступлении самых разнообразных ресурсов: воздуха, воды, топлива, одежды, обуви и др. Потребность в этих ресурсах для человека является первичной и только после удовлетворения этих биологических потребностей человек может перейти к удовлетворению более высоких — интеллектуальных и социальных потребностей.

Следовательно, борьба за ресурсы и является одной из основных движущих сил в организации и развитии общественных структур. На заре своего существования, т. е. в первобытном обществе, человек все свои первичные (биологические) потребности удовлетворял за счет природных ресурсов (**Р-П**). В этих условиях не возникало необходимости в организации особых социальных структур.

По мере развития человечества параллельно шел процесс создания и накопления материально-технических ресурсов — **Р-Мт** (орудия труда, материалы, оборудование и т. д.) и **Р-Ит**, т. е. интеллектуально-информационных (наука, культура, искусство, мораль, религия, информационные базы данных и др.) ресурсов человека и общества. Возникла потребность в обмене ресурсов между отдельными индивидами и между ними и обществом, был создан единый эквивалент для такого обмена — деньги. Для регулирования такого обмена появилась необходимость в создании специальных управляющих структур в обществе: армии (внешняя защита ресурсов), милиции (внутренняя защита), органов управления, торговли, посредников. Каждого индивида такой структуры (или любую их совокупность) назовем управляющим индивидом (**И-Упр.**).

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЗАПАСАМИ И ВИДАМИ ЭТИХ РЕСУРСОВ И ИХ ОБЪЕМЫ У КАЖДОГО ИНДИВИДА В ОТДЕЛЬНОСТИ И ОБЩЕСТВА В ЦЕЛОМ И СПОСОБЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКАМИ РЕСУРСОВ В ОБЩЕСТВЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ СТРУКТУРУ И ТИП ОБЩЕСТВА

Такой индивид производит только один вид ресурсов — информационно-управляющий (**Р-Упр**, один из видов интеллектуальных ресурсов), а потребляет все три вида ресурсов: материально-технические, природные и интеллектуальные. Поэтому в обществе он не может существовать без двух других индивидов: **И-Мт** — то есть производящего материально-технические ресурсы (технический индивид: производство, прикладная наука) и **И-Ит**, то есть производящего интеллектуальные ресурсы (интеллектуальный индивид: наука, культура, искусство и др.).

Соотношение между запасами и видами этих ресурсов и их объемы у каждого индивида в отдельности и общества в целом и способы управления потоками ресурсов в обществе определяют структуру и тип общества.

С накоплением **Р-Мт** и **Р-Ит** ресурсов общество перешло от первобытнообщинного строя (не структурированного) к рабовладельческому. В этом обществе все ресурсы, в том числе жизнь и свобода **И-Мт** и **И-Ит** индивидов, принадлежали одному управляющему индивиду, что несомненно свидетельствовало о максимальной роли и «ценности» этого индивида в таком предельно директивном обществе. Другой структуры общества и не могло быть на той исторической стадии, когда все ресурсы общества распределялись только военным путем. Это и определяло полностью централизованную (военную) структуру этого общества.