ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, образовательная программа Математическое образование очной формы обучения, группы 02041610
Кузнецовой Валерии Сергеевны

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Н.А. Зинченко

Рецензент
Почетный работник
общего образования РФ
Е.С.Псарева

БЕЛГОРОД 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В образовательной школе цели обучения математике определяются её ролью общества в целом и в формировании личности каждого отдельного человека.

В современной жизни мы сталкиваемся с разного рода задачами, с легкими, со сложными, с использованием современной техники, с восприятием различных знаний, с интерпретацией социальной, экономической, политической информацией, с понимаем принципов некого устройства. Но не каждый задумывался о том, что, если бы человек не имел конкретных математических знаний, все восприятие и взаимодействие было бы затруднено. Людям в своей жизни приходится выполнять очень много расчётов, использовать технику для вычислений, заниматься поиском и анализом каких-либо формул, нужных для конкретной задачи, владеть приемами измерений, построений, воспринимать информацию в виде таблиц или графиков, понимать вероятностный характер случайных событий и т.д.

Следует отметить, что без базовой математической подготовки человека, невозможна постановка его образования. Но прежде чем раскрыть понятие математической подготовки, нужно обратиться к самому начало зарождения в человеке понимания того или иного действия. В началах математической подготовки лежит числовая компетенция, или просто понятие числа. Что такое вообще число? Каким может быть число? Каким было число? Таких риторических вопросов можно задать очень много, но каждый ли ребенок, ученик основной школы, студент, образованный человек смогут ответить на эти вопросы.

Возникновение и развитие числовых представлений у школьников тесно связано с развитием интеллекта и в целом с развитием психики. В раннем детстве развитие понятия числа у ребенка повторяет определенные этапы развития этого понятия в истории человечества, но на этот процесс накладывает отпечаток тот факт, что в социуме числа активно используются, в том числе как элемент языка для коммуникаций и познания. Первоначально число представляется детям как некоторая характеристика объектов, неотделимая от них. И потому в раннем и младшем дошкольном возрасте словосочетания «два глаза», «два уха», «две руки», «две игрушки» воспринимаются как неделимые. С накоплением речевого опыта и обогащением лексики число отделяется от конкретных предметов и начинает выполнять свои основные функции – функции обозначения количественных и порядковых характеристик предметов и групп предметов.

Пройдя начальную школу, дети продолжают усваивать и знакомиться с числом в основной школе. Но знакомиться и понимать - это две разные вещи. Перед учителей стоит сложная, но важная задача: донести до учеников всю суть числовой компетенции и числового расширения. Расширение понятия числа длится с 5 по 11 классы. Развитие понятия о числе в основной школе связано с рациональными и иррациональными числами, формированием первичных представлений о действительном числе. Завершение числовой линии (систематизация сведений о действительных числах, о комплексных числах), так же как и более сложные вопросы арифметики (алгоритм Евклида, основная теорема арифметики), отнесено к ступени общего среднего (полного) образования.

В последнее время все чаще высказывается идея о том, что ученик должен не вообще получать образование, а достигнуть некоторого уровня компетентности в способах жизнедеятельности в человеческом обществе, а чтобы достигнуть компетентности в жизни, ему как минимум нужно обладать числовой компетентностью, для того, чтобы оправдать социальные ожидания нашего государства о становлении нового работника, обладающего потребностью творчески решать сложные профессиональные задачи.

Роль математической подготовки в общем образовании современного человека определяет следующие «цели обучения математике в школе:

- овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе;

- формирование представлений о числах и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

- формирование представлений о математике как части человеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса».

Таким образом, для жизни в современном обществе важным является формирование числовой содержательной линии в школьном курсе.

Поэтому была выбрана *тема* выпускной квалификационной работы: «Формирование понятия числа в процессе обучения математике в основной школе». В ходе исследования была предпринята попытка разрешения следующей проблемы: каков уровень сформированности понятия числа у школьников в основной школе. Решение этой проблемы составляет *цель* исследования.

(Целью работы является анализ теоретических обоснований и разработка методических рекомендаций по формированию понятия числа у школьников 8 класса на уроках математики.)

В качестве *объекта* исследования выступает учебная деятельность на уроках математики в 8 классе.

Предмет исследования – формирование понятия числа учащихся 8 класса.

Проблема, объект, предмет и цель исследования потребовали решения следующих задач:

1. Провести теоретический анализ психолого-педагогической и специальной литературы по данной проблеме;

2. Изучить и проанализировать состояние сформированности числовой компетенции учащихся 8 класса;

3. Разработать практические рекомендации для повышения уровня сформированности данной компетенции.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования:

- теоретический анализ;

- педагогическое исследование.

(Практическая значимость работы состоит в том, что методические рекомендации могут быть использованы студентами и преподавателями при подготовке к урокам и факультативным занятиям по математике.)

Базой проведения исследования стала МОУ «Ракитянская средняя общеобразовательная школа № 2 им. А.И. Цыбулева». В проведении исследовании участвовали ученики 8 класса.

Структура дипломной работы определяется логикой исследования и поставленными задачами. Она включает в себя введение, три главы, заключение, список использованной литературы (содержит 35 источников, включая электронные ресурсы и ресурсы сети Интернет).

Во введении определены и обоснованы актуальность темы исследования, объект, предмет, проблема, задачи.

В первой главе «Развитие понятия числа в истории математики и в школьном курсе» приведено описание истории развития понятия числа с древнейших времен, а также в этой главе были рассмотрены и проанализированы методическая и логическая схемы расширения понятия числа.

Во второй главе «Расширение понятия числа в школьном курсе» рассматривается расширение понятия рациональных и иррациональных чисел.

В третьей главе «Формирование понятия действительного числа в 8 классе» приведены результаты сформированности понятия числа у школьников 8 класса, а также представлены методические разработки по улучшению знаний в сфере понятия чисел.

ГЛАВА 1 РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ И В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ

1.1 История развития понятия числа

Процесс формирования понятия числа охватывает огромный промежуток времени. Начало формирования числа зарождается в глубине веков. Пути, а также формы развития числовой линии у разных народов очень разнообразны. При всем данном разнообразии общим для всех народов является то, что развитие понятия числа возникло непосредственно из практического применения и прошло огромный путь совершенствования.

К.А. Рыбников в своей работе «История математики» отмечал, что возникновение понятия числа пришло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Изначально счет велся с использованием подручных средств: камни, пальцы, шишки и т.д. Запас чисел был весьма ограничен и мал, но ряд натуральных чисел удлинялся постепенно. В ходе развития числа возникали и развивались их символы, при этом числа образовывали системы. [28, с. 15]

Наравне с натуральными числами возникала необходимость в дробных числах. Дележ добычи состоявший из нескольких убитых животных, между участниками охоты, когда число животных оказывалось не кратным числу охотников, привело первобытного человека к понятию о дробном числе. Также дроби появлялись в процессе измерения, когда результат измерения не получалось выразить натуральным числом. Необходимость в более точных измерениях привела к тому, что люди начали делить начальные единицы меры на 3,4,5 и более частей. С этих пор люди стали употреблять такие выражения, как три с половиной шага, четверть, половина и т.д. Можно сказать, что дробные числа появились в результате измерения. Древние люди перепробовали много вариантов записи дробей, пока не пришли к современной записи.

В Древнем Египте огромное значение имела архитектура. Для того, чтобы развивать данное ремесло египтяне должны были уметь хорошо вычислять, а точнее отлично знать арифметику.

Как известно, египтяне 4000 лет назад использовали десятичную систему счисления, которая не являлась позиционной. В Древнем Египте часто используемые дроби в практике имели свои названия. Также только египтяне умели оперировать аликвотными дробями (типа 1/n), такие дроби ещё называют египетскими. Если была необходимость в использовании других дробей, то люди могли представлять их в виде суммы основных дробей..Например, вместо 11/28 писали 1/7+1/4. Это было удобно, но не всегда.[13, с. 45]

Если углубится в историю, то можно найти такое утверждение, что современная запись дробей впервые появилась в Индии. В Индии знаменатель находился сверху, а числитель снизу, но черта дроби отсутствовала. Дробь помещали в прямоугольную рамку. И правила действий над дробями были почти такие же, как в современной математике.

Вавилоняне использовали всего две цифры. Вертикальная черта обозначала 1 единицу, а угол из 2-ух лежащих черточек – 10. Эти черточки у них выходили в облике клиньев, вследствие этого вавилоняне писали острой палочкой на сырых глиняных дощечках, которые затем сушили и обжигали. [13, с. 20]

В античном Вавилоне был знаменатель, равный 60-ти. Шестидесятеричными дробями, унаследованными от Вавилона, пользовались греческие и арабские арифметики и астрологи. Ученые по-всякому разъясняют возникновение у вавилонян шестидесятеричной системы счисления. Быстрее всего тут учитывалось основание 60, которое кратно 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60, собственно, что важно упрощает всякие расчеты. Но было неловко трудиться над натуральными числами, записанными по десятичной системе, и дробями, записанными по шестидесятеричной. А трудиться с обычными дробями было уже абсолютно непросто. В следствие этого голландский математик Симон Стевин внес предложение перейти к десятичным дробям.

Записывать дроби как в данный момент стали арабы. Арабы использовали три системы записи дробей. Для начала, на индийский образ записывая знаменатель под числителем; дробная линия была замечена в конце XII – начале XIII в. Землемеры, торговцы использовали аликвотные дроби, подобные египетским, при этом приноравливались дроби со знаменателями, не превосходящими 10 (только для этих дробей арабский язык содержит особые термины); нередко применялись приближенные значения; арабские научные работники трудились над улучшением сего исчисления. [18, с. 102]Ещё арабские работники унаследовали вавилонско-греческую шестидесятеричную систему, в которой, как и греки, использовали алфавитную запись, распространив ее и на целые части.

Наиболее интересной системой дробей являлась система в Древнем Риме. Она имела единицу веса, которую называли асс, поделенную на 12 долей. Одна двенадцатая асса называлась унцией. Римлян мог сказать, что он прошел 6 унций пути или прочитал 3 унции книги. Значит было пройдено 6/12 пути, прочитано 3/12 книги. В Древнем Риме было 18 разных названий дробей. Например, 1/288 асса – «скрупулус», отсюда пришло слово «скрупулёзно», то есть очень точно и тщательно. "Семис"- половина асса, "секстанс"- шестая доля асса, "семиунция"- половина унции, т.е. 1/24 асса и т.д. [13, с. 54]

Со временем расширение понятия числа происходит в связи с потребностями самой математики. Впервые отрицательные числа появляются в Древнем Китае. В Индии потребность в отрицательных числах возникает в ходе решения квадратных уравнений. В шестнадцатом и семнадцатом веках в Европе математики существование отрицательных числе отвергали, но даже если такие числа и встречались в их вычислениях, то они называли такие числа ложными. Изменения появились в 17 веке, когда положительным и отрицательным числам дали истолкование, как противоположно направленным отрезкам. Ввести отрицательные числа было необходимо, потому что они были связаны с развитием алгебры как науки, которая дает общие способы решения задач арифметики, не зависящих от содержания и начальных числовых данных. Введение отрицательного числа возникает при решении задач, которые сводятся к линейным уравнениям с одним неизвестным. Отрицательный ответ в таких задачах истолковывается на примере направленных величин.

В задачах же, сводящихся к множественному применению действий вычитания и сложения, для решения без использования отрицательного числа необходимо рассмотрение очень разных случаев; это может быть настолько сложным, что теряется вес алгебраического решения задачи перед арифметическим. Таким образом, использование алгебраических методов для решения задач затруднительно без пользования отрицательного числа. В Индии ещё в 6—11 вв. отрицательные числа часто применялись при решении задач и истолковывались в основном так же, как это делается сейчас.

В европейской науке в употребление отрицательные числа вошли со времен Р. Декарта, который дал геометрическое истолкование отрицательного числа как направленных отрезков. Декарт создал аналитическую геометрию, которая позволила рассматривать корни уравнения в виде координат точек пересечения некой кривой с осью абсцисс. Данное утверждение полностью стерло какое-либо различие между положительными и отрицательными корнями уравнения, их истолкование получилось по сути одинаковым.[28, с.101]

Представить схему развития понятия числа позволяют работы[2], [4] - [8], [12],[13],[17], [18], [28], [31], [32].

Евклидом была изложена некая теория отношений отрезков, которая учитывала возможность их несоизмеримости. В Древней Греции могли сравнить во величине такие отношения, а также производить над такими отношениями арифметические действия в геометрической форме.

Впервые Исаак Ньютон дал определение во «Всеобщей арифметике» понятия действительного числа: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Позднее, Р. Дедекиндом, Г. Кантором было уточнено понятие действительного числа. Сначала возникали понятия «больше», «меньше» либо «равно». На этом этапе развития люди начали складывать числа. Позже они научились и вычитать, и умножать, и делить. Деление чисел вообще считалось сложным и было признаком образованности человека. Как только открыли действия с числами, то возникла наука арифметика. Чуть позднее Пифагор изучил неизмеримые отрезки, а вот длины таких отрезков не могли выразить ни целым, ни дробным числом. Вследствие этого возникает понятие «геометрическое выражение». В ходе первых открытий математики Ближнего и Среднего Востока, Индии, а позже и Европы пользовались иррациональными величинами. Но их долгое время не хотели признавать равноправными числами. Их признанию поспособствовало появление «Геометрии» Декарта. После чего стало известно, что всякое число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. В восемнадцатом векеЭйлер и Ламберт утверждали, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Целые числа, числа дробные, положительные и отрицательные, а также нуль получали название рациональных чисел. Система рациональных чисел имеет свойство замкнутости в отношение 4-х арифметических действий. Сумма, разность, произведение или частное двух каких-либо рациональных чисел является числом рациональным. Все рациональные числа упорядочены между двумя понятиями «больше» и «меньше». Также рациональные числа обладают таким свойством, как свойство плотности. Данное свойство обозначает, что между двумя любыми рациональными числа находится множество рациональных чисел. Это свойство позволят с помощью рациональных чисел осуществлять измерение с любой точностью. Таким образом, рациональные числа служат для удовлетворения многих практических способностей.

Обоснование понятий дробного и отрицательного чисел было осуществлено в девятнадцатом веке. Оно не представило, в отличие от обоснования натурального числа, принципиальных затруднений. Для изучения непрерывно изменяющих переменных величин совокупность рациональных чисел оказалось недостаточной. В связи с этим возникла необходимость нового расширения понятия числа, которое заключалось в переходе от множества рациональных чисел к множеству действительных чисел (вещественных).

Вещественное, или действительное число — математическая абстракция, возникшая из потребности измерения геометрических и физических величин окружающего мира, а также проведения таких операций как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений. Натуральные числа возникли в процессе счета предметов, рациональные числа – из необходимости оперирования частями целого, а вот вещественные числа служат для измерения непрерывных величин.

Таким образом, расширение запаса рассматриваемых чисел привело к множеству вещественных чисел, которое помимо чисел рациональных включает также другие элементы, называемые иррациональными числами.

Образно понятие числа вещественного можно изобразить в виде числовой прямой. Для того, чтобы каждому числу можно было сопоставить конкретную точку на прямой, нужно выбрать направление отрезка, изначальную точку и единицу длины измерения отрезка. Соответственно тогда каждая точка на прямой будет показывать определенное вещественное число. Отсюда следует, что такой термин, как числовая прямая синонимичен с выражением множество вещественных чисел.

Огромный путь становления прошло понятие вещественного числа. В школе Пифагора обычно ставили в основу всего целые числа, но однажды там открыли несоизмеримые величины, если перевести на современность, то числа, которые не являются рациональными величинами. За этим открытием попытались выстроить общую теорию числа, которая бы включала несоизмеримые величины. Спустя две тысячи лет, необходимость в определении понятия вещественного числа начала рассеиваться, несмотря на то, что данное понятие постепенно расширялось. И только лишь во второй половине XIX века была сформирована теория вещественных чисел в работах Карла Вейерштрасса, Рихарда Дедекинда, Георга Кантора. Эти ученые дали разные, но эквивалентные подходы к теории вещественных чисел, отделив данное понятие от геометрии и механики. По мнению ученых, построить множество вещественных чисел можно различными методами.

В теории Георга Кантора вещественные числа представляют собой классы эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. В работе Карла Вейерштрасса вещественные числа являются бесконечными десятичными дробями, а Рихард Дедекинд привел такое суждение, что множество вещественных чисел – это сечение в области рациональных чисел. Подходы разные, но результат один, потому что в итоге получается некое множество объектов, которые обладают одними свойствами: данные числа можно сложить, умножить, сравнить между собой.[31, с. 133]

Как гласит современная математика, множество вещественных чисел есть непрерывное упорядоченное поле. Из данного понятие множества вещественных чисел следует, что существует только одно непрерывное упорядоченное поле.

В Древней Греции была первая развитая числовая система, которая состояла только из натуральных чисел и их отношений. Но позднее выясняется, что для геометрии и решения задач этих чисел недостаточно. На конкретном примере, можно в этом убедиться. Не может быть представлено ни натуральным, ни рациональным числом отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны. Чтобы выйти из этого положения, Евдоксу

Книдскому приходится вводить более широкое понятие геометрической величины, а точнее длины отрезка, объема и площади.

В «Началах» Евклида (книга V) была упомянута теория Евдокса, которая гласит о геометрической модели вещественных чисел. Число — это отношение двух величин, но Евдокс не рассматривал такое отношение как число, поэтому пришлось в «Началах» заново доказывать теоремы о свойствах чисел для величин. Следует отметить, что теория Евдокса является не полной, потому что в ней нет аксиомы непрерывности, нет обобщенной теории арифметических операций для величин. Но вскоре положение начало меняться.[31, с. 23]

Вопреки прежним традициям Диофант Александрийский рассмотрел дроби так же, как и натуральные числа. В своей книге «Арифметика» Диофант пишет о конкретном результате: «Число оказывается не рациональным»

Математики Ислама и Индии выдвигаются сразу на первый план, после гибели античной науки, и утверждают, что всякий результат измерения является числом. Эти утверждения постепенно стали укореняться и в средневековой Европе, хотя там изначально разделяли рациональным и иррациональные числа. В средневековой Европе иррациональные числа называли глухими, абсурдными, неразумными.

В своей работе «Универсальная арифметика» Исаак Ньютон приводит классическое определение вещественного числа: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу». На протяжении многого времени этого определения людям было вполне достаточно, и свойства вещественных чисел не доказывали, а считали очевидными.

Первую попытку заполнить пробел в основаниях математики сделал Бернард Больцано в своей статье «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» (1817). В этой работе ещё нет целостной системы вещественных чисел, но уже приводится современное определение непрерывности и показывается, что на этой основе теорема, упомянутая в заглавии, может быть строго доказана. В более поздней работе Больцано даёт набросок общей теории вещественных чисел, по идеям близкой к канторовской теории множеств, но эта его работа осталась неопубликованной при жизни автора и увидела свет только в 1851 году. Взгляды Больцано значительно опередили своё время и не привлекли внимания математической общественности.

1. 2 Методическая и логическая схемы расширения понятия числа

Основным понятием в математике является число. Линия числа это одна из содержательно – методических линий в школьном курсе математики. Изучение и применение чисел начинается с первого и заканчивается в одиннадцатом классе. Длительное использование числа требует тщательного разбора и изучения понятия числа.

Возникновение числа произошло ещё на началах человеческой цивилизации, в качестве обыкновенных потребностей деятельности людей. Существует арифметика натуральных чисел. Учение о числе основывается на данной арифметике. Последующее развитие числовой линии состоит в последовательном расширении множества натуральных чисел по следующей схеме, которую называют логической, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Авторы многих работ, в том числе [17], отмечают, что помимо логической схемы расширения понятия числа существует историческая схема. Различия между этими двумя схемами в том, что в исторической схеме дроби появились намного раньше отрицательных чисел

В школьном курсе устоялась историческая последовательность расширения числа.

Историческая схема $N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$ уступает логической в стройности, но заслуживает предпочтения из дидактических соображений. Школьная схема расширения числа даёт обоснование того, что положительная дробь более понятней детям, нежели отрицательное число.

Процесс интеллектуального роста человека с момента рождения и в течение всей жизни во многом повторяет тенденции исторического интеллектуального роста человечества, длящегося тысячелетиями (своего рода соответствие онтогенез – антропогенез). Возможно, поэтому учащимся легче усвоить расширение числовых систем согласно исторической схеме, т. е. так, как это происходило в ходе истории человечества.

В проекте программы по математике 1968 г. предусматривалась реализация в школьном обучении логической схемы развития понятия числа. Были проведены эксперименты по расширению множества натуральных чисел до множества целых чисел уже в IV классе. Однако в дальнейшем принятая программа 1970 г. возвратилась к исторической схеме, предусматривая лишь изучение арифметики десятичных дробей раньше арифметики обыкновенных дробей.

Программа 1996 г. устанавливала следующую последовательность расширения понятия числа в V-VI классах: натуральные числа и нуль, обыкновенные дроби, десятичные дроби, положительные и отрицательные числа и в заключение в виде обобщения целые и рациональные числа. В VII-IX классах подразумевалось изучение иррациональных чисел, общих положений о действительных числах. [10, с. 3-5]

Комплексные числа то включались в школьный курс математики, то исключались из него. Программой 1970 г. комплексные числа были исключены из школьного курса, а программа 1981 г. возвратила их, спустя несколько лет комплексные числа снова были исключены из курса.

В настоящее время обязательный минимум содержания основных образовательных программ и требования к уровню подготовки выпускников школы регламентируются государственными образовательными стандартами (начального, основного и полного) общего образования. Государство отвечает на вопросы «Что?» и «Зачем?» изучать. Решение процессуального вопроса «Как?» остается за общеобразовательным учреждением. Однако большинство из существующих ныне разнообразных программ по математики придерживаются традиционной (исторической) схемы введения и расширения числовых систем.

В школьном обучении перед введением новых чисел приводятся обычно примеры практических задач, неразрешимых (не всегда разрешимых) в известном множестве чисел. Чтобы сделать эти задачи разрешимыми, расширяется имеющееся множество чисел. Например, необходимость введения отрицательных чисел обосновывается обычно с помощью задач, в которых фигурируют направленные величины (как правило, это температура воздуха), изменяющиеся в двух противоположных направлениях, при этом показывается, что неразрешимость этих задач в системе неотрицательных чисел обусловлена тем, что вычитание здесь не всегда выполнимо. Необходимость введения иррациональных чисел чаще всего обосновывается с помощью задач измерения (несоизмеримость измеряемой величины с единицей) и извлечение квадратного корня (из положительных рациональных чисел, не являющимися полными квадратами). К понятию вещественного числа приходят как к числу, представимому в виде бесконечной десятичной дроби (если эта дробь периодическая, то вещественное число – рациональное, если же она непериодическая, то число - иррациональное).

Первая из рассматриваемых задач практическая, вторая – математическая. Легко показать, что первая сводится ко второй. Например, при введении иррациональных чисел достаточно рассмотреть единичный квадрат, измерение его диагонали приводит к извлечению корня квадратного из неполного квадрата. Получается следующая схема обучения: от потребностей практики в разрешимости задач – к потребностям математики в выполнимости операций и от последних – к новым числам, вооружающим математику средствами для удовлетворения потребностей практики.

В сознании учащихся годами складывается историческая схема расширения числовых систем, а одним из результатов общего образования должно быть сформированное представление о логической схеме расширения числовых систем, умение характеризовать их порядковую и алгебраическую структуры согласно логической схеме.

ГЛАВА 2 РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ

2.1 Рациональные числа в школьном курсе математики

Проблемы, связанные с формированием понятия числа в процессе обучения математике изучались многими учеными-методистами и практиками. По мнению автора работы [34], преподавание вопросов, связанных с развитием учения о числе учитель строит таким образом, чтобы ясна была связь понятий равенства, сумма и произведение, с одной стороны, и понятие числа, с другой. Таким образом, для того чтобы новые числа были равноправными, необходимо введение понятия равенства и установление критерия сравнения новых чисел между собой и с ранее известными числами, понятий суммы и произведения этих чисел.

Необходимо показать, что новые числа подчиняются всем законам арифметических действий, установленным для изучаемых ранее чисел. Целесообразность вводимых определений иллюстрируют рассмотрением конкретных примеров. Каждый этап развития числа состоит из: 1) *мотивировки* (алгебраический или практический мотивы; например, появление отрицательных чисел – алгебраический, дробных чисел - практический); 2) *подтверждение*.

Изучение арифметики натуральных чисел основано на наглядности. Учащиеся должны твердо усвоить, что любое натуральное число может быть изображено точкой на координатном луче, но не всякой точке на этом луче отвечает натуральное число. Этот последний факт готовит учащихся к пониманию необходимости введения новых чисел. Учащиеся знакомятся с одним из свойств множества натуральных чисел – бесконечностью. При изучении законов арифметических действий, для избегания формализма необходимо отметить их теоретическое значение. В частности, коммутативный и ассоциативный законы умножения целесообразно связать с геометрическим материалом (вычислением площадей прямоугольников, объёмом прямоугольных параллелепипедов). [17]

Первое расширение понятия числа – введение дробных чисел. Пропедевтика обыкновенных дробей сводится к ознакомлению учащихся с такими вопросами, как доля единицы, изображение дробей на координатном луче, правильные и неправильные дроби, основное свойство дробей, представление натурального числа в виде дроби. Десятичная дробь рассматривается как частный случай обыкновенной дроби, как способ записи дробей со знаменателем вида 10^n.Учащиеся должны иметь навыки чтения и записи десятичных дробей, умение записывать с помощью запятой числа вида $\frac{m}{10^n}$, где $m \in \mathrm{N}$. Сравнение дробей основано на основном свойстве обыкновенной дроби и позволяет установить важное свойство десятичных дробей, состоящее в возможности приписывания и отбрасывания нулей справа. Изучение умножения и деления десятичных дробей начинается с “простого” случая умножения и деления дроби на натуральное число. На конкретных примерах учащиеся убеждаются в том, что и для этих чисел смысл операции сохраняется.

Следующее расширение понятия числа – знакомство учащихся с отрицательными числами (6 класс). С методической стороны введение отрицательных чисел особых затруднений не представляет, т.к. дети часто встречаются с ними в жизни. Наибольшую трудность в их изучении представляет обоснование действии над ними.

Введение понятия отрицательного числа требует дать определение:

модуля (мотивировать это можно на конкретной задаче) как расстояние от точки, изображающей это число, до начальной точки. На основании такой геометрической интерпретации поясняется свойство модуля – он не может быть отрицательным, иначе говоря, модуль числа – есть число неотрицательное. Очень часто учащиеся считают его числом положительным, это можно объяснить отработкой учителя этого понятия, т.к. очень редко понятие расстояния связывается с начальной точкой(например, на каком расстоянии находится точка О от начальной точки?).

противоположных чисел (основано на понятии симметричных точек).

Сравнение положительных и отрицательных чисел иллюстрируется конкретными примерами и с помощью геометрических образов, что позволяет подготовить учащихся к введению соответствующих определений. И, так как множество рациональных чисел включает в себя множество натуральных чисел, то сравнение их необходимо проводить таким же образом (из двух натуральных чисел большее то из них, которое на координатной прямой правее и наоборот, если числа равны, то соответствующие им точки совпадают).

В школьном курсе определение действия обычно даётся в виде правила. Относительно операции сложения целых чисел, отдельно определяется сложение чисел с разными знаками и сложение отрицательных чисел. Для того чтобы учащихся подвести к определению действия сложения используются конкретные задачи на сложение чисел с помощью координатной прямой.

Умножение положительных и отрицательных чисел представляет наибольшую трудность. Правило знаков, которое даётся в школе, является по существу, своеобразной трактовкой определения операции умножения положительных и отрицательных чисел, а утверждения, которые на самом деле представляют собой определение новых понятий, не могут быть доказаны.

Существует два пути истолкования правила знаков: 1) <u>предварительно рассматривается ряд задач, решение которых требует проводить вычисления по формуле вида ab.</u> ($a>0, b>0; a<0, b>0, a>0, b<0; a<0, b<0$). Недочёт метода в том, что:1)у учащихся создаётся впечатление того, что проводится доказательство правила умножения; 2)допущена логическая ошибка, ибо формула $a \cdot b$ верна для $a > 0, b > 0$; 2) <u>догматический способ введения умножения</u>, предполагающий формирование правила умножения, которое затем поясняется на примерах и убеждает учащихся в целесообразности введенного определения.

Все числа, с которыми учащиеся ознакомились с 1 по 6 класс, составляют новое множество рациональных чисел. Вводится определение рационального числа, как дроби вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$. В этом множестве выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление на число, не равное нулю. При выполнении действий получаем числа того же множества, т.е. это множество обладает свойством замкнутости по отношению к действиям первой и второй ступени.

Для сложения справедливы: 1) переместительный закон $a+b=b+a$; 2) сочетательный закон $a+(b+c)=(a+b)+c$; 3) имеется нейтральный элемент $a+0=a$; 4) $a+(-a)=0$, т.е. имеется противоположный элемент.

Для умножения справедливы следующие законы: 1) переместительный; 2) распределительный $a(b+c)=ab+ac$ (учащимся знакомо понятие алгебраической суммы, поэтому нет необходимости говорить раздельно о сложении и вычитании); 3) сочетательный закон; 4) $a \cdot 1 = a$ - нейтральный элемент; 5) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, - обратный элемент.

2.2. Формирование понятие иррационального числа

Следующее расширение понятия числа – иррациональное число. В соответствии с построением множества действительных чисел по Дедекинду на множестве рациональных чисел существуют только три вида сечений: 1) в В нет наибольшего, в В\` наименьшее(деление множества рациональных чисел по числу, например,2); 2) в В есть наибольшее, в В\` нет наименьшего; 3) в В нет наибольшего числа, в В\` нет наименьшего

Пример. $B: b^2 < 2, B': b^2 > 2$ Докажем, что в B нет наибольшего числа.

$b \in B, b^2 < 2$. Покажем, что можно подобрать такое целое положительное число n, для которого $(b+\frac{1}{n})^2 < 2$, т.е. $b+\frac{1}{n} \in B$ - доказать. $b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow \frac{2b^2}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - b^2 (*)$ Если для неравенства $\frac{2b}{n} + \frac{1}{n} < 2 - b^2$ найдётсяn, для которого оно справедливо, то будет верно и данное неравенство: (*) $\frac{2b}{n} + \frac{1}{n} < 2 - b^2 \Rightarrow \frac{2b+1}{n} < 2 - b^2 \Rightarrow n > \frac{2b+1}{2-b^2}$, т.е. число $(b+\frac{1}{n}) \in B$

Так как во множестве рациональных чисел существует сечение третьего типа, то оно не является полным. Это сечение определяет число иррациональное. С геометрической точки зрения этот факт означает, что на координатной прямой существуют точки, которые не соответствуют никаким числам из множества рациональных чисел: множество рациональных чисел несвязно.

В школе при введении иррационального числа используют следующий факт: известно, что каждому рациональному числу r соответствует единственная точка M(r) прямой l, на которой заданы: начало отсчета, направление и масштаб. При этом число $r = \frac{m}{n}$ называется координатой точки M. Верно ли обратное утверждение? Ответ в учебнике [35] иллюстрируется следующим примером:

Докажем, что точка M не соответствует никакому рациональному числу.

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow m = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \vdots 2 \Rightarrow n = 2l$, что противоречит тому, что $\frac{m}{n}$ - несократимая дробь определение рационального числа).

Ещё один способ доказательства иррациональности числа $\sqrt{2}$ является построение последовательных рациональных приближений этого числа по недостатку и по избытку, которые обладают следующими свойствами:

1) каждое число последовательности (2) больше числа последовательности (1) с тем же номером: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;…. (1)

1,5; 1,42; 1,415; 1,4143;…. (2)

2) последовательность (1) $\nearrow$; (2) - $\searrow$

3) разность между членами последовательностей с одинаковыми номерами неограниченно уменьшается по абсолютной величине при увеличении номера и равна $\frac{1}{10^n}$.

Геометрически этот факт определяет сближение точек последовательности к $\sqrt{2}$.

Иначе говоря, члены последовательностей (1) и (2) образуют непериодическую десятичную дробь.

Методическая схема введения действительного числа:

а) делается попытка решения уравнения $x^2 - 2 = 0$, т.е. необходимо доказать теорему: не существует ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равнялся бы числу 2;

б) так как теорема доказана, то надо показать, что не существует целого числа, квадрат которого равен 2;

в) параллельно вводится понятие действительного числа на геометрической основе, т.е. в процессе измерения отрезков (отыскание абсциссы точки графика $y = x^2$, ордината которой равна 2). Такая задача приводит к проблеме измерения отрезка другим, принятым за единицу измерения;

г) измерение отрезка. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Десятичные приближения длины отрезка;

д) бесконечные периодические и непериодические дроби;

е) обращение обыкновенной дроби в бесконечную периодическую и обратная задача;

ж) иррациональные числа. Примеры;

з) действительные числа;

и) сравнение действительных чисел;

к) операции над действительными числами.

Следует помнить, что если в заданиях для следующих выражений:

$\frac{a}{\sqrt{a}}, \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[b]{b}}$ необходимо избавится от иррациональности в знаменателе, это означает, что в знаменателях этих дробей находятся иррациональные числа. В этом учащиеся могут убедиться, придав буквам конкретные значения. Алгебраические категории представляют собой абстракции более высокого порядка, а значит, рассуждения в алгебре носят более обобщённый характер, нежели непосредственно в числовых системах.

В учебнике 8 класса [35] после примеров на то, что существуют числа, которые не являются рациональными и на примеры о существовании бесконечных непериодических дробей вводится определение множества действительных чисел [35, с. 69], а также определении иррационального числа.

Всякое рациональное число, как целое, так и дробное, можно представить в виде дроби m/n, где m – целое число, а n – натуральное. Одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами. Среди дробей, с помощью которых записывается данное рациональное число, всегда можно указать дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь несократима. Для целых чисел такая дробь имеет знаменатель, равный 1.

Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют иррациональными.

Если к положительным бесконечным десятичным дробям присоединить противоположные им числа и число нуль, то получим множество чисел, которые называют действительными числами.

ГЛАВА 3 ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА В 8 КЛАССЕ

3.1 Изучение сформированности понятия рационального числа

Экспериментальная работа была проведена на базе МОУ «Ракитянская средняя общеобразовательная школа № 2 им. А.И. Цыбулева». Школа располагается в поселке Ракитное по адресу: ул. Коммунаров д. 3. Директором школы является учитель математики высшей категории, Почетный работник общего образования РФ, призер муниципального этапа регионального конкурса «Учитель года – 2004» Псарёва Елена Сергеевна. Общая численность школы 441 ученик на момент 2018 года. В начальной школе количество учеников составляет 165 учеников, в основной школе количество учеников составляет 276 учеников. Эксперимент был проведен на учениках 8 «А» класса. Количество учеников 24. Есть одна параллель. В 8 «А» классе обучается один отличник, 10 хорошистов. Успеваемость по предмету математика следующая: 3 ученика – отметка 5, 10 учеников – отметка 4, остальные ученики – отметка 3. Работа с учениками была проведена после уроков, без использования учебников, тетрадей, вспомогательных средств, интернет - ресурсов и т.д. Ученикам предоставлялись ручка, текст с тремя тестами, 3 бланка ответов (соответственно для теста №1, для теста № 2 и для теста № 3).

В 8 классе ученики продолжают знакомиться с понятием рационального числа. В таблице 1 видно, что тема рациональных чисел начинается во второй четверти учебного года. На изучение данной темы отведен 1 час. По окончанию данной темы, ученик должен уметь:

- Оперировать понятиями: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел;

- понимать и объяснять смысл позиционной записи натурального числа;
- выполнять вычисления, в том числе с использованием приемов рациональных вычислений;
- выполнять округление рациональных чисел с заданной точностью;
- сравнивать рациональные и иррациональные числа;
- представлять рациональное число в виде десятичной дроби.

Таблица 1

Часть календарно-тематического планирования по математике в 8 классе

46	А-31	Рациональные числа	П.10	КЗСД, ИНМ	Приводить примеры рациональныхчисел.	24.10
47	А-32	Иррациональные числа	П.11	ИНМ	Приводить примеры рациональных и иррациональных чисел.	25.10
48	*Г-16*	*Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника*	п.49-51	УЗ	Объяснять, как производится измерение площадей многоугольников, какие многоугольники называются равновеликими и какие равносоставленными; формулировать основные свойства площадей	26.10
49	А-33	Иррациональные числа	П.11	ЗПЗ	Приводить примеры рациональных и иррациональных чисел.	27.10
50	А-34	Действительные числа	П. 11	ЗПЗ	Приводить примеры действительных чисел.	28.10

В таблице 2 представлена технологическая карта по теме: «Рациональные числа».

Таблица 2

Технологическая карта по теме урока: «Рациональные числа»

Тема урока: Рациональные числа.
Тип урока: комбинированный
Цель урока: обобщить и углубить знания учащихся по теме рациональные числа, формировать умение обращать десятичные дроби в обыкновенные и наоборот, развивать критичность мышления, умение анализировать и сравнивать
Задачи урока:
Воспитывающая: развивать умение самостоятельно работать над поставленной задачей
Развивающая: вызвать заинтересованность в изучении математики, умение строить логические связи
Обучающая: обобщить и углубить знания учащихся о числах, формировать умение сравнивать числа
Планируемые результаты:
Метапредметные результаты:
Регулятивные УУД: определяют цель учебной деятельности, вносят коррективы и дополнения в составленные планы
Познавательные УУД: выделяют количественные характеристики объектов, заданные словами
Коммуникативные УУД: устанавливают рабочие отношения, сотрудничают, контролируют действия партнера
Личностные результаты: навыков анализа, сопоставления, сравнения; навыков составления алгоритма выполнения задания,
Предметные результаты: знают понятия натуральных, целых и рациональных чисел, умеют представлять число в виде дроби
Оборудование: интерактивная доска, интерактивный конспект, текст теста, напечатанный на карточках, учебники**,** электронное приложение к учебнику
Ход урока:
Предметные: разбивают на классы числа
Метапредметные:
Коммунитативные: участвовать в объяснении выбора
Регулятивные: принимать познавательную цель, сохранять её при выполнении учебных действий
Учитель приветствует учащихся, проверяет их готовность к уроку, организация внимания детей.
Устная работа.
- распределите числа по группам (слайд 1)

- какое число не вошло ни в одну группу, почему?
- как обозначаются эти группы чисел?
- Слушают учителя, настраиваются на урок
-выполняют классификацию,
объясняют, почему число пи не принадлежит к группам
вспоминают обозначения
2) Этап актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии.
Предметные: знать правила перевода дробей
Метапредметные:
Познавательные: понимать условия и требования задачи, *Коммуникативные:* уметь оформлять мысли в устной форме, аргументировать свое мнение и позицию.
Регулятивные: вносить коррективы и дополнения в составленные планы.
Представьте в виде рациональной дроби (слайд 2)
Представьте в виде десятичной дроби (слайд3)
Выполняют задания устно, проговаривая правила
Проверяют друг друга
3) Этап выявления места и причины затруднения, построения проекта выхода из затруднения.
Коммуникативные: уметь с помощью вопросов добывать недостающую информацию.
Регулятивные: уметь формулировать учебные задачи, определять знакомое в тексте, выделять новую информацию
Подготовка к восприятию нового материала.
-Вы уже знаете, какие числа называют натуральными, целыми, рациональными. Почему эти числа получили такие названия?
(слайд 4 – демонстрация кругов Эйлера после предположений, высказанных учащимися (стр. 61))
-высказывают своё мнение,
- отвечают на вопросы
слушают друг друга
- С помощью учителя ставят цель урока, делают выводы
4).Этап реализации построенного проект.
Метапредметные:
Познавательные: уметь добывать новые знания, соотносить их с известными
Коммуникативные: уметь слушать и понимать речь других, оформлять мысли в устной и письменной форме, аргументировать свое мнение и позицию.

Регулятивные: уметь сопоставлять новое и знакомое, составлять конспект
Изучение нового материала
1)-Для обозначения принадлежности и содержания в чем-либо, используются уже знакомые вам из курса геометрии символы (слайд 5)
Запишите с помощью этих символов следующие высказывания(слайд 5-с последующей проверкой работа в тетради)
2) Остановимся подробнее на рациональных числах (слайд 6, конспект, работа по учебнику стр. 62)
На слайде: представьте числа 5, -12, 5,26, 3,(1) в виде m/n
3) Какие бывают обыкновенные дроби? (слайд 7 – по нажатию появляется вопрос, правильные и неправильные дроби нужно сравнить с 1)
4) Вспомним, от какого слова происходит обозначение рациональных чисел?
Каким образом можно представить дробь в десятичную?
1/5, 2/3, 1/15
0,2, 0,(6), 0,0(6)
конечная, чисто периодическая с периодом 6, смешанная периодическая с периодом 6
Всегда ли можно обратить обыкновенную дробь в конечную?
Найдите в учебнике выводы о представлении десятичных и обыкновенных дробей (стр 64)
{при наличии времени можно показать учащимся правила перевода периодической дроби в обыкновенную (0,(3), 2,(36), 0,0(8), 2.3(24)}
- Делают записи в тетрадях, ориентируясь на пункт учебника и слайд, выполняют задание
Проверяют, исправляют ошибки
Работают с текстом учебника, выполняют промежуточное задание на доске и в тетрадях
Приводят примеры, делают выводы
5) Этап первичного закрепления с проговариванием во внешней речи.
Метапредметные:
Познавательные: выбирать основания и критерии для сравнения, сериации, классификации объектов
Коммуникативные: оформлять мысли в устной и письменной форме, аргументировать свое мнение.
Регулятивные: предвосхищать результат и уровень усвоения
Выполним упражнения
1)Тренировочные упражнения с проговариванием во внешней речи. (слайд 9,10) № 263 (вычеркиваем), 264 (устно отвечаем) – можно дополнить простыми примерами: разность множеств учащихся класса и мальчиков класса

2) № 265, 267 (авджи) – работа в тетрадях в парах
Работа у доски и в тетрадях
Пара, быстрее всего верно выполнившая задания, консультирует остальных
6) Этап минуты отдыха
восстановление
Физминутка. Упражнения для глаз
Выполняют упражнения
7) Этап закрепления и
Метапредметные:
Регулятивные: оценивать достигнутый результат.
Личностные: формирование умений контролировать процесс и результат деятельности
Закрепление изученного. Практикум.
№ 268 – самостоятельно
№ 269 коллективное обсуждение, поиск нескольких способов решения
8) Этап контроля и самоконтроля деятельности (закрепление)
Метапредметные:
Регулятивные: оценивать достигнутый результат.
Личностные: формирование умений контролировать процесс и результат деятельности
Тест с последующей проверкой. (на карточках)
Выполняют тест, обмениваются в парах, исправляют ошибки, оценивают себя, сдают учителю, получают устные комментарии
10).Этап рефлексии учебной деятельности на уроке.
Метапредметные:
Регулятивные: уметь проговаривать последовательность действий на уроке, высказывать своё мнение.
Личностные: уметь осуществлять самоанализ проделанной работы, делать самооценку.
Домашнее задание:
п. 10 № 266, 267 (бгезк), 270, 272. Циркуль
Подведение итогов
- Что вспомнили или быть может узнали нового?
- Оцените, насколько вы усвоили сегодняшний материал
Выставление оценок – Спасибо за урок!

-Отвечают на вопросы учителя
- Проводят самоанализ проделанной работы – Разбирают план действия с дом. Заданием

Для выяснения уровня сформированности понятия рационального числа были разработаны специальные тесты. Всего было составлено 3 теста. Тест № 1 содержит в себе теоретические вопросы на знание понятий чисел, а также данный тест нацелен на то, чтобы выяснить насколько реальные знания учеников совпадают с их ожиданиями, потому что в тесте есть вопросы, в которых ученик должен сам оценить уровень своих знаний по определенной теме. Текст теста № 1 представлен в таблице 3.

Таблица 3

Тест № 1 – для выявления теоретических знаний и самооценки учеников

1. Числа, употребляемые при счете предметов, называются …
a) целыми
b) натуральными;
c) рациональными
d) иррациональными.
2. Натуральные числа, числа им противоположные, и число нуль образуют множество …
a) натуральных чисел N
b) действительных чисел R
c) целых чисел Z
d) рациональных чисел Q.
3. Числа, которые можно представить в виде дроби m/n, где m — целое, n — натуральное, образуют множество …
a) целых чисел Z
b) рациональных чисел Q
c) дробных чисел

d) натуральных чисел N
4. Как бы вы могли оценить свои знания по определению натуральных чисел и умения выполнять с ними арифметические действия?
a) На отлично
b) На хорошо
c) На удовлетворительно
5. Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь является … числом.
a) рациональным
b) целым
c) иррациональным
d) натуральным
6. Множество действительных чисел R состоит из всех …
a) положительных и отрицательных чисел
b) рациональных и иррациональных чисел;
c) целых и дробных чисел
7. Как вы разбираетесь в определении и понятии целого числа?
a) На отлично
b) На хорошо
c) На удовлетворительно
8. Всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является … числом.
a) рациональным
b) иррациональным
c) целым
d) натуральным
9. Верно ли, что всякое натуральное число является целым?
a) да

b) нет
10. Насколько вы уверены в том, что вы разбираетесь в определении и понятии рационального числа?
a) На отлично
b) На хорошо
c) На удовлетворительно
11. Верно ли, что всякое рациональное число является целым?
a) да
b) нет
12. Верно ли, что всякое иррациональное число является действительным?
a) да
b) нет
13. Насколько вы уверены в том, что вы разбираетесь в определении и понятии иррационального числа?
a) На отлично
b) На хорошо
c) На удовлетворительно
14. Верно ли, что всякое целое число является действительным?
a) да
b) нет
15. Как Вы разбираетесь в определении понятия действительного числа?
a) На отлично
b) На хорошо
c) На удовлетворительно
16. Верно ли, что всякое рациональное число является действительным?
a) да

b) нет
17. Умеете ли вы выполнять действия с положительными и отрицательными числами?
a) Да
b) Нет
c) Не совсем

Тест № 1 содержит 17 вопросов, 12 из которых - на выявление реальных знаний, 5 – оценочные (самооценка).

Таблица 4

Таблица для оценивания уровня знаний ученика по первому тесту

Номер вопроса	1	2	3	4*	5	6	7*
Ответ(балл)	b(1)	c(1)	b(1)	a(1)b(0,5)c(0)	c(1)	b(1)	a(1)b(0,5)c(0)

8	9	10*	11	12	13*	14	15	16	17*
a(1)	a(1)	a(1)b(0,5)c(0)	b(1)	a(1)	a(1)b(0,5)c(0)	a(1)	a(1)bc	a(1)	a(1)b(0) c(0,5)

Максимальный балл: 17

Высокий уровень: 17-14 (включительно)

Средний уровень: 13-10 (включительно)

Низкий уровень: ≤ 9

Вопросы со звездочкой*(4,7,10,13,17) содержат субъективную точку зрения, оценку.

Также был проведен обзор результатов данного теста иначе. Считалось количество баллов вопросов № (4, 7, 10, 13, 17) (данный блок вопросов назовем А) и вопросов № (1,2,3,5,6,8,9,11,12,14,15,16) (данный блок вопросов назовем В) для того, чтобы выяснить насколько оценка самого ученика совпадает с реальным уровнем знаний по данной теме.

Была разработан блок для анализа результатов:

В 12-9 баллов = А 5-4 баллов (нормальный уровень соотношения знаний и оценки);

В 8-5 баллов = А 5-4 баллов (низкий уровень соотношения знаний и оценки);

В 4-1 баллов = А 5-4 баллов (уровень завышенных ожиданий).

Проанализировав ответы (см. табл. 4) учеников 8 класса по первому тесту были выявлены следующие результаты: высокий уровень показали 3 ученика, средний уровень знаний оказался у 17 школьников, и низкий уровень знаний имеют 4 восьмиклассника (см. рис.1).

Рис. 1. Результаты теста № 1

При втором анализе ответов по данному тесту было выяснено, что у 2 учеников нормальный уровень соотношения знаний и самооценки, 15 школьников имеют средний уровень соотношения знаний и оценки, и 7 восьмиклассников оказались с уровнем завышенных ожиданий, но к сожалению, с низким уровнем знаний по рассматриваемой теме.

Тест № 1 служил для предварительной оценки теоретических знаний и собственной оценки. Тест № 2 (см. табл. 5) разработан с практическим уклоном. В этом тесте затронуты темы: натуральные числа, целые и рациональным. Ученикам была дана возможность на практике проверить свои знании по данным темам.

Таблица 5

Тест 2 (в соответствующих ячейках необходимо поставить + или -, если число принадлежит определенному множеству)

№ вопроса		N	Z	Q
1	143			
2	0			
3	-35			
4	$\sqrt[2]{36}$			
5	5/13			
6	4,12			
7	-0,2			
8	$\frac{10}{13}$			

Блок для оценивания результатов по тесту № 2:

Максимальное количество баллов : 8

За всю правильно заполненную строку по конкретному вопросу дается 1 балл, если допущена хотя бы одна ошибка по конкретному вопросу 0,5 балла, если по конкретному вопросу нет ни одного правильного ответа – 0 баллов.

- Высокий уровень: 8 баллов;

- Средний уровень: 7-5 баллов;
- Низкий уровень: ≥ 4.

Рис. 2. Результаты теста № 2

Проверка ответов по тесту № 2(см. рис.2) показала, что картина по результатам первого теста не поменялась кардинально, но всё же, количество детей, показавших высокий уровень увеличилось (4 ученика), показавших средний уровень уменьшилось (14 учеников), показавших низкий уровень увеличилось (8 учеников).

3.2 Формирование понятия иррационального числа

Изучение иррационального числа следует сразу после введения понятия рационального числа. Из таблицы 1 видно, что на тему «Иррациональные числа» отводится 2 часа, на тему «Действительные числа» 1 час. Основная цель изучения этих тем - это систематизировать сведения о рациональных числах и дать представление об иррациональных числах, расширив тем самым понятие о числе; выработать умение выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

В данной теме учащиеся получают начальное представление о понятии действительного числа. С этой целью обобщаются известные учащимся сведения о рациональных числах. Для введения понятия иррационального числа используется интуитивное представление о том, что каждый отрезок имеет длину и потому каждой точке координатной прямой соответствует некоторое число. Показывается, что существуют точки, не имеющие рациональных абсцисс. Технологическая карта урока на тему «Иррациональные числа» представлена ниже (см. табл. 6).

Таблица 6

Технологическая карта урока математики в 8 классе на тему «Иррациональные числа»

Тема урока: «Иррациональные числа»
Цели:
- ввести понятие иррационального числа, действительного числа;
- научить находить приближенные значения корней с помощью микрокалькулятора;
- познакомить с четырехзначными математическими таблицами;
- закрепить навык преобразования обыкновенной дроби в десятичную и десятичной бесконечной периодической дроби в обыкновенную;
- развивать память, мышление.
Ход урока
I Актуализация опорных знаний.
Проверка домашнего задания:
а) Представить в виде десятичной дроби: 38/11 =
б) Представить в виде обыкновенной дроби: 1,(3) = 0,3(17) =
в) Карточка:

Представить в виде обыкновенной дроби:
1 вариант 2 вариант 3 вариант
7,4(31) 1,3(4) 4,7(13)
II Устные упражнения
1) Прочитайте дроби:
0,(5); 3,(24); 15,2(57); -3,51(3)
2) Вычислите:
$\sqrt{25}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{160}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{2500}$; $\sqrt{-25}$; $(\sqrt{4})^2$; $(\sqrt{7})^4$; $3+\sqrt{9}$; $7-\sqrt{36}$; $2-\sqrt{16}$; $4\cdot\sqrt{0,01}$
3) Округлите данные числа:
3,45; 10,59; 23,263; 0,892
А) до единиц;
Б) до десятых.
III Изучение нового материала
<u>1. Сообщение темы и целей урока</u>
<u>2. Объяснение учителя</u>
Наряду с бесконечными периодическими дробями в математике также рассматриваются бесконечные непериодические дроби. На прошлом уроке вы познакомились с понятием рациональных чисел. И знаете, что любое рациональное число можно представить в виде десятичной дроби, конечной или бесконечной.
Например, дроби
0,1010010001…
0,123456…
2,723614…
Бесконечные десятичные непериодические дроби называются иррациональными числами.
Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных

чисел.
Арифметические действия и правила сравнения для действительных чисел определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств также как и для рациональных чисел.
Когда же получаются иррациональные числа?
1) При извлечении квадратных корней.
Доказывается, что из любого неотрицательного числа можно извлечь квадратный корень.
Например
$\sqrt{1,44} = 1,2$; $\sqrt{100} = 10$ - рациональные числа $\sqrt{3} = 1,71320508...$ - иррациональое число $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{9}$ – иррациональные числа
<u>2) Иррациональные числа получаются не только при извлечении корней.</u>
Например
$\pi = \frac{c}{d}$ $\pi \approx 3,14$
<u>3. Устно решают №321</u>
Какие числа называются иррациональными? (чтение ответа из учебника)
<u>4. Сообщение «Из истории иррациональных чисел»</u>
<u>5. На практике для нахождения приближенных значений корней с требуемой точностью используются таблицы, микрокалькуляторы и другие вычислительные средства.</u>
1). Знакомство с четырехзначными математическими таблицами.(стр. 35)
$\sqrt{9,73} = 3,119$ $\sqrt{36,4} = 6,033$ $\sqrt{9,736} = 3,120$
Для тех, кто интересуется более подробно познакомиться с нахождением

квадратных корней с помощью таблицы может почитать пояснения к таблице.

2). В настоящее время чаще всего для нахождения приближенных значений корней пользуются микрокалькулятором.

Пример

$\sqrt{14}$ с точностью до 0,001

$14 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ 3{,}7416573$

$\sqrt{14} \approx 3{,}742$

IV Закрепление изученного материала

№322(1,3,5) Разбирают и записывают на доске.

$\sqrt{8} \approx 2{,}828$	$8 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ 2{,}8284271$
$\sqrt{6{,}6} \approx 8{,}124$	$6{,}6 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ 8{,}1240384$
$\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$	$0{,}5 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ 0{,}7071067$

<u>6. Работа по карточкам</u>

Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,001

$\sqrt{27} =$	$\sqrt{4{,}6} =$
$\sqrt{121{,}5} =$	$\sqrt{2{,}13} =$
$\sqrt{12{,}72} =$	$\sqrt{3{,}148} =$
$\sqrt{5{,}21} =$	$\sqrt{13{,}69} =$

<u>7. Геометрически действительные числа изображаются точками числовой оси</u>

Стр. 89 (рис.30)

V Усвоение изученного материала

Самостоятельная работа

Вариант 1

Сравнить числа

а) 1,(56) и 1,56

б) - 4,(45) и – 4,45
2. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую
дробь
а) 0,(8)
б) 4,2(43)
Вариант 2
Сравнить числа
а) 2,(35) и 2,35
б) - 1,(27) и – 1,272
2. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую
дробь
а) 1,(9)
б) 7,5(31)
VI Домашнее задание: п.21, №322(2,4,6), №323, дополнительное задание (карточки)
VII Итог урока и выставление оценок.
- Какие числа называются иррациональными?
- Какие числа образуют множество действительных чисел?

Для анализа результатов и уровня знаний восьмиклассников по данной теме был разработан третий тест (см. табл. 7). Этот тест направлен на выяснение целостной картины о знаниях в темах понятия числа, потому что в тесте № 3 затронуты следующие темы: натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа.

Таблица 7

Тест 3 (в соответствующих ячейках необходимо поставить + или -, если число принадлежит данному множеству)

№ вопроса		N	Z	Q	Иррациональные числа	R
1	$\sqrt{64}$					
2	$\sqrt[3]{27}$					
3	0, 2(34)					
4	3,8291…					
5	-34					
6	3215					
7	$\frac{4}{23}$					
8	123,1					

Блок для оценивания результатов по тесту № 3:

Максимальное количество баллов: 8

За всю правильно заполненную строку по конкретному вопросу дается 1 балл, если допущена хотя бы одна ошибка по конкретному вопросу 0,5 балла, если по конкретному вопросу нет ни одного правильного ответа – 0 баллов.

- Высокий уровень: 8 баллов;
- Средний уровень: 7-5 баллов;
- Низкий уровень: ≥ 4.

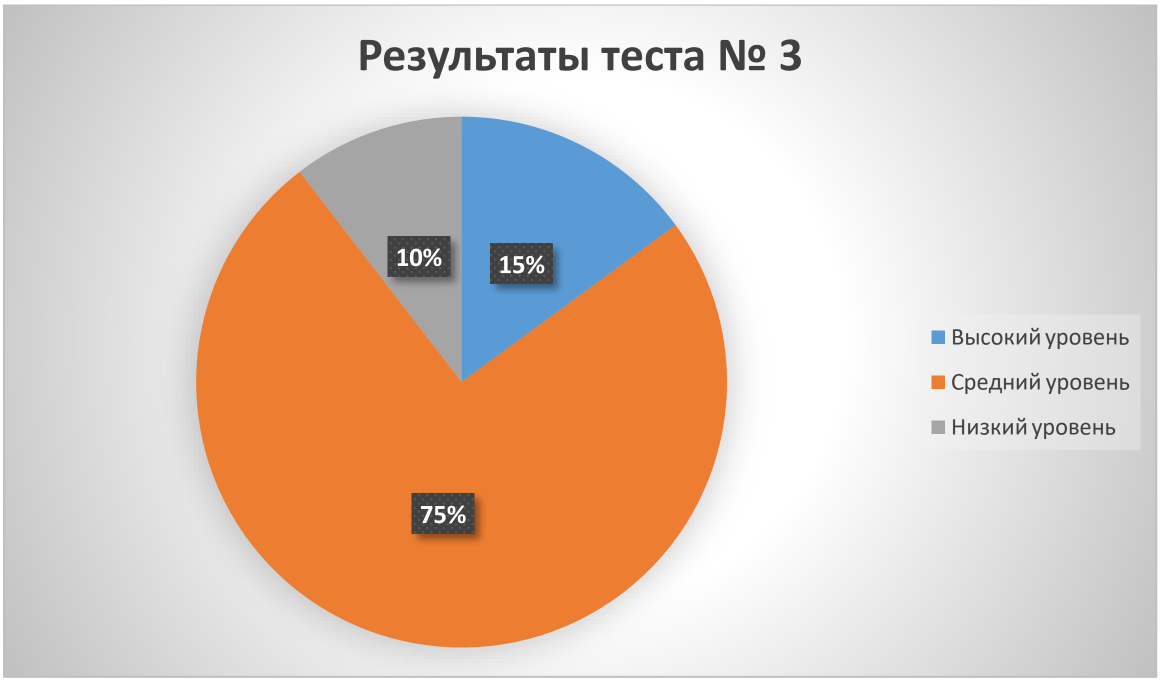

Рис. 3. Результаты теста № 3

После проверки ответов учеников по тесту № 3 (см. рис. 3) были получены следующие результаты. Высокий уровень подтвердили 2 ученика, средний уровень в этой теме имеют 10 учеников, и низкий уровень оказался у 12 учеников.

Наиболее четкую картину уровня знаний показывает третий тест, потому что в этом тесте затронуты все темы понятия числа, и последние результаты наиболее явно демонстрируют рейтинг по уровням знаний восьмиклассников.

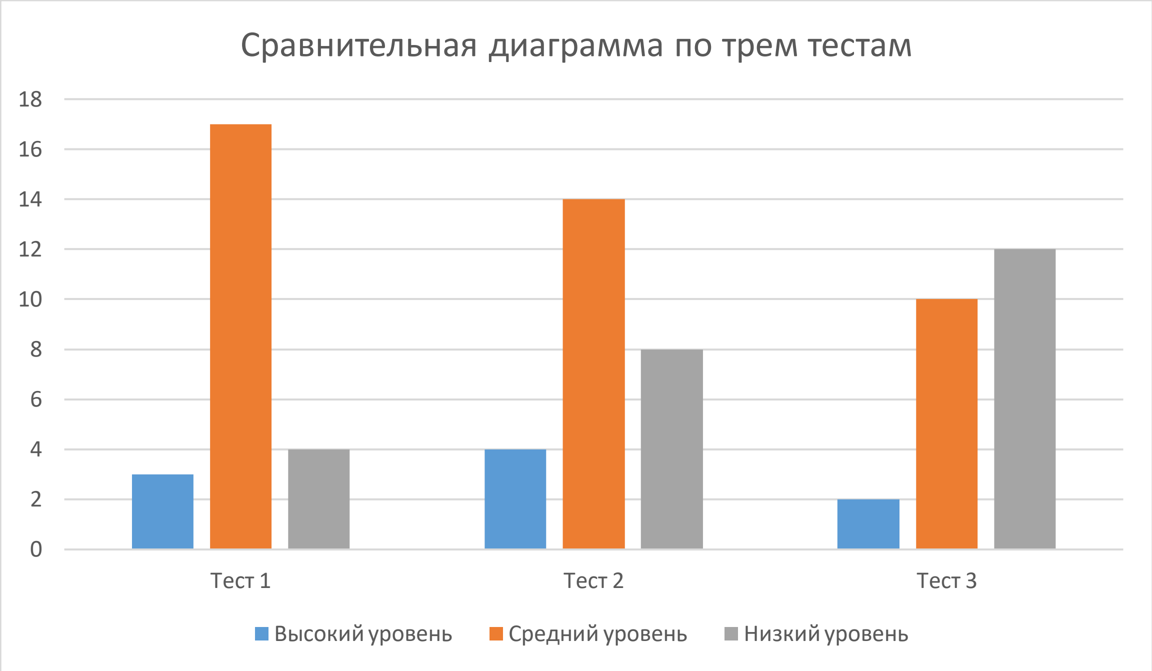

Рис.4. Сравнительная диаграмма по трем тестам

Проанализировав все результаты по трем теста (см. рис. 4), удалось выстроить некоторую последовательность. Высокие результаты по трем тестам стабильно набирали 2 ученика, средние результаты набирали ученики, количество которых с каждым тестом уменьшалось в разы, а количество учеников с низким уровнем увеличивалось с каждым последующим тестом (см. табл. 8)

Таблица 8

Общие результаты по трём тестам

Уровень	Тест №1	Тест №2	Тест №3
Высокий	3 уч.	4 уч.	2 уч.
Средний	17 уч.	14 уч.	10 уч.
Низкий	4 уч.	8 уч.	12 уч.

Общие результаты:

- 2 ученика показали высокий результат по всем трем тестам, что составляет 8,3 % от количества всего класса;
- 10 учеников показали средний уровень по всем трем тестам, что составляет 83,3 % от количества всего класса;
- 2 ученика продемонстрировали высокий уровень по тесту № 1, но средний уровень по 2 и 3 тестам, что составляет 8,3 % от всех учащихся;
- 4 ученика низкий уровень по всем трем тестам – это 16,6 %;
- 1 ученик имеет средний уровень по тесту № 1, высокий уровень по тесту № 2, но средний уровень по тесту № 3 – это 4,2 %.

Вывод: малая часть класса имеет высокий уровень сформированности понятия действительного числа, треть класса хорошо владеет теорией, но на практике не может применить свои знания, всего 3 % детей не показали хороших результатов в теории, но на практике результаты были удовлетворительными, и остальная часть класса имеет средний уровень как в теории, так и в практике.

3.3 Методические рекомендации по улучшению сформированности понятия чисел

Для улучшения знаний в сфере понятий чисел у школьников 8 класса, был разработан комплект заданий для самостоятельного выполнения дома, либо самостоятельно на уроке.

Задания по теме: «Рациональные и иррациональные числа»

Вариант 1

1. Значение какого из выражений является числом иррациональным?

1) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ 2) $(\sqrt{24}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{24}+\sqrt{2})$

3) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}}$ 4) $\sqrt{18}-2\sqrt{2}$

2. Значение какого из выражений является числом иррациональным?

1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ 2) $(\sqrt{17}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{18})$

3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$ 4) $\sqrt{45}-\sqrt{5}$

3. Значение какого из данных ниже выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}$

2) $(\sqrt{25}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{25}+\sqrt{6})$

3) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{48}}$

4) $\sqrt{18}-2\sqrt{2}$

4. Значение какого из выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{19}$

2) $(\sqrt{25}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{25}+\sqrt{3})$

3) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{12}}$

4) $\sqrt{12}-3\sqrt{3}$

5. Значение какого из выражений является числом рациональным?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)$ 2) $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}}$

3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ 4) $(\sqrt{6}-3)^2$

Задания по теме: «Рациональные и иррациональные числа»

Вариант 2

1. Значение какого из выражений является числом иррациональным?

1) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ 2) $(\sqrt{24}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{24}+\sqrt{2})$

3) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}}$ 4) $\sqrt{18}-2\sqrt{2}$

2. Значение какого из выражений является числом иррациональным?

1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ 2) $(\sqrt{17}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{18})$

3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$ 4) $\sqrt{45}-\sqrt{5}$

3. Значение какого из данных ниже выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}$

2) $(\sqrt{25}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{25}+\sqrt{6})$

3) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{48}}$

4) $\sqrt{18}-2\sqrt{2}$

4. Значение какого из выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{19}$

2) $(\sqrt{25}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{25}+\sqrt{3})$

3) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{12}}$

4) $\sqrt{12}-3\sqrt{3}$

5. Значение какого из выражений является числом рациональным?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)$ 2) $\dfrac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}}$

3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ 4) $(\sqrt{6}-3)^2$

Данный комплект заданий нацелен на то, что нужно не просто выбрать правильный ответ, а сначала проанализировать каждый вариант ответа. В заданиях такого плана недостаточно знать лишь определение иррационального числа, нужно будет вспомнить, что такое квадратный корень и какими свойствами он обладает. Такие задание хороши тем, что ученик не только полностью вникает в понятие иррационального числа на основе сравнения всех вариантов ответов, но и у школьника развивается мышление, логика. Решить вопрос можно и методом исключения, проанализировав все варианты ответов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс формирования понятия числа охватывает огромный промежуток времени. Начало формирования числа зарождается в глубине веков. Пути, а также формы развития числовой линии у разных народов очень разнообразны. При всем данном разнообразии общим для всех народов является то, что развитие понятия числа возникло непосредственно из практического применения и прошло огромный путь совершенствования.

В данной работе рассмотрены понятия натурального, целого, рационального, иррационального и действительного чисел. Приведена линия расширения понятия чисел в ходе развития человечества. Проанализирована методическая и логическая схема расширения понятия числа. Авторы многих работ, в том числе [17], отмечают, что помимо логической схемы расширения понятия числа существует историческая схема. Различия между этими двумя схемами в том, что в исторической схеме дроби появились намного раньше отрицательных чисел. В школьном курсе устоялась историческая последовательность расширения числа.

Разработаны 3 теста для выяснения сформированности уровня понятия числа. Тесты проводились в 8 классе. Были получены следующие результаты: малая часть класса имеет высокий уровень сформированности понятия действительного числа, треть класса хорошо владеет теорией, но на практике не может применить свои знания, всего 3 % детей не показали хороших результатов в теории, но на практике результаты были удовлетворительными, и остальная часть класса имеет средний уровень как в теории, так и в практике.

Представлены методические рекомендации по улучшению усвоению понятия числа в виде заданий, для самостоятельного выполнения. Данный комплект заданий нацелен на то, что нужно не просто выбрать правильный ответ, а сначала проанализировать каждый вариант ответа. В заданиях такого плана недостаточно знать лишь определение иррационального числа, нужно будет вспомнить, что такое квадратный корень и какими свойствами он обладает. Такие задание хороши тем, что ученик не только полностью вникает в понятие иррационального числа на основе сравнения всех вариантов ответов, но и у школьника развивается мышление, логика. Решить вопрос можно и методом исключения, проанализировав все варианты ответов.

Таким образом, все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков, М. И. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / М. И. Башмаков. – М. : Просвещение, 2007. – 208 с. – ISBN 5-09-014123-1;
2. Виленкин Н.Я. « Из истории дробей»./ Квант № 5 – 1987. – 118 с.;
3. Виленкин, Н. Я. Математика 4 – 5 классы. Теоретические основы / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1974. – 224 с.;
4. Володарский А. И. Математика в древней Индии. // Историко-математические исследования. — М.: Наука, 1975. — № 20. — С. 282-298.;
5. Володарский А. И. Очерки истории средневековой индийской математики. М.: Наука, 1977.;
6. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. М.: Наука, 1967. – 386 с.;
7. Г.И.Глейзер «История математики в школе», М.: Просвещение, 1981. - 239 с.;
8. Глейзер Г. И. История математики в школе. — М.: Просвещение, 1964. — 376 с.;
9. Государственный образовательный стандарт основного общего образования по математике [Текст] // Математика в школе. - 2004. – Вып. 4 – С. 2-16.;
10. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике. // Математика в школе. - №6 -2008. с. 20-30.
11. Денищева, Л. О. Разработка педагогических тестов по математике / Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Г. Михалева. – М. : ВАКО, 2014. – 192 с. – ISBN 978-5-408-01481-1. ;
12. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. — Изд. второе. — М.: Просвещение, 1965. — 416 с.;

13. Депман И.Я. История арифметики. - М.: Просвещение, 1965. - 415 с.;

14. Иванов Д.А. Компетенции и компетентностный подход в современном образовании. // Завуч. Управление современной школой. - №1. – 2008. с. 4-24.

15. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. М. Колягин [и др.]. – М. : Просвещение, 2004. – 286 с. – ISBN 5-09-013101-7. ;

16. Истомина, Н. Б. Методические рекомендации к учебникам «Математика» для 5 – 6 классов / Н. Б. Истомина. – М. : Ассоциация XXI век, 2001. – 208 с. – ISBN 5-89308-077-7.;

17. Историческая и логическая последовательность изучения числовых мн-в. Общий принцип расширения числовых мн-в. [Электронный ресурс] / - Режим доступа : https://studopedia.org/8-47740.html;

18. История математики. С древнейших времен до начала Нового времени // История математики / Под редакцией А.П. Юшкевича, в трёх томах. – М.: Наука, 1970. – 353 с.;

19. Компетентностный подход в педагогическом образовании [Текст] / В.А. Козырев [и др.]. – СПб.: Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2004. – 392 с.;

20. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года // Вестник образования.-2002.№6.-С.10-40.

21. Лабораторные и практические работы по методике преподаваниягматематики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностейпед. ин-тов / Е. И. Лященко [и др.] ; под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с. – ISBN 5-09-000600-8.;

22. Лященко, Е. И. Методика обучения математике в 4 – 5 классах / Е. И. Лященко, А. А. Мазаник. – Минск : Народная асвета, 1976. – 222 с.;

23. Макарычев, Ю. Н. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2006. – 254 с. – ISBN 5-09-015463-5.;

24. Математика. Методические рекомендации к учебнику 5 класса : кн. для учителя / С. Б. Суворова [и др.]. – М. : Просвещение, 1999. – 141 с. – ISBN 5-09-008678-8.;

25. Программы для общеобразовательных учреждений. Математика: Учебное издание / Под ред. Л.М. Котова. – М.: Просвещение, 1996. – 193 с.;

26. Программы для общеобразовательных школ, гимназий лицеев: Математика. 5-11 классы / Составители: Кузнецова Г.М., Миндюк Н.Г. –М.: Дрофа,2002.-320с.

27. Расширение понятия числа в школьном курсе. [Электронный ресурс]\- Режим доступа http://studbooks.net /1741359/pedagogika/rasshirenie_ponyatiya_chisla_shkolnom_kurse_matematiki

28. Рыбников К. А. История математики в двух томах. — М.: Изд. МГУ, 1960-1963.; 342 с.;

29. Симонова, Н.С. Предметно-методическая подготовка будущего учителя математики при изучении курса «Числовые системы» в педвузе [Текст]: автореф. дис. … канд. пед. наук / Н.С. Симонова. – Саранск: Изд-во Мордовского гос. пед. инст-та имени М.Е. Евсеева, 2003. – 23 с.;

30. Столяр, А.А. Педагогика математики [Текст]: учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / А.А. Столяр. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышейшая школа, 1986. – 414 с.;

31. Фридман Л.М. «Изучаем математику». – Москва, 2001. – 143 с.;

32. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1976. — 318 с.;

33. Хуторской А.В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования//Народное образование .-2003.-№2.-С.58-64

34. Шридхара. Патиганита. Перевод О. Ф. Волковой и А. И. Володарского. Статья примечания А. И. Володарского.—ФМСВ, 1966, вып. 1(4), 141—246;

35. Алгебра 8 класс /Под ред. - Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 2013. – 291 с.