ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕНННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ БЛИЗКИХ К КАНОНИЧЕСКИМ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 01.04.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001632
Вовнянко Анастасии Алексеевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Флоринский В.В.

Рецензент
к.т.н., доцент
Маматов Е.М.

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Центральное место в теории оптимального управления, занимает проблема быстродействия, особенно линейная задача быстродействия. Время быстродействия есть наиболее естественный критерий оптимальности, поэтому задача быстродействия является одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. Решение линейных, в частности, канонических задач важно тем, что к ним можно свести решения некоторых нелинейных задач [8, 10].

Компьютерное применение помогает связывать теоретические исследования с практикой, что является важным элементом в разработке для решения задач быстродействия численных методов. Чем больше размерность задач быстродействия, тем больший интерес она представляет. Сложность решения подобных задач заключается в том, что в ходе выполнения приходится работать с плохо обусловленными матрицами. В наше время для решения задач быстродействия, разработка численных методов и компьютерных программ является **актуальной**.

Цель работы изучить методы задач быстродействия используя аналитическое решение канонической задачи быстродействия.

Задачи данной работы:

Изучить методы решения задач быстродействия

Изучить решение канонической задачи быстродействия, основанной на min-проблеме моментов А. А. Маркова

Построить программу для численной реализации решения задач быстродействия близких к каноническим.

Один из методов основан на принципе максимума Понтрягина [3, 4, 15, 17]. Другой метод предложенный В.И. Коробовым и Г.М Скляром - на основе min проблеме моментов Маркова [11].

Структура выпускной квалификационной работы состоит из введения, четырёх разделов, а также заключения, списка используемой литературы и приложений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

1.1. Общая постановка задачи оптимального управления. Динамика объекта.

Динамический объект – это объект, который меняется во времени. Задачу оптимального управления определяет наличие динамического объекта. Набор параметров $x^1(t), \dots, x^n(t)$, описывает положение объекта в каждый момент времени t.

Вектор

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

- это фазовый вектор объекта. Считают, что объект снабжен рулями, от положения которых зависит его поведение. Набор параметров $u^1(t), \dots, u^m(t)$ характеризует положение рулей в каждый момент времени t.

Вектор

$$u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$$

называют управлением или управляющим параметром объекта. В момент времени t состояние объекта от того, какие значения принимает управление u(t) до момента времени t.

Разные динамические объекты рассматривают в зависимости от того, как выражается зависимость вектора фазового состояния x(t) от управления u(t). Эту зависимость можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{1.1}$$

Зная значения управления $u(t)$ в каждый момент времени t, можно определить траекторию объекта $x(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)).$$

Если допустить что динамика объекта задана, т.е. закон изменения вектора состояния $x(t)$ в зависимости от изменения вектора управления $u(t)$.

Управление $u(t)$ в конкретных физических объектах может не быть произвольным. Из физического смысла управления вытекают определенные ограничения.

Например, если $u^1(t)$ — тяга двигателя, то в каждый момент времени она должна удовлетворять ограничению

$$u^1_{min} \leq u^1(t) \leq u^1_{max}.$$

При этом тяга $u^1(t)$может принимать также и крайние значения u^1_{min} и u^1_{max}. Предполагается, что в каждый момент времени t вектор управления $u(t)$ удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U, \qquad (1.2)$$

где U — некоторое заданное множество. Часто, в конкретных физических объектах множество U замкнуто. Эта замкнутость в общем случае не позволяет исследовать поведение управляемого объекта методами классического вариационного исчисления. Кроме ограничения вида (1.2) могут быть наложены ограничения на зависимость управления $u(t)$от времени. Например, из физического смысла допустимыми управлениями могут быть либо кусочно-непрерывные, либо непрерывные, либо гладкие функции т.п.

Начальное и конечно состояние объекта. Пусть, задан начальный момент времени t_0 и множество допустимых начальных состояний объекта M_0.

Нужно управлять объектом так, чтобы в какой-то конечный момент времени t_1 объект перешел на некоторое множестводопустимых конечных состояний M_1. Тогда допустимое управление $\mathrm{u(t)}$ переводит объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Фазовое состояние объекта *x(t)* соответствующее этому управлению $\mathrm{u(t)}$ удовлетворяет условиям

$$x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in \ M_1 \tag{1.3}$$

Конечный момент времени t_1 может быть не фиксированным, а определяться из условия попадания вектора $x(t)$ на конечное множество M_1. Предположим, что допустимые множества M_0 и M_1заданы.

Критерий качества. Иногда управляемый объект можно перевести из множества M_0 на множество M_1 разными способами. Среди таких переходов выбирается наилучший. Принято, что каждому допустимому управлению $\mathrm{u(t)}$, заданному на отрезке $[t_0, t_1]$, и соответствующей ему траектории объекта $\mathrm{x(t)}$ сопоставлено некоторое число J, оценивающее качество пары $\mathrm{u(t)}$, $\mathrm{x(t)}$, т.е. задан функционал, или критерий качества $\mathrm{J(u(t), x(t))}$.

Этот функционал может иметь вид

$$\mathrm{J(u(t), x(t))} \ = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{f}^0 \,(\mathrm{s, x(s), u(s))ds}. \tag{1.4}$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении таких допустимого управления u*(f) и соответствующей ему траектории объекта x*(t), переводящей объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1, что при этом функционал качества J(u(f), x(t)) принимает минимальное значение, т.е.

$$J(u^*(f), x^*(t)) = \min J(u(f), x(t)).$$

Здесь минимум берется по всевозможным допустимым управлениям $\mathrm{u}(\mathrm{t})$ и соответствующим траекториям $\mathrm{x}(\mathrm{t})$, переводящим объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1.

1.2 Основные вопросы математической теории оптимального управления.

Управляемость. Если есть хотя бы одно допустимое управление, тогда объект управляем из множества M_0 на множество M_1. Это управление переводит динамический объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1. Получается, существует такое допустимое управление $u(t)$, при котором соответствующий вектор фазового состояния $x(t)$ удовлетворяет условиям (1.3). Если такого управления нет, постановка задачи теряет смысл.

Если вопрос об управляемости решается положительно, и получается, что существует какое-то управление $u(t)$, которое переводит объект из множества M_0 на множество M_1, то нужно узнать, существует ли оптимальное управление. При решение какой-то конкретной задачи, инженеры, не задаются этим вопросом. Они просто пытаются найти наилучшее управление. В математике этот вопрос является самым главным, если оптимального управления не существует, то дальнейшие поиски его становятся бессмысленными. В математике всегда есть модель реального физического объекта, и если в модели отсутствует оптимальное управление то это, скорее всего, указывает на то что модель построена неправильно.

Необходимые условия оптимальности. Допустим, оптимальное управление существует, тогда нужно развивать методы для нахождения оптимального управления. В простых задачах допустимых управлений, может оказаться бесконечно много. Допустимые управления переводят объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1.

Поэтому просто перебрать все возможные допустимые управления не удается. Тогда встает вопрос, как же сузить класс управлений, которые похожи на оптимальность. Ответить на этот вопрос позволяют необходимые условия оптимальности. Множество допустимых управлений, удовлетворяют оптимальным условиям, среди этих управлений и нужно искать оптимальное управление.

Достаточные условия оптимальности. Несмотря на то, что необходимые условия оптимальности позволяют сузить класс управлений, подозрительных на оптимальность, этот класс остается широким. Что бы отобрать оптимальное управление в этом широком классе, нужны достаточные условия оптимальности. Пусть некоторое управление $u(t)$ из этого класса будет удовлетворяет достаточным условиям оптимальности, это гарантирует его оптимальность. Если случиться, что достаточным условиям оптимальности удовлетворяет не одно, а два, или даже несколько управлений. То гарантируется, что все они оптимальны, значит, функционал качества принимает на всех этих управлениях одинаковое минимальное значение.

Единственность оптимального управления. Очень важно знать, единственное ли оптимальное управление. Если оно да, то в определенных управляемых объектах реализация этого единственного оптимального управления окажется намного проще. Поэтому вопрос о единственности оптимального управления является основным вопросом математической теории оптимального управления.

Конечно это не все вопросы, которые возникают при решении задачи оптимального управления. Естественно, что эти вопросы могут исследоваться для конкретного управляемого объекта не обязательно в той последовательности, в какой они здесь приведены. Например, сначала установлено то, что оптимальное управление существует, и найдено единственное допустимое управление $u(t)$, которое переводит объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1

удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, тем самым гарантируется, что это управление $u(t)$ оптимально.

Простейшая задача оптимального управления — линейная задача быстродействия. В этой задаче динамика объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1.5}$$

где x — n-мерный вектор фазового состояния объекта, А — постоянная матрица размером nxn, u — n-мерный вектор управления, на который наложено ограничение $\mathrm{u(t)} \in U$. Если известна допустимая функция управления $\mathrm{u(t)}$ и начальное состояние объекта $x(t_0) = x_0$,то единственная функциях$\mathrm{(t)}$ вектора фазового состояния объекта вычисляется как решение дифференциального уравнения (1.5).

Начальное и конечное состояния объекта будем выбирать как элементы некоторых непустых и компактных подмножеств M_0 и M_1 соответственно из n-мерного фазового пространства. Критерием качества будет служить время перехода из множества, M_0 на множество M_1, т. е.

$$\mathrm{J(u(t), x(t))} = t_1 - t_0.$$

Этот критерий качества получается из (1.4), когда подынтегральная функция имеет вид

$$\mathrm{f^0(t, x(t), u(t))} = 1.$$

Линейная задача быстродействия заключается в нахождении допустимого управления u*(t) и соответствующего ему решения x*(t) уравнения (1.5), переводящего объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1за минимальное время.

Преимущества линейной задачи быстродействия.

Во-первых, для линейного дифференциального уравнения (1.5) можно получить зависимость траектории $x(t)$ от управления $u(t)$в явном виде. Это позволяет эффективно исследовать все основные вопросы математической теории оптимального управления.

Во-вторых, на примере линейной задачи быстродействия достаточно ярко проявляются все характерные трудности, присущие общим задачам оптимального управления.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ MIN-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ МАРКОВА

2.1 Min-проблема моментов Маркова

Классическую (-L,L) проблему моментов Маркова можно сформулировать следующим образом.

Дана последовательность непрерывных на [a,b] функций $\{g_k(t)\}_{k=1}^{n}$. Требуется:

1) Найти условия, которым должен удовлетворять вещественный вектор S=$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, если известно, что существует хотя бы одна измеримая функция f(t), $t\epsilon[\mathrm{a,b}]$. Такая, что

$$S_k = \int_a^b g_k(t)\, \mathrm{f(t)dt},\ \mathrm{k=1,\ldots,n};\ |f(t)| \le L, t\epsilon[\mathrm{a,b}].$$

2) Исследовать некоторые простейшие функции f(t) для заданного вектора S.

Min-проблема моментов заключается в том, что для любых заданных моментов S указать минимальный возможный отрезок $[a, a+Q_s]$ и функцию $f_s(t)$ такие что

$$S_k = \int_a^{a+Q_s} g_k(t)\, \mathrm{f(t)dt},\ \mathrm{k=1,\ldots,n};\ |f(t)| \le L, t\epsilon[a, a+Q_s].$$

Если $g_k(t) = t^{k-1}$, то степенная проблема моментов.

Если $g_k(t) = e^{i(k-1)t}$, то тригонометрическая проблема моментов.

Критерий управляемости для $\dot{x} = Ax + bu$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = Ax + bu, |u| \leq 1,$$
$$x(0) = x_0, x(\Theta) = 0, \Theta \to min.$$

A- матрица n×n, b-вектор-столбец.

Система управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(b, Ab, \dots A^{n-1}b) = n$.

Решение.$x(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}\, bu(\tau))d\tau$,

учитывая, что

$$x(0) = x_0,\ x(\Theta) = 0, \Theta \to min,$$

можно записать:

$$x = \int_0^{\Theta} e^{-A\tau}\, bu(\tau)d\tau$$

x – заданная начальная точка.

Для оптимальности по быстродействию функция $u(t)$ кусочно постоянная, принимающая значения ± 1. Кроме того, если матрица A имеет вещественный спектр, то число точек разрыва не превышает n-1 (т. Фельдбаума).

Обозначим $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n$= Θ – точка разрыва функции $u(t)$, которые называются моментами переключения; $\tilde{u} = \mp 1$ – управление на $[T_{n-1}, \Theta]$.

Решение задачи быстродействия сводится к нахождению времени быстродействия T_n= Θ, рода управления $\tilde{u}$ и моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$.

Таким образом, если $S_k = -x_k$, g(t)=$e^{-A\tau}b$, то задача сводится

$S_k = \int_0^{\Theta} g_k(t)\, u(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ – проблема моментов, $k = 1, 2, \dots, n$.

2.2 Решение канонической задачи

Для решения задачи:

$$\dot{x_1} = u, |u| \le 1. \qquad (2)$$

$$\dot{x_i} = x_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, n,$$

$$x(0) = x, \qquad x(\Theta) = 0, \Theta \to min.$$

Введем две последовательности полиномов $\alpha_k(x, \Theta)$и $\beta_k(x, \Theta)$ следующими уравнениями:

$$\alpha_1 = \frac{\Theta - x_1}{2}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \dots & (k-1)\alpha_{k-1} & k\alpha_k \\ -1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k + (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad (2.1)$$

$$k = 2, \dots, n;$$

$$\beta_1 = \frac{\Theta + x_1}{2}, \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \dots & (k-1)\beta_{k-1} & k\beta_k \\ -1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k - (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad (2.2)$$

$$k = 2, \dots, n.$$

Обозначим через $\tilde{u}$ управление на последнем интервале $[T_{n-1}, \Theta]$. Если $\tilde{u} = -1$, то $\tilde{u}$ будем называть управлением первого рода, если $\tilde{u} = +1$, то это управление второго рода. Вводится в рассмотрение последовательность полиномов $\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u})$ следующим образом:

$$\gamma_k(x,\Theta,\tilde{u}) = \begin{cases} \alpha_k(x,\Theta), \text{если } \tilde{u} = -1 \\ \beta_k(x,\Theta), \text{если } \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда, используя равенства (2.1) и (2.2). последовательность $\gamma_k(x,\Theta,\vec{u})$ можно получить из аналогичных уравнений:

$$\gamma_1 = \frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 & \dots & (k-1)\gamma_{k-1} & k\gamma_k \\ -1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{\Theta^k - (-1)^k \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n. \tag{2.4}$$

Обозначим правые части равенств (2.4), (3.8) и (3.9) через G_k, A_k, B_k, т.е

$$G_k = \frac{\Theta^k + (-1)^{k+1} \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.5}$$

$$A_k = \frac{\Theta^k + (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.5а}$$

$$B_k = \frac{\Theta^k + (-1)^{k+1} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.5б}$$

Очевидно, что

$$G_k = \begin{cases} A_k, \text{если } \tilde{u} = -1 \\ B_k, \text{если } \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Раскрывая определитель в равенстве (2.4) по последнему столбцу, получим

$$G_k = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i G_{k-i} + k\gamma_k, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.7}$$

Отсюда следует рекуррентная формула для γ_k:

$$\gamma_1 = \frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \gamma_k = \frac{1}{k}\left(G_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i G_{k-i}\right), \qquad k = 2, \dots, n; \tag{2.8}$$

Аналогичным образом введем последовательности полиномов $\alpha_k(x, \Theta)$, $\beta_k(x, \Theta)$, $\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u})$:

$$\overline{\alpha_1} = -\frac{\Theta - x_1}{2}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \dots & (k-1)\alpha_{k-1} & k\alpha_k \\ -1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{\Theta^k + (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n; \tag{2.9}$$

$$\overline{\beta_1} = -\frac{\Theta + x_1}{2}, \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \dots & (k-1)\beta_{k-1} & k\beta_k \\ -1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{\Theta^k - (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n; \tag{2.10}$$

$$\overline{\gamma_1} = -\frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 & \dots & (k-1)\gamma_{k-1} & k\gamma_k \\ -1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\Theta^k - (-1)^k \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n; \tag{2.11}$$

Откуда видно, что

$$\overline{\gamma_k}(x, \Theta, \tilde{u}) = \begin{cases} \overline{\alpha_k}(x, \Theta), \text{если} \tilde{u} = -1 \\ \overline{\beta_k}(x, \Theta), \text{если} \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Обозначим правые части равенств (2.9), (2.10) и (2.11) через G_k, A_k, B_k соответственно, т.е

$$\overline{G_k} = -\frac{\Theta^k - (-1)^{k+1} \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.13}$$

$$\overline{A_k} = -\frac{\Theta^k - (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.13а}$$

$$\overline{B_k} = -\frac{\Theta^k + (-1)^{k+1} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.13б}$$

Очевидно, что

$$\overline{G_k} = \begin{cases} \overline{A_k}, \text{если } \tilde{u} = -1 \\ \overline{B_k}, \text{если } \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Раскрывая определитель в равенстве (2.11) по последнему столбцу, получим равенство, аналогичное (2.7):

$$\overline{G_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\gamma_\iota} \overline{G_{k-\iota}} + k\overline{\gamma_k}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.15}$$

Отсюда следует рекуррентная формула, аналогичная (2.8):

$$\overline{\gamma_1} = -\frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \overline{\Gamma_k} = \frac{1}{k}\left(G_k - \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\gamma_\iota} \overline{G_{k-\iota}}\right), \qquad k = 2, \dots, n; \tag{2.16}$$

Замечание. Канонические переменные γ_k можно вычислять, используя явную формулу

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}, \begin{vmatrix} G_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ G_2 & G_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{k-1} & G_{k-2} & G_{k-3} & \dots & k-1 \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-2} & \dots & G_1 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{2.17}$$

если в данной формуле заменить γ_k и G_k на $\overline{\gamma_k}$ и $\overline{G_k}$. соответственно, то получим аналогичную формулу для вычисления переменных $\overline{\gamma_k}$.

Из равенств (2.5) и (2.13) видно, что

$$\overline{G_k} = -G_k, \qquad \overline{A_k} = -A_k, \qquad \overline{B_k} = -B_k.$$

Дополним систему (2) уравнением $\Theta = -1$ и рассмотрим систему

$$\dot{x_1} = u,$$
$$\dot{x_\iota} = x_{i-1},$$
$$\dot{\Theta} = -1. \qquad (2.18)$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Полиномы $\gamma_k(x,\Theta,\tilde{u})$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\overline{\gamma_k}} = -(k-1)\overline{\gamma_{k-1}}, \qquad k = 1,\dots,n, \qquad (2.19)$$

и системе

$$\dot{\overline{\gamma_k}} = 1, \dot{\overline{\gamma_k}} = -k\overline{\gamma_{k-1}}, \qquad k = 2,\dots,n, \qquad (2.20)$$

где производные $\dot{\overline{\gamma_k}}$ в (2.19) и (2.20) берутся в силу системы (2.18) с управлением $u = \tilde{u}$ и $u = -\tilde{u}$ соответственно.

2.3 Уравнения для нахождения всех моментов переключения

В [11] описан аналитический метод нахождения времени быстродействия Θ и рода управления $\tilde{u}$ для канонической задачи быстродействия.

Используется последовательность определителей Маркова:

$$\Delta_1 = \gamma_1, \qquad \Delta_2 = \gamma_2, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_{2p-1} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{2p} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} & \cdots & \gamma_{2p} \end{vmatrix}$$

Время быстродействия Θ_0 является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\Delta_n(\gamma_1(x,\Theta,-1),\dots,\gamma_n(x,\Theta,-1)\cdot\Delta_n\big(\gamma_1(x,\Theta,+1),\dots,\gamma_n(x,\Theta,+1)\big)=0$$

При этом если наибольший вещественный корень Θ_0 получается из уравнения

$$\Delta_n(\gamma_1(x,\Theta,-1),\dots,\gamma_n(x,\Theta,-1))=0,$$

то $\tilde{u}=-1$ (управление 1-го рода);

если наибольший вещественный корень Θ_0 получается из уравнения

$$\Delta_n\big(\gamma_1(x,\Theta,+1),\dots,\gamma_n(x,\Theta,+1)\big)=0$$

то $\tilde{u}=+1$ (управление 2-го рода).

Теорема. Пусть для системы (3) время оптимального быстродействия Θ. Тогда моменты переключения $T_i, i=1,\dots,n-1$, оптимального управления $u(t)$ определяются как корни следующих уравнений:

1) для $n=2p$

$$\begin{vmatrix}\gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1}\\ 1 & z & \dots & z^{p-1}\end{vmatrix}=0 \qquad (2.21)$$

для нахождения четных моментов переключенияT_2, T_4, T_{2p-2}, и

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar{\gamma}_1 & \cdots & \bar{\gamma}_p \\ -\bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \cdots & \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \cdots & \bar{\gamma}_{2p-1} \\ -1 & z & \ldots & z^p \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.22)$$

для нахождения нечетных моментов переключенияT_1, T_3, T_{2p-1};

2) для $n = 2p - 1$

$$\begin{vmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \cdots & \bar{\gamma}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \cdots & \bar{\gamma}_{2p-2} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.23)$$

для нахождения четных моментов переключенияT_2, T_4, T_{2p-2}, и

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.24)$$

для нахождения нечетных моментов переключенияT_1, T_3, T_{2p-3}.

Замечание. Уравнение для нахождения всех моментов переключения (четных и нечетных $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1})$ в случае $n = 2p$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-1} \\ -1 & z & \ldots & z^p \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.25)$$

а уравнение для нахождения всех моментов переключения для случая $n = 2p - 1$

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.26)$$

Поскольку для заданной начальной точки $x = x(0)$ время быстродействия Θ определено, то в левых частях равенств (2.25) и (2.26) $\gamma_1 \dots \dots \gamma_{2p-1}$- известные числа, тогда левые части равенства представляют собой уравнения степени n - 1 относительно z, корнями которых являются все моменты переключения и только они.

Рассмотрим еще одну систему относительно вспомогательных переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$:

$$\dot{\psi} = -A^{*}\psi,$$

где A^{*}матрица, транспонированная к матрице А. Решение этой системы вектор ψс компонентами $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$, который является опорным вектором к области управляемости системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + bu,\ |u| \leq 1, x(0) = x_0,\ x(\Theta) = 0, \Theta \to min, \\ (\mathrm{b}, \mathrm{Ab}, \dots A^{n-1}b) = n \end{gathered} \qquad (*)$$

в начальной точке $x(0)$. Оптимальное управление

$$u(t) = sign(\psi, -e^{-At}b) = -sign(\psi, e^{-At}b) \qquad (2.27)$$

Скалярное произведение $(\psi, \exp(-At)\, b)$ представляет собой полином

$$(\psi, -e^{-At}b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \psi_k t^k}{k!} \qquad (2.28)$$

Корни этого полинома согласно равенству (2.27) являются моментами переключения. Следовательно, полином (2.28) с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (2.25) при $n = 2p$и с левой частью уравнения (2.26) при $n = 2p - 1$. Если записать левую часть вышеуказанных уравнений в виде

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$

то

$$\psi_k = (-1)^k k!\, c_k, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

То есть вектор gс компонентами

$$(c_0, -c_1, 2!\, c_2, \dots, (-1)^{n-1}(n-1)!\, c_{n-1} \qquad (2.29)$$

является опорным вектором к области управляемости системы(*).

Пример.

Рассмотрим теперь задачу быстродействия для системы (3) при n = 6 из начальной точки $x = (0,0,0,0,0,x_6)$ в начало координат.В этом случае p = 3,

$$\gamma_1(x,\Theta) = \frac{\Theta}{2};\ \gamma_2(x,\Theta) = \frac{\Theta^2}{8};\ \gamma_3(x,\Theta) = \frac{\Theta^3}{16};\ \gamma_4(x,\Theta) = \frac{5\Theta^4}{128};$$
$$\gamma_5(x,\Theta) = \frac{7\Theta^5}{256};\ \gamma_6(x,\Theta) = \frac{21\Theta^6}{2^{10}} - 60\tilde{u}x_6;$$

$$\overline{\gamma_1}(x,\Theta) = -\frac{\Theta}{2};\ \overline{\gamma_2}(x,\Theta) = -\frac{3\Theta^2}{8};\ \overline{\gamma_3}(x,\Theta) = -\frac{5\Theta^3}{16};$$

$$\overline{\gamma_4}(x,\Theta) = -\frac{35\Theta^4}{128};\ \gamma_5(x,\Theta) = -\frac{63\Theta^5}{256};$$

Находим время оптимального быстродействия

$$\Theta = \Theta(x) = 4\sqrt[6]{30x_6}$$

и род управления, которое является управлением второго рода, т.е. $\tilde{u} = +1$.

Из (2.21а) находим, что уравнение для нахождения четных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = 0$$

или $16t^2 - 16\Theta\mathrm{t} + 3\Theta^2 = 0$, корни этого уравнения.

Из (2.22а) находим, что уравнение для нахождения всех нечетных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ -\gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ -1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = 0$$

или $32t^3 - 48\Theta t^2 + 18\Theta^2\mathrm{t} - \Theta^3 = 0$, корни этого уравнения

$$T_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\Theta, \qquad T_3 = \frac{\Theta}{2}, \qquad T_5 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\Theta.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ, БЛИЗКОЙ К КАНОНИЧЕСКОЙ.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для автономной линейной системы:

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad |u| \le 1, \quad x \epsilon R_n$$

$$x(0) = x, x(\Theta) = 0, \Theta \to min \tag{3}$$

$$rank(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n,$$

где Θ — время оптимального быстродействия.

Пусть матрица А имеет вещественный спектр $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае число точек переключения (точек разрыва функции $u(t)$) будет не более $n-1$. Обозначим моменты переключения через $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_n$, ($\mathrm{T}_n = \Theta$). Время оптимального быстродействия является корнем некоторого полинома, коэффициенты которого есть функции начальной точки. Моменты переключения есть корни полиномов, коэффициенты которых зависят от времени быстродействия и начальной точки. В статье [17] для матриц А с произвольным спектром предложен метод сведения к задачам быстродействия с матрицей А, допускающим точное решение. Задача быстродействия в этом случае сводится к отысканию неподвижной точки некоторого отображения, а для ее нахождения методом последовательного приближения на каждом шаге используется решение системы (3), допускающей точное, решение.

3.1 Непрерывная зависимость моментов переключения от спектра матрицы в линейной задаче быстродействия.

Пусть $u(t)$ — оптимальное по быстродействию управление, переводящее точку из x в 0, тогда

$$x = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} bu(\tau)d\tau, \tag{3.1}$$

или

$$x = -\sum_{j=1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau, \qquad (3.2)$$

здесь $T_0 = 0, u(\tau) = \pm 1$.

Теорема 1.1. Пусть матрица А удовлетворяет следующим условиям:

1) собственные значения λ_i вещественные;

2) в области изменения спектра жорданова форма и кратность спектра не меняются;

3) начальная точка $x(0) = x$ находится вне поверхности переключения. Тогда моменты переключения $T_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_n$ являются гладкими функциями от спектра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы А системы (3.8).

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, $(1 \le q \le n)$ — все различные собственные значения матрицы А кратности, соответственно, $s_1, \ldots, s_q$. Пусть А* — матрица, сопряженная к матрице Л. Пусть $V_1, \ldots, V_q$ — корневые векторы максимальной высоты ($s_1, \ldots, s_q$, соответственно) матрицы А*, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, л_q$, $(1 \le q \le n)$. Обозначим $z_m^k = \left(\mathrm{A}^* - \lambda_m I\right)^k V_m$ — корневые векторы высоты s_m — к, отвечающие собственному значению λ_m(к $= 0, \ldots, s_m - 1; m = 1, \ldots, q$), эти векторы образуют базис пространства Rn. Умножим скалярно обе части равенства (3.2) на вектор z_m^k .

$$(z_m^k, x) = -\sum_{j-1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} (z_m^k, e^{-A\tau} b) u(\tau) d\tau,$$

$$(k = 0, \ldots, s_m - 1; m = 1, \ldots, q).$$

Преобразуем выражение стоящее в правой части

$$(z_m^k, x) = -\sum_{j-1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} (e^{-A*\tau} z_m^k, b) d\tau,$$

учитывая что

$$e^{-A*\tau} V_m = e^{-\lambda_m \tau} \sum_{lk}^{s_{m-1}} (-1)^{l-k} z_m^l \frac{\tau^{l-k}}{(l-k)!},$$

можно записать

$$(z_m^k, x) = -(-1)^n \tilde{u} \sum_{l=k}^{s_{m-1}} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int_{T_{j-1}}^{T_j} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau} d\tau.$$

Здесь и далее $\tilde{u}$ — управление на конечном промежутке $[T_{n-1}, \dots, T_n]$, так как быстродействие оптимальное и $|u| \le 1$, то $\tilde{u}$ может принимать значения либо +1, либо -1, т.е. $\tilde{u} = \pm 1$.

Рассмотрим систему уравнений относительно $T_1, \dots, T_n$:

$$F_m^k(\lambda_1, \dots, \lambda_q; T_1, \dots, T_n) \equiv$$

$$(x, z_m^k) + (-1)^n \widetilde{u} \sum_{l=k}^{s_{m-1}} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int_{T_{j-1}}^{T_j} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau} d\tau = 0,$$

$$m = 1, \dots, 1; k = 0, \dots, s_m - 1. \qquad (3.3)$$

Так как $s_1 + \dots + s_q = n$, то система (3.12) состоит из n уравнений. Найдем частные производные функции $F_m^k(\lambda_1, \dots, \lambda_q; T_1, \dots, T_n)$ по $T_j (j = 1, \dots, n)$.

$$\frac{\partial F_m^k}{\partial T_j} = (-1)^{n+j} 2\widetilde{u} \sum_{l=k}^{s_{m-1}} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b)\, T_j^{l-k} e^{-\lambda_m \tau} d\tau,$$

$$j = 1, \dots, n-1, \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial F_m^k}{\partial T_j} = \tilde{u} \sum_{l=k}^{s_{m-1}} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b)\, T_j^{l-k} e^{-\lambda_m \tau} d\tau.$$

Пусть для данной начальной точки $x = x(0)$ и собственных значений $\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0$ матрицы A моменты переключения $T_1^0, \dots, T_q^0$. Так как начальная точка находится вне поверхности переключения и быстродействие оптимальное, то выполняются неравенства $0 < \mathrm{T}_1 < \mathrm{T}_2 < \dots < \mathrm{T}_n = \Theta$.

Якобиан системы (3.3)

$$J = \frac{D(F)}{D(T)} =$$

$$\begin{vmatrix} (-1)^{n+1} 2\tilde{u}\left(z_1^{S_1-1}, b\right) e^{-\lambda_1 T_1} & \vdots & \tilde{u}\left(z_1^{S_1-1}, b\right) e^{-\lambda_1 T_n}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ (-1)^{n+1} 2\tilde{u} \sum_{l=0}^{s_1-1} \frac{(-1)^l}{l!} \left(z_1^l, b\right) T_1^l e^{-\lambda_1 T_1} & \vdots & \tilde{u} \sum_{l=0}^{s_1-1} \frac{(-1)^l}{l!} \left(z_1^l, b\right) T_n^l e^{-\lambda_1 T_n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ (-1)^{n+1} 2\tilde{u} \left(z_q^{S_q-1}, b\right) e^{-\lambda_q T_1} & \vdots & \tilde{u} \left(z_q^{S_q-1}, b\right) e^{-\lambda_q T_n}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ (-1)^{n+1} 2\tilde{u} \sum_{l=0}^{s_q-1} \frac{(-1)^l}{l!} \left(z_q^l, b\right) T_1^l e^{-\lambda_q T_1} & \vdots & \tilde{u} \sum_{l=0}^{s_q-1} \frac{(-1)^l}{l!} \left(z_1^l, b\right) T_n^l e^{-\lambda_q T_n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{2}{3}n(n-1)} 2^{n-1} \tilde{u}^n RP \begin{vmatrix} e^{-\lambda_1 T_1} & \vdots & e^{-\lambda_1 T_n}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ T_1^{s_1-1} e^{-\lambda_1 T_1} & \vdots & T_n^{s_1-1} e^{-\lambda_1 T_n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ e^{-\lambda_q T_1} & \vdots & e^{-\lambda_q T_n}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ T_1^{s_q-1} e^{-\lambda_q T_1} & \vdots & T_n^{s_q-1} e^{-\lambda_q T_n} \end{vmatrix}$$

Здесь $R = \left(z_1^{s_1-1}, b\right)^{s_1} \dots \left(z_1^{s_q-1}, b\right)^{s_q} \neq 0$; так как система (3) управляемая;

$$F = \frac{(-1)^{S_1-1}}{(S_1-1)!} \frac{(-1)^{S_1-2}}{(S_1-2)!} \dots 1 \dots \frac{(-1)^{s_q-1}}{\left(s_q-1\right)!} \frac{(-1)^{s_q-2}}{(s_q-2)!} \dots \neq 0$$

полученный определитель представляет собой систему функций Чебышева и, следовательно, отличен от нуля при $T_1 < \mathrm{T}_2 < \ldots < \mathrm{T}_n$ и попарно неравных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Следовательно Якобиан системы (3.3)

$$J = \frac{D(F)}{D(T)} \neq 0$$

в точке

$$(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_q^0; T_1^0, \ldots, T_n^0).$$

В силу теоремы о неявных функциях, система (3.3 определяет в некоторой, окрестности точки $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_q^0)$ однозначные функции $T_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$которые являются непрерывными и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.

Теорема доказана. ■

3.2 Непрерывная зависимость решения задачи управления от параметра и начальных данных.

Рассмотрим более общую задачу — задачу отыскания минимума функционала

$$J(u, x_0, \text{л}) = \int_0^T f_0\,(x(t), u(t), \lambda(t), \lambda dt \tag{3.5}$$

где

$$\dot{x} \; = \; f(x, u, \lambda), \tag{3.6}$$

$$u(t) \in \Omega, \qquad x(0 = x_0), \qquad x(T) = x_1,$$

здесь $\quad x = (x^1, \ldots, x^n) \in E_n, u = (u^1, \ldots, u^\tau) \in E_\tau,$

$$f = (f_1, \ldots, f_n \in E_n, \lambda^1, \ldots \lambda^m) \in E_m,$$

$\Omega -$ ограниченное замкнутой множество E_τ, $\qquad T -$ свободноб

$$u(t) - \text{ измеримая функция.}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $f_0(x,u,\lambda)$ и $f(x,u,\lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по х и λ и непрерывны по и при всех $x \in E_n, \lambda \in E_m, u \in \Omega$.

Каждому значению параметра $\lambda \in E_m$и каждой точке $x_0 \in E_n$, из которой можно попасть в точку $x \in E_n$, в силу системы (3.6), за конечное время T, сопоставим наименьшее значение функционала (3.5). Такую-функцию обозначим через $\mathrm{F}(x_0,\lambda)$, т.е.

$$\mathrm{F}(x_0,\lambda) = inf_{u \in \Omega} \int_0^{\mathrm{T}} f_0(x,u,\lambda)\, dt \qquad (3.7)$$

В работе [21] доказана непрерывная зависимость функции F(x0, λ) от начальной точки x_0. Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости оптимального значения функционала (3.5) от двух переменных x0 и λ,

Обозначим через $B(\mu,x_1,\lambda)$ область управляемости системы (3.6) в точку за время, не большее μ Пусть x_1 — точка покоя системы (3.6) при $\lambda = \lambda_0$, т.е. $f(x_1,u_0,\lambda_0) = 0$ (u_0 — внутренняя точка множества Ω). Будем полагать, что точка x_1— внутренняя точка множества $B(\mu,x_1,\lambda)$.

Пусть L — множество точек A ∈ E_m, для которых существуют управления $u(t,\lambda)$, позволяющие перевести точку x_0 в точку x_1за конечное время, а C — множество точек $x \in \mathrm{E}_n$ которые можно перевести в точку x_1 за конечное время: Рассмотрим те точки множества $C \times L$, для которых время $\mathrm{T}(\mathrm{x},\lambda)$ движения по оптимальной траектории задачи (3.5)-(3.6) из точки x_0 в точку x_1 не более, чем $\mathrm{T}_0 < \infty$, если таковая существует. Если же оптимального управления, переводящего x_0 в x_1 для данной точки x_0 и данного λ не существует, то рассмотрим минимизирующую последовательность управлений $\{u_k\}, \text{к} = 1,2,\ldots$, переводящих точку x_0 в точку x_0 по траекториям $\{x_k(t,\lambda)\}$ за время $\{T_k(x_o,\lambda)\}$. Пусть минимизирующая последовательность управлений такова, что $\mathrm{T}_k(x_0,\lambda) \le T_0 < \infty, \text{к} = 1,2,\ldots$. Совокупность описанных выше точек обозначим через $\mathrm{M} = \mathrm{C}(\mathrm{T}_0) \times L(T_0)$. В дальнейшем будем предполагать, что множество $\mathrm{M} = \mathrm{C}(\mathrm{T}_0) \times L(T_0)$ограничено (в противном случае рассматриваем его любую ограниченную часть), т.е. М ∈ G, где G — ограниченный замкнутый шар. **Теорема 3.1** Если точка x_1 является внутренней точкой в области управляемости $B(\mu, x_1, \lambda)$ при всех $\mu \le \mu_0$ и всех $\lambda \in L(T_0)$, то функция $F(x_0, \lambda)$ непрерывна на множестве $\mathrm{M} = \mathrm{C}(\mathrm{T}_0) \times L(T_0)$.

Доказательство. Покажем, что при $x_0 \in \mathrm{C}(\mathrm{T}_0)$ и $\lambda_0 \in L(T_0)$ функция $F(x_0, \lambda)$ непрерывна, т.е. для любого наперед заданного $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$-\epsilon < F(x_0, \lambda_0) - F(y, \lambda) < \epsilon \tag{3.8}$$

если $|x_0 - y| < \delta, |\lambda_0 - \lambda| < \delta$ и $\mathrm{y} \in \mathrm{C}(\mathrm{T}_0),\ \lambda \in L(T_0)$.

Зададим $\epsilon > 0$. Докажем сначала справедливость левой части неравенства (3.4). Пусть $\{u_k(t)\}$ минимизирующая последовательность, переводящая согласно системе (3.9) при $\lambda = \lambda_0$точку x_0 в точку x_1 по траекториям $\{x_k\}$ за время $\mathrm{T}_k = \mathrm{T}_k(\mathrm{x}_0, \lambda_0) \le T_0 \le \infty\ (k = 1,2, \dots)$. Поскольку

$$\mathrm{F}(x_0, \lambda) = \inf_{u \in \Omega} \int_0^{\mathrm{T}} f_0(x(\tau), u(\tau), \lambda_0)\, d\tau$$

то можно выбрать так k, чтобы

$$J(u_k, x_0, \lambda_0) - F(x_0, \lambda_0) < \frac{1}{2}\epsilon \tag{3.9}$$

$$(J(u_k, x_0, \lambda_0) = \int_0^{T_k} f_0(x_k(\tau), u_k(\tau)\lambda_0) d\tau, \qquad x_k(0) = x_0, x_k(T_k) = x_1)$$

Определим на отрезке $[0; T_k]$ решение $y_k(t)$ системы (3.6) при $\lambda \ne \lambda_0$, $u(t) = u_k(t)$ и $y(0) = y$. Функции $x_k(t) b\ y_k(t)$можно записать в виде:

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^{t} f(x_k(\tau), u_k(\tau)\lambda_0) d\tau,$$

$$y_k(t) = y + \int_0^t f(y_k(\tau), u_k(t\,), \lambda)d\tau.$$

В силу предположения $|x_k(t) - y_k(t)| =$

$$\left| x_0 + \int_0^t f(x_k(\tau), u_k(\tau)\lambda_0)d\tau - y - \int_0^t f(y_k(\tau), u_k(t\,), \lambda)d\tau \right| \le$$

$$\le |x_0 - y| + L_2|\lambda_0 - \lambda|T_0 + L_1 \int_0^t |x_k(\tau) - y_k(\tau)|d\tau,$$

где $L_1 и\ L_2 -$ *константы Липшица*.

По лемме Гронуолла-Беллмана можно записать:

$$|x_k(t) - y_k(t)| \le (|x_0 - y| + L_2|\lambda_0 - \lambda|T_0)e^{L_1 T_0} \qquad (3.10)$$

Так как точка x_1 — внутренняя в множестве $B(\mu, x_1, \lambda)$, то существует шар $S(x_1, r(\mu))$ с центром в точке x_1 радиуса $r(\mu)$, принадлежащий множеству $B(\mu, x_1, \lambda)$. Потребуем, чтобы

$$\delta < \min\{\frac{r(\mu)e^{-L_1 T_0}}{2}\ ; \frac{r(\mu)e^{-L_1 T_0}}{2L_2 T_0}\},$$

тогда, полагая $|\lambda_0 - \ \lambda| < \ \delta$ и $|x_0 - \ y| < \delta,$ получим:

$$|x_k(T_k) - y_k(T_k)| = |x_1 - y_k(T_k)| < r(\mu).$$

Таким образом, точка $y_k(T_k)$ принадлежит шару $S(x_1, r(\mu))$, а так как $S\big(x_1, r(\mu)\big) \subseteq B(\mu, x_1, \lambda),$ то точку $y_k(T_k)$ можно перевести некоторым допустимым управлением $\bar{u}_k(t)$ в точку x_1 в силу системы (3.6) при $\lambda \ne \lambda_0$ за время $\mu \le \mu$.

Обозначим через $\omega_k(t)$ следующее управление:

$$\omega_k(t) = \{ \begin{array}{c} u_k(t), 0 \le t \le T_k \\ \bar{u}_k(t), T_k \le t \le T_k + \mu_{1.} \end{array}$$

Управление $\omega_k(t)$ переводит за время $T_k + \mu_1$ точку y в точку x_1 в силу систему (3.9) при $\lambda \ne \lambda_0$ по траектории

$$Y_k = \{ \begin{matrix} y_k(t), 0 \leq t \leq T_k \\ \overline{y}_k(t), T_k \leq t \leq T_k + \mu. \end{matrix}$$

Покажем, что значение функционала $J(\omega_k(t), y, \lambda)$ близко к $F_0(x_0, \lambda_0)$.

Оценим величину

$$A = |J(\omega_k, y, \lambda) - J(u_k, x_0, \lambda_0)| =$$

$$= \left| \int_0^{T_k+\mu_1} f_0\,(Y_k(\tau), \omega_k(\tau)\lambda)d\tau - \int_0^{T_k} f_0(x_k(\tau), u_k, \lambda_0)d\tau \right|. \qquad (3.11)$$

Нетрудно видеть, что

$$A \leq \int_0^{T_k} |f_0(y_k(\tau), u_k, \lambda) - f_0(x_k(\text{ф}), u_k(\tau)\lambda_0)|d\tau + \int_{T_k}^{T_k+\mu_1} |f_0(\overline{y_k}(\tau)\overline{u_k}(\tau)\lambda)|d\tau.$$

В силу предположений можно записать, что

$$|f_0(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau)\lambda)| \leq L_3|y_k(\tau) - x_k(\tau)|,$$

$$|f_0(x_k(\tau), u_k(\tau)\lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)| \leq L_4|\lambda_0 - \lambda|.$$

где L_3и L_4 - константы Липшица.

Тогда

$$\int_0^{T_k} |f_0(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)|dr \leq$$

$$\leq L_3(|x_0 - y| + L_1|\lambda_0 - \lambda|T_0)e^{L_1T_0}T_k + L_4|\lambda_0 - \lambda|T_k \leq$$

$$\leq T_0[|L_3e^{L_1T_0}|x_0 - y_0| + (L_1L_3T_0e^{L_1T_0} + L_4)|\lambda_0 - \lambda||]$$

Если теперь на δ наложить дополнительные ограничение, чтобы

$$\delta < \min\left\{\frac{\epsilon e^{-L_1T_0}}{8T_0L_3}; \frac{\epsilon}{8T_0(L_1L_3T_0e^{L_1T_0} + L_4)}\right\},$$

то при $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$ и $|x_0 - y| < \delta$ выполняется неравенство

$$\int_0^{T_k} |f_0(y_k(\tau), u_k(\tau)\lambda) - f_0(x_0(\tau), u_k(\tau)\lambda_0)|d\tau < \frac{\epsilon}{4}.$$

Оценим второе слагаемое выражения (3.10), для чего обозначим через $M_0 = \max|f_0(x, u, \lambda)|$ при $u \in \Omega, \lambda \in (T_0), x \in B(\mu, x, \lambda)$, и положим $\mu = \frac{\epsilon}{4M_0}$тогда

$$\int_{T_k}^{T_k+\mu_1} |f_0(\overline{y_k}(\tau), \overline{u_k}(\tau)\lambda)|d\tau \leq M_0\mu = \frac{\epsilon}{4}.$$

Поэтому $A = |J(w_k, y\,\lambda) - J(u_k, x_0, \lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ но так как $J(w_k, y\,\lambda) \geq F(y_0, \lambda)$, то из этих неравенств и неравенства (3.7) следует, что $-\epsilon < F(x_0, \lambda_0) - F(y, \lambda)$, если $|\lambda_0 - \lambda| < \delta\ b|x_0 - x| < \delta,$ где $-$ δ любое положительное число такое, что

$$\delta < \min\left\{\frac{r\left(\frac{\epsilon}{4M_0}\right)e^{-L_1T_0}}{2}; \frac{r\left(\frac{\epsilon}{4M_0}\right)e^{-L_1T_0}}{2L_2T_0}; \frac{\epsilon e^{-L_1T_0}}{8L_3T_0}; \frac{\epsilon}{8T_0(L_1L_3T_0e^{L_1T_0} + L_4)}\right\}$$

Справедливость правой части неравенства (3.8) доказывается аналогично. Пусть $\{v_1\}$ минимизирующая последовательность, переводящая согласно системе (3.9) при $\lambda \neq \lambda_0$ точку y в y_1 по траекториям $\{yl(t)\}$ за время $T_l = \mathrm{T}_l(y, \lambda) \leq \mathrm{T}_0 < \infty, l = 1,2, \dots$. Снова выбираем такое l, чтобы выполнялось неравенство

$$J(v_l, y, \lambda) - F(y, \lambda) < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.12}$$

$\epsilon, \mu, \delta -$ прежние.

Затем из точки x_0 определяем решение уравнения

$$z_l = f(z_l(\dot{t}), v_l(t), \lambda)$$

на отрезке $[0; \mathrm{T}_l]$. Применяя, как и ранее, лемму Гронуолла-Беллмана, можно показать, что

$$|z_l(t) - y_l(t)| < \delta(1 + L_2T_0)e^{L_1T_0},$$

тогда

$$|z_l(T_l) - y_l(T_l)| = |z_l(T_l) - x_1| < r(\frac{\epsilon}{4M_0})$$

Следовательно, точку $z_l(T_l)$ можно перевести по траектории $\overline{z_l}(t)$ в силу системы (3.9) при $\lambda = \lambda_0$ допустимым управлением $\overline{v_l}(t)$в точку x_1 за время $\mu_2 \leq \mu = \frac{\epsilon}{4M_0}$. Как и ранее, можно показать, что

$$\mathrm{A} = |J\,(\overline{w}_k, x_0, \lambda_0) - J(v_l, y, \lambda)| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.13}$$

где

$$\overline{w}_l(t) = \begin{Bmatrix} v_l(t), \leq t \leq T_l \\ \overline{v_l}(t), T_l \leq t \leq T_l + \mu_2 \end{Bmatrix}$$

Тогда из неравенств (2.8), (3.13) и неравенства $J(\overline{w}_l, x_0, \lambda_0) \geq F\{x_0, \lambda_0)$ следует, что $F(x_0, \lambda_0) — F(y, \lambda) < \epsilon$, если $|x_0 - y| < \delta$ и $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$. Теорема доказана.

3.3 Численный метод решения задачи оптимального быстродействия, основанный на точном решении.

Пусть для задачи (3) матрица A имеет спектр $\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0 (1 \leq q \leq n)$ и известны моменты переключения $T_1^0, T_2^0, \dots, T_n^0$. Рассмотрим задачу

оптимального быстродействия:

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad |u| \leq 1, \qquad x \epsilon R_n$$

$$x(0) = x, x(\Theta) = 0, \Theta \to min \tag{3.14}$$

$$rank(b, \widetilde{A}b, \dots, \widetilde{A}^{n-1}b) = n,$$

Пусть матраца $\widetilde{A}$ имеет спектр $\lambda_1, \dots, \lambda_q, (1 \leq 1 \leq n)$, незначительно отличающийся от спектра матрицы A, причем кратность спектра матриц $\widetilde{A}$ и A совпадают и начальные точки $x(0) = x$ для задач (3) и (3.14) лежат по одну сторону от поверхности переключения.

Гладкая зависимость моментов переключения от спектра матрицы позволяет по известным моментам переключения задачи (3), используя метод Ньютона, находить моменты переключения для задачи (3.14).

Представим спектры матриц $\widetilde{A}$ и A в виде векторов $\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$и $\lambda^0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0)$ соответственно; пусть векторы T $(T_1, \dots, T_n)$ и T^0 $(T_1^0, \dots, T_n^0)$ задают моменты переключения длл задач (3.1) и (1) соответственно. Обозначим $\Delta = T - T°$ и $\Delta\lambda = \lambda - \lambda^0$ (предполагается, что $|\Delta\lambda|$ и $|\Delta$ достаточно малы). Представим систему функций (3.3) в виде векторного уравнения (3), где $F(\lambda, T)$ — n-мерный вектор, координатами которого являются левые части уравнений (3.3).

Разложим функцию $F(\lambda, T)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(\lambda_1, \dots, \lambda_q, T_1^0, \dots, T_n^0)$ по степеням Δ и оставим только линейную часть разложения. Учитывая, что $F(\lambda, T) = 0$, получим:

$$F(\lambda, T^0) + F'_T(\lambda, T^0)\Delta \approx 0, \tag{3.15}$$

где $F'_T(\lambda, T^0)$ – матрица Якоби $n \times n$.

Как было доказано $\det\left(F'_T(\lambda, T^0)\right) \neq 0, \det\left(F'_T(\lambda, T^0)\right) \neq 0$, поэтому существует обратная матрица $F'_T(\lambda, T^0)^{-1}$.

Тогда из (3.2) получим

$$\Delta \approx -\left(F'_T(\lambda, T^0)\right)^{-1} F(\lambda, T^0) \tag{3.16}$$

Таким образом можно построить итерационный процесс:

$$T^{(p+1)} = T^p + \Delta^p, p = 0,1, \dots, \tag{3.17}$$

$$\Delta^p = -\left(F'_T\left(\lambda, T^{(p)}\right)\right)^{-1} F(\lambda, T^0) \tag{3.18}$$

Здесь по известному начальному приближению $T^{(0)} = T^0$ из (3.18) находим Δ^0 и подставляем в (3.17) и т.д. В результате получаем последовательность $T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(p)}$ которая сходится к T, если точка λ находится достаточно близко к λ^0.

Для системы функций (3.3) линейная часть (3.15) имеет вид:

$$(-1)^n \tilde{u}(x, z_m^k) + \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int_{T_{j-1}^0}^{T_j^0} r^{l-k} e^{-\lambda_m r}\, dr +$$

$$+ \sum_{l=k}^{s_m-1} [\frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b)(2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \left(T_j^0\right)^{l-k} e^{-\lambda_m T_j^0} \Delta_j +$$

$$+(-1)^n (T_n^0)^{l-k} e^{-\lambda_m T_n^0} \Delta_n)] = 0,$$

$$m = 1, \dots, q; k = 0, \dots, s_m - 1.$$

Из последнего равенства, полагая, что $T_j^{(0)} = T_j^0$ и $\Delta_j^{(0)} = \Delta_j, j = 1, \ldots, n,$ для итерационного процесса (3.17) можно выписать систему из n линейных уравнений относительно $\Delta_j^{(p)}$:

$$2\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=k}^{s_m-1}\frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!}\,(z_m^l,b)\left(T_j^{(p)}\right)^{l-k}\,e^{-\lambda_m T_j^{(p)}}\,\Delta_j^{(p)} +$$

$$\sum_{l=k}^{s_m-1}\frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!}\,(z_m^l,b)\left(T_n^{(p)}\right)^{l-k}\,e^{-\lambda_m T_n^{(p)}}\,\Delta_n^{(p)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\tilde{u}(x, z_m^k) - \sum_{l=k}^{S_m-1}\frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!}\,(z_m^l,b)\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\int_{T^{(p)}}^{T_j^{(p)}} r^{l-k}e^{-\lambda_m r}dr,$$

$$m = 1, \ldots, q; k = 0, \ldots, s_m - 1$$

Учитывая, что

$$\int_{T_{j-1}}^{T_j} r^{l-k}\,e^{-\lambda_m r} =$$

$$= -(-l-k)!\left(e^{-\lambda_m T_j}\sum_{i=0}^{l-k}\frac{T_j^i}{i!\,\lambda^{l-k-i+1}} - e^{-\lambda_m T_{j-1}}\sum_{i=0}^{l-k}\frac{T_{j-1}^i}{i!\,\lambda^{l-k-i+1}}\right),$$

систему уравнений относительно $\Delta_j^{(p)}$ можно записать в виде:

$$2\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=k}^{s_m-1}\frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!}\,(z_m^l,b)\left(T_j^{(p)}\right)^{l-k}\,e^{-\lambda_m T_j^{(p)}}\,\Delta_j^{(p)} +$$

$$\sum_{l=k}^{s_m-1}\frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!}\,(z_m^l,b)\left(T_n^{(p)}\right)^{l-k}\,e^{-\lambda_m T_n^{(p)}}\,\Delta_n^{(p)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\tilde{u}(x, z_m^k) + \sum_{l=k}^{s_m-1} (-1)^{l-k} \, (z_m^l, b) \sum_{i=0}^{l-k} [\frac{1}{i! \, \lambda^{l-k-i+1}}$$

$$(2\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \left(T_j^{(p)}\right)^i e^{-\lambda_m T_j^{(p)}} +$$

$$+(-1)^n \left(T_n^{(p)}\right)^i e^{-\lambda_m T_n^{(p)}} + \frac{i!}{\lambda^i})],$$

$$m = 1, \dots; k = 0, \dots, s_m - 1.$$

Ниже рассмотрим два частных случая численного решения системы (3).

Рассмотрим систему (3) у которой матрица А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{а вектор } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда система (3) запишется в виде

$$\dot{x} = \lambda_1 x_1 + u, \qquad |u| \le 1,$$

$$\dot{x}_i = x_{i-1} + \lambda_i x_i, \tag{3.19}$$

$$i = 2, \dots, n.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ имее каноническую систему, для которой известно аналитическое решение. Найдем расчетные формулы

для численного решения задачи (3.19). За начальное приближение будем принимать решение канонической задачи.

Предположим, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,, матрицы А попарно неравны и отличны от нуля.

Возьмем матрицу A^*, сопряженную матрице А, и ее собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ обозначим че рез $V_1, V_2, .., V_n$, соответственно, они имеют вид:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 - \lambda_1 \\ (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n - \lambda_1 \\ (\lambda_n - \lambda_2)(\lambda_n - \lambda_1)0 \\ \vdots \\ \prod_{j=1}^{k-1}(\lambda_n - \lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части равенства (1.2) на собственный вектор V_i матрицы A^* :

$$(V_i, x) = -\sum_{j-1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} \left(V_i, e^{-Ar} bu(r)\right) dr \qquad (3.20)$$

Так, как

$$\left(V_i, e^{-Ar} bu(r)\right) = \left(e^{-A*r} V_i bu\ (r)\right) = e^{-\lambda_i r}(V_i, b)u(r),$$

то равенство (3.20) можно записать в виде:

$$(V_i, x) = -\sum_{j-1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} \left(e^{-\lambda_i r}(V_i, b)u(r)\right) dr\ .$$

Проинтегрировав в правой части, получим:

$$(V_i, x) = (-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda_i}\left[2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + (-1)^n e^{-\lambda_i T_j} + 1\right], \qquad (3.21)$$

$$i = 1, \ldots, n$$

Используя выражения для собственных векторов можно записать :

$$(V_1, x) = x_1,$$

$$(V_i, x) = x_1 = \textstyle\sum_{k=2}^{i} \prod_{j=1}^{k-1}\left(\lambda_i - \lambda_j\right) x_k, \qquad (3.22)$$

$$i = 2, \ldots, n.$$

Из равенства (3.21) и (3.22) получаем:

$$x_1 = (-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda_i}\left[2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + (-1)^n e^{-\lambda_i T_j} + 1\right],$$

$$x_i = \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1}(\lambda_i-\lambda_j)}\Big((-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda_i}\big[2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + (-1)^n e^{-\lambda_i T_j} + 1\big] - x_1 - \sum_{k=2}^{i-1}\prod_{j=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_j)x_k\Big), i = 2, \dots, n. \qquad (3.22a)$$

а из равенств (3.21) получаем:

$$\frac{(-1)^n\tilde{u}\lambda_i(V_i,x)-1}{2} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i T_n}, \qquad (3.23)$$

Пусть при спектре $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0$ матрицы А известны моменты переключения $T_1^0, T_2^0, \dots, T_n^0$. Предположим, что спектру $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,, соответствуют моменты переключения $T_j = T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)}, j = 1, \dots, n,$ тогда равенства (3.23) запишутся в виде:

$$\frac{(-1)^n\tilde{u}\lambda_i(V_i,x) - 1}{2} = \sum_{j-1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i\left(T_j^{(0)}+\Delta_j^{(0)}\right)} +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i\left(T_j^{(0)}+\Delta_j^{(0)}\right)}, i = 1, \dots, n.$$

Разложим правую часть полученного равенства в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами разложения:

$$\frac{(-1)^n\tilde{u}\lambda_i(V_i,x) - 1}{2} = \sum_{j-1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} - \Delta_j^{(0)}\lambda_i e^{\lambda_i T_j^{(0)}} +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\left(e^{-\lambda_i T_n^{(0)}} \Delta_n^{(0)}\lambda_i e^{\lambda_i T_n^{(0)}}\right), i = 1, \dots, n.$$

Откуда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta_1^{(0)}, \Delta_2^{(0)}, \dots, \Delta_n^{(0)}$:

$$\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^n\Delta_j^{(0)} e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2}\Delta_n^{(0)} e^{-\lambda_i T_n^{(0)}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i T_n^{(0)}} - \frac{(-1)^n\tilde{u}\lambda_i(V_i,x) - 1}{2},$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Решаем эту систему относительно $\Delta_j^{(0)}, (j = 1, \dots, n)$ используя метод Гаусса или любой другой, метод решения систем линейных алгебраических уравнений, и находим $T_j^{(1)} = T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)}. T_j^{(1)}$ принимаем за следующее приближение и, таким образом, получаем итерационный процесс, определяемый системой уравнений:

$$\lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \Delta_j^{(m)} e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2} \Delta_n^{(m)} e^{-\lambda_i T_n^{(m)}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i T_n^{(0)}} - \frac{(-1)^n \tilde{u} \lambda_i (V_i, x) - 1}{2},$$

$$i = 1, \dots, n, \qquad m = 0,1, \dots,$$

из которой выходит что $\Delta_j^{(m)}$, а по ним $T_j^{(m+1)} = T_j^{(m)} + \Delta_j^{(m)}, (i = 1, \dots, n; m = 0,1, \dots)$.

Рассмотрим теперь случай, когда спектр матрицы А системы (3.19) кратный, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda \neq 0$. Тогда эта система запишется в виде:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \lambda x_1 + u, \qquad |u| \leq 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1} + \lambda x_i, \\ i = 2, \dots, n. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Учитывая, что для системы (3.24)

$$e^{-Ar} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -r \\ \frac{r^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^n r^n}{n!} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -r \\ \vdots \\ \frac{(1)^{n-1} r^{n-1}}{(n-1)!} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} e^{-\lambda t},$$

решение (1.1) системы (3.24) можно записать в виде:

$$x_i = \frac{(-1)^i}{(i-1)!} \int_0^{\Theta} r^{i-1} e^{-\lambda r} u(r) dr, i = 1, \dots, n. \tag{3.25}$$

Интегрируя правые части выражений (3.25), получим:

$$x_1 = (-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda T_j} + (-1)^n e^{-\lambda T_n} + 1\right),$$

$$x_i = \frac{1}{\lambda}\left[(-1)^{n+i-1}\frac{\tilde{u}}{(i-1)!}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j T_j^{i-1} e^{-\lambda T_j} + (-1)^n T_n^{i-1} e^{-\lambda T_n}\right) - x_{i-1}\right] \tag{3.26}$$

$$i = 2, \dots, n.$$

Перепишем равенства (3.26) в виде

$$\frac{(-1)^n \tilde{u}\lambda x_1 - 1}{2} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda T_j} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda T_n},$$

$$\frac{(-1)^{n+i-1}\tilde{u}(i-1)!\,(\lambda x_i + x_{i-1})}{2} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j T_j^{i-1} e^{-\lambda T_j} + \frac{(-1)^n}{2} T_n^{i-1} e^{-\lambda T_n},$$

$$i = 2, \dots, n.$$

Как и в случае некратного спектра, предположим, что для собственного значения λ° матрицы системы (3.24) известны моменты переключения

$T_1^{(0)}, T_1^{(0)}, \dots, T_n^{(0)}$. Пусть собственному значению λ соответствуют моменты переключения $T_j = T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)}, j = 1, \dots, n.$ Проводя те же самые рассуждения, что и в случае некратного спектра, получим систему, линейных уравнений для определения $\Delta_j^{(m)}$для случая кратного спектра.

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \Delta_j^{(m)} e^{-\lambda T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2}\Delta_n^{(m)} e^{-\lambda T_n^{(m)}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(-1)^n \tilde{u}\lambda x_1 - 1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-}\lambda T_j^{(m)} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda T_n^{(m)}}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \left(T_j^{(m)}\right)^{i-2}\left(\lambda T_j^{(m)} - i + 1\right) e^{-\lambda T_j^{(m)}} \Delta_j^{(m)} + \tag{3.27}$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\left(T_n^{(m)}\right)^{i-2}\left(\lambda T_n^{(m)}-i+1\right)e^{-\lambda T_n^{(m)}}\Delta_n^{(m)}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+i}\tilde{u}(i-1)!\,(\lambda x_i+x_{i-1})}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\left(T_j^{(m)}\right)^{i-1}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\left(T_n^{(m)}\right)^{i-1}e^{-\lambda T_n^{(m)}},i=2,\dots,n.$$

По найденным из системы (3.27) $\Delta_j^{(m)}$находим

$$T_j^{(m+1)}=T_j^{(m)}+\Delta_j^{(m)},j=1,\dots,n,m=0,1\ldots.$$

При заданной точности ϵ, вычисления производятся как для случая кратного, так и для случая некратного спектра, до тех пор, пока на m-ом шаге не будет выполнено одно из неравенств:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_i^{(m)}\right)^2}<\epsilon \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^{(m)}\right)^2}<\epsilon$$

где $x_i=x_i(0)$ — координаты начальной точки, а $x_i^{(m)}$определяются из формул (3.22a) для случая некратного спектра или из формул (3.26) для случая кратного спектра заменой x* на в указанных формулах.

За начальное приближение принимаются моменты переключения, соответствующие канонической системе, которые можно найти аналитически. Если расстояние между точками $0(0,0,\dots,0)$ и $L(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ достаточно велико, то описанный метод может расходиться. В этом случае отрезок $[0,L]$ разбивают на конечное число достаточно малых отрезков и на каждом из этих отрезков применяем описанный метод, причем, на очередном шаге за начальное приближение берем моменты переключения, полученные на предыдущем шаге.

Пусть для канонической системы моменты переключения $T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \dots, T_n^{(0)}$.

Тогда для системы

$$\dot{x} = \lambda x_1 + u, \qquad |u| \le 1,$$

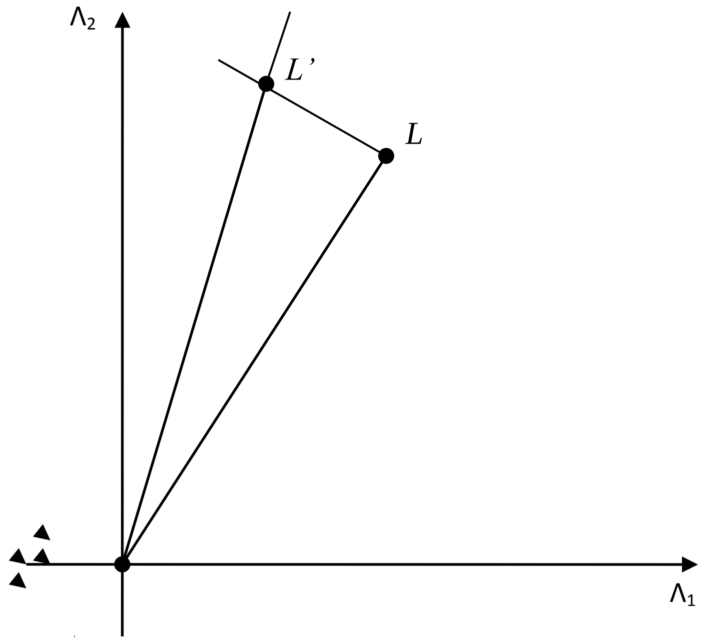
$$\dot{x}_i = x_{i-1} + \lambda x_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

известно аналитическое решение и моменты переключения могут быть найдены по формуле:

$$T_j = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(-\lambda T_j^{(0)} + 1\right). \tag{3.28}$$

Пусть точка $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n -$ собственные значения матрицы системы (3.19) или (3.24) находятся в окрестности прямой

$$\frac{\Lambda_1}{1} = \frac{\Lambda_2}{2} = \dots = \frac{\Lambda_n}{n}. \tag{3.29}$$



Пусть точка $L'(\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda)$, находящаяся на прямой (3.29), - ближайшая к точке L. Тогда итерационный процесс удобно строить по отрезку, соединяющему точки L' и L, при этом, за начальное приближение на первом шаге следует брать моменты переключения, соответствующие точке L', т.е.

соответствующие спектру $\lambda, 2\lambda, \ldots, n\lambda$. Это удобно использовать, когда расстояние от точки L до L' меньше, чем до начала координат. .

Рассмотрим примеры.

Для канонической задачи

$$\dot{x_1} = u, \qquad |u| \le 1,$$

$$\dot{x_2} = \dot{x_1},$$

$$\dot{x_3} = \dot{x_2},$$

$$x(0) = (1;1;1), x(\Theta) = (0;0;0), \Theta \to min,$$

моменты переключения

$$T_1 \approx 2{,}77087; \quad T_2 \approx 5{,}82080; \quad T_3 \approx 7{,}09986 \tag{3.30}$$

и управление на конечном промежутке $\tilde{u} = -1$.

Используя эти данные, описанным методом было получено решение для задачи

$$\dot{x_1} = -102x_1 + u, \qquad |u| \le 1,$$

$$\dot{x_2} = -102x_2,$$

$$\dot{x_3} = -102x_3,$$

$$x(0) = (1;1;1), x(\Theta) = (0;0;0), \Theta \to min,$$

$$T_1 \approx 0{,}12153; \quad T_2 \approx 0{,}13593; \quad T_3 \approx 0{,}14017; \tilde{u} \le -1.$$

Вычисления проводились с шагом изменения λ, равным -0,5 и точность 10^{-5}.

Для задачи

$$\dot{x_1} = -6{,}2x_1 + u, \qquad |u| \le 1,$$

$$\dot{x_2} = -6{,}3x_2,$$

$$\dot{x_3} = -6{,}4x_3,$$

$$x(0) = (1;1;1), x(\Theta) = (0;0;0), \Theta \to min,$$

ближайшая точка на прямой (3.29) к точке $(-6{,}2;\ -6{,}3; -6{,}4)$ является точка

$$L(-2.71429; -5.42858; -8.14287).$$

Так как расстояние от точки $(-6{,}2;\ -6{,}3; -6{,}4)$ до начала координат больше, чем до точки L, то за начальное приближение удобнее брать на решение (3.30) каноническом системы, а, используя решение (3.30) и формулу (3.28 получить решение для системы

$$\dot{x_1} = -2{,}71429x_1 + u, \qquad |u| \leq 1,$$

$$\dot{x_2} = \ -5{,}42858x_2,$$

$$\dot{x_3} = -8{,}14287x_3,$$

$$T_1 \approx 0{,}78935; \quad T_2 \approx 1{,}03744; \quad T_3 \approx 1{,}10865;\ \tilde{u} \leq\ -1$$

которое принять за начальное приближение для задачи (3.19), а итерационный процесс строить по прямой, соединяющей точку *(-6,2; —6,3; -6,4)* с точкой L. Было получено решение задачи (3.19): $\mathrm{T}_1 \approx\ 0{,}87035$; $\mathrm{T}_2 \approx\ 1{,}08958$; $\mathrm{T}_3 \approx\ 1{,}15441$; $\tilde{u} = —1$; при этом отрезок прямой, соединяющий вышеуказанные точки, делился на четыре части, вычисления производились с точностью 10^{-5}.

4. ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для численной реализации методов был выбран программный продукт maple.

В ходе компьютерных экспериментов создаются разные подходы к задаче, анализируются частные решения, а также при программировании возможна сортировка фрагментов, которые требуют особой скорости, все это происходит с помощью программы maple, которая представляет для них удобную среду. С помощью программ можно создавать интегрированные среды, которые взаимодействуют с другими системами, а так же используют универсальные языки программирования высокого уровня. При окончательном результате произведенных расчетов, для оформления проделанной работы, можно использовать средства пакета maple, который предоставит возможность визуализировать полученные данные и подготовить иллюстрации для публикации.

Ниже представлена таблица, в которой сравниваются два метода.

Таблица 4.1

Порядок	**Шаг**	**Количество итераций**	
		От нуля	**От прямой**
5	0.01	318	**100**
6	0.01	334	**100**
6	0.1	80	**10**
7	0.01	351	**100**
8	0.01	370	**100**
8	0.03	180	**33**
8	0.05	Не сходится	**20**
9	0.01	390	**100**
10	0.01	412	**100**
10	0.1	Не сходится	**10**
11	0,01	434	**100**
11	0,1	Не сходится	**10**
12	0,01	459	**100**
12	0,1	Не сходится	**10**
13	0,01	484	**100**
13	**0,1**	**Не сходится**	**10**

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Атанс, М., Фалб, П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. 763 с.
2. Ахиезер, Н.И. Классическая проблема моментов. М.: Госиздат, физ.-мат. литературы, 1961. -310 с.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория): М.: Высшая школа, 2001. - 239 с.
4. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. -М. Изд-во МГУ 1978.
5. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1977. - 264 с.
6. Гамкрелидзе Р.В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1958. – Т.22, №4. – С. 447 – 474.
7. Коробов В.И. Метод функции управляемости. – М., - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.
8. Коробов В.И., Иванова Т.И. Отображение нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. Т. 8, №1. С. 42 – 57.
9. Коробов, В.И., Скляр, Г.М. Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке // Докл. АН СССР. 1989. — Т. 308.-№3,-С. 525-528.
10. Коробова Е.В., Скляр Г.М. Один конструктивный метод отображения нелинейных систем на линейные // теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1991. №55. – С. 68 – 74.
11. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов //Мат. сборник.-1987. - 134(176), №2(10). – с.186-206.
12. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. О нахождении оптимального времени и моментов переключения в задаче быстродействия //

Вестник Харьковского университета, серия «Математика, прикладная математики и механика». – 1999. - № 444, с. 24-43.

13. Коробов В.И., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем //Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999.- Т.6. № 3/4, с. 264-287.

14. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. - 551 с.

15. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.- М.: Наука, 1971. – 574 с.

16. Минюк С.А. О точном решении задачи быстродействия в случае линейных стационарных систем // Дифференциальные уравнения. 1996. - Т. 32, №12. - С. 1645 - 1652.

17. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976. – 362 с.

18. Скляр Е.В. О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные // Математическая физика, анализ, геометрия. 2001. - Т. 8, №2. - С. 205 – 214

19. Скляр Е.В., Флоринский В.В. Новые способы нахождения моментов переключения для некоторых задач быстродействия //IV Крымская Международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения". Тезисы докладов. Симферополь. - 1998. - С. 61.

20. Хайлов Е.Н. О моментах переключения экстремальных управлений в линейной задаче оптимального быстродействия // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 1996. -4. - С. 225 - 265.

21. Коробов В.И. О непрерывной зависимости решения задачи оптимального управления со свободным временем от начальных данных

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Численное решение для n = 12

От нуля.

```
> restart;n:=12;
```

$$n := 12$$

```
> Digits:=50:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

```
> opred:=proc(ga,dd);
if frac(n/2)=0 then
p:=n/2: de:=matrix(p,p);
for i from 1 to p do
for j from 1 to p do
de[i,j]:=ga[i+j]; od; od;
else
p:=(n+1)/2: de:=matrix (p,p):
for i from 1 to p do
for j from 1 to p do
de[i,j]:=ga[i+j-1]; od; od; fi;
dd:=det(de);
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
```

```
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
end:
```

```
Warning, `p` is implicitly declared local to procedure `opred`

Warning, `de` is implicitly declared local to procedure `opred`

Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `opred`

Warning, `j` is implicitly declared local to procedure `opred`

Error, (in minor) object too large
```

```
> i:='i':k:='k':l:='l':
> x:=vector(n,[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]);
```

$$x := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

```
> for l from 1 to 2 do u1:=2*l-3;
for k from 1 to n do
g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2; od;
i:='i':for k from 1 to n do
ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k; od;
```

```
opred(ga,dde);

s1:=evalf(fsolve(dde=0,q));

q[l]:=max(s1);dde:='dde';od:

> ga[0]:=-1:

> if q[1]>q[2] then q:=q[1];u1:=-1; else q:=q[2];u1:=1;fi;
```

$q := 89.439765427807951894965973190461618963207216597933$

$u1 := 1$

```
> T:=array(1..n,[]):

> i:='i':k:='k':j:='j':

for k from 1 to n do

g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2;g1[k]:=-g[k]: od:

i:='i':k:='k':for k from 1 to n do

ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k: ga1[k]:=(g1[k]-
sum(ga1[j]*g1[k-j],j=1..k-1))/k: od:

> k:='k':j:='j':l:='l':i:='i':

> if frac(n/2)=0 then

p:=n/2: deev:=matrix(p,p):deev1:=matrix(p+1,p+1):

for i from 1 to p-1 do

for j from 1 to p do

deev[i,j]:=ga[i+j]: od: od:j:='j':for j from 1 to p do

deev[p,j]:=t^(j-1): od;j:='j':i:='i':ga1[0]:=-1:

for i from 1 to p do

for j from 1 to p+1 do

deev1[i,j]:=ga1[i+j-2]: od: od:j:='j':for j from 1 to p+1 do

deev1[p+1,j]:=t^(j-1):od:ddeev:=det(deev):

momev:=solve(ddeev=0,t):j:='j':

ddeev1:=det(deev1):
```

```
for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:od:
momod:=solve(ddeev1=0,t):j:='j':
for j from 1 to p do T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:
else i:='i':j:='j':
p:=(n+1)/2: deod:=matrix (p,p): deod1:=matrix(p,p):
for i from 1 to p-1 do
for j from 1 to p do
deod[i,j]:=ga[i+j-1]:deod1[i,j]:=ga1[i+j-1]: od: od:
j:='j':
for j from 1 to p do
deod[p,j]:=t^(j-1):deod1[p,j]:=t^(j-1):od;
ddeod:=det(deod): ddeod1:=det(deod1):
momev:=solve(ddeod1=0,t):j:='j':
momod:=solve(ddeod=0,t):
for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:
T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:fi:
> j:='j':for j from 1 to n do
print(T[j]);od;
```

3.4978524040526791548903910906093800157937370944307

9.6433262892869758318569778222425649953507398544371

17.842057810178443558106585746905338356779642208202

27.572855045211219806120971165699882227060045179022

38.255741610725552746023014189872241069171299356342

49.263988608386739985477896231779252188125954804435

59.955062478552248896712365460983689150235288218579

69.706183730641667286479975661184890605632220224347

77.949835517452042953659627182893884321777022566149

84.2064492081112870321443525963488966927320259820 71

88.1121357745808985801711764012217632773520852655 79

89.4397654278079518949659731904616189632072165979 33

```
> vx:=array(1..n,[]);
```

$vx := \mathrm{array}(1 .. 12, [\ ])$

```
> llambda:=vector(n,[-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10,-11,-12]);
```

$llambda := [-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12]$

```
> A:=matrix(n,n):  B:=array(1..n,[]):
hp:=0.01:sch:=0:
for tp from hp by hp to 1 do
i:='i':
for i to n do
lambda[i]:=llambda[i]*tp; od:
i:='i':k:='k':j:='j':
vx[1]:=x[1]:
for i from 1 to n do
vx[i]:=x[1]+sum((product((lambda[i]-lambda[j]),j=1..k-1))*x[k],k=2..i):
od;
epsilon:=0.001: s:=epsilon+1:
while s>epsilon do
i:='i': j:='j':
for i from 1 to n do
for j from 1 to n-1 do
A[i,j]:=((-1)^j)*exp(-lambda[i]*T[j]):
od:
A[i,n]:=(-1)^n*(exp(-lambda[i]*T[n]))/2: od:
i:='i': j:='j': k:='k':
```

```
for i from 1 to n do

B[i]:=(sum((-1)^j*exp(-lambda[i]*T[j]),j=1..n-1)+((-1)^n)*exp(-
lambda[i]*T[n])/2-((-1)^n*u1*lambda[i]*vx[i]-1)/2)/lambda[i] od:

delta:=linsolve(A,B):sch:=sch+1:

i:='i':

for i from 1 to n do

T[i]:=T[i]+delta[i]:

od:

i:='i':

s:=sqrt(sum(delta[i]^2,i=1..n)):

od:

od:

> for i from 1 to n do print(T[i]) od:
```

1.5036000456819351765763692865259447493314180870823

2.3649330728285294835769372399515622436381120885488

2.9360915212915072877431970034423782207429397724424

3.3524571982680065733190861168330711416382288577428

3.6700978023523961719980920703047415757358686282039

3.9172890109578170090250996029551131086277068551526

4.1101370753579473350379624264563017417161623723940

4.2585332383053257916826948094841306067577202345698

4.3688129003176746429413189643557719811242640358785

4.4450773996257224835030077352863742550081421353485

4.4898958228496511391145936555289713258512576764047

4.5046843543073583621476773801245095387732911836213

```
> print(sch);
```

```
> print(delta);
```

[-0.73460875323548220010507153052975541706559116205599 10^{-5},
-0.00001873402113570595369791479824377733690018923983047 2,
-0.00003466674810952310251260841100224332332579981426675 3,
-0.00005439102729646037951105007646178072660300587795774 9,
-0.00007651715499527893811366068824233719447775319490756 9,
-0.00009946093000954713253508036231226644054192085107292 1,
-0.0001216795364175994132866675611574030415448697716773 2,
-0.0001417938214098837306077049130888072821412129453088 3,
-0.0001586478098379295796618846425148228894340484956914 7,
-0.0001713346752550162091046731089305157517065345213773 5,
-0.0001792058554536236045997330432986495496447381145377 9,
-0.0001818727113591449887927052295262515875920796877923 3]

```
> s;
```

0.00041825944709194630277501761038753898109755788860809

Приложение 2

От точки.

```
> restart;n:=12;
```

$n := 12$

```
> Digits:=50:
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> opred:=proc(ga,dd);
if frac(n/2)=0 then
p:=n/2: de:=matrix(p,p);
for i from 1 to p do
```

```
for j from 1 to p do
de[i,j]:=ga[i+j]; od; od;
else
p:=(n+1)/2: de:=matrix (p,p):
for i from 1 to p do
for j from 1 to p do
de[i,j]:=ga[i+j-1]; od; od; fi;
dd:=det(de);
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
### WARNING: `p` is implicitly declared local
### WARNING: `de` is implicitly declared local
### WARNING: `i` is implicitly declared local
### WARNING: `j` is implicitly declared local
end:
```

```
Warning, `p` is implicitly declared local to procedure `opred`

Warning, `de` is implicitly declared local to procedure `opred`
```

```
Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `opred`

Warning, `j` is implicitly declared local to procedure `opred`

Error, (in minor) object too large
> i:='i':k:='k':l:='l':
> x:=vector(n,[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]);
```

$$x := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

```
> for l from 1 to 2 do u1:=2*l-3;
for k from 1 to n do
g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2; od;
i:='i':for k from 1 to n do
ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k; od;
opred(ga,dde);
s1:=evalf(fsolve(dde=0,q));
q[l]:=max(s1);dde:='dde';od:
> ga[0]:=-1:
> if q[1]>q[2] then q:=q[1];u1:=-1; else q:=q[2];u1:=1;fi;
```

$$q := 89.439765427807951894965973190461618963207216597933$$

$$u1 := 1$$

```
> T:=array(1..n,[]):
> i:='i':k:='k':j:='j':
for k from 1 to n do
g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2;g1[k]:=-g[k]: od:
i:='i':k:='k':for k from 1 to n do
ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k: ga1[k]:=(g1[k]-
sum(ga1[j]*g1[k-j],j=1..k-1))/k: od:
> k:='k':j:='j':l:='l':i:='i':
```

```
> if frac(n/2)=0 then
p:=n/2: deev:=matrix(p,p):deev1:=matrix(p+1,p+1):
for i from 1 to p-1 do
for j from 1 to p do
deev[i,j]:=ga[i+j]: od: od:j:='j':for j from 1 to p do
deev[p,j]:=t^(j-1): od;j:='j':i:='i':ga1[0]:=-1:
for i from 1 to p do
for j from 1 to p+1 do
deev1[i,j]:=ga1[i+j-2]: od: od:j:='j':for j from 1 to p+1 do
deev1[p+1,j]:=t^(j-1):od:ddeev:=det(deev):
momev:=solve(ddeev=0,t):j:='j':
ddeev1:=det(deev1):
for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:od:
momod:=solve(ddeev1=0,t):j:='j':
for j from 1 to p do T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:
else i:='i':j:='j':
p:=(n+1)/2: deod:=matrix (p,p): deod1:=matrix(p,p):
for i from 1 to p-1 do
for j from 1 to p do
deod[i,j]:=ga[i+j-1]:deod1[i,j]:=ga1[i+j-1]: od: od:
j:='j':
for j from 1 to p do
deod[p,j]:=t^(j-1):deod1[p,j]:=t^(j-1):od;
ddeod:=det(deod): ddeod1:=det(deod1):
momev:=solve(ddeod1=0,t):j:='j':
momod:=solve(ddeod=0,t):
for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:
T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:fi:
> j:='j':for j from 1 to n do
print(T[j]);od;
```

3.4978524040526791548903910906093800157937370944307

9.6433262892869758318569778222425649953507398544371

17.842057810178443558106585746905338356779642208202

27.572855045211219806120971165699882227060045179022

38.255741610725552746023014189872241069171299356342

49.263988608386739985477896231779252188125954804435

59.955062478552248896712365460983689150235288218579

69.706183730641667286479975661184890605632220224347

77.949835517452042953659627182893884321777022566149

84.206449208111287032144352596348896692732025982071

88.112135774580898580171176401221763277352085265579

89.439765427807951894965973190461618963207216597933

```
> vx:=array(1..n,[]);
```

$$vx := \mathrm{array}(1 .. 12, [\ ])$$

```
> llambda:=vector(n,[-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10,-11,-12]);
```

$$llambda := [-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12]$$

```
> i:='i':
LL:=seq(k*sum(i*llambda[i],i=1..n)/sum(i^2,i=1..n),k=1..n);
> T2:=seq(-ln(1-LL[1]*T[i])/LL[1],i=1..n);
```

$$LL := -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12$$

$T2 := 1.5036000393154793975163537765190083635355080732044,$
$2.3649330562312691683972065552878020252856661657450,$
$2.9360914887768718517703891551393677550062500208089,$
$3.3524571428288257326936470296524019835734902879670,$
$3.6700977166059018753342173588613879424414105797639,$
$3.9172888884649911351050314806584438500945294102119,$
$4.1101369120112893444121243611358356275193849239226,$
$4.2585330334432540346701552870469955184129100645837,$
$4.3688126573233192821740002658741741804497097053050,$
$4.4450771259014369795236986065779883088955349481382,$
$4.4898955291814273741728610140834786273958987551432,$
$4.5046840537289171397493806470076204566652417035356$

```
> i:='i':for i from 1 to n do T[i]:=T2[i] od;
```

$$T_1 := 1.5036000393154793975163537765190083635355080732044$$

$$T_2 := 2.3649330562312691683972065552878020252856661657450$$

$$T_3 := 2.9360914887768718517703891551393677550062500208089$$

$$T_4 := 3.3524571428288257326936470296524019835734902879670$$

$$T_5 := 3.6700977166059018753342173588613879424414105797639$$

$$T_6 := 3.9172888884649911351050314806584438500945294102119$$

$$T_7 := 4.1101369120112893444121243611358356275193849239226$$

$$T_8 := 4.2585330334432540346701552870469955184129100645837$$

$$T_9 := 4.3688126573233192821740002658741741804497097053050$$

$$T_{10} := 4.4450771259014369795236986065779883088955349481382$$

$$T_{11} := 4.4898955291814273741728610140834786273958987551432$$

$$T_{12} := 4.5046840537289171397493806470076204566652417035356$$

```
> sch:=0:

> A:=matrix(n,n):  B:=array(1..n,[]):
hp:=0.01:
```

```
for tp from hp by hp to 1 do
i:='i':
for i to n do
lambda[i]:=LL[i]+(llambda[i]-LL[i])*tp; od:
i:='i':k:='k':j:='j':
vx[1]:=x[1]:
for i from 1 to n do
vx[i]:=x[1]+sum((product((lambda[i]-lambda[j]),j=1..k-1))*x[k],k=2..i):
od;
epsilon:=0.001: s:=epsilon+1:
while s>epsilon do
i:='i': j:='j':
for i from 1 to n do
for j from 1 to n-1 do
A[i,j]:=((-1)^j)*exp(-lambda[i]*T[j]):
od:
A[i,n]:=(-1)^n*(exp(-lambda[i]*T[n]))/2: od:
i:='i': j:='j': k:='k':
for i from 1 to n do
B[i]:=(sum((-1)^j*exp(-lambda[i]*T[j]),j=1..n-1)+((-1)^n)*exp(-
lambda[i]*T[n])/2-((-1)^n*u1*lambda[i]*vx[i]-1)/2)/lambda[i] od:
delta:=linsolve(A,B):
i:='i':
sch:=sch+1:for i from 1 to n do
T[i]:=T[i]+delta[i]:
od:
i:='i':
s:=sqrt(sum(delta[i]^2,i=1..n)):
od:
od:
> for i from 1 to n do print(T[i]) od:
```

1.5036000393154793975163537765190083635355081543477

2.3649330562312691683972065552878020252856662945679

2.9360914887768718517703891551393677550062209650860

3.3524571428288257326936470296524019835735072868580

3.6700977166059018753342173588613879424453806137337

3.9172888884649911351050314806584438500941990005900

4.1101369120112893444121243611358356274679885834365

4.2585330334432540346701552870469955184140912128698

4.3688126573233192821740002658741741806134549948123

4.4450771259014369795236986065779883088946210114310

4.4898955291814273741728610140834786272773394617289

4.5046840537289171397493806470076204566652413498476

```
> print(sch);
```

100

```
> print(delta);
```

$$[0.1460055129790472444835042707575063875467370687315 4\ 10^{-42},$$
$$0.2987488855518367474942281824087277501719382421412 4\ 10^{-42},$$
$$0.4268690792671557356999683501608976268264832239429 2\ 10^{-42},$$
$$0.5075355522347932179822807616703687284236804688793 14\ 10^{-42},$$
$$0.5390670585380657592556739584584523299239459058369 5\ 10^{-42},$$
$$0.5351294425131142452020057407417114530353341359143 9\ 10^{-42},$$
$$0.5127594485608002768990363423058261211362663875293 6\ 10^{-42},$$
$$0.4849960716518887588597322197286089804904122375973 3\ 10^{-42},$$
$$0.4595100709008194406822628459009305549333782783002 9\ 10^{-42},$$
$$0.4400144840865532998726345769989445142097446010784 3\ 10^{-42},$$
$$0.4280056233436647281143579789483460417436173185384 3\ 10^{-42},$$
$$0.4239693021249158228076807455333730251261206027525 0\ 10^{-42}]$$

```
> s;
```

$$0.1546990405074593417261256825304759940450536575217 9\ 10^{-41}$$

Выпускная квалификационная работа выполнена мной совершенно самостоятельно. Все использованные в работе материалы и концепции из опубликованной научной литературы и других источников имеют ссылки на них.

«___» __________________ ______ г.

______________________________ _______________________

(подпись) *(Ф.И.О.)*