УДК 517.983

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА [1]

А.В. Глушак
Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. Для абстрактного дифференциального уравнения Мальмстена найдены условия однозначной разрешимости задачи, содержащей оператор Эрдейи-Кобера в дополнительном нелокальном условии.

Ключевые слова: *нелокальное условие, уравнение Мальмстена, однозначная разрешимость, оператор Эрдейи-Кобера.*

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. На интервале $(0,1]$ рассмотрим дифференциальное уравнение Мальмстена

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)+\frac{l}{t^2}u(t)=t^mAu(t), \qquad k,l,m\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Будем искать решение $u(t)\in C^2([0,1],E)\cap C((0,1],D(A))$ уравнения (1), удовлетворяющее нелокальному интегральному условию

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}_{\sigma,\nu}\ u(t)=u_1, \tag{2}$$

где $\beta>0$, $I^{\beta}_{\sigma,\nu}$ — оператор Эрдейи-Кобера, определяемый равенством (см. [1], с. 246)

$$I^{\beta}_{\sigma,\nu}\ u(t)=\frac{\sigma}{\Gamma(\beta)\ t^{\sigma(\beta+\nu)}}\int\limits_0^t s^{\sigma\nu+\sigma-1}(t^\sigma-s^\sigma)^{\beta-1}u(s)\ ds.$$

Задача (1), (2) с нелокальным условием (2), вообще говоря, не является корректной. В настоящей работе устанавливаются условия, налагаемые на оператор A и элемент $u_1\in E$, обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Среди публикаций, посвящённых исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка отметим работы [2] и [3]. Критерий единственности решения установлен в [4]. Что касается нелокальной задачи (1), (2), то она рассматривается впервые.

Наряду с уравнением Мальмстена (1), при $k>0$ рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (частный случай уравнения Мальмстена при $l=m=0$)

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \quad t\in(0,1]. \tag{3}$$

Как следует из результатов работ [5, 6], корректная постановка начальных условий для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (3) состоит в задании в точке $t=0$ начального значения

$$u(0)=u_0\in D(A), \tag{4}$$

и условия

$$u'(0)=0, \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197 А-2016

которое не ставится (снимается) при $k \geq 1$, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t = 0$.

В работах [5, 6] приводятся также и условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (3) – (5). Множество операторов A, с которыми задача (3) – (5) равномерно корректна, обозначим через G_k.

В частности, если оператор A ограничен, то $A \in G_k$ и решение задачи (3) – (5) имеет вид

$$u(t) = Y_k(t)u_0 = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t/2)^{2j}A^j u_0}{j!\ \Gamma\left((k+1)/2+j\right)} = {}_0F_1\left(\frac{k+1}{2};\frac{t^2}{4}A\right)u_0, \quad u_0 \in E, \tag{6}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, ${}_pF_q(\cdot)$ — обобщённая гипергеометрическая функция.

В случае неограниченного оператора $A \in G_k$ при $u_0 \in D(A)$ решение задачи (3) – (5) имеет вид (см. [5, 6])

$$u(t) = Y_k(t)u_0 = \frac{2^{(k-1)/2}\Gamma((k+1)/2)}{i\pi\ t^{(k-1)/2}}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{(3-k)/2}I_{(k-1)/2}(t\lambda)R(\lambda^2)u_0\,d\lambda, \quad \sigma > \omega, \tag{7}$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, λ^2 при $\mathrm{Re}\lambda > \omega \geq 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, а $R(\lambda^2) = (\lambda^2 I - A)^{-1}$ — его резольвента.

В формулах (6), (7) через $Y_k(t)$ обозначена операторная функция Бесселя (ОФБ) — разрешающий оператор задачи (3) – (5).

В работе [7] было показано, что ОФБ $Y_k(t)$ может быть использована для построения решений весовых задач Коши для абстрактного уравнения Мальмстена (1) (классическое уравнения Мальмстена рассмотрено в [8], с. 113) и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \sqrt{(k-1)^2 - 4l}/(m+2) \geq 0$, $u_0 \in D(A)$ *и оператор* $A \in G_{2\mu+1}$. *Тогда функция*

$$u(t) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2}Y_{2\mu+1}(\tau)u_0, \quad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2} \tag{8}$$

является единственным решением уравнения Мальмстена (1), *удовлетворяющим начальному условию*

$$\lim_{t\to 0}\ t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t) = u_0. \tag{9}$$

Следует заметить, что при сделанных в теореме 1 предположениях, для рассматриваемого дифференциального уравнения (1), также как и для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (3) в случае $k \geq 1$, второе начальное условие при $t = 0$ не ставится.

Исследования, касающиеся разрешимости задачи (1), (2) состоят в нахождении начального элемента u_0 в условии (9) по нелокальному условию (2), при этом важную роль будет играть целая функция

$$\chi(k,l,m,\beta,\sigma,\nu;\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)\right)\left(\lambda/(m+2)^2\right)^{2j}}{j!\ \Gamma\left(\mu+1+j\right)\ \Gamma\left(\beta+\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)\right)},$$

которая называется характеристической функцией нелокального условия (2) и которую в дальнейшем будем обозначать $\chi(\varpi;\lambda)$, где $\varpi = (k,l,m,\beta,\sigma,\nu)$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta > 0$, $\mu \geq 0$, $\sigma > 0$, $2\sigma(\nu+1) + \mu(m+2) + 1 - k > 0$, A — *ограниченный оператор и* $u_1 \in E$. *Для того, чтобы задача* (1), (2) *имела единственное* *решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$$\chi(\varpi;\lambda) \neq 0, \qquad \lambda \in \sigma(A). \tag{10}$$

Доказательство. Для нахождения входящего в равенство (9) начального элемента u_0 к определяемой равенствами (8) и (6) функции $u(t)$ применим оператор Эрдейи-Кобера $I^{\beta}_{\sigma,\nu}$. После элементарных преобразований получим

$$I^{\beta}_{\sigma,\nu}\ u(t) = I^{\beta}_{\sigma,\nu}\ t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0 = \qquad \left(\tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{\Gamma(\beta)\ t^{\sigma(\beta+\nu)}} \int\limits_0^t s^{\sigma\nu+\sigma-1+(1-k+\mu(m+2))/2} (t^{\sigma}-s^{\sigma})^{\beta-1} Y_{2\mu+1}\left(\frac{2s^{(m+2)/2}}{m+2}\right) u_0\ ds =$$

$$= \frac{\sigma\ \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)\ t^{\sigma(\beta+\nu)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Au_0/(m+2)^2)^j}{j!\ \Gamma(\mu+1+j)} \int\limits_0^t s^{\sigma\nu+\sigma-1+(1-k+\mu(m+2))/2} (t^{\sigma}-s^{\sigma})^{\beta-1}\ ds.$$

Вычисляя последний интеграл, в силу условия (2), приходим к уравнению

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)\right)(Au_0/(m+2)^2)^j}{j!\ \Gamma(\mu+1+j)\ \ \Gamma\left(\beta+\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)\right)} = u_1. \tag{11}$$

Пусть Ω — открытое множество комплексной плоскости, содержащее спектр $\sigma(A)$ ограниченного оператора A, и граница которого $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда, записывая для оператора, стоящего в левой части (11), представление через резольвенту, перепишем уравнение (11) в виде

$$Bu_0 \equiv \int\limits_{\partial\Omega} \chi(\varpi;\lambda) R(\lambda) u_0\ d\lambda = u_1. \tag{12}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (2) с ограниченным оператором A является разрешимость уравнения (12), т.е. отсутствие в спектре $\sigma(B)$ оператора B точки $\lambda = 0$. Равенство (12) означает, что оператор B является аналитической функцией оператора A, $B = \chi(\varpi;A)$. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(B) = \chi(\varpi;\sigma(A))$. Таким образом, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора B только тогда, когда на спектре $\sigma(A)$ не обращается в нуль функция $\chi(\varpi;\lambda)$ или, что тоже самое, выполнено условие (10).

При выполнении условия (10) начальный элемент $u_0 = B^{-1}u_1$, а решение задачи (1), (2) с ограниченным оператором A определяется равенствами (8) и (6). *Теорема доказана.*

В случае, когда параметры σ и ν подобраны специальным образом, а именно: $\sigma = m+2,\ \nu = \mu/2 + (k-1)/(2m+4)$ и $z = 2\sqrt{\lambda}/(m+2)$, то

$$\chi(\varpi;\lambda) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+1)} {}_0F_1\left(\beta+\mu+1; \frac{z^2}{4}\right) = \Gamma(\mu+1)\left(\frac{2}{z}\right)^{\beta+\mu} I_{\beta+\mu}(z),$$

где $I_{\beta+\mu}(z)$ — модифицированная функция Бесселя, и справедливо утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\mu \geq 0,\ \sigma = m+2,\ \nu = \mu/2 + (k-1)/(2m+4)$, A — ограниченный оператор, $u_1 \in E$. Для того, чтобы нелокальная задача* (1), (2) *при указанных значениях параметров имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на* *спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$$I_{\beta+\mu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m+2}\right) \neq 0, \qquad \lambda \in \sigma(A). \tag{13}$$

Если выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, $k \geq 1$, $l = m = 0$, то нелокальная задача (1), (2) для уравнение Мальмстена превращается в нелокальную задачу для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, которая исследована в [9], а соответствующая характеристическая функция в этом случае имеет вид

$$\chi(\varpi;\lambda) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)^{(k-1)/2+\beta} I_{(k-1)/2+\beta}\left(\sqrt{\lambda}\right).$$

Поэтому распределение и асимптотика нулей $\lambda_j = \lambda_j\left((k-1)/2+\beta\right)$, $j = 1, 2, ...$ функции $\chi(\varpi;\lambda)$ известны (см. [8], гл. 15), а именно, все нули простые, отрицательные и

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\lambda_j}{j^2} = -\pi^2. \tag{14}$$

Из доказанной теоремы 2 следует, что расположение нулей функции $\chi(\varpi;\lambda)$ определяет однозначную разрешимость задачи (1), (2) с ограниченным оператором A. Для уравнения (1) с неограниченным оператором A условие вида (10) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль.

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1), (2) с неограниченным оператором A.

Теорема 4. *Пусть $\mu \geq 0$, A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что нелокальная задача* (1), (2) *имеет решение $u(t)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль λ_j, $j = 1, 2, ...$ целой функции $\chi(\varpi;\lambda)$ не являлся собственным значением оператора A.*

Доказательство. Предположим, что некоторый нуль λ_0 из счётного множества нулей функции $\chi(\varpi;\lambda)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $h_0 \neq 0$. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\vartheta(t;\lambda_0) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} {}_0F_1\left(\mu+1; \frac{\lambda_0\tau^2}{4}\right), \qquad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2}$$

является решением скалярной задачи

$$\vartheta''(t;\lambda_0) + \frac{k}{t}\vartheta'(t;\lambda_0) + \frac{l}{t^2}\vartheta(t;\lambda_0) = \lambda_0 t^m \vartheta(t;\lambda_0), \quad t \in (0,1],$$

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}_{\sigma,\nu}\, \vartheta(t;\lambda_0) = 0.$$

Отметим лишь, что имеет место именно нулевое нелокальное условие, поскольку λ_0 — нуль функции $\chi(\varpi;\lambda)$. Поэтому функция $u(t) = \vartheta(t;\lambda_0)h_0$ является ненулевым решением однородной ($u_1 = 0$) нелокальной задачи (1), (2). Тем самым решение задачи (1), (2) будет заведомо неединственным, если оно будет существовать. *Теорема доказана.*

Переходим теперь к достаточному условию однозначной разрешимости задачи (1), (2) с неограниченным оператором A. Также как и при доказательстве теоремы 2, нам предстоит найти начальный элемент u_0 из уравнения

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}_{\sigma,\nu}\; t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0 = u_1, \qquad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2}, \tag{15}$$

где ОФБ $Y_{2\mu+1}(\tau)$ определяется равенством (7).

После элементарных преобразований левую часть уравнения (15) представим в виде

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}_{\sigma,\nu}\; t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau) u_0 = \frac{\sigma}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 s^{\sigma\nu+\sigma-1}(1-s^{\sigma})^{\beta-1} \quad \times$$

$$\times \quad \frac{2^{\mu}\ \Gamma(\mu+1)}{i\pi\ s^{\mu}} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{1-\mu} I_{\mu}(\xi\lambda) R(\lambda^2) u_0\ d\lambda ds = \quad \left(\xi = \frac{2s^{(m+2)/2}}{m+2}\right)$$

$$= \frac{\sigma\ (m+2)^{\mu}\ \Gamma(\mu+1)}{i\pi\ \Gamma(\beta)} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{1-\mu} R(\lambda^2) u_0 \quad \times$$

$$\times \quad \int\limits_0^1 s^{\sigma\nu+\sigma-k/2-1/2}(1-s^{\sigma})^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda s^{m/2+1}/(m+2)^2\right)^{2j+\mu}}{j!\ \Gamma(\mu+1+j)}\ ds d\lambda =$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda R(\lambda^2) u_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)\right)(\lambda/(m+2))^{2j}}{j!\Gamma(\mu+1+j)\Gamma\left(\beta+\nu+1+((m+2)(\mu+2j)+1-k)/(2\sigma)\right)} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi\left(\varpi;\lambda^2\right) \lambda R(\lambda^2) u_0\ d\lambda. \tag{16}$$

Учитывая представление (16), уравнение (15) перепишем в виде

$$B u_0 \equiv \frac{1}{i\pi} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi\left(\varpi;\lambda^2\right) \lambda R(\lambda^2) u_0\ d\lambda = u_1. \tag{17}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1), (2) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора $B : D(A) \to E$, заданного соотношением (17) и продолженного по непрерывности на E, обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из $D(A)$.

Как уже отмечалось ранее, при доказательстве достаточного условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) с неограниченным оператором A важную роль играют распределение и асимптотика нулей функции $\chi(\varpi;\lambda)$, поэтому мы рассмотрим частный случай, когда распределение и асимптотика нулей функции $\chi(\varpi;\lambda)$ известны.

Условие 1. Пусть $\mu \geq 0$, $\sigma = m+2$, $\nu = \mu/2 + (k-1)/(2m+4)$, а каждый нуль λ_j, $j = 1, 2, ...$ функции

$$\chi(\varpi;\lambda) = \Gamma(\mu+1) \left(\frac{m+2}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\beta+\mu} I_{\beta+\mu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m+2}\right) \tag{18}$$

принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и существует такое $d > 0$, что

$$\sup_{j=1,2,\dots} \|R(\lambda_j)\| \leq d.$$

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль $\lambda_j,\ j = 1, 2, \dots$ определяемой равенством (18) функции $\chi(\varpi; \lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $1/d$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой Re $z = \sigma_0 > \omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении

$$w = z^2 \ (z \in \Upsilon_0,\ w \in \Upsilon_0^2), \quad \Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j.$$

Возьмём $\lambda_0 \in \rho(A)$, Re $\lambda_0 > \sigma > \sigma_0$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$n > \max\{(k + 2\beta + 2\mu + 3)/4,\ (\beta + \mu + 5/2)/2\}. \tag{19}$$

Введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} \frac{R(z)\, v\ dz}{\chi(\varpi; z)(z - \lambda_0)^n}, \quad H : E \to E. \tag{20}$$

Покажем, что интеграл в (20) при выполнении условия 1 абсолютно сходится. Действительно, в силу выбора контура Υ_0^2, неравенства (см. [5, 6])

$$\|\lambda^{1-k/2} R(\lambda^2)\| \leq \frac{M}{(\text{Re}\ \lambda - \omega)^{k/2+1}}, \quad \text{Re}\ \lambda > \omega$$

и асимптотического поведения модифицированной функции Бесселя

$$I_\nu(\lambda) = \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(1 + O(\lambda^{-1})\right), \quad \lambda \to \infty,\ |\arg \lambda| < \pi/2$$

интеграл

$$\int\limits_{\Upsilon_0^2} \frac{R(z)\ dz}{\chi(\varpi; z)\ (z - \lambda_0)^n} = \frac{2}{(m+2)^{\beta+\mu}\ \Gamma(\mu+1)} \int\limits_{\Upsilon_0} \frac{\lambda^{(k+1)/2+\beta+\mu}\ \ \lambda^{1-k/2} R(\lambda^2)\ d\lambda}{\sqrt{\lambda}\ I_{\beta+\mu}(2\lambda/(m+2))\ (\lambda^2 - \lambda_0)^n}$$

абсолютно сходится, поскольку, как следует из (19), $2n > (k + 1)/2 + \beta + \mu + 1$.

Рассмотрим теперь интеграл по $\bigcup\limits_{j=1,2,\dots} \gamma_j$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1,2,\dots} \gamma_j} \frac{R(z)\ dz}{\chi(\varpi; z)\ (z - \lambda_0)^n} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{R(\lambda_j)}{\chi'(\varpi; \lambda_j)\ (\lambda_j - \lambda_0)^n} =$$

$$= -\frac{(m+2)^{1-\beta-\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{(\beta+\mu)/2+3/4}\ R(\lambda_j)}{\lambda_j^{1/4}\ I_{\beta+\mu+1}\left(2\sqrt{\lambda_j}/(m+2)\right)\ (\lambda_j - \lambda_0)^n},$$

и абсолютная сходимость полученного ряда вытекает из условия 1, асимптотического поведения модифицированной функции Бесселя и асимптотики (14) нулей модифицированной функции Бесселя, поскольку, как следует из (19), $2n > \beta + \mu + 5/2$.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* 1 *и* $A \in G_{2\mu+1}$. *Если* $u_1 \in D(A^{n+1})$, *где число* $n \in \mathbb{N}$ *выбрано так, чтобы выполнялось неравенство* (19), *то задача* (1), (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Как уже было отмечено, существование единственного решения задачи (1), (2) сводится к существованию обратного у ограниченного оператора B, определяемого равенствами (17) и (18). Покажем, что оператор B имеет обратный оператор $B^{-1} : D\left(A^n\right) \to E$.

Пусть $v \in D\left(A\right)$, $\sigma_0 < \sigma < \operatorname{Re}\,\xi$. Тогда, подставляя определяемый равенством (17) оператор B в (20) и применяя тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2) = \frac{R(z) - R(\xi^2)}{\xi^2 - z},$$

получим равенство

$$HBv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi} \frac{R\left(z\right)}{\chi(\varpi; z)(z-\lambda_0)^n} \quad \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi\left(\varpi;\xi^2\right)\xi R(\xi^2)v\;d\xi dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi\;\chi\left(\varpi;\xi^2\right)\;R\left(z\right)v}{\chi\left(\varpi;z\right)\;\left(z-\lambda_0\right)^n\;\left(\xi^2-z\right)} - \frac{\xi\;\chi\left(\varpi;\xi^2\right)\;R\left(\xi^2\right)v}{\chi\left(\varpi;z\right)\;\left(z-\lambda_0\right)^n\;\left(\xi^2-z\right)}\right)\,d\xi dz. \tag{21}$$

Интеграл в (21) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HBv = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi\;\chi\left(\varpi;\xi^2\right)\;R\left(z\right)v\;d\xi dz}{\chi\left(\varpi;z\right)\;\left(z-\lambda_0\right)^n\;\left(\xi^2-z\right)} +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\;\chi\left(\varpi;\xi^2\right)\;R\left(\xi^2\right)v\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi\left(\varpi;z\right)\;\left(z-\lambda_0\right)^n\;\left(\xi^2-z\right)}\,d\xi. \tag{22}$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup\limits_{j=1,2,\ldots}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (22) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (22), используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HBv = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon}\frac{\xi\;\chi\left(\varpi;\xi^2\right)\;R\left(z\right)v\;d\xi dz}{\chi\left(\varpi;z\right)\;\left(z-\lambda_0\right)^n\;\left(\xi^2-z\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon^2}\frac{\chi\left(\varpi;\lambda\right)\;R(z)v\;d\lambda dz}{\chi\left(\varpi;z\right)\;\left(z-\lambda_0\right)^n\;\left(\lambda-z\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)v\;dz}{(z-\lambda_0)^n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)v\;dz}{(z-\lambda_0)^n} =$$

$$= \frac{-1}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda_0)v = (-1)^n R^n(\lambda_0)v.$$

Коммутирующие операторы $H,\ B,\ R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$

плотна в E, поэтому равенство $HBv = (-1)^n R^n(\lambda_0)v$ справедливо и для $v \in E$, и при этом $HB : E \to D(A^n)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}v = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n Hv$ при $v \in D(A^n)$ является обратным по отношению к B, $B^{-1} : D(A^n) \to E$. Действительно,

$$BB^{-1}v = (-1)^n B(\lambda_0 I - A)^n Hv = (-1)^n BH(\lambda_0 I - A)^n v = R^n(\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^n v = v, \quad v \in D(A^n),$$

$$B^{-1}Bv = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n HBv = (\lambda_0 I - A)^n R^n(\lambda_0)v = v, \quad v \in E.$$

Возвращаясь к задаче (1), (2), определим принадлежащий $D(A)$ начальный элемент $u_0 = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n Hu_1$, где $u_1 \in D(A^{n+1})$, оператор H задан равенством (20), $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > \sigma_0 > \omega$. Тогда единственное решение $u(t)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$u(t) = t^{(1-k+\mu(m+2))/2} Y_{2\mu+1}(\tau)u_0, \quad \tau = \frac{2t^{(m+2)/2}}{m+2},$$

где ОФБ $Y_{2\mu+1}(\tau)$ определена равенством (7). *Теорема доказана.*

Список литературы

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.

2. *Тихонов И.В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Диф. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 841 – 843.

3. *Сильченко Ю.Т.* Уравнение параболического типа с нелокальными условиями. СМФН. 2006. Т. 17. С. 5 – 10.

4. *Тихонов И.В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. Изв. РАН. Сер. матем. 2003. **67**: 2. 133 – 166.

5. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя. *ДАН*. 1997. **352**: 5, С. 587 – 589.

6. *Глушак А. В., Покручин О. А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Диф. уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 41 – 59.

7. *Глушак А.В., Покручин О.А.* О свойствах весовых задач Коши для абстрактного уравнения Мальмстена. Научные Ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2011. № 17(112). Вып. 24. С. 102 – 110.

8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Иностранная литература. 1949.

9. *Глушак А.В.* Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, Изв. вузов. Матем. 2016, № 6. С. 27 -- 35.

References

1. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Scienсh Publishers, Switzerland. 1993.

2. *Tikhonov I.V.* On the solvability of the problem with a nonlocal condition for a differential equation in a Banach space. Differ. Uravn. 1998, 34, no. 6, pp. 841 -- 843.

3. *Sil'chenko Yu.T.* A parabolic equation with nonlocal conditions. Journal of Mathematical Sciences. 2008, 149:6, pp. 1701–1707.

4. *Tikhonov I.V.* Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations. Izvestiya: Mathematics. 2003, 67:2, pp. 333 -- 363.

5. *Glushak A.V.* The Bessel Operator Function. Dokl. Ross. Akad. Nauk. 1997, vol. 352, no. 5, pp. 587–589.

6. *Glushak A.V., Pokruchin O.A.* Criterion for the solvability of the cauchy problem for an abstract Euler–Poisson–Darboux equation. Differential Equations. 2016, Vol. 52, no. 1, pp. 39 – 57.

7. *Glushak A.V., Pokruchin O.A.* About Cauchy weight problem properties for an abstract Malmsten equation. Scientific Bulletin of BelSU. Ser. Mathematics. Physics. 2011. 17 (112). Iss. 24. Pp. 102 – 110 (in Russian).

8. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 1945.

9. *Glushak A.V.* Abstract Euler-Poisson-Darboux equation with nonlocal condition. Russian Mathematics. 2016. Vol. 60, № 6. Pp. 21–28.

Сведения об авторе

Глушак Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, aleglu@mail.ru

ON SOLVABILITY OF NON-LOCAL PROBLEM FOR MALMSTEN ABSTRACT EQUATION

A.V. Glushak
Belgorod State University

Abstract. The conditions concerning the unique solvability of nonlocal problems for Malmsten abstract differential equation were found. The non-local conditions contain either Erdeyi-Kober operator.

Keywords: *nonlocal condition, the unique solvability of Malmsten equation, Erdeyi-Kober operator.*

About author

Alexander V. Glushak, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Belgorod State University, aleglu@mail.ru.