ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа

обучающегося по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика

заочной формы обучения, группы 02041351

Башкатовой Алены Владимировны

Научный руководитель

доц. Сокольский А.Г.

БЕЛГОРОД 2018

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия как наука о соотношениях между углами и сторонами треугольника и других геометрических фигур возникла более двух тысячелетий назад. По причине того, что большинство таких соотношений нельзя выразить с помощью обычных алгебраических операций, понадобилось ввести особые тригонометрические функции, первоначально оформлявшиеся в виде числовых таблиц. [7]

Г.Г. Цейтен в своей книге «История математики в 16 и 17 веках» обосновал, что у истоков создания тригонометрии стоят древние астрономы. В настоящее время тригонометрию используют во многих разделах физики, электронике, медицине (включая ультразвуковое исследование (УЗИ), компьютерную томографию), сейсмологии, метеорологии, машиностроении и в других областях. [25]

В школьном курсе математики знакомство с тригонометрией начинается в 8 классе на уроках геометрии, когда вводится понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника. Затем идёт расширение этого вопроса, и тогда уже учащиеся осваивают понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла, обсуждаются теоремы синуса и косинуса, позволяющие решать треугольники.

На уроках алгебры в 9 классе помимо этих понятий изучается ряд формул, позволяющих преобразовывать тригонометрические выражения; находить их значения; вычислять значения тригонометрических функций по заданному значению одной из функций и другие вопросы, связанные с тригонометрией.

В курсе алгебры и начала анализа в 10 классе начинается изучение темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» [8].

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, так как тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела.

Таким образом, перед учителем стоит задача – формировать у учащихся способности решать тригонометрические уравнения и неравенства каждого вида, тем самым развивая общие тригонометрические представления.

Все вышеизложенное актуализирует тему выпускной квалификационной работы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» в средней школе

Объект исследования: процесс изучения тригонометрических уравнений и неравенств в средней школе.

Предмет исследования: методика изучения решения тригонометрических уравнений и неравенств в средней школе.

Цель исследования: на основе учебной, научной и методической литературы изучить основные теоретические сведения, связанные с решениями тригонометрических уравнений и неравенств; раскрыть общие методические положения, на которые нужно обратить внимание при изложении темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» в средней школе; разработать урок обобщения и систематизации знаний на тему: «Решение тригонометрических уравнений», и урок усвоения нового материала с элементами первичного закрепления на тему: «Решение простейших тригонометрических неравенств» для учеников 10-х классов.

Достижение цели обусловило постановку следующих **задач исследования:**

1. Рассмотреть виды тригонометрических уравнений и неравенств и методы их решения;
2. Раскрыть методику изучения тригонометрических уравнений и неравенств в средней школе;
3. Разработать урок обобщения и систематизации знаний на тему: «Решение тригонометрических уравнений» для учеников 10-х классов;

4. Разработать урок усвоения нового материала с элементами первичного закрепления на тему: «Решение простейших тригонометрических неравенств» для учеников 10-х классов.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

В первой главе рассматриваются теоретические сведения, связанные с решениями тригонометрических уравнений и неравенств.

Вторая глава посвящена методическим рекомендациям по изучению темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» и разработке уроков на темы: «Решение тригонометрических уравнений», «Решение простейших тригонометрических неравенств».

Заключение содержит подведение итогов проделанной работы.

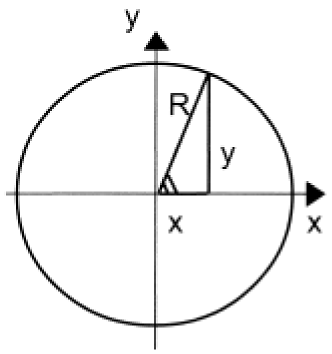
В приложении представлена справочная информация с тригонометрическими формулами, значениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса, а также теоретический и практический материал, относящийся к разработке уроков.

Глава 1. Теоретические основы изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» в средней школе.

Тригонометрическими уравнениями называют уравнения, которые содержат неизвестную под знаком тригонометрической функции.

Тригонометрические функции – вид элементарных функций, к которым относят такие функции как $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Вспомним, что такое синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла и как эти тригонометрические функции связаны с окружностью. Для этого возьмем точку на координатной плоскости, соединим ее с началом координат, и этим радиусом опишем окружность (*Рисунок 1.1*).



$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{\text{ордината}}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{\text{абцисса}}{R}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Рисунок 1.1

Синусом произвольного угла, образуемого радиусом – вектором с положительным направлением оси абсцисс называется отношение ординаты конца подвижного радиуса к величине этого радиуса.

Косинусом произвольного угла, который образует радиус с положительным направлением оси абсцисс, называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса к величине этого радиуса.

Тангенс произвольного угла определяется как отношение синуса к косинусу, котангенс-отношение косинуса к синусу.

Секанс – величина обратная косинусу, а косеканс-величина обратная синусу. [27]

Выражение $y = \sin x$ можно прочитать наоборот: $x -$ есть дуга, синус которого равен y. Учитывая, что ДУГА $-$ это АРКУС (от лат. Arcus $-$ дуга), запись будет выглядеть так: $x = \arcsin y$. Эта запись и есть обратная тригонометрическая функция для функции $y = \sin x$.

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. Arcus - дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку.

Таким образом, обратные тригонометрические функции, аркфункции, круговые функции – это функции, обратные тригонометрическим функциям. Шести основным тригонометрическим функциям соответствуют шесть обратных тригонометрических функций, а именно, арксинус (Arcsin x), арккосинус (Arccos x), арктангенс (Arctg x), арккотангенс (Arcctg x), арксеканс (Arcsec x) и арккосеканс (Arccosec x). Арксеканс и арккосеканс мало употребительны и в школьном курсе математики детально не изучаются.

Впервые специальные символы для обратных тригонометрических функций использовал Д.Бернулли (1729, 1736), современные обозначения ввели К.Шерфер и Ж.Лагранж. [15]

Министерством образования и науки Российской Федерации был издан приказ от 31 марта 2014 г. №253 (ред. от 29.12.2016) об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования. Согласно федеральному перечню учебников на 2018-2019 года, в 10-11 классах по алгебре рекомендованы учебники авторов таких, как

Алимов Ш.А., Никольский С.М., Муравин Г.К. и др. Несмотря на то, что учебники Мордковича А.Г., Семенова П.В. были исключены приказом Минобрнауки России от 26.01.2016 № 38 из федерального перечня учебников, они остаются актуальными, действующими в учебном процессе до 2020 года включительно. [16] Опираясь на работы этих авторов и обобщая их труды, рассмотрим подробно каждую обратную тригонометрическую функцию, полученную при решении тригонометрических уравнений, а также рассмотрим основные виды тригонометрических уравнений и неравенств и методы их решений.

1.1. Решение простейших уравнений sint=a, cost=a.

Рассмотрим уравнение вида $\sin t = a$. Ответим на вопрос: каковы углы t, для которых выполняется равенство $\sin t = a$? Из определения синуса следует, что $-1 \leq \sin t \leq 1$. Поэтому, если $|a| > 1$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin t = 2$ не имеет корней. [13]

Пусть $a = {}^{2}/_{5}$. Тогда уравнение примет вид $\sin t = {}^{2}/_{5}$. При помощи числовой окружности (*Рисунок 1.2*) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \;\; t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AL, а t_2 — длина дуги AK. Так как $AK = AC - KC$, $AC = \pi$, а $KC = AL$, то $t_2 = \pi - t_1$.

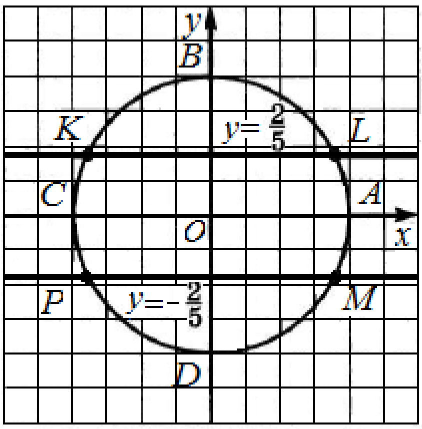


Рисунок 1.2

Иными словами существует единственное значение $t_1 \in [-\pi/2; \pi/2]$, для которого справедливо равенство $\sin t = 2/5$.

Для значения t_1 был введен символ $\arcsin(2/5)$, который читается *арксинус двух пятых*. При помощи этого символа все корни уравнения $\sin t = 2/5$ можно записать двумя формулами:

$$t = \arcsin(\frac{2}{5}) + 2\pi k, \;\; t = \pi - \arcsin(\frac{2}{5}) + 2\pi k.$$

$\mathrm{Arcsin}(2/5)$ – это число (длина дуги AL), синус которого равен $2/5$. $\mathrm{Arcsin}(2/5)$ принадлежит промежутку $[0; \pi/2]$

Обозначим за a, число равное $-2/5$. Тогда уравнение примет вид $\sin t = -2/5$. С помощью числовой окружности (Рис.2) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \;\; t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 – длина дуги MA, взятая со знаком минус, t_2 – длина дуги AP.

Математики обозначили число t_1 символом $\arcsin(-2/5)$ и сразу заметили два обстоятельства:

1. Дуги AL и AM (*см. Рисунок 1.2*) равны по длине и противоположны по направлению. Значит, $\arcsin(-2/5) = -\arcsin(2/5)$ (*Рисунок 1.3*).
2. $AP = AC + CP = AC + MA = AC - AM = \pi - \arcsin(-2/5)$.

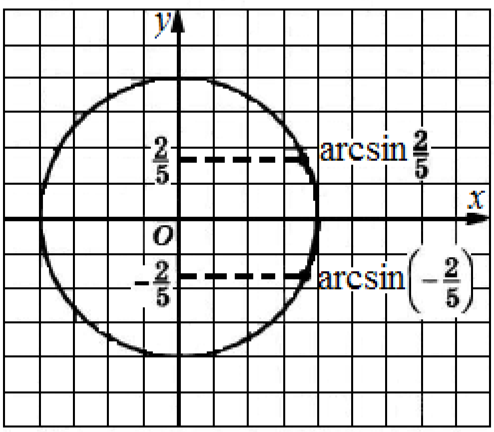


Рисунок 1.3

Как и в предыдущем примере получаем: $t_2 = \pi - t_1$. Это дает возможность записать все решения уравнения $\sin t = -{}^2/_5$следующим образом:

$$t = \arcsin(-\frac{2}{5}) + 2\pi k, \ \ t = \pi - \arcsin(-\frac{2}{5}) + 2\pi k.$$

$\mathrm{Arcsin}(-{}^2/_5)$ – это число (длина дуги AM), синус которого равен $-{}^2/_5$. $\mathrm{Arcsin}(-{}^2/_5)$ принадлежит отрезку $\left[-{}^{\pi}/_2\,; 0\right]$.

В общем виде определение арксинуса формулируется так:

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $t \in \left[-{}^{\pi}/_2\,; {}^{\pi}/_2\right]$, синус которого равен a:

если $|a| \leq 1$, то

$$\arcsin a = t \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin t = a, \\ [-{}^{\pi}/_2 \leq t \leq {}^{\pi}/_2]. \end{cases}$$

Таким образом, если $|a| \leq 1$, то уравнение $\sin t = a$ имеет две серии решений:

$$t = \arcsin a + 2\pi k, \ \ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \epsilon Z$$

Однако в трех случаях используют более простые соотношения:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k;$

если $\sin t = 1$, то $t = {}^{\pi}/_2 + 2\pi k;$

если $\sin t = -1$, то $t = -{}^{\pi}/_2 + 2\pi k.$

Две серии решений уравнения $\sin t = a$ можно объединить одной формулой. Перепишем эти формулы следующим образом:

$$t = \arcsin a + \pi \cdot 2k, \ \ t = -\arcsin a + \pi(2k+1).$$

Если перед $\arcsin a$ стоит знак +, то у числа π множителем является четное число $2k;$ если же перед $\arcsin a$ стоит знак $-$, то у числа π множителем является нечетное число $2k + 1$. [5] Этот вывод позволяет записать общую формулу решения уравнения $\sin t = a:$

$$t = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin a + \pi n, n \epsilon Z.$$

Теперь рассмотрим уравнение вида $\cos t = a$. Из определения косинуса следует, что $-1 \leq \cos t \leq 1$. Следовательно, если $|a| > 1$, то уравнение

$\cos t = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos t = -1{,}5$ не имеет корней. [13]

Пусть $a = {}^{2}/_{5}$, тогда уравнение примет вид $\cos t = {}^{2}/_{5}$. С помощью числовой окружности (*Рисунок 1.4*) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \ \ t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 – длина дуги AL, а t_2 – длина дуги AK и $t_2 = -t_1$, число t_1 принадлежит промежутку $[0; {}^{\pi}/_{2}]$.

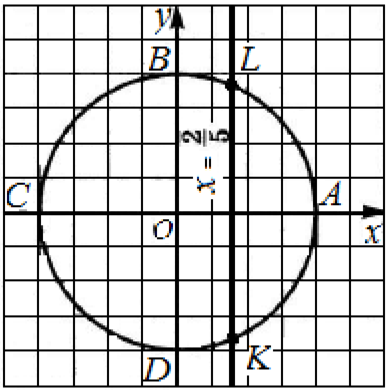


Рисунок 1.4

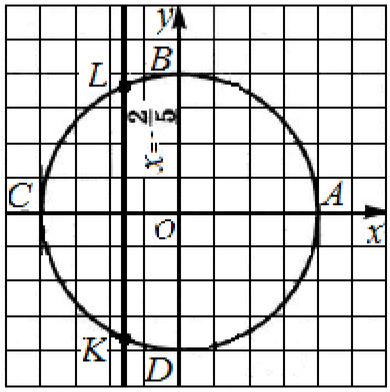


Рисунок 1.5

В рассматриваемом примере число t_1 было обозначено символом $\arccos({}^{2}/_{5})$, которое читается *арккосинус двух пятых*. Таким образом, все корни уравнения $\cos t = {}^{2}/_{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arccos(\frac{2}{5}) + 2\pi k, \ \ t = \pi - \arccos(\frac{2}{5}) + 2\pi k,$$

или, обобщая, одной формулой

$$t = \pm\arccos(\frac{2}{5}) + 2\pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

Arccos $({}^{2}/_{5})$ – это число (длина дуги AL), косинус которого равен ${}^{2}/_{5}$ и которое принадлежит отрезку $[0; {}^{\pi}/_{2}]$.

Аналогично рассмотрим уравнение $\cos t = -{}^{2}/_{5}$. С помощью числовой окружности (*Рисунок 1.5*) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \ \ t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 – длина дуги AL, а t_2 – длина дуги AK, $t_2 = -t_1$, число t_1 принадлежит промежутку $[\pi/2\,; \pi]$.

Число t_1 обозначают символом $\arccos(-2/5)$. Все корни уравнения $\cos t = -2/5$ записывают следующим образом:

$$t = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, \;\; t = \pi - \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Написанные формулы можно объединить в одну:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, \qquad k\epsilon Z.$$

$\mathrm{Arccos}\left(-2/5\right)$ – это число (длина дуги AL), косинус которого равен $-2/5$ и которое принадлежит отрезку $[\pi/2\,; \pi]$.

В общем виде определение арккосинуса формулируется так:

Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $t \in [0; \pi]$, косинус которого равен a:

если $|a| \leq 1$, то

$$\arccos a = t \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos t = a, \\ [0 \leq t \leq \pi] \end{cases}.$$

Таким образом, если $|a| \leq 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет решения

$$t = \pm\arccos a + 2\pi k, \qquad k\epsilon Z.$$

Однако в трех случаях используют более простые соотношения:

если $\cos t = 0$, то $t = \pi/2 + \pi k;$

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k;$

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$. [5]

1.2. Решение простейших уравнений tgx=a, ctgx=a.

Для решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ (*Рисунок 1.6*).

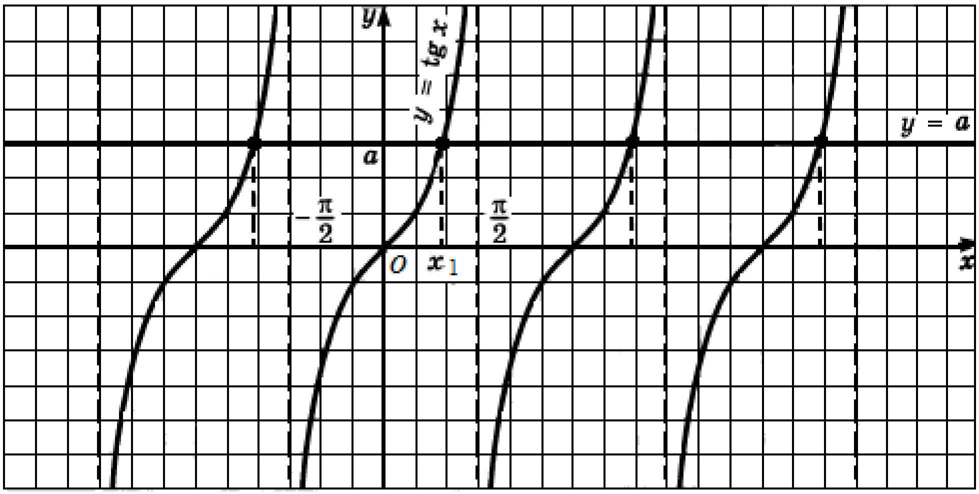


Рисунок 1.6

Заметим, что при любом a прямая пересекает график тангенса в бесконечном множестве точек. Абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где $x_1 -$ абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью тангенсоиды. Для числа x_1 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg} a$ (читается арктангенс a). Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно описать формулой:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

Таким образом $\operatorname{arctg} a$ – это число, тангенс которого равен a и которое принадлежит интервалу $\left(-{}^{\pi}/_{2}; {}^{\pi}/_{2}\right)$.

В виду того, что a может иметь отрицательное значение, рассмотрим теперь уравнение $\operatorname{tg} x = -a$. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -a$ *(Рисунок 1.7)* также имеют бесконечно общих точек. [2]

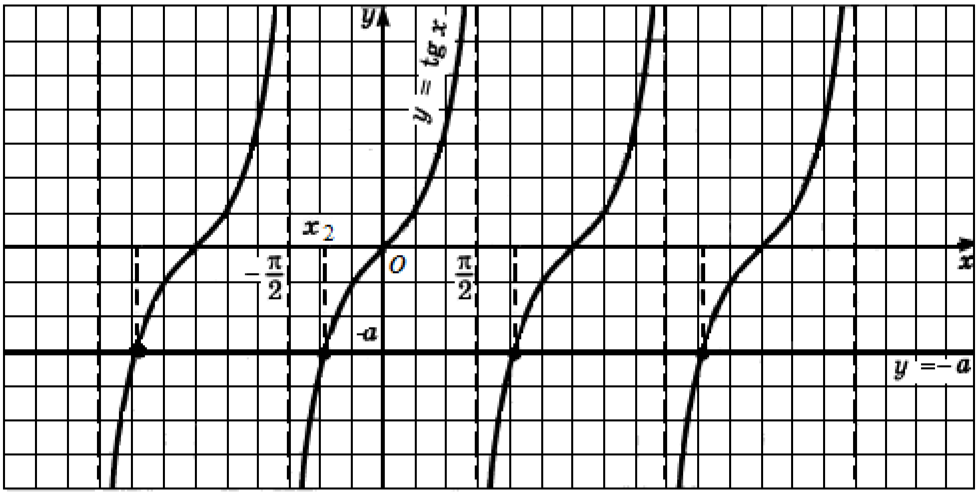


Рисунок 1.7

Абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где $x_2 -$ абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды. Для числа x_2 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg}(-a)$. Тогда все корни уравнения $\operatorname{tg} x = -a$ можно описать формулой

$$x = \operatorname{arctg}(-a) + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

$\operatorname{Arctg}(-\,a)$ – это число, тангенс которого равен $-a$ и которое принадлежит интервалу $\left(-{}^{\pi}/_{2}\,;{}^{\pi}/_{2}\right)$.

Изобразим арктангенс на тригонометрической окружности (*Рисунок 1.8*).

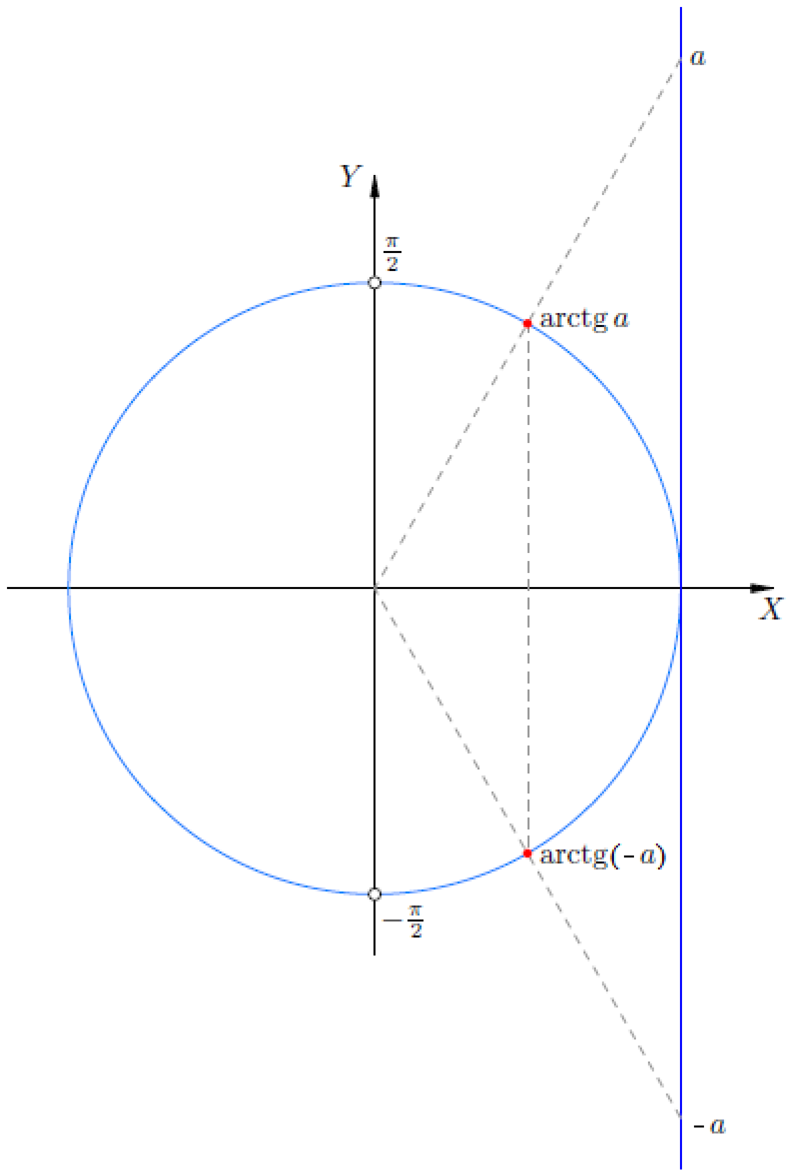


Рисунок 1.8

Заметим, что график арктангенса симметричен относительно начала координат. Это означает, что арктангенс нечетная функция:

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

С помощью тригонометрической окружности можно определять значения арктангенса. Например, при помощи тригонометрической окружности найдем решение уравнения $\operatorname{tg} x = -1$. Для этого на оси тангенсов отметим значение -1 и соединим его с началом координат (*Рисунок 1.9*). Этому значению соответствует угол $-45°$ или $-{}^{\pi}/_{4}$ радиан. Так как функция тангенса периодическая с главным периодом π, то наш ответ: $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k = -{}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k \epsilon Z$.

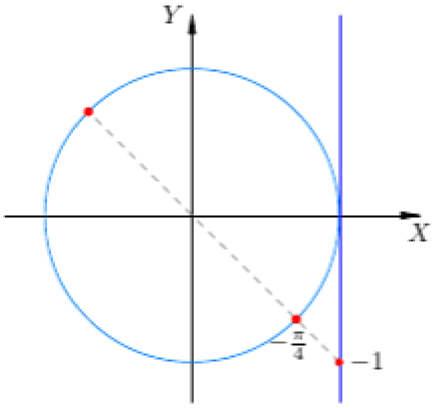


Рисунок 1.9

Из вышеизложенного следует:

1) определение арктангенса в общем виде:

Арктангенсом числа $a \in R$ называется такое число $x \in \left(-{}^{\pi}/_{2}; {}^{\pi}/_{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\operatorname{arctg} a = x \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = a\,, \\ \left(-{}^{\pi}/_{2} \le x \le {}^{\pi}/_{2}\right). \end{cases}$$

2) уравнение $\operatorname{tg} x = a$ в общем виде имеет решения:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

Аналогичные рассуждения проведем для нахождения корней уравнения $\operatorname{ctg} x = a$. Построенные в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ *(Рисунок 1.10)*, имеют бесконечно много общих точек, абсциссы которых имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ – абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью графика функции котангенс. [5]

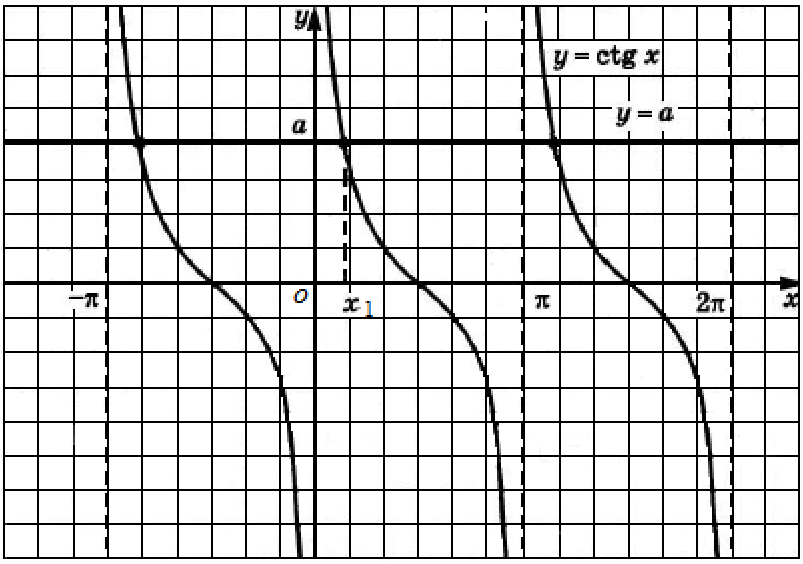


Рисунок 1.10

Из этого следует вывод, что уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

Значит, $\operatorname{arcctg} a$ – это число, котангенс которого равен a и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$. [28]

На рисунке 1.11 представлена графическая иллюстрация решения уравнения $\operatorname{ctg} x = -a$.

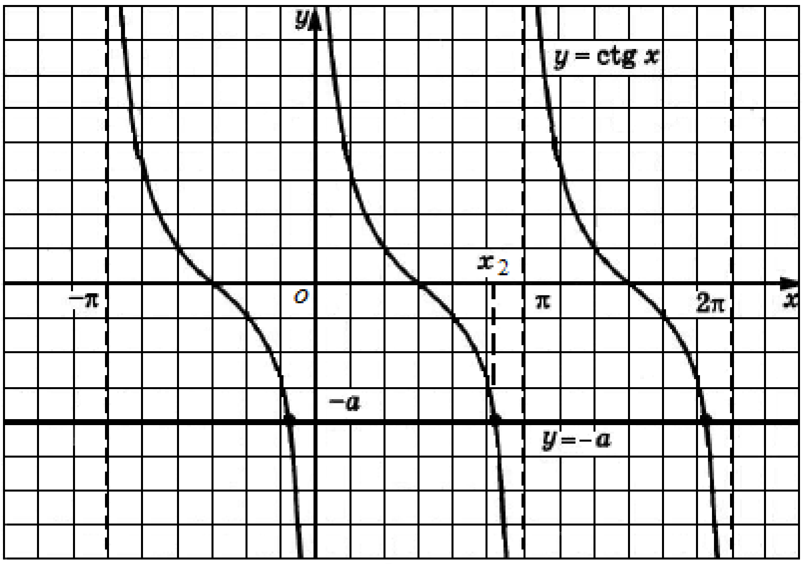


Рисунок 1.11

Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -a$ пересекаются бесконечно много раз. Абсциссы всех точек пересечения имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где $x_2 =$

$\operatorname{arcctg}(-a)$ – абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды.

Итак, уравнение $\operatorname{ctg} x = (-a)$ имеет решения:

$$x = \operatorname{arcctg}(-a) + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

$\operatorname{Arcctg}(-a)$ – это число, котангенс которого равен $-a$ и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$.

Изобразим арккотангенс на тригонометрической окружности (*Рисунок 1.12*).

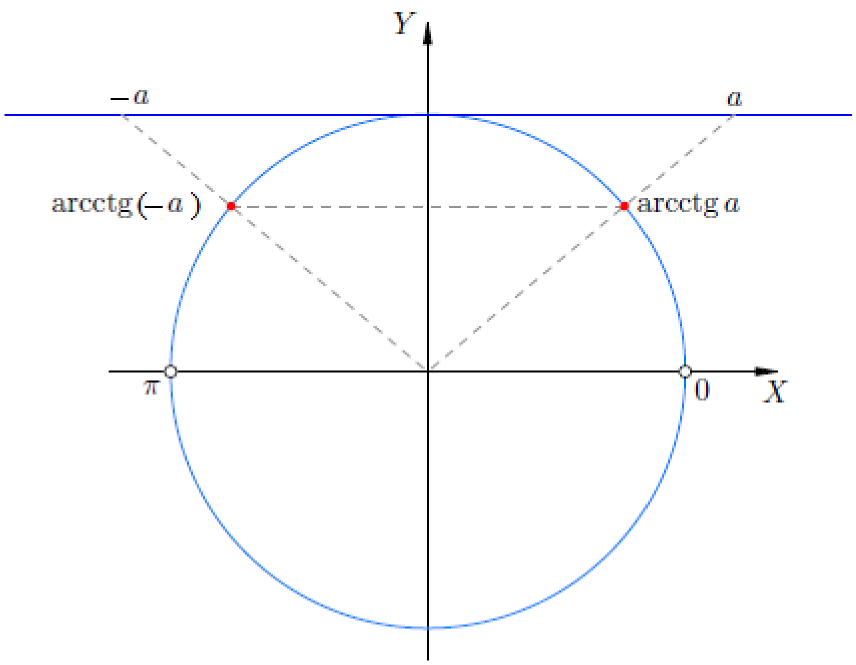


Рисунок 1.12

На рисунке 1.12 видно, что соответствующие арккотангенсы связаны соотношением $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Исходя из вышесказанного следует:

1) определение арккотангенса в общем виде:

Арккотангенсом числа $a \in R$ называется такое число $x \in (0; \pi)$, котангенс которого равен a:

$$\operatorname{arcctg} a = x \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ (0 \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

2) уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ в общем виде имеет решения:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$$

Однако, уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ самостоятельного интереса не представляет, так как его практически всегда можно преобразовать к виду $\operatorname{tg} x = {}^{1}/_{\operatorname{ctg} x} = {}^{1}/_{a}$, за исключением, когда $\operatorname{ctg} x = 0$. Но и в этом случае, воспользовавшись тем, что $\operatorname{ctg} x = {}^{\cos x}/_{\sin x}$, необходимо перейти к уравнению $\cos x = 0$. [5]

1.3. Виды тригонометрических уравнений и методы их решения.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x, y = \operatorname{tg} x\,, y = \operatorname{ctg} x$ называют основными тригонометрическими функциями. Кроме основных тригонометрических функций, иногда рассматривают функции секанс x ($\sec x = {}^{1}/_{\cos x}$) и косеканс x ($\operatorname{cosec} x = {}^{1}/_{\sin x}$).

Уравнение $f(x) = a$, где $a -$ число, а $f(x) -$ одна из основных тригонометрических функций, называют простейшим тригонометрическим уравнением. [3]

К простейшим уравнениям относятся уравнения вида $\sin x = \alpha$, $\cos x = \alpha, \operatorname{tg} x = \alpha, \operatorname{ctg} x = \alpha$.

В большинстве случаев исходное уравнение в процессе решения сводится к простейшим тригонометрическим уравнениям. Однако для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. Каждое уравнение уникально, и успех его решения зависит от знания тригонометрических формул и от умения выбрать из них нужные. [4]

Проверка найденных решений необходима:

1) если в процессе решения произошло расширение области определения уравнения в результате некоторых преобразований (освобождение от знаменателей, сокращение дроби, приведение подобных членов),

2) если в процессе решения уравнения использовалось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень,
3) если при решении применялись тригонометрические тождества, левая и правая части которых имеют неодинаковые области определения. [11]

Рассмотрим основные виды и методы решения тригонометрических уравнений.

I. Уравнение вида $a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + c = 0$, где $\varphi(x) -$ тригонометрическая функция, называют уравнением, сводящимся к квадратному $(ax^2 + bx + c = 0)$ и решают методом замены переменной. Суть метода решения тригонометрических уравнений такого вида заключается в том, чтобы все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выразить через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента. Выраженную функцию принимаем за новую неизвестную и получаем алгебраическое уравнение. Далее находим корни и возвращаемся к прежней неизвестной, с которой решаем простейшие тригонометрические уравнения. [24]

Пример 1.Решить уравнение

$$2\cos^2 x + \sin x - 4 = 0.$$

С помощью основного тригонометрического тождества это уравнение можно свести к квадратному относительно $\sin x$:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0,\ \ 2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0,$$
$$-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0,\ \ 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Введем новую переменную $\sin x = t$, тогда уравнение примет вид: $2\mathrm{t}^2 - 5t + 2 = 0$. Корни этого уравнения: $t_1 = 2, t_2 = {}^1\!/_2$.

Возвращаемся к переменной x и получаем простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\sin x = 2$ –это уравнение не имеет корней, так как $\sin x < 2$ при любом значении x;

2) $\sin x = {}^1\!/_2$, $x = (-1)^n\, {}^{\pi}\!/_6 + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^n \pi/_6 + \pi n, n \in Z$.

II. Тригонометрические уравнения вида

$\sin mx \pm \sin nx \pm \sin px \pm \sin kx = 0$,

$\cos mx \pm \cos nx \pm \cos px \pm \cos kx = 0$,

$\sin mx \pm \sin nx \pm \sin px = 0$,

$\cos mx \pm \cos nx \pm \cos px = 0$,

$\sin mx \pm \sin nx \pm \cos px \pm \cos kx = 0$, где $m, n, p, k \in R$

решаются методом группировки и разложения на множители. Суть этого метода заключается в том, чтобы путем группировки слагаемых уравнение привести к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю. Так уравнение распадается на несколько более простых уравнений. [24]

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Сгруппируем $\sin x$ и $\sin 3x$ в левой части, 1 и $\cos 2x$ в правой части:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x.$$

Для скобки в левой части применим формулу суммы синусов:

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin(\frac{x+3x}{2}) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) =$$

$$= 2\sin(\frac{4x}{2}) \cdot \cos\left(\frac{-2x}{2}\right) = 2\sin 2x \cdot \cos(-x) \boxed{=}$$

так как косинус функция четная, то $\cos(-x) = \cos x$. Таким образом:

$$\boxed{=} 2\sin 2x \cdot \cos x.$$

Скобка в правой части есть формула двойного угла, а именно

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$$

Исходя из вышесказанного, и путем элементарных преобразований получаем:

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x,$$

$$\sin 2x(2\cos x + 1) = \cos x\,(2\cos x + 1),$$

$$\sin 2x(2\cos x + 1) - \cos x\,(2\cos x + 1) = 0,$$

$$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0.$$

Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (формула синуса двойного угла), то

$$(2\cos x+1)(2\sin x\cdot\cos x-\cos x)=0,$$

$$(2\cos x+1)\cos x\,(2\sin x-1)=0.$$

Произведение равно нулю тогда, когда один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл. Следовательно,

1) $2\cos x+1=0$, $\cos x=-{}^{1}/_{2}$, отсюда $x=\pm{}^{2\pi}/_{3}+2\pi n, n\in Z$;

2) $\cos x=\ 0$, отсюда $x={}^{\pi}/_{2}+\pi k, k\in Z$;

3) $2\sin x-1=0$, $\sin x={}^{1}/_{2}$, отсюда $x=(-1)^{m}\,{}^{\pi}/_{6}+\pi m, m\in Z$.

Ответ:$x=\pm{}^{2\pi}/_{3}+2\pi n$; $x={}^{\pi}/_{2}+\pi k$; $x=(-1)^{m}\,{}^{\pi}/_{6}+\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

III. Тригонометрическое уравнение, содержащее $\sin x$, $\cos x$ в четной степени, решается методом понижения степени. В таком уравнении нужно применить формулы понижения степени [24]:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x.$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos 6x)+\frac{1}{2}(1-\cos 8x)=\frac{1}{2}\ (1-\cos 10x)+\frac{1}{2}\ (1-\cos 12x),$$

$$1-\cos 6x+\ 1-\cos 8x=\ 1-\cos 10x+\ 1-\cos 12x,$$

$$-\cos 6x-\cos 8x=\ -\cos 10x\ -\cos 12x,$$

$$-\cos 6x-\cos 8x+\ \cos 10x\ +\cos 12x=0,$$

$$(\cos 10x\ +\cos 12x)-(\cos 6x+\cos 8x)\ =0.$$

Применим к скобкам формулу суммы косинусов.

$$\left(2\cos\frac{10x+12x}{2}\cdot\cos\frac{10x-12x}{2}\right)-\left(2\cos\frac{6x+8x}{2}\cdot\cos\frac{6x-8x}{2}\right)=$$

$$=\left(2\cos\frac{22x}{2}\cdot\cos\frac{-2x}{2}\right)-\left(2\cos\frac{14x}{2}\cdot\cos\frac{-2x}{2}\right)=$$

$$=(2\cos 11x\ \cdot\cos(-x)\,)-(2\cos 7x\ \cdot\cos(-x)\,)=0.$$

Так как функция косинуса четная, то

$$2\cos 11x \cdot \cos x - 2\cos 7x \cdot \cos x = 0,$$

$$2\cos x(\cos 11x - \cos 7x) = 0.$$

Для скобки применим формулу разности косинусов.

$$2\cos x\left(-2\sin\frac{11x-7x}{2}\cdot\sin\frac{11x+7x}{2}\right) = 2\cos x\left(-2\sin\frac{4x}{2}\cdot\sin\frac{18x}{2}\right) =$$

$$= 2\cos x(-2\sin 2x \cdot \sin 9x) = 0,$$

$$\cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 9x = 0.$$

Отсюда имеем:

1) $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$;

2) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi k$, $x = \pi k/2, k \in Z$;

3) $\sin 9x = 0$, $9x = \pi m$, $x = \pi m/9, m \in Z$;

Решение $x = \pi/2 + \pi n$ является частью множества корней $x = \pi k/2$ (при $k = 2n + 1$).

Ответ: $x = \pi k/2, k \in Z$; $x = \pi m/9, m \in Z$.

IV. Если уравнение имеет вид $a\cos x + b\sin x = c$, то нужно применить метод универсальной подстановки, а именно используют подстановку

$tg(\frac{x}{2}) = t$. В этом случае $\sin x = \frac{2t}{(1+t^2)}, \cos x = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}$.

Благодаря этой подстановке уравнение становится рациональным. После нахождения решения уравнения, необходимо проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, так как, когда делаем подстановку $tg(x/2) = t$, считаем, что $\cos(x/2) \neq 0$, то есть $x \neq \pi + 2\pi k$. [24]

Пример 4. Решить уравнение

$$3\sin x - 4\cos x = 5.$$

Сделаем подстановку $\left[\begin{array}{c} \mathrm{t}g(\frac{x}{2}) = t\,, \left(\cos\frac{x}{2} \neq 0\right); \\ \sin x = \dfrac{2t}{(1+t^2)}; \\ \cos x = \dfrac{(1-t^2)}{(1+t^2)}. \end{array}\right]$

Тогда уравнение примет вид

$$3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5,$$

$$\frac{6t - 4 + 4t^2}{1+t^2} = 5,$$

$$6t - 4 + 4t^2 = 5(1+t^2),$$

$$6t - 4 + 4t^2 - 5 - 5t^2 = 0,$$

$$-t^2 + 6t - 9 = 0,$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \leftrightarrow (t-3)^2 = 0, t = 3.$$

Это означает, что $\mathrm{t}g({}^{x}/_{2}) = 3$. Следовательно,

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}3 + \pi k,$$

$$x = 2\mathrm{arctg}3 + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Теперь проверяем, не является ли $x = \pi + 2\pi n$ решением данного уравнения:

$$3\sin(\pi + 2\pi n) - 4\cos(\pi + 2\pi n) = 4 \neq 5.$$

Значит, не является.

Ответ: $x = 2\mathrm{arctg}3 + 2\pi k, \quad k \in Z.$

V. Однородными уравнениями первой, второй, третьей, … степеней называются, соответственно уравнения вида

$$A\sin x + B\cos x = 0; A \neq 0, B \neq 0,$$

$$A\sin^2 x + B\sin x \cdot \cos x + C\cos^2 x = 0; A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0,$$

$$A\sin^3 x + B\sin^2 x \cdot \cos x + C\sin x \cdot \cos^2 x + D\cos^3 x = 0; A \neq 0, \dots, D \neq 0 \dots$$

Однородные уравнения решаются методом деления обеих частей уравнения на $\cos x(\sin x)$ в степени, соответствующей степени уравнения, после чего получаем алгебраическое уравнение относительно $\mathrm{tg}\, x(\mathrm{ctg}\, x)$.

Некоторые уравнения путем замены 1 на $\cos^2 x + \sin^2 x$ можно свести к однородным. [19]

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Рассмотрим 2 случая: 1) $\cos x = 0$ и 2) $\cos x \neq 0$. [14]

Случай 1. Если $\cos x = 0$, то получим, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству.

Случай 2. Если $\cos x \neq 0$, то можно разделить уравнение на $\cos^2 x$. Тогда получим

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Отсюда следует:

1) $\operatorname{tg} x = 3$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -{}^{\pi}/_{4} + \pi k, \quad k \in Z.$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = -{}^{\pi}/_{4} + \pi k$, где $n, k \in Z$.

VI. Если обычные приемы приводят алгебраические уравнения к затруднительным решениям, то можно применять различные подстановки. Метод тригонометрической подстановки целесообразно применять, когда искомые уравнения напоминают известные формулы и после введения подстановок уравнение значительно упрощается. [24]

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \sin 2x + \frac{1}{2} = 0.$$

Применим формулу $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$ и перепишем данное уравнение другим образом:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin 2x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x+\frac{3}{2}=0,$$

$$2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x-\frac{3}{2}=0.$$

Введем обозначение $\begin{bmatrix}\text{Пусть}\sin x\cdot\cos x=t,\\ \text{Тогда }\sin 2x=t.\end{bmatrix}$. С учетом замены, уравнение примет вид:

$$2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x-\frac{3}{2}=0$$

$$t^2+2t-\frac{3}{2}=0,$$

$$4t^2+4t-3=0,$$

$$t_1=\frac{1}{2}, t_1=-\frac{3}{2}$$

Отсюда следует:

1) $\sin 2x=1,\ 2x={}^{\pi}/_{2}+2\pi k,\ \ x={}^{\pi}/_{4}+\pi k, k\in Z$;

2) $\sin 2x=-3,\ x\in\emptyset$.

Ответ: $x={}^{\pi}/_{4}+\pi k, k\in Z.$

VII. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=c\ \ (a,b,c\neq 0)$ можно решить методом введения вспомогательного угла. Суть этого метода в том, чтобы некоторую величину представить как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ, после чего произвести тригонометрические преобразования. Итак, в исходном выражении $a\sin x+b\cos x$ вынесем $\sqrt{a^2+b^2}$ за скобки. Тогда выражение примет вид:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

После такого преобразования коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль каждого из них не больше единицы и сумма их квадратов равна единице. Отсюда следует, что точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежит единичной окружности. А это означает, что существует угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Теперь наше уравнение примет вид:

$$\sqrt{a^2+b^2}(\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi) = c.$$

Выражение в скобках есть синус суммы, а именно

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\varphi) = c,$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Таким образом, в зависимости от значений нам могут понадобиться формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

После всех преобразований запишем решение уравнения.

1) $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1, x \in \emptyset.$

2) $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1,$

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \varphi + \pi n, \qquad \text{где } n \in Z,$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Заметим, что введенные $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимозаменяемы. [3]

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = -1.$$

В данном уравнении

$$a = \sqrt{3}, \qquad b = -1, \qquad \sqrt{a^2+b^2} = 2.$$

Поделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = -\frac{1}{2}.$$

Введем вспомогательный аргумент φ такой, что $\cos\varphi = {}^{\sqrt{3}}/_{2}$, а $\sin\varphi = -{}^{1}/_{2}$, т.е. $\varphi = \arccos{}^{\sqrt{3}}/_{2} = {}^{\pi}/_{6}$. Тогда получаем:

$$\cos\varphi \cdot \cos x - \sin\varphi \cdot \sin x = -\frac{1}{2},$$

$$\cos(\frac{\pi}{6} + x) = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \;\; x_2 = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \;\; x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$ где $n \in Z.$

VIII. Еще существуют так называемые нестандартные тригонометрические уравнения, которые удобно решать путем рассуждений, путем сведения к системе уравнений, графическими методами и т.д., так как применение каких либо методов приводит к громоздким вычислениям.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin^{2\pi} x + \sin^{2\pi} y = 0.$$

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю. Следовательно, мы можем составить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin\pi x = 0, \\ \sin\pi y = 0;\end{cases} \begin{cases}\pi x = \pi k, \; k \in Z, \\ \pi y = \pi n, \; n \in Z;\end{cases} \begin{cases}x = k, \; k \in Z, \\ y = n, \; n \in Z.\end{cases}$$

Ответ: Решением является любая пара целых чисел

Пример 9. Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x = 2.$$

Так как $|\cos 3x| \leq 1$ и $\left|\cos\frac{5}{2}x\right|$

$\leq 1,$ то сумма $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x$ равна 2 тогда

и только тогда, когда $\cos 3x = 1$ и $\cos\frac{5}{2}x = 1$ одновременно.

Вследствие этого, мы можем составить систему уравнений, равносильную данному уравнению, а именно:

$$\begin{cases}\cos 3x = 1, \\ \cos\frac{5}{2}x = 1;\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3x = 2\pi n, \\ \frac{5}{2}x = 2\pi k;\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x = \frac{2}{3}\pi n, \\ x = \frac{4}{5}\pi k.\end{cases}$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем уравнение

$$\frac{2}{3}\pi n = \frac{4}{5}\pi k, \qquad \text{т. е. } 5n = 6k, \qquad \text{где } n, k \in Z.$$

Это уравнение имеет решение $\begin{cases}n = 6p \\ k = 5p,\end{cases}$ где $p \in Z$. Отсюда следует, что

данное уравнение имеет решение $x = 4\pi p$.

Ответ: $x = 4\pi p,$ где $p \in Z$. [24]

Таким образом, мы рассмотрели 7 основных методов решения тригонометрических уравнений: сведение к алгебраическому уравнению методом замены переменной, метод группировки и разложения на множители, метод понижения степени, использование универсальной подстановки, приведение к однородному уравнению, применение различных подстановок, метод введение вспомогательного угла; а также на примерах рассмотрели решения нестандартных уравнений.

1.4. Виды тригонометрических неравенств и методы их решения.

Неравенства, которые содержат переменную под знаком тригонометрической функции, называют тригонометрическими неравенствами. Как правило, существует два метода решений простейших тригонометрических неравенств: с помощью единичной окружности и графическое решение. Более сложные тригонометрические неравенства приводят к простейшим путем равносильных преобразований. При выполнении преобразований используют те же приемы, что и для решения тригонометрических уравнений [23]. А также некоторые сложные неравенства можно решить методом интервалов. Подробно все эти приемы рассмотрим на примерах.

Пример 1. Решить неравенства

$$\sin x > a,\ \sin x \geq a,\ \sin x < a,\ \sin x \leq a. \text{ [20]}$$

1) $\sin x > a$. *(Рисунок 1.13)*

а) При $a \geq 1$ неравенство $\sin x > a$ решений не имеет: $x \in \emptyset$.

б) При $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число: $x \in R$.

в) При $-1 \leq a < 1$ имеем решение неравенства $\sin x > a$ в виде:

$$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z.$$

2) $\sin x \geq a$. *(Рисунок 1.13)*

а) $a > 1, x \in \emptyset$.

б) $a \leq -1, x \in R$.

в) $-1 < a < 1, \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

г) $a = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

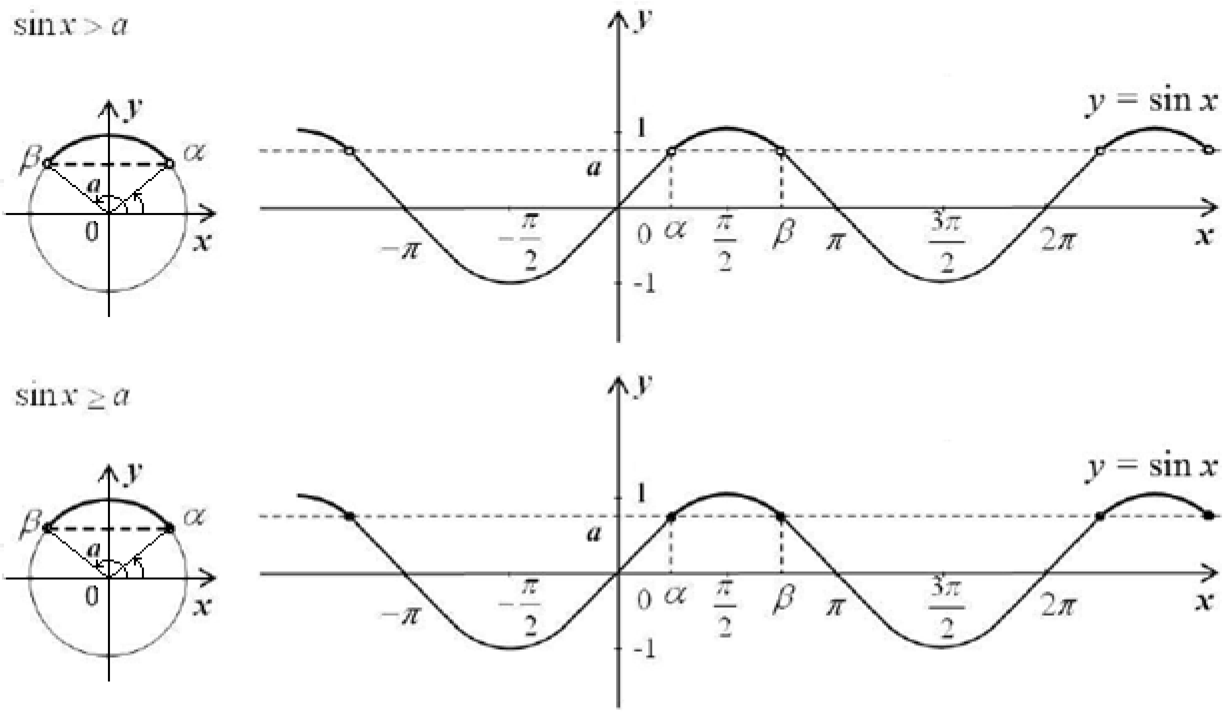


Рисунок 1.13

3) $\sin x < a$. *(Рисунок 1.14)*

а) $a > 1, x \in R$.

б) $a \leq -1, x \in \emptyset$.

в) $-1 < a \leq 1, -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

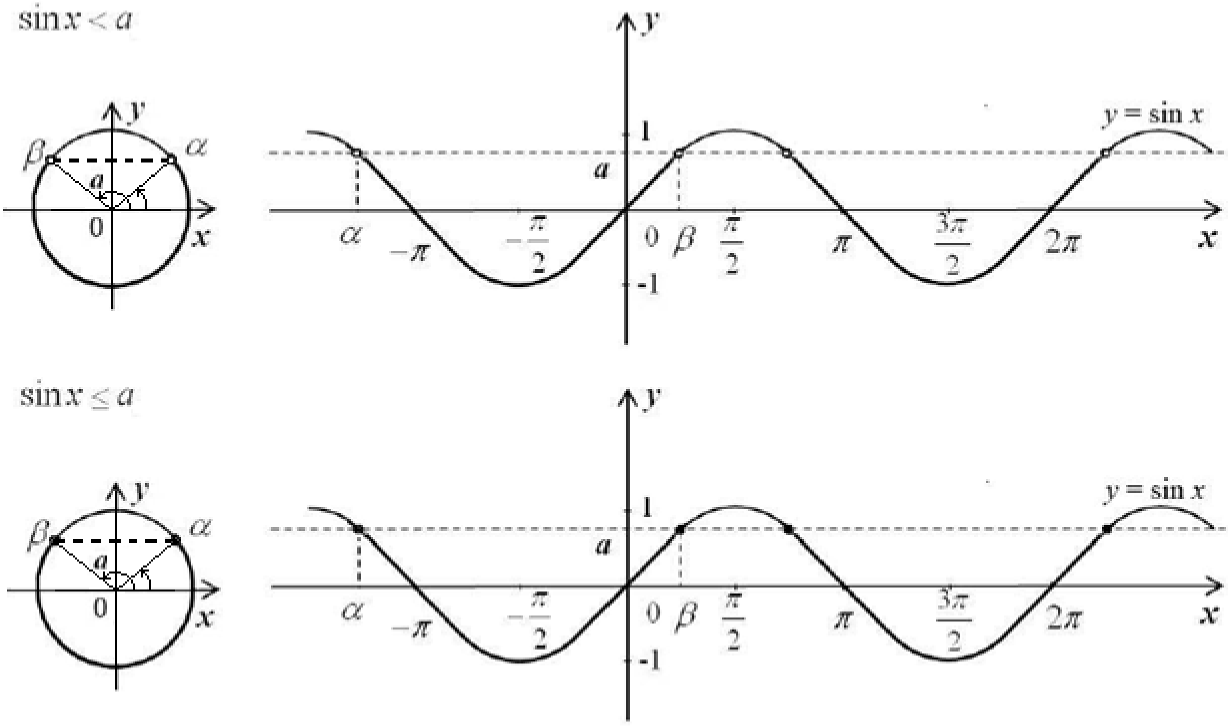


Рисунок 1.14

4) $\sin x \leq a$. *(Рисунок 1.14)*

а)$a \geq 1, x \in R$.

б) $a < -1, x \in \emptyset$.

в) $-1 < a < 1, -\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

г)$a = -1, x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 2. Решить неравенства

$$\cos x > a,\ \cos x \geq a,\ \cos x < a,\ \cos x \leq a. \text{ [20]}$$

1) $\cos x > a$. *(Рисунок 1.15)*

а) При $a \geq 1$ неравенство $\cos x > a$ решений не имеет: $x \in \emptyset$.

б) При $a < -1$ решением неравенства $\cos x > a$ является любое действительное число: $x \in R$.

в) При $-1 \leq a < 1$ имеем решение неравенства $\cos x > a$ в виде:

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$$

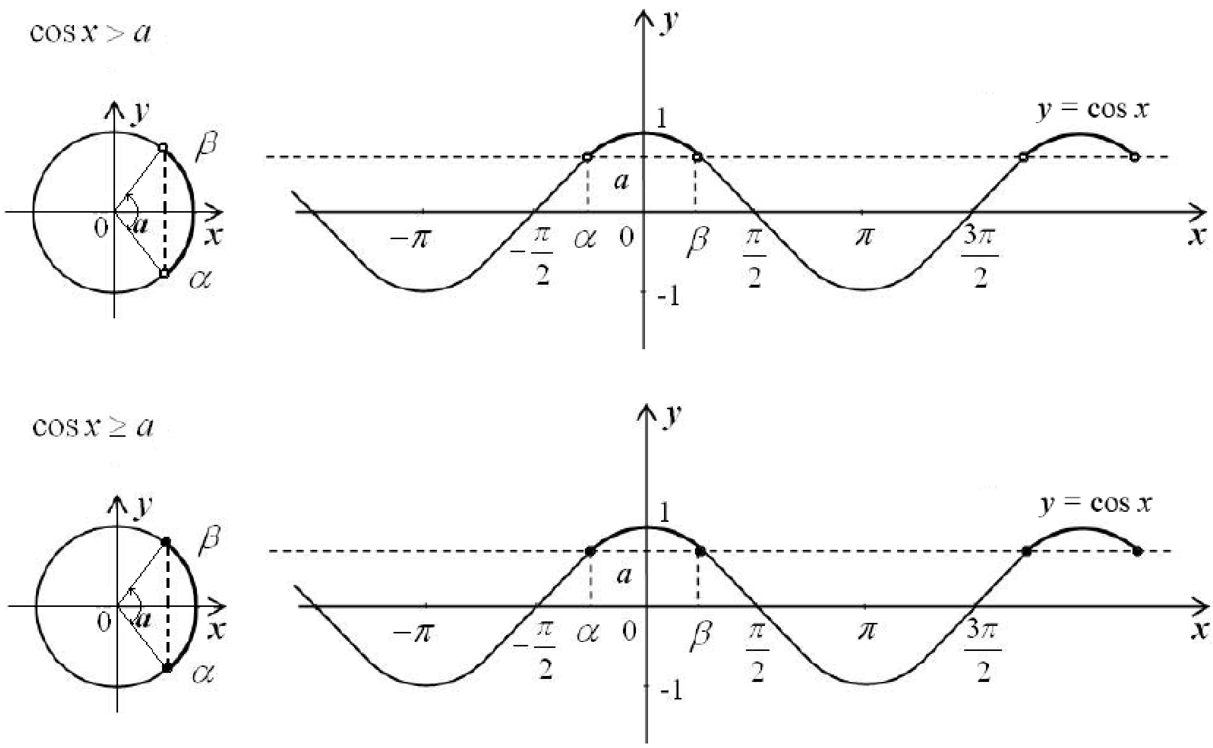


Рисунок 1.15

2) $\cos x \geq a$. *(Рисунок 1.15)*

а) $a > 1, x \in \emptyset$.

б) $a \leq -1, x \in R$.

в) $-1 < a < 1, -\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

г) $a = 1, x = 2\pi n, n \in Z$.

3) $\cos x < a$. *(Рисунок 1.16)*

а) $a > 1, x \in R$.

б) $a \leq -1, x \in \emptyset$.

в) $-1 < a \leq 1, \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

4) $\cos x \leq a$. *(Рисунок 1.16)*

а) $a \geq 1, x \in R$.

б) $a < -1, x \in \emptyset$.

в) $-1 < a < 1, \arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

г) $a = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

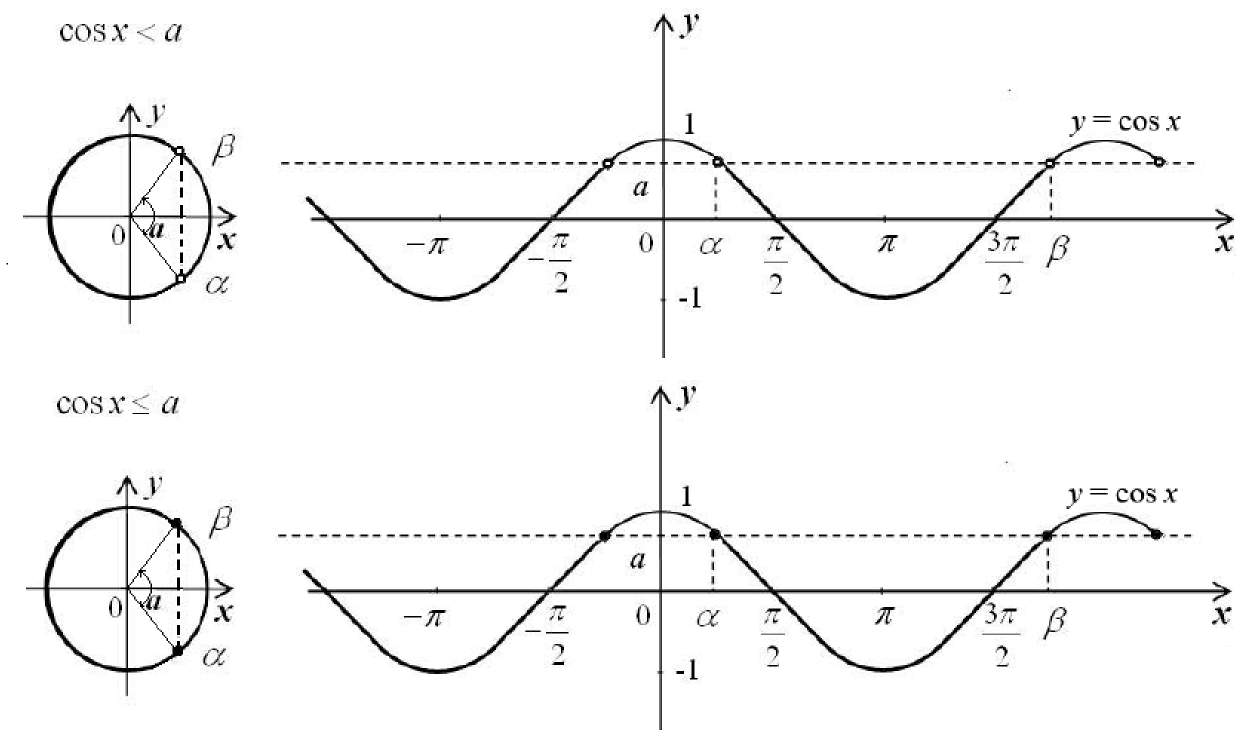


Рисунок 1.16

Пример 3. Решить неравенства

$$\operatorname{tg} x > a,\ \operatorname{tg} x \geq a,\ \operatorname{tg} x < a,\ \operatorname{tg} x \leq a. [20]$$

1) $\operatorname{tg} x > a$. *(Рисунок 1.17)*

Для любого действительного значения a решение неравенства имеет вид:

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

2) $\operatorname{tg} x \geq a$. *(Рисунок 1.17)*

При любом действительном значении a решение неравенства имеет решение:

$$\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

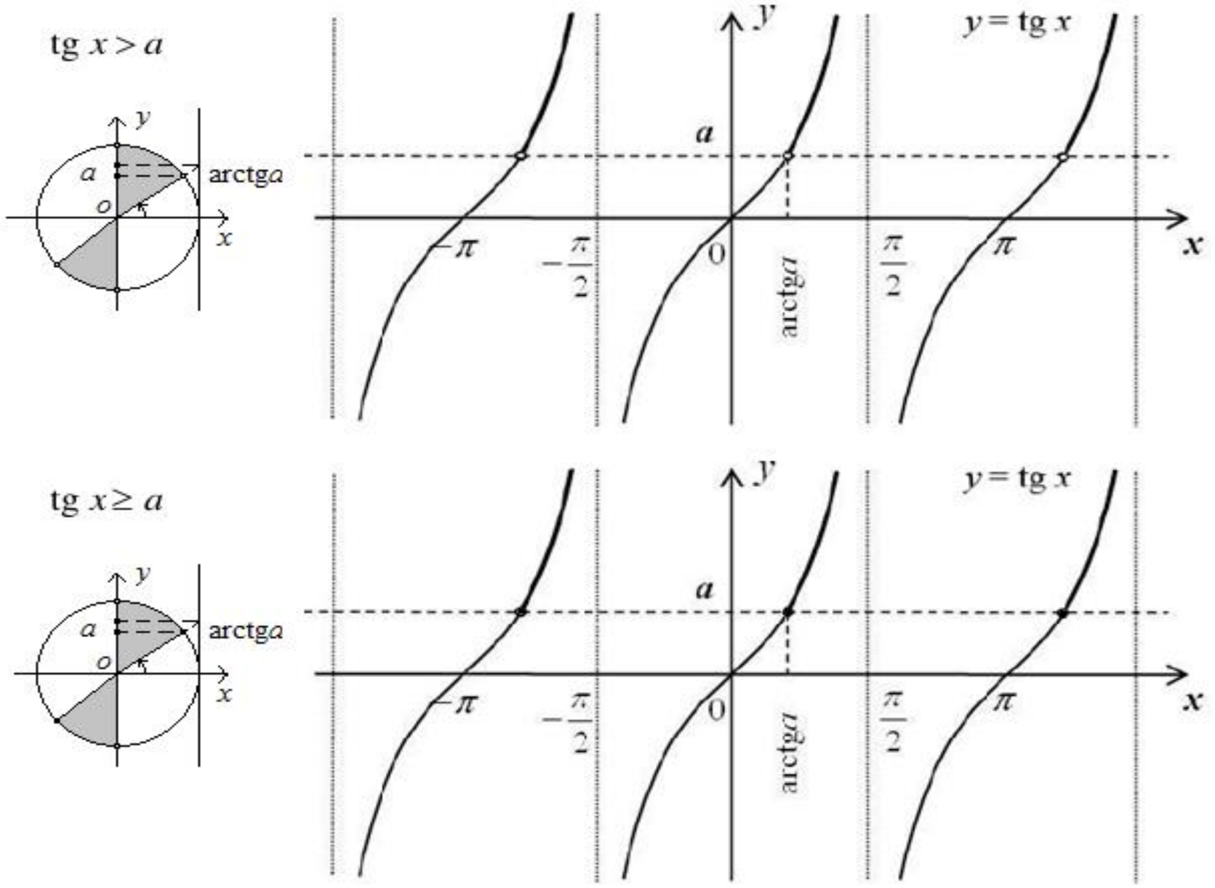


Рисунок 1.17

3) $\operatorname{tg} x < a$. *(Рисунок 1.18)*

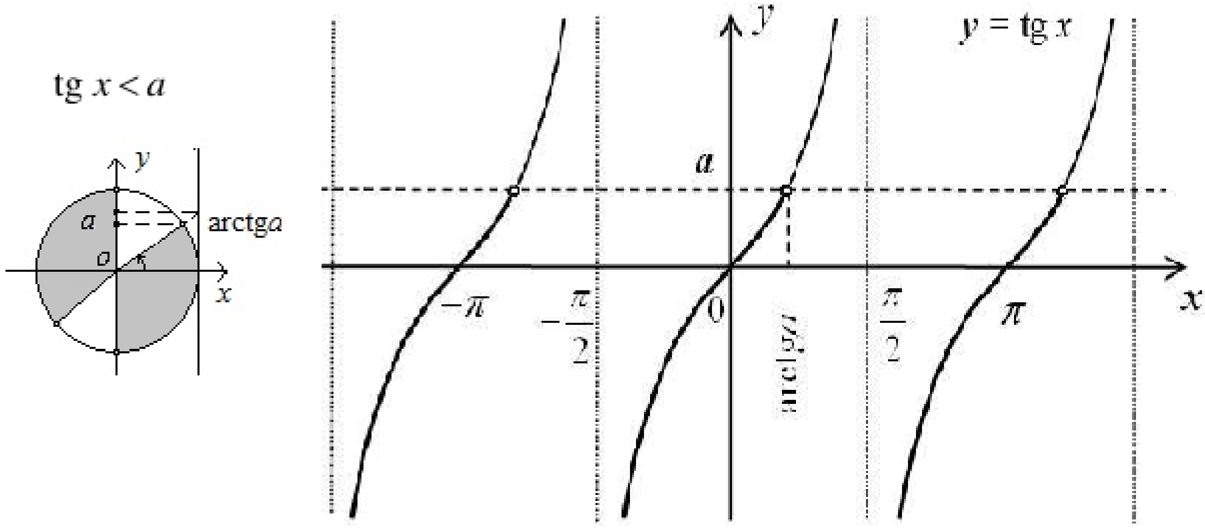
Для любого действительного значения a решение выражается в виде:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z.$$

4) $\operatorname{tg} x \leq a$. *(Рисунок 1.18)*

При любом действительном значении a решение неравенства записывается в виде:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z.$$



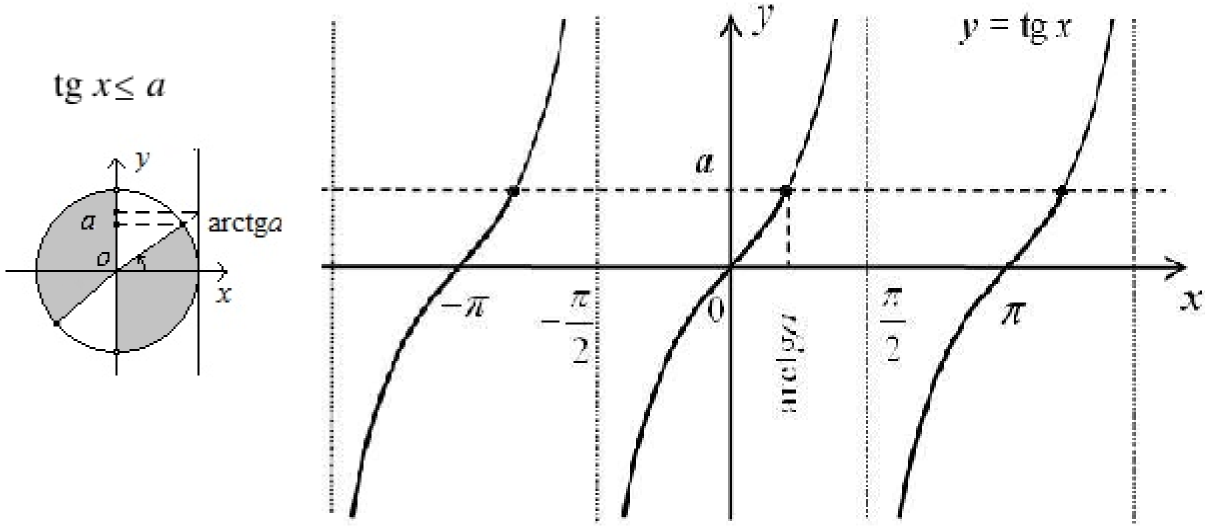


Рисунок 1.18

Пример 4. Решить неравенства

$$\operatorname{ctg} x > a,\ \operatorname{ctg} x \geq a,\ \operatorname{ctg} x < a,\ \operatorname{ctg} x \leq a. \text{[20]}$$

1) $\operatorname{ctg} x > a$. *(Рисунок 1.19)*

Для любого действительного значения a решение неравенства имеет вид:

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

2) $\operatorname{ctg} x \geq a$. *(Рисунок 1.19)*

При любом действительном значении a решение неравенства имеет решение:

$$\pi n < x \leq \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

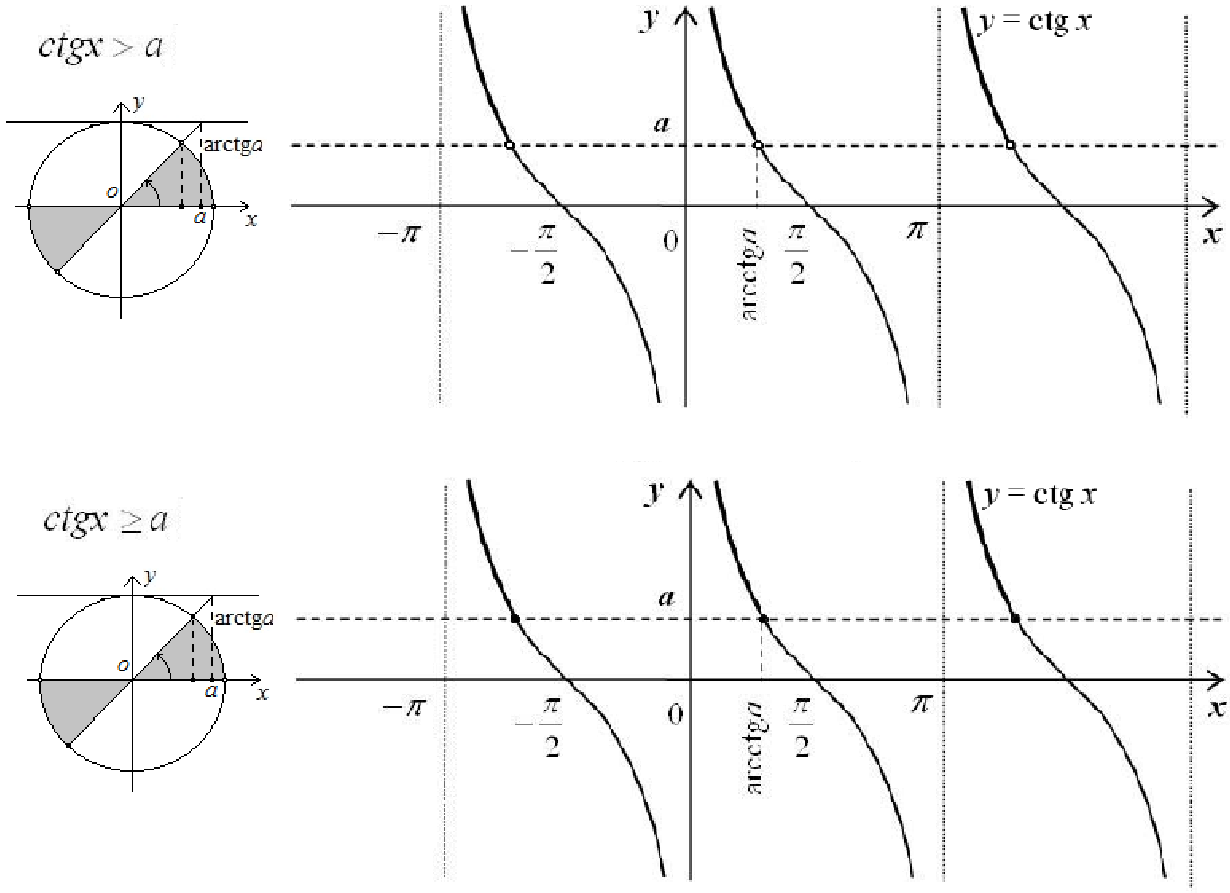


Рисунок 1.19

3) $\mathrm{ctg}\, x < a$. *(Рисунок 1.20)*

Для любого действительного значения a решение неравенства лежит в открытом интервале:

$$\mathrm{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z.$$

4) $\mathrm{ctg}\, x \leq a$. *(Рисунок 1.20)*

При любом действительном значении a решение нестрогого неравенства находится в полуоткрытом интервале:

$$\mathrm{arcctg} a + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in Z.$$

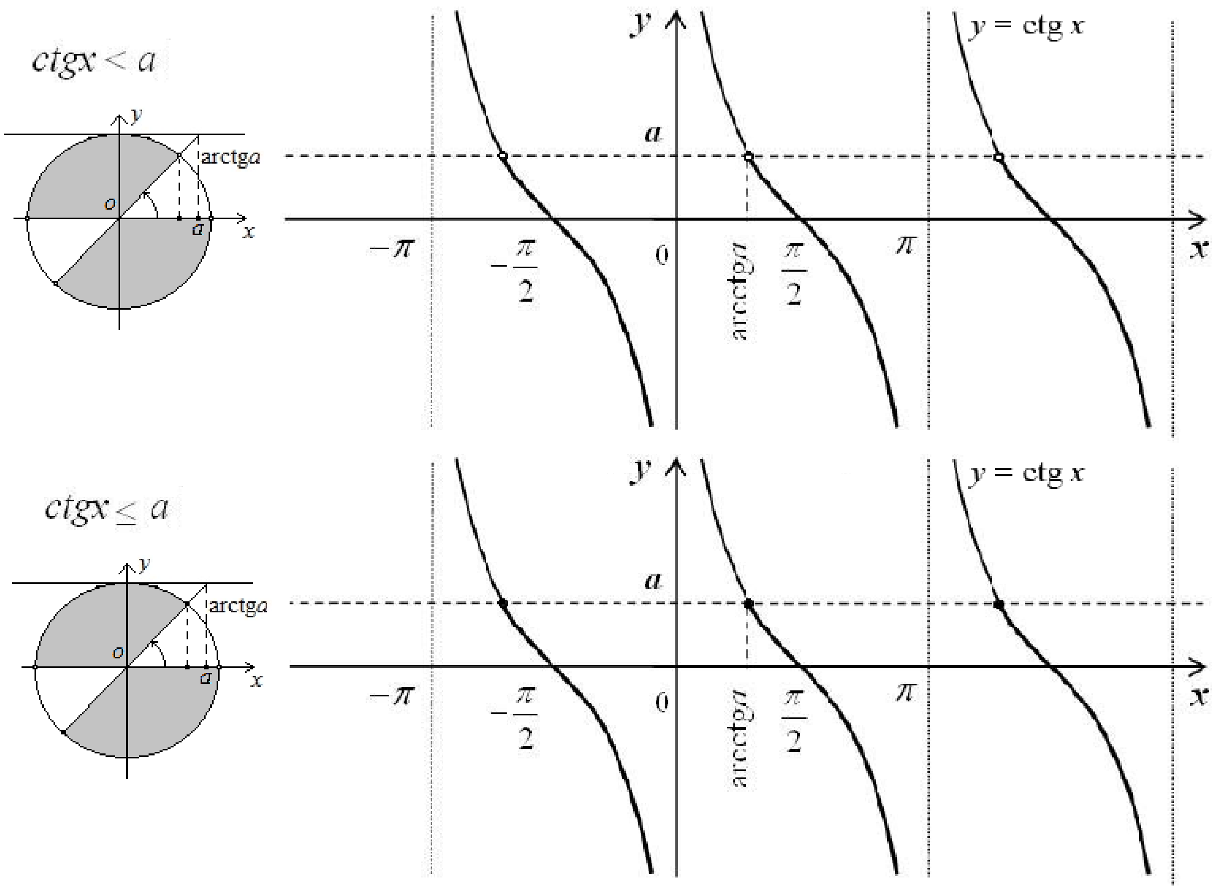


Рисунок 1.20

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2.$$

Левая часть содержит дробь, поэтому обращаем внимание на знаменатель, он не должен равняться нулю. Так как неравенство содержит только синус, введем замену $\sin x = t$. Тогда неравенство принимает вид:

$$\frac{t-2}{4t^2-1} > 2.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\frac{t-2}{4t^2-1} - 2 > 0, \qquad \frac{t-2-2(4t^2-1)}{4t^2-1} > 0,$$

$$\frac{t-2-8t^2+2}{4t^2-1} > 0, \qquad \frac{8t^2+t}{(2t-1)(2t+1)} > 0,$$

$$\frac{-t(8t-1)}{(2t-1)(2t+1)} > 0, \qquad \frac{t(8t-1)}{(2t-1)(2t+1)} < 0.$$

В итоге мы получили дробно-рациональное неравенство. Учитывая, что

$\frac{a}{b} > 0, b \neq 0 \leftrightarrow ab > 0,$ неравенство будет равносильно системе:

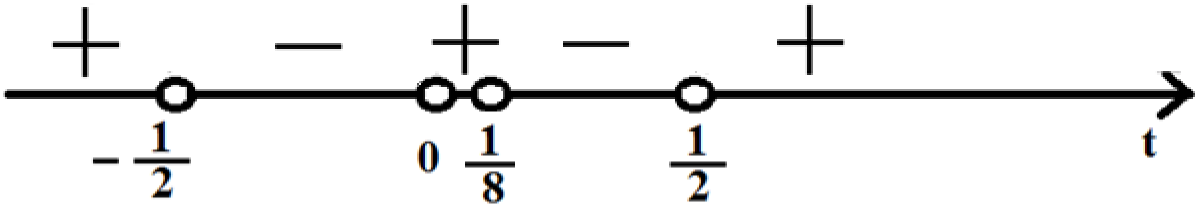
$$\begin{cases} t(8t-1)(2t-1)(2t+1) < 0, \\ t \neq \pm\frac{1}{2}; \end{cases}$$

Неравенство $t(8t-1)(2t-1)(2t+1) < 0$ решим методом интервалов. Находим нули многочлена, находящегося в левой части неравенства. Для этого каждый множитель приравняем к нулю. Этих множителей четыре, поэтому будет четыре нуля этого многочлена:

$$t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{8}, t_3 = \frac{1}{2}, t_4 = -\frac{1}{2}.$$

Эти нули нанесем на числовую прямую в порядке возрастания. Они разбивают числовую прямую на 5 интервалов.

Определяем знак многочлена, который расположен в левой части неравенства на одном из этих интервалов. На крайнем правом интервале многочлен имеет знак +. Все остальные знаки далее чередуются.



Нас интересуют те значения t, при которых многочлен будет отрицательным. Таких интервала два:

$$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \text{ и } \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < t < 0, \\ \frac{1}{8} < t < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < \sin x < 0, \\ \frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$-\frac{1}{2} < \sin x < 0, \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < 2\pi n, n \in Z, \\ \pi + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2}, \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{1}{8} + 2\pi l < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi l, l \in Z, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m < x < \pi - \arcsin\frac{1}{8} + 2\pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\arcsin\frac{1}{8} + 2\pi l;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m;\ \pi - \arcsin\frac{1}{8} + 2\pi m\right) \cup$

$\cup \left(\pi + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ 2\pi n\right).$

Уметь решать тригонометрические уравнения и неравенства в средней школе достаточно сложный и трудоемкий процесс, который требует значительных усилий со стороны учителя математики [10]. Таким образом, учитель сам должен владеть не только методами решения тригонометрических уравнений и неравенств, но и методиками их преподавания. Это связано с индивидуальными особенностями обучающихся, так как необходимо учитывать уровень и базовые знания по данному предмету.

Глава 2. Методические рекомендации по изучению темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» в средней школе.

2.1. Методические аспекты изучения тригонометрических уравнений и неравенств.

Как было отмечено ранее, перед учителем стоит задача – формировать у учащихся способности решать тригонометрические уравнения и неравенства каждого вида, тем самым развивая общие тригонометрические представления [21].

В процессе формирования у школьников умений решать тригонометрические уравнения и неравенства, по-моему мнению, следует выделить пять этапов:

1) подготовительный,
2) формирование умений решать простейшие тригонометрические уравнения,
3) изучение тригонометрических уравнений каждого вида и методов их решения,
4) формирование умений решать простейшие тригонометрические неравенства,
5) ознакомление с тригонометрическими неравенствами, сводимыми к простейшим путем равносильных преобразований, а также с тригонометрическими неравенствами, решаемыми методом интервалов.

На подготовительном этапе обучающихся разумно ознакомить с числовой окружностью; ввести понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса и научить определять их значения на числовой окружности (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 1); изучить тригонометрические функции числового и углового аргументов, где необходимо подробно изложить понятия градусной и радианной меры одного и того же угла. Затем рассмотреть графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и их свойства. К концу подготовительного этапа обучающиеся должны усвоить все формулы (см. Приложение 2), которые понадобятся в дальнейшем для решения тригонометрических уравнений и неравенств.

На втором этапе целесообразно ознакомить обучающихся с простейшими тригонометрическими уравнениями вида $\sin t = a$, $\cos t = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где будут даны и разъяснены понятия аркфункций. Аркфункции: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс– это обратные тригонометрические функции. Вернемся к теоретической части, чтобы дать их содержательное истолкование.

1. Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется дуга (угол) t, которая заключена в пределах $\left[-\pi/2; \pi/2\right]$, синус которой равен a:

если $|a| \leq 1$, то

$$\arcsin a = t \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin t = a, \\ \left[-\pi/2 \leq t \leq \pi/2\right] \end{cases}.$$

2. Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется дуга (угол) t, которая заключена в пределах $[0; \pi]$, косинус которой равен a:

если $|a| \leq 1$, то

$$\arccos a = t \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos t = a, \\ [0 \leq t \leq \pi] \end{cases}.$$

3. Арктангенсом числа $a \in R$ называется дуга (угол) x, которая заключена в пределах $\left(-\pi/2; \pi/2\right)$, тангенс которой равен a:

$$\operatorname{arctg} a = x \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ \left(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2\right) \end{cases}.$$

4. Арккотангенсом числа $a \in R$ называется дуга (угол) x, которая заключена в пределах $(0; \pi)$, котангенс которой равен a:

$$\operatorname{arcctg} a = x \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ (0 \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

Эти довольно сложные на первый взгляд определения, нельзя объяснить без помощи тригонометрической окружности. Такое истолкование позволит включить в упражнения простейшие тригонометрические уравнения, где на конкретных примерах будут выведены соответствующие формулы решения простейших тригонометрических уравнений [12]:

1) $\sin t = a$, $|a| \leq 1$, $t = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin a + \pi n, n \epsilon Z$.

Частные случаи:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\sin t = 1$, то $t = {}^{\pi}/_{2} + 2\pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\sin t = -1$, то $t = -{}^{\pi}/_{2} + 2\pi k,\ k \epsilon Z.$

2) $\cos t = a$, $|a| \leq 1$, $t = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \epsilon Z$.

Частные случаи:

если $\cos t = 0$, то $t = {}^{\pi}/_{2} + \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k,\ k \epsilon Z.$

3) $\operatorname{tg} x = a$, $a \in R$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \epsilon Z$.

Частные случаи:

если $\operatorname{tg} \mathrm{x} = 0$, то $t = \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\operatorname{tg} \mathrm{x} = 1$, то $t = {}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\operatorname{tg} \mathrm{x} = -1$, то $t = -{}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k \epsilon Z.$

4) $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in R$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \epsilon Z$.

Частные случаи:

если $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = 0$, то $t = {}^{\pi}/_{2} + \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = 1$, то $t = {}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = -1$, то $t = {}^{3\pi}/_{4} + \pi k,\ k \epsilon Z.$

В процессе объяснения уравнений $\sin t = a$, $\cos t = a$, $\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{ctg} x = t$, нужно показать, что имеют место быть важные формулы:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a,$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

Это также лучше сделать на тригонометрической окружности. В дальнейшем применение этих формул упростит вычислительную работу с аркфункциями.

Если в процессе решения тригонометрических уравнений произойдет расширение области определения или может быть использован метод возведения обеих частей уравнения в четную степень, то появятся посторонние корни, поэтому из найденных решений будет необходимо отобрать те, которые на самом деле являются корнями заданного уравнения. Так возникает вопрос об отборе корней в тригонометрических уравнениях, который является весьма трудным и важным вопросом в методическом плане. Именно на простейших уравнениях нужно начинать учить этому вопросу. Учащимся может быть предложено задание: из корней данного тригонометрического уравнения отобрать те, которые принадлежат данному промежутку [17]. Рассмотрим на примере методику решения задач, указанного типа.

Пример 2.1. Найти корни заданного уравнения, принадлежащие заданному промежутку:

$$\cos x = \frac{1}{2}, x \in [-2\pi; 3\pi].$$

Решение.

$$\cos x = \frac{1}{2}, \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k\epsilon Z.$$

Осуществим отбор корней, который удовлетворяет нашим условиям.

Если $k = 0$, то $x = \pm\frac{\pi}{3}$,

$\frac{\pi}{3} \in [-2\pi; 3\pi], \qquad -\frac{\pi}{3} \in [-2\pi; 3\pi].$

Если $k = 1$, то $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad x = \frac{5\pi}{3}$ или $x = \frac{7\pi}{3}$,

$\frac{5\pi}{3} \in [-2\pi; 3\pi], \qquad \frac{7\pi}{3} \in [-2\pi; 3\pi].$

Если $k = 2$, то $x = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $\quad x = \frac{11\pi}{3}$ или $x = \frac{13\pi}{3}$;

Оба значения больше, чем 3π, следовательно, не принадлежат заданному отрезку.

При последующей подстановке $k = 3, 4, 5, \ldots$ будем получать значения намного больше 3π. Полученные корни также не будут входить в заданный отрезок.

При проверке отрицательных значений получаем:

если $k = -1$, то $x = \pm\frac{\pi}{3} - 2\pi n$, $\quad x = -\frac{7\pi}{3}$ или $x = -\frac{5\pi}{3}$,

$-\frac{7\pi}{3} \notin [-2\pi; 3\pi]$, $\quad -\frac{5\pi}{3} \in [-2\pi; 3\pi]$.

Если $k = -2, -3, -4, -5, \ldots$, то точки получаются левее, чем -2π, а это значит, что они не принадлежат заданному отрезку.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

На третьем этапе процесса формирования у обучающихся умений решать тригонометрические уравнения, трудности в основном возникают лишь у тех, кто не усвоил принцип решения простейших тригонометрических уравнений. Чтобы систематизировать знания обучающихся о методах решения тригонометрических уравнений, и продемонстрировать к какому виду относится конкретное уравнение, нужно показать ученикам возможность применения различных методов решения к одному и тому же уравнению. Для этого разумно выбрать подходящее уравнение и решить его всеми возможными методами, тем самым мы покажем правильность найденных решений. Обязательно необходимо акцентировать внимание учеников на особенностях всех примененных методов, сделать выводы и выделить наиболее рациональный метод в данной ситуации [18].

На четвертом этапе – этапе формирования умений решать простейшие тригонометрические неравенства учащимся будут полезны знания и умения работать с тригонометрической окружностью или графиком, которые были сформированы при решении простейших тригонометрических уравнений [26]. На первых порах будет полезен пошаговый алгоритм решения тригонометрического неравенства, который лучше показать на конкретных примерах.

Пример 2.2. Решить неравенство

$$\cos x < \frac{1}{2}.$$

Решение.

Шаг 1. Начертим единичную окружность, отметим на оси косинусов точку $1/_2$(*точка* $1/_2$ *выколота, т.к. неравенство строгое*). Все значения $\cos x$, меньшие $1/_2$, располагаются левее этой точки (*Рисунок 2.7*).

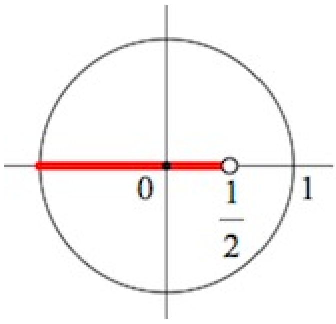


Рисунок 2.7

Шаг 2. Выделим все значения (дугу) тригонометрической окружности, косинус которых будет меньше $1/_2$ (*Рисунок 2.8*).

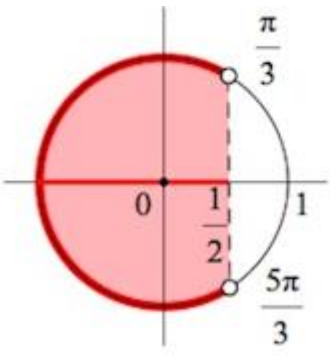


Рисунок 2.8

Шаг 3. Запишем числовые значения граничных точек (*Рисунок 2.8*). Для этого определим начальную точку движения. Ей соответствует точка ${}^{\pi}/_{3}$ ($\arccos {}^{1}/_{2} = {}^{\pi}/_{3}$).

Двигаясь по выделенной дуге в положительном направлении (против часовой стрелки) определим конечную точку движения. Ей соответствует точка $5\,{}^{\pi}/_{3}$ ($2\pi - \arccos {}^{1}/_{2} = {}^{5\pi}/_{3}$).

Шаг 4. Запишем общее решение неравенства, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

$$\frac{\pi}{3} + +2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

При записи конечного решения важно обратить внимание на то, чтобы «левое/первое» значение было меньше «правого/второго».

Графическое решение данного неравенства в прямоугольной системе координат представлено на рисунке 2.9.

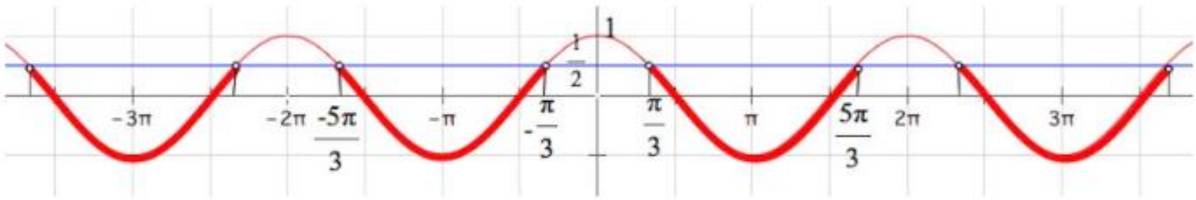


Рисунок 2.9

При решении неравенств графическим методом нужно как можно точнее построить графики функций. В нашем случае $-$ это $y = \cos x$ и $y = {}^{1}/_{2}$. Как видим, графики функций пересекаются в точках ${}^{\pi}/_{3}$ и ${}^{5\pi}/_{3}$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Здесь важно отметить, что участок, который является решением данного неравенства, повторяется через один и тот же промежуток, равный периоду данной тригонометрической функции. Таким образом графический способ решения тригонометрического неравенства наглядно подтверждает факт о наличии множества корней.

На пятом «заключительном» этапе возьмем во внимание уравнения, которые на первый взгляд кажутся нам намного сложнее простейших тригонометрических неравенств. Первым делом нужно упростить неравенство путем равносильных преобразований используя те приемы, что и для решения тригонометрических уравнений. Ученикам может быть предложен метод интервалов для решения более сложных тригонометрических неравенств [9].

В теоретической части был приведен пример, в котором тригонометрическое неравенство было сведено к дробно-рациональному. Неравенство решали методом интервалов, и нули функции наносились на числовую прямую. Теперь рассмотрим случай, когда интервалы изображаются на окружности. Заранее условимся, интервалы, где функция положительна изображать вне окружности, а отрицательна внутри.

Пример 2.3. Решить неравенство

$$\cos x + \cos 3x > 0.$$

Решение.

Преобразуем данное тригонометрическое неравенство, применив формулу суммы косинусов

$$\cos x + \cos 3x > 0,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$2\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} > 0,$$

$$2\cos\frac{4x}{2}\cdot\cos\frac{-2x}{2} > 0.$$

С учетом того, что функция косинуса четная $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, получаем:

$$2\cos 2x\cdot\cos x > 0.$$

Обе части неравенства поделим на 2:

$$\cos 2x\cdot\cos x > 0.$$

1) Найдем нули функции $y = \cos 2x \cdot \cos x$. Для этого $\cos 2x \cdot \cos x$ приравняем к нулю:

$$\cos 2x \cdot \cos x = 0.$$

Левая часть неравенства представлена в виде произведения двух множителей. Принимая во внимание то, что произведение нескольких множителей равно нулю в том случае, если хотя бы один множитель равен нулю, получаем совокупность двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \cos x = 0. \end{array}\right.$$

Решая каждое уравнение, получаем:

$$\left[\begin{array}{ll} 2x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z \end{array}\right., \to \left[\begin{array}{ll} x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, & n \in Z \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z \end{array}\right..$$

2) Нанесем нули функции на единичную окружность. Чтобы нанести нули функции на единичную окружность найдем конкретные значения для каждой серии:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$:

$1) n = 0, x = \frac{\pi}{4}$; $2) n = 1, x = \frac{3\pi}{4}$; $3) n = 2, x = \frac{5\pi}{4}$; $4) n = 3, x = \frac{7\pi}{4}$.

$x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$:

$1) n = 0, x = \frac{\pi}{2}$; $2) n = 1, x = \frac{3\pi}{2}$.

При последующих значениях n, значения будут совпадать с полученными.

Нанесем на единичную окружность полученные значения (*Рисунок 2.10*). Эти значения разбили единичную окружность на шесть интервалов.

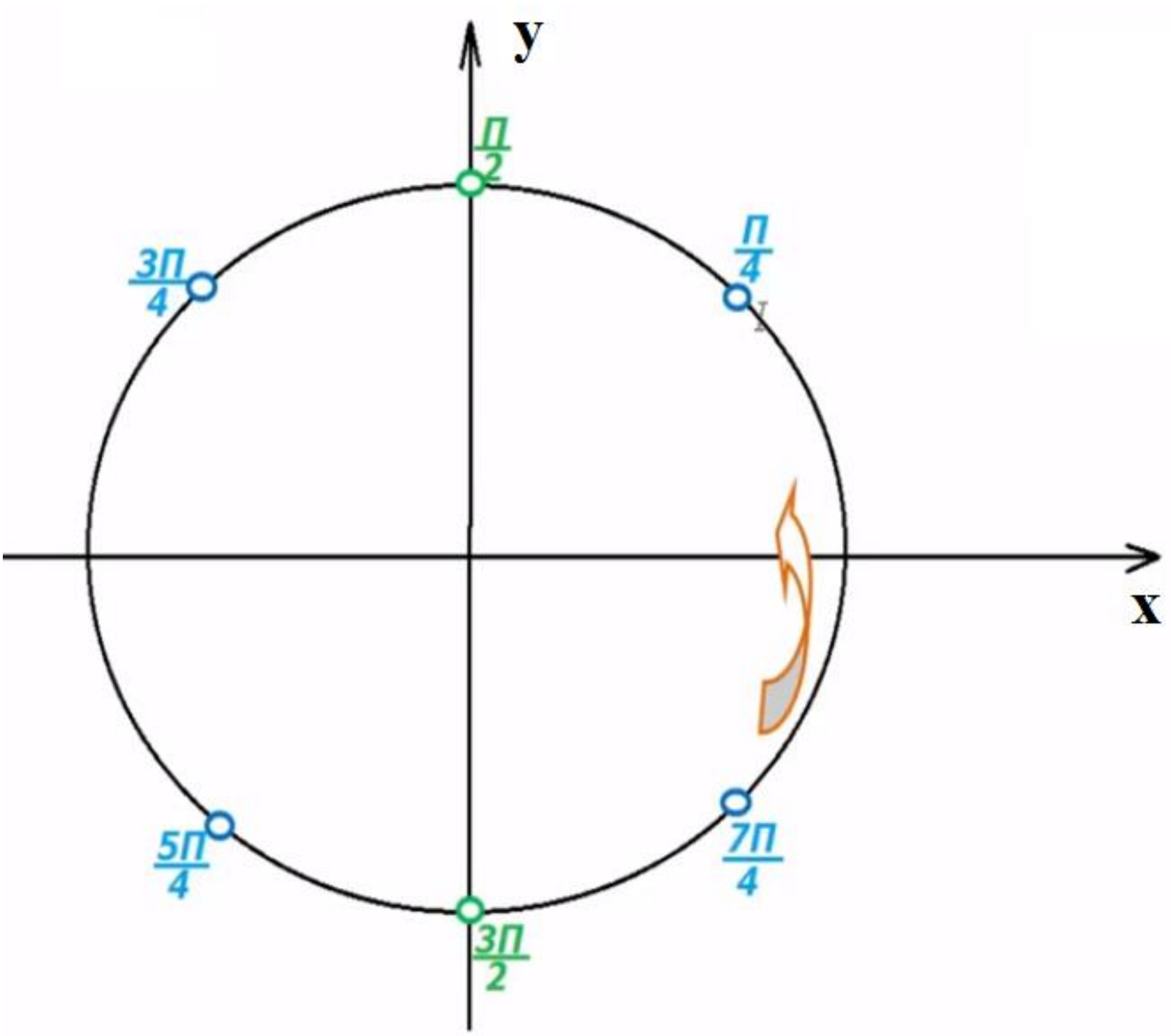


Рисунок 2.10

3) Определим знаки функции на полученных промежутках. Выберем любой промежуток, например, $\left({}^{7\pi}/_{4}\,;\ {}^{\pi}/_{4}\right)$.

Возьмем любое значение из этого промежутка и подставим в функцию $y = \cos 2x \cdot \cos x$. Пусть $\alpha = 0$, тогда $y(0) = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1 > 0$. Отсюда следует, что на промежутке от ${}^{7\pi}/_{4}$ до ${}^{\pi}/_{4}$ данная функция положительная. Остальные знаки функции будут чередоваться (*Рисунок 2.11*).

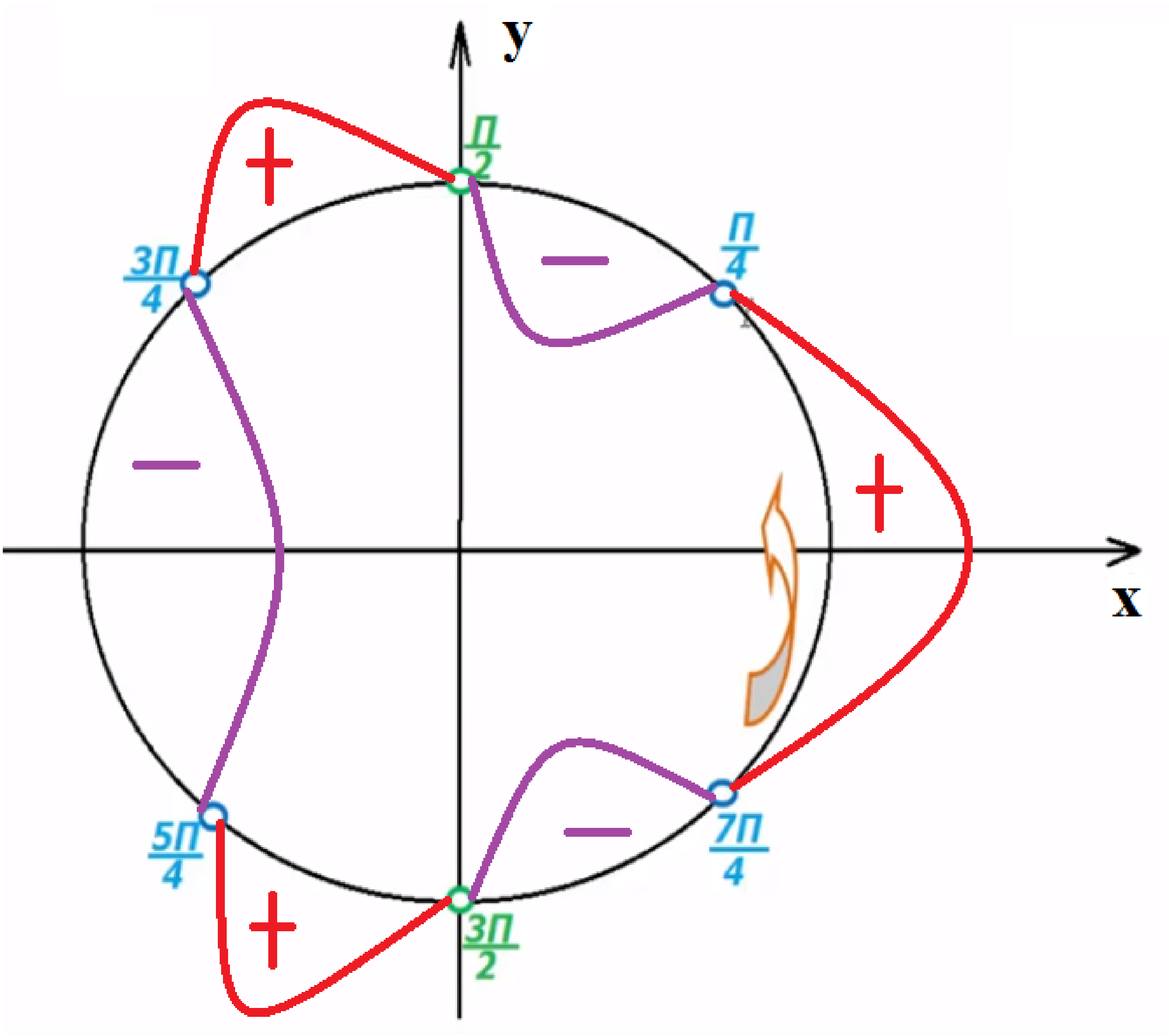


Рисунок 2.11

Нас интересуют те значения x, при которых данная функция имеет положительные значения.

$$\text{Ответ: } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \qquad \text{где } n \in Z.$$

Бывает, что точки разных серий совпадают на единичной окружности.

Если точки разных серий совпадают, то их называют кратными.

Точки, повторяющиеся в четном числе серий, называют точками четной кратности, а точки повторяющиеся в нечетном числе серий,– точками нечетной кратности.

При переходе через точку четной кратности – знак не меняется, а при переходе через точку нечетной кратности – знак меняется на противоположный [22].

Пример 2.4. Решить неравенство

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} \leq 0.$$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x \neq 0, x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$

Известно, что дробное неравенство $\dfrac{a}{b} \leq 0, b \neq 0 \leftrightarrow ab \leq 0.$

Значит, наше заданное неравенство будет равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin 3x \cdot \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x \leq 0, \\ \sin 2x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 3x \cdot \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x \leq 0, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z. \end{cases}$$

1) Найдем нули функции $y = \sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x$. Для этого $\sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x$ приравняем к нулю и решим полученное уравнение:

$$\sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x = 0.$$

Левая часть представлена в виде произведения трех сомножителей. Произведение нескольких сомножителей равно нулю тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности трех уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0, \\ \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \sin 2x = 0. \end{array}\right.$$

Решая каждое из этих уравнений, получаем:

$$\left[\begin{array}{ll} 3x_1 = \pi n, & n \in Z \\ 2x_2 - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z, \\ 2x_3 = \pi n, & n \in Z \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{\pi n}{3}, & n \in Z \\ 2x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + \pi n, & n \in Z, \\ x_3 = \dfrac{\pi n}{2}, & n \in Z \end{array}\right. \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ll} \mathbf{x_1 = \dfrac{\pi n}{3},} & \mathbf{n \in Z} \\ \mathbf{x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2},} & \mathbf{n \in Z}. \\ \mathbf{x_3 = \dfrac{\pi n}{2},} & \mathbf{n \in Z} \end{array}\right.$$

2) Нанесем нули функции на единичную окружность. Чтобы нанести нули функции на единичную окружность найдем частные значения для каждой серии:

$\mathbf{x_1 = \dfrac{\pi n}{3}, \quad n \in Z}$:

$1)n = 0, x_1 = \mathbf{0}$; $2)n = 1, x_1 = \mathbf{\dfrac{\pi}{3}}$; $3)n = 2, x_1 = \mathbf{\dfrac{2\pi}{3}}$; $4)n = 3, x_1 = \mathbf{\pi}$;

$5)n = 4, x_1 = \mathbf{\dfrac{4\pi}{3}}$; $6)n = 5, x_1 = \mathbf{\dfrac{5\pi}{3}}$; $7)n = 6, x_1 = \mathbf{2\pi}$.

$\mathbf{x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z}$:

$1)n = 0, x_2 = \mathbf{\dfrac{\pi}{3}}$; $2)n = 1, x_2 = \mathbf{\dfrac{5\pi}{6}}$; $3)n = 2, x_2 = \mathbf{\dfrac{4\pi}{3}}$; $4)n = 3, x_2 = \mathbf{\dfrac{11\pi}{6}}$.

$\mathbf{x_3 = \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z}$:

$1)n = 0, x_3 = \mathbf{0}$; $2)n = 1, x_3 = \mathbf{\dfrac{\pi}{2}}$; $3)n = 2, x_3 = \mathbf{\pi}$; $4)n = 3, x_3 = \mathbf{\dfrac{3\pi}{2}}$;

$5)n = 4, x_3 = \mathbf{2\pi}$.

При последующих значениях n, значения будут совпадать с полученными.

Нанесем на единичную окружность полученные значения, а также ОДЗ нашего неравенства (*Рисунок 2.12*). Видим, что нули функции первой и второй ($^{\pi}/_{3}$ и $^{4\pi}/_{3}$), первой и третьей ($0, \pi$ и 2π) серий совпадают. Значения $0, {}^{\pi}/_{2}, \pi, {}^{3\pi}/_{2}$ и 2π входят в ОДЗ, поэтому на окружности мы обозначаем их пустыми точками.

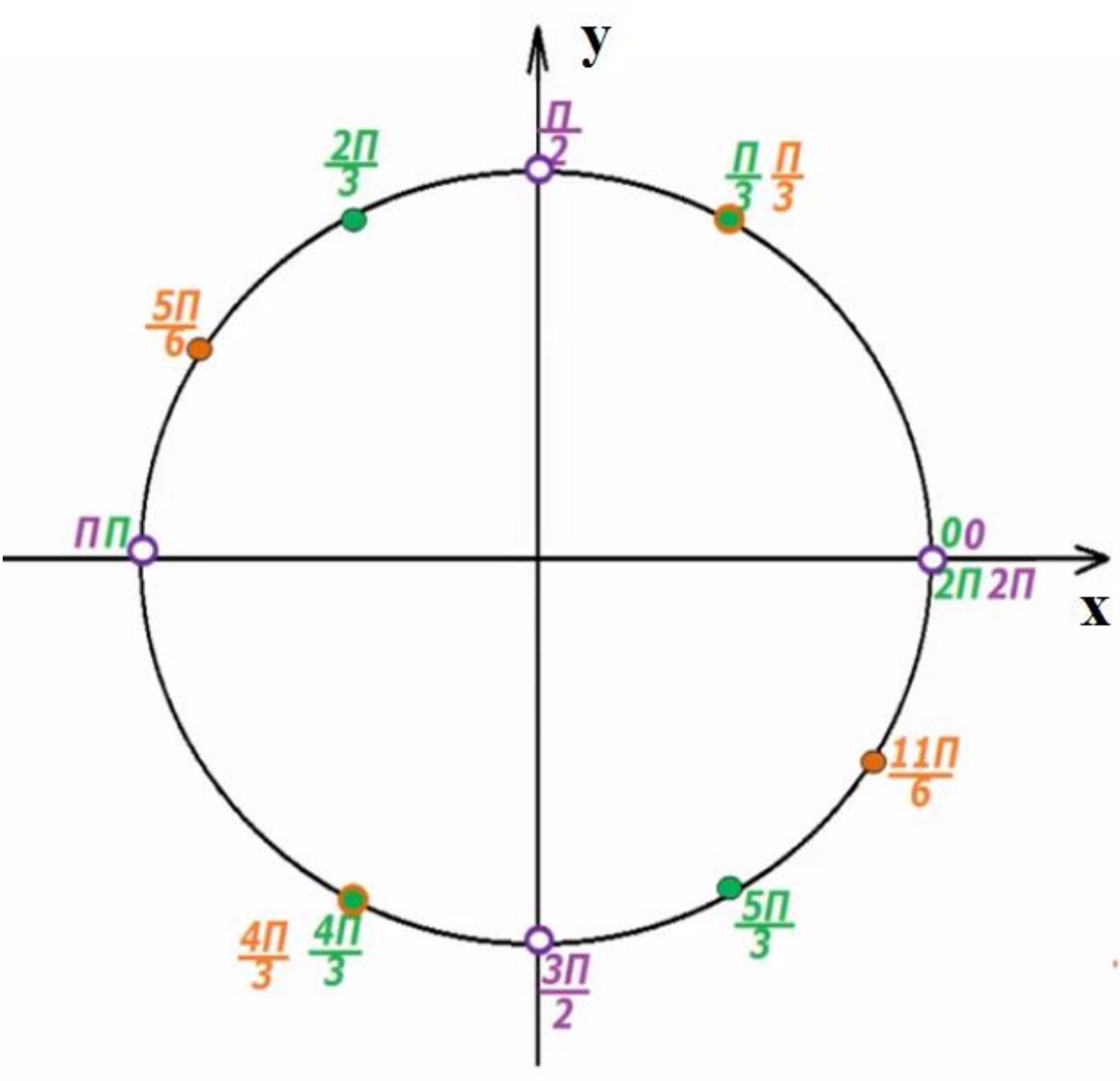


Рисунок 2.12

Эти значения разбили единичную окружность на несколько промежутков.

3) Определим знаки функции на полученных промежутках.

Рассмотрим интервал $(0; {}^{\pi}/_{3}]$. Возьмем любое значение из этого интервала и подставим в функцию $y = \sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x$. Пусть $\alpha = {}^{\pi}/_{6}$, тогда

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} > 0.$$

Отсюда следует, что на промежутке от 0 до $\pi/3$ данная функция положительна. Остальные знаки функции будут чередоваться, но так как точка $\pi/3$ является точкой четной кратности, то при переходе через нее знак не поменяется. Также знак не поменяется при переходе точек 0 или 2π, поскольку эти точки четной кратности. И поэтому на трех интервалах мы получаем знак «+». Аналогичная ситуация получается при переходе через точки π и $4\pi/3$ (*Рисунок 2.13*).

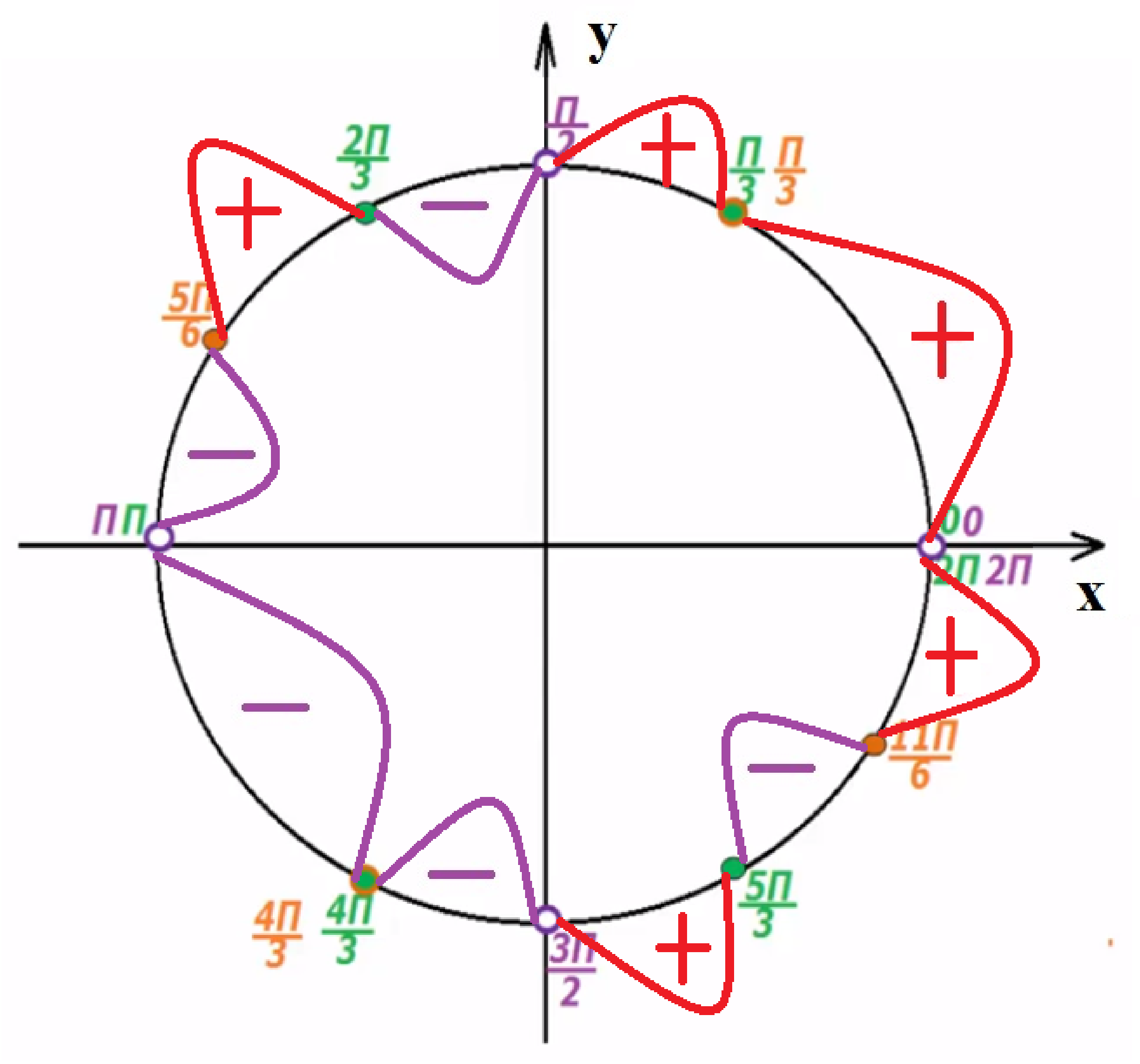


Рисунок 2.13

Нас интересуют те значения x, при которых неравенство ≤ 0. Таким образом получается объединение четырех промежутков:

$$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$$
$$\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right],\qquad \text{где } n\in Z.$$

Также решением нашего неравенства будет значение ${}^{\pi}/_{3}+2\pi n$, поскольку при подстановке этого значения, мы получаем верное равенство, равное нулю.

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$ и $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in Z$.

2.2. Методическая разработка урока на тему: «Решение тригонометрических уравнений».

Урок — это такая форма организации педагогического процесса, при которой педагог в течение точно установленного времени руководит коллективной познавательной и иной деятельностью постоянной группы учащихся (класса) с учетом особенностей каждого из них, используя виды, средства и методы работы, создающие благоприятные условия для того, чтобы все ученики овладевали основами изучаемого предмета непосредственно в процессе обучения, а также для воспитания и развития познавательных способностей и духовных сил школьников [6].

Успех в формировании математических понятий, в овладении умениями и навыками во многом зависит от качества учебного занятия. При подготовке к нему учителю необходимо обстоятельно продумать, чему он должен научить школьников, как использовать этапы занятия для развития мышления, памяти, познавательных способностей и интересов, какие воспитательные задачи он будет решать [1].

Методическая разработка урока по теме «Решение тригонометрических уравнений» включает в себя теоретический и практический материал по данной теме, а также дидактический материал, с вариантами заданий, предусмотренный для проведения самостоятельной работы. К этому учебному занятию обучающиеся используют знания о простейших тригонометрических уравнениях и формулах их решения, включая частные случаи.

План - конспект урока

Класс: 10

Тема: Решение тригонометрических уравнений.

Цели:

- **образовательная:** обобщить и систематизировать знания учащихся о методах решения тригонометрических уравнений;
- **развивающая:** способствовать формированию умений воспринимать и осмысливать знания в готовом виде; развивать мыслительные операции, логику, наблюдательность;
- **воспитательная:** воспитывать волю и упорство для достижения конечных результатов.

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Оснащение: дидактический материал.

Информационное обеспечение:

1. Алгебра и начала математического анализа.10-11 классы. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/ А.Г. Мордкович.-14-е изд.,стер.-М.: Мнемозина, 2013.-400с.
2. Алгебра и начала математического анализа.10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни)/ [С.М.Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].-8-е изд.-М.: Просвещение, 2009.-430с.

3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб.для общеобразоват.организаций: базовый и углубл.уровни/ [Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева и др.].-3-е изд.-М.:Просвещение, 2016.-463с.

ХОД ЗАНЯТИЯ.

I.Организационный момент.(1 мин.):

Приветствие, фиксация отсутствующих, проверка санитарного состояния класса и готовности учащихся к проведению урока, заполнение журнала.

II.Основная часть занятия.

1. Проверка самостоятельной и домашней работы учащихся (4 мин.):

1. Разбор домашнего задания у доски.
2. Несколько тетрадей на проверку.
3. Подведение итогов проверки: Оценить ответы учащихся, прокомментировать их. Выделить отличившихся.

2. Мотивация учебной деятельности учащихся (1 мин.): Ребята! Давайте обратим внимание на примеры, которые записаны на доске:

1) $2\cos^2 x + \sin x - 4 = 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Перед нами уравнения, которые пока что нам не по силу, но сегодня на уроке мы познакомимся с некоторыми методами решения тригонометрических уравнений. Для начала давайте вспомним, как решаются простейшие тригонометрические уравнения.

3. Актуализация опорных знаний и умений (4 мин.)

Запишите формулы решения простейших тригонометрических уравнений:

1) $\sin t = \text{a}, |\text{a}| \le 1, t = (-1)^{\text{n}} \arcsin \text{a} + \pi n, n \epsilon Z$.

Частные случаи:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k,\ k \epsilon Z;$

если $\sin t = 1$, то $t = {}^{\pi}/_{2} + 2\pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\sin t = -1$, то $t = -{}^{\pi}/_{2} + 2\pi k,\ k\epsilon Z.$

2) $\cos t = \mathrm{a}, |\mathrm{a}| \le 1, t = \pm\arccos\mathrm{a} + 2\pi k,\ k\epsilon Z.$

Частные случаи:

если $\cos t = 0$, то $t = {}^{\pi}/_{2} + \pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k,\ k\epsilon Z.$

3) $\operatorname{tg} x = a, a \in R, x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k\epsilon Z.$

Частные случаи:

если $\operatorname{tg} \mathrm{x} = 0$, то $t = \pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\operatorname{tg} \mathrm{x} = 1$, то $t = {}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\operatorname{tg} \mathrm{x} = -1$, то $t = -{}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k\epsilon Z.$

4) $\operatorname{ctg} x = a, a \in R, x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k\epsilon Z.$

Частные случаи:

если $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = 0$, то $t = {}^{\pi}/_{2} + \pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = 1$, то $t = {}^{\pi}/_{4} + \pi k,\ k\epsilon Z;$

если $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = -1$, то $t = {}^{3\pi}/_{4} + \pi k,\ k\epsilon Z.$

Решите уравнения:

$$\text{а) } \sin 2x = \frac{1}{2};\quad \text{б) } \cos\frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \text{в) } \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Решение. а) Пусть $t = 2x$, тогда:

$$\sin t = \frac{1}{2},$$

$$t = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,$$

$$t = (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$2x = (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \qquad n\epsilon Z.$$

Ответ: $x = (-1)^{\mathrm{n}}\ \frac{\pi}{12}\ + \frac{\pi n}{2}, \qquad n \epsilon Z.$

б) Пусть $t = \frac{2}{3}x,$ тогда:

$$\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$t = \pm\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$\frac{2}{3}x = \pm\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$\frac{2}{3}x = \pm\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \pm\ \frac{9\pi}{8} + 3\pi n, \qquad n \epsilon Z.$$

Ответ: $x = \pm\ \frac{9\pi}{8} + 3\pi n, \qquad n \epsilon Z.$

в) Пусть $t = 4x - \frac{\pi}{6},$ тогда:

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$t = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, \qquad n \epsilon Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, \qquad n \epsilon Z.$

Мы с вами вспомнили, как решаются простейшие тригонометрические уравнения, теперь давайте рассмотрим, какие бывают виды тригонометрических уравнений и методы их решения. Запишите тему сегодняшнего урока.

4. Сообщение темы занятия, постановка целей и задач (1 мин.):

Тема: Решение тригонометрических уравнений.

Цель: Изучить основные виды и методы решения тригонометрических уравнений: 1) метод решения тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным; 2) тригонометрические уравнения, решаемые разложением их частей на множители.

Задачи: Рассмотреть примеры уравнений данных видов, вырабатывать приемы и алгоритмы их решения.

5. Изложение нового материала *(см. ПРИЛОЖЕНИЕ 3)*, **применяемая методика (объяснение с опорой на имеющиеся знания обучающихся) (16 мин.)**

1. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным.
2. Тригонометрические уравнения, решаемые разложением их частей на множители.

6. Закрепление нового материала, применяемая методика (самостоятельная работа с последующей взаимопроверкой) (15 мин.):

1. Краткий инструктаж по выполнению самостоятельной работы.
2. Выполнение самостоятельной работы учащимися **(10 мин.)**.
3. Взаимопроверка самостоятельной работы. *(Самостоятельная работа сверяется с правильными решениями, записанными на оборотной стороне доски.*

Самостоятельная работа оценивается следующим образом:

1) оценка «3» - верно решено 1 уравнение;

2) оценка «4» - верно решены 2 уравнения;

3) оценка «5» - верно решены 3 уравнения).

III.Подведение итогов проведенного занятия (2 мин.):

Озвучивание результатов работы на уроке. Выставление оценок с комментарием.

Домашнее задание: решить уравнения, которые были записаны на доске в начале урока, а именно:

1) $2\cos^2 x + \sin x - 4 = 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

IV.Рефлексия (1 мин.)

А теперь, ребята, давайте подведем итог сегодняшнего урока. Продолжите предложения:

- Сегодня на уроке я вспомнил ….
- Сегодня на уроке я узнал ….
- Сегодня на уроке я поставил себе оценку ….

2.3. Методическая разработка урока на тему: «Решение простейших тригонометрических неравенств».

Методическая разработка урока по теме «Решение простейших тригонометрических неравенств» включает в себя теоретический материал, подкрепленный практическими заданиями. К этому учебному занятию обучающиеся используют знания о решении простейших тригонометрических уравнений при помощи единичной окружности.

План - конспект урока

Класс: 10

Тема: Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цели:

- **образовательная:** способствовать формированию умений решать простейшие тригонометрические неравенства $\sin x > a,\ \sin x \geq a,\ \sin x < a,\ \sin x \leq a$, $\cos x > a,\ \cos x \geq a,\ \cos x < a,\ \cos x \leq a$;
- **развивающая:** способствовать развитию умения обобщать полученные знания; развивать мыслительные операции, логику, наблюдательность;
- **воспитательная:** содействовать воспитанию интереса к математике.

Тип урока: урок усвоения нового материала с элементами первичного закрепления.

Оснащение: дидактический материал.

Информационное обеспечение:

1. Алгебра и начала математического анализа.10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни)/ [С.М.Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].-8-е изд.-М.: Просвещение, 2009.-430с.
2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб.для общеобразоват.организаций: базовый и углубл.уровни/ [Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева и др.].-3-е изд.-М.:Просвещение, 2016.-463с.

ХОД ЗАНЯТИЯ.

I.Организационный момент.(1 мин.):

Приветствие, фиксация отсутствующих, проверка санитарного состояния класса и готовности учащихся к проведению урока, заполнение журнала.

II.Основная часть занятия.

1. Проверка самостоятельной и домашней работы учащихся (5 мин.):

1. Разбор домашнего задания у доски.
2. Несколько тетрадей на проверку.

3. Подведение итогов проверки: Оценить ответы учащихся, прокомментировать их. Выделить отличившихся.

2. Мотивация учебной деятельности учащихся: Ребята, на прошлых уроках мы изучили виды тригонометрических уравнений и способы их решения. Сегодня на уроке мы должны освоить понятие и метод решения тригонометрического неравенства.

3. Актуализация опорных знаний и умений(3 мин.)

- Давайте вспомним, что такое единичная окружность?

(Единичная окружность – это окружность с радиусом единица и центром в начале координат).

- Дайте определения линии синуса, косинуса.

(Отрезок [-1;1] оси ординат называют линией синусов; отрезок [-1;1] оси абсцисс называют линией косинусов).

-Что называют неравенством?

(Неравенством называют отношение, связывающее два числа или иных математических объекта с помощью знаков $>, <, \geq, \leq$*.)*

-Хорошо. Мы с вами вспомнили, что такое неравенство, а что же такое тригонометрическое неравенство? Сегодня на уроке мы познаем ответ на этот вопрос, и научимся решать простейшие тригонометрические неравенства. Запишите тему сегодняшнего урока.

4. Сообщение темы занятия, постановка целей и задач (1 мин.):

Тема: Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цель: научиться решать простейшие тригонометрические неравенства $\sin x > a,\ \sin x \geq a,\ \sin x < a,\ \sin x \leq a$, $\cos x > a,\ \cos x \geq a, \cos x < a,$ $\cos x \leq a$ при помощи единичной окружности.

Задачи: Рассмотреть примеры простейших тригонометрических неравенств, вырабатывать пошаговый алгоритм их решения.

5. Изложение нового материала *(см. ПРИЛОЖЕНИЕ 5)*, **применяемая методика (объяснение с опорой на имеющиеся знания обучающихся) (20 мин.)**

1. Простейшие тригонометрические неравенства вида:

$\sin x > a,\ \sin x \geq a,\ \sin x < a,\ \sin x \leq a$.

2. Простейшие тригонометрические неравенства вида:

$\cos x > a,\ \cos x \geq a, \cos x < a,\ \cos x \leq a.$

6. Закрепление нового материала, применяемая методика (решение простейших тригонометрических неравенств у доски и в тетрадях) (12 мин.):

Решить неравенства:

1) $\sin x < -\frac{1}{2}.$

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

2) $\cos x > -\frac{1}{2}.$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

3) $\sin x \geq 0.$

Ответ: $2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

4) $\cos x \leq 0{,}2.$

Ответ: $\arccos 0{,}2 + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos 0{,}2 + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

III.Подведение итогов проведенного занятия (2 мин.):

Озвучивание результатов работы на уроке. Выставление оценок с комментарием.

Домашнее задание: решить простейшие тригонометрические неравенства:

1) $\sin x \geq -1$;
2) $\cos x \leq 1$;
3) $\sin x < 0$;
4) $\cos x > 0.$

IV.Рефлексия (1 мин.)

А теперь, ребята, давайте подведем итог сегодняшнего урока. Продолжите предложения:

- Сегодня на уроке я вспомнил ….
- Сегодня на уроке я узнал ….
- Сегодня на уроке я поставил себе оценку ….

Методически грамотно построенный урок и преподнесенный материал обеспечивают высокую работоспособность на учебном занятии, поэтому подходя к теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» нужно тщательно подготовиться и продумать каких результатов хочет добиться учитель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тригонометрические вычисления, в том числе тригонометрические уравнения и неравенства, имеют значительное применение в прикладных науках, поэтому тригонометрические уравнения и неравенства должны занимать видное место в программах средней школы.

В связи с этим, были рассмотрены виды тригонометрических уравнений и неравенств, раскрыты общие методические положения, разработаны уроки для 10 классов на темы: «Решение тригонометрических уравнений», «Решение простейших тригонометрических неравенств».

Таким образом, все поставленные задачи были решены, цель достигнута.

Данная работа может быть использована в качестве методического пособия в учебном процессе учителями математики общеобразовательных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананченко К.О. Общая методика преподавания математики в школе. – Минск.: Университецкае, 1997. – 190 с.

2. Алгебра и начала математического анализа.10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. – 6-е изд.,стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.

3. Алгебра и начала математического анализа.10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни)/ [С.М.Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

4. Алгебра и начала математического анализа.10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Г.К. Муравин. – 6-е изд.,стер. – М.: Дрофа, 2013. – 287 с.

5. Алгебра и начала математического анализа.10-11 классы. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/ А.Г. Мордкович. – 14-е изд.,стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.

6. Бударский А.А. Индивидуальный подход в обучении. /А.А. Бударский. – М.: Советская педагогика. №7, 1965. – с. 83

7. Глейзер Г.И. История математики в школе.: пособие для учителей/ под ред. Молодшего В.Н. – М.: Просвещение, 1964. – 376 с.

8. Горнштейн П.И. Тригонометрия помогает алгебре /Горнштейн П.И. – М.: Квант. №5, 1989. – с. 68-70

9. Гилемханов Р.Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе / Гилемханов Р.Г. – М.: Математика в школе. №6, 2001. – с. 26-28

10. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1999. – 462 с.

11. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. Пособие для студентов

физ.мат.спец.пед.ин-тов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1991. – 352с.
12. Марасанов А.Н. О методологическом подходе в обучении тригонометрии /Н.И. Попов, А.Н. Марасанов// (Марийский государственный университет): Знание и понимание. Умение. № 4, 2008. – с. 139-141
13. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб.для общеобразоват.организаций: базовый и углубл.уровни/ [Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева и др.]. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.
14. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.
15. Математический энциклопедический словарь./ Гл.ред. Прохоров Ю.В. – М.: Сов. энциклопедия,1988. – 847 с.
16. Министерство образования и науки Российской Федерации//Приказ от 31.03.2014 №253 (ред.от 29.12.2016)// «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию реализации имеющих государственную аккредитацию образователных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования.
17. Мордкович А.Г. Беседы с учителями: Учеб. – метод. пособие/ А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»»: ООО «Издательство «Мир и Образование»», 2005. – 336 с.
18. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе /Мордкович А.Г. М.: Математика в школе. №6, 2002. – с. 32-33
19. Нахман А.Д. Тригонометрия: учебно-методическое пособие/ утверждено Методическим советом ТГТУ (протокол №7 от 23.09.14). – Тамбов,2014. – 87 с.

20. Нестандартные методы решения тригонометрических неравенств: учебно-методическое пособие/ Е.Р. Садыкова, О.В. Разумова. – Казань: Казан.ун-т, 2013. – 69 с.

21. Репьев В.В. Методика тригонометрии. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1937. – 152 с.

22. Решетников Н.Н. Тригонометрия в школе. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006. – лк 1

23. Рогановский Н.М. Методика преподавания в средней школе. – Минск: Высшая школа, 1990. – 388 с.

24. Тригонометрия: учебное пособие /Ю.Ю. Громов, Н,А. Земской, О.Г. Иванова и др. Тамбов: Изд-во Тамб.гос.техн.ун-та, 2003. – 104 с.

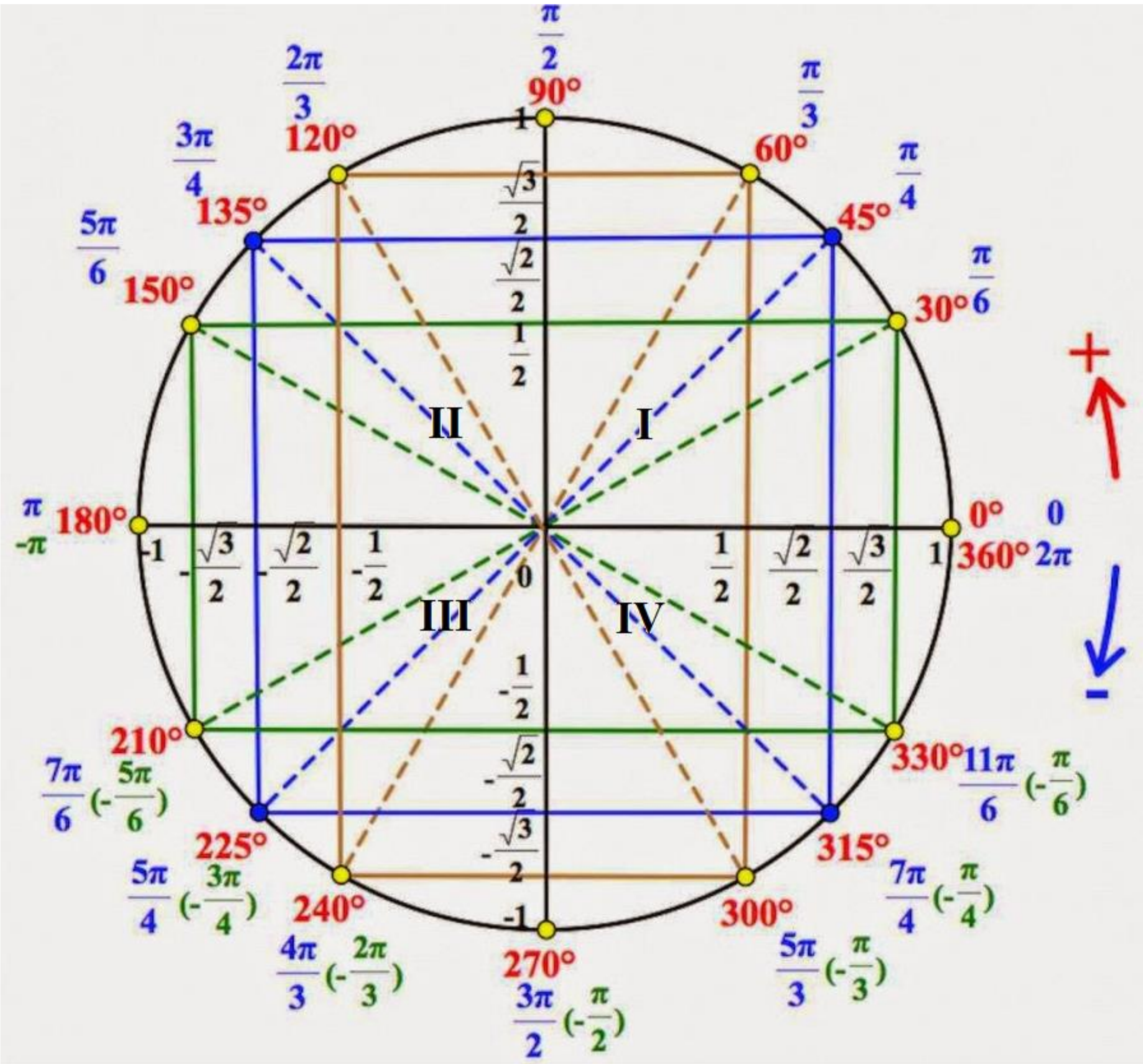
25. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках. /изд. 2-е, исп.и доп. – М.Л.:ОНТИ,1938. – 470с.

26. Шаталов В.Ф. Методические рекомендации для работы с опорными сигналами по тригонометрии /Шаталов В.Ф. – М.: Новая школа, 1993. – 83 с.

27. Шатов В.Ф. Быстрая тригонометрия. – М: ГУП ЦРП «Москва-Санкт-Петербург», 2002. – 72 с.

28. Яковлев И.В. Введение в аркфункции [Электронный ресурс]: http://mathus.ru/math/arcfun.pdf.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1



n радиан $=\dfrac{180^0}{\pi}\cdot n$, $\qquad n^0=\dfrac{\pi}{180}\cdot n$ радиан.

Рисунок 2.1 – Тригонометрическая окружность.

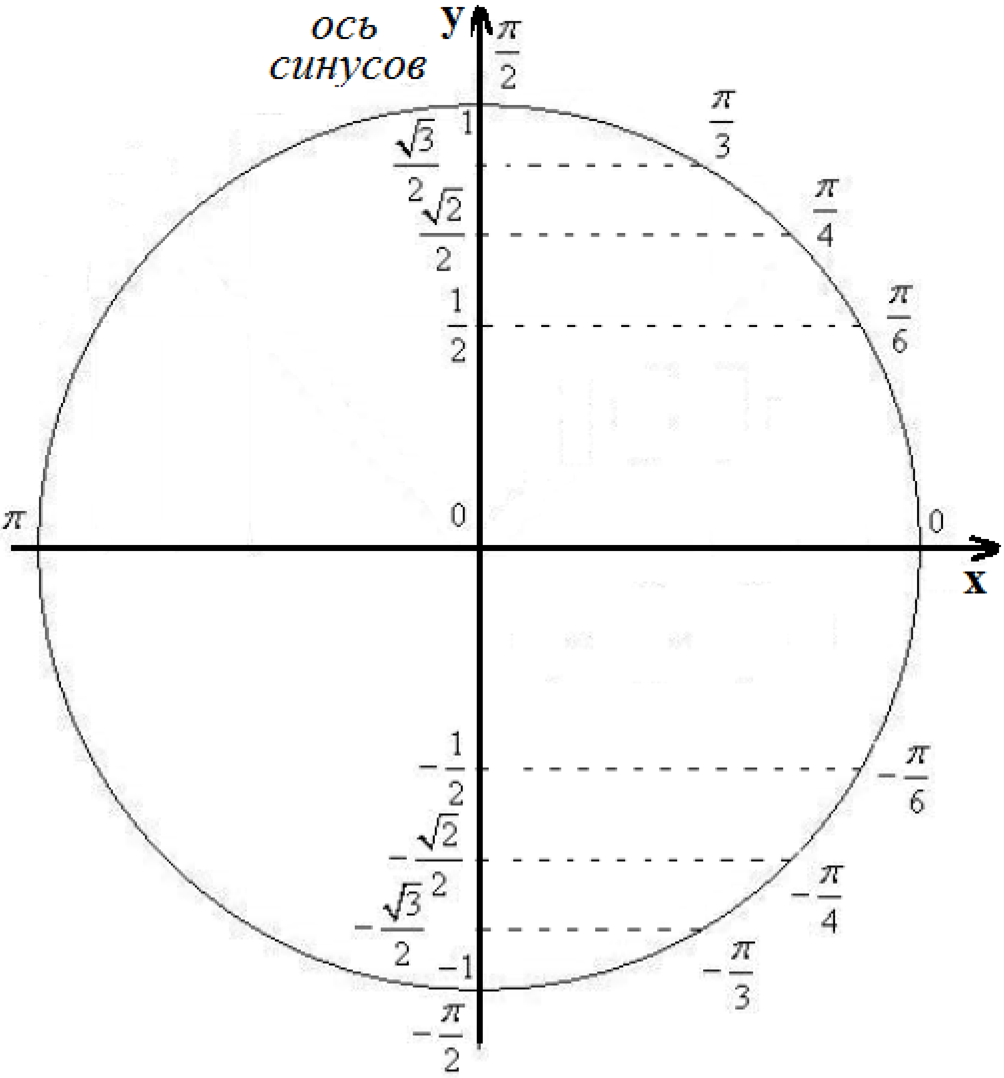


Рисунок 2.2 – Значения синуса.

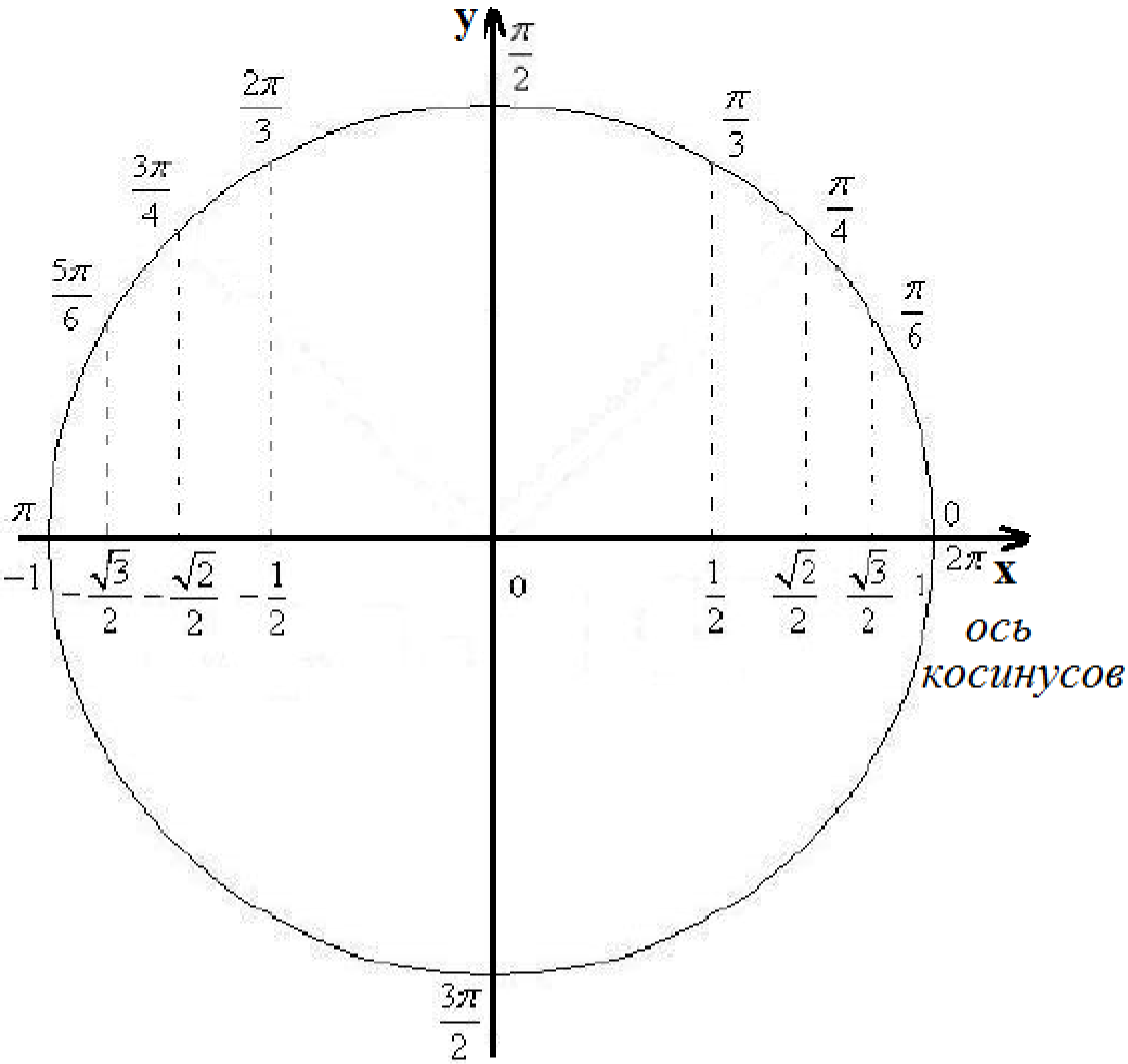


Рисунок 2.3 – Значения косинуса.

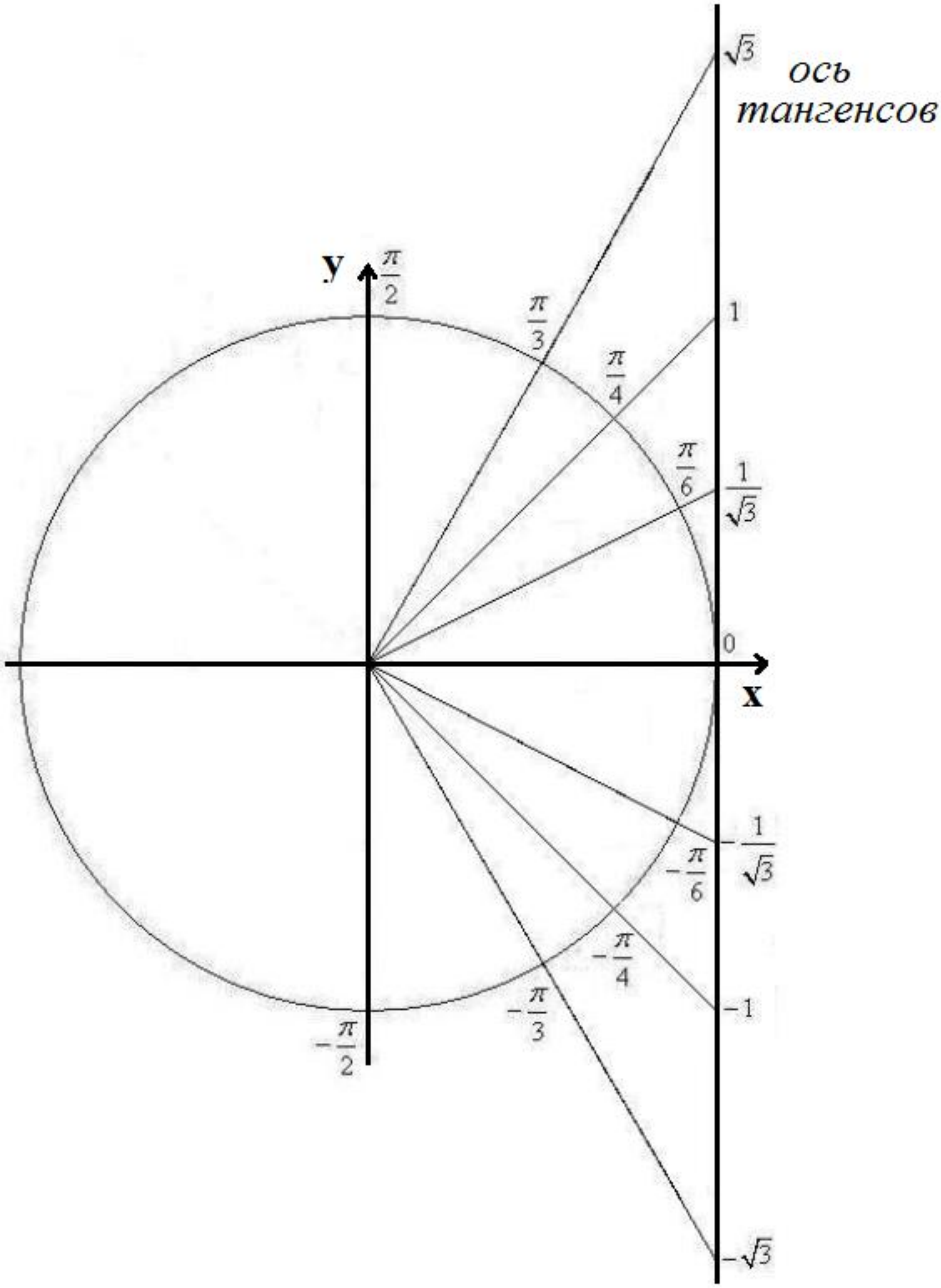


Рисунок 2.4 – Значения тангенса.

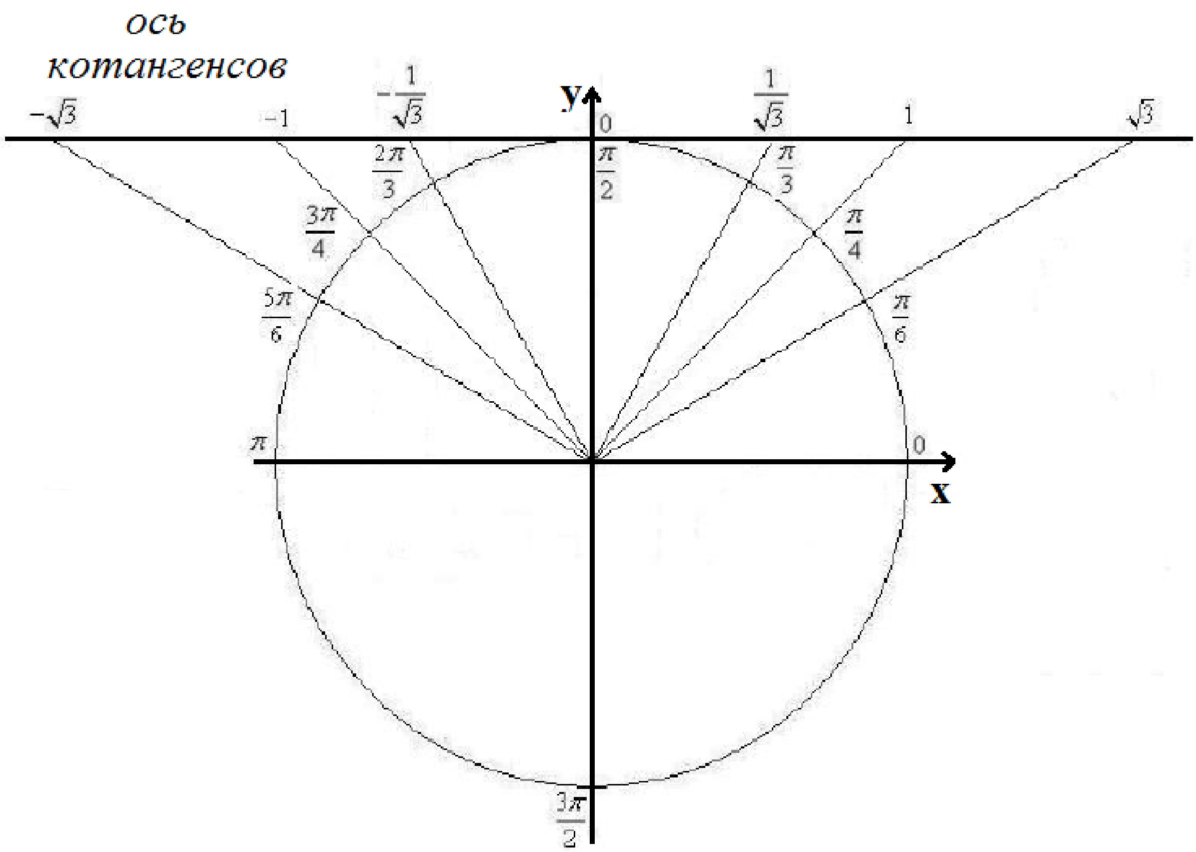


Рисунок 2.5 – Значения котангенса.

Функция	Аргумент t																
	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\,t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Рисунок 2.6 – Таблица тригонометрических значений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Формулы приведения

1. *Формулы приведения с опорной точкой* $\pi/2$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

2. *Формулы приведения с опорной точкой* π:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

3. *Формулы приведения с опорной точкой* $3\pi/2$:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha;$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

4. *Формулы приведения с опорной точкой* 2π:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Формулы тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы тангенса половинного угла

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Универсальная подстановка

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$
$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Сумма и произведение тригонометрических функций

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta};$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta);$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta);$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Решение тригонометрических уравнений

План:

1. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным.
2. Тригонометрические уравнения, решаемые разложением их частей на множители.

1. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным.

Уравнение вида $a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + c = 0$, где $\varphi(x) -$ тригонометрическая функция, называют уравнением, сводящимся к квадратному $(ax^2 + bx + c = 0)$ и решают методом замены переменной. Суть метода решения тригонометрических уравнений такого вида заключается в том, чтобы все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выразить через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента. Выраженную функцию принимаем за новую неизвестную и получаем алгебраическое уравнение. Далее находим корни и возвращаемся к прежней неизвестной, с которой решаем простейшие тригонометрические уравнения.

Пример 1. Решить уравнение:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Решение.

Введем новую переменную: $t = \sin x$. Тогда уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Находим корни полученного уравнения:

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Возвращаемся к прежней неизвестной:

$$\sin x = 2 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

1) $\sin x = 2$ –это уравнение не имеет корней, так как $\sin x < 2$ при любом значении x;

2) $\sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0.$$

Решение.

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ выразим $\sin^2 x$: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда уравнение можно переписать в виде:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0.$$

Путем элементарных преобразований получим:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную: $t = \cos x$. Тогда уравнение примет вид:

$$2t^2 - t - 1 = 0.$$

Находим корни полученного уравнения:

$$t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Возвращаемся к прежней неизвестной:

$$\cos x = 1 \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi n, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

2. Тригонометрические уравнения, решаемые разложением их частей на множители.

Тригонометрические уравнения вида

$\sin mx \pm \sin nx \pm \sin px \pm \sin kx = 0,$

$\cos mx \pm \cos nx \pm \cos px \pm \cos kx = 0,$

$\sin mx \pm \sin nx \pm \sin px = 0,$

$\cos mx \pm \cos nx \pm \cos px = 0,$

$\sin mx \pm \sin nx \pm \cos px \pm \cos kx = 0,$ где $m, n, p, k \in R$

решаются методом группировки и разложения на множители. Суть этого метода заключается в том, чтобы путем группировки слагаемых уравнение $f(x) = 0$ привести к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$. Тогда либо $f_1(x) = 0$, либо $f_2(x) = 0$. В таких случаях говорят, что задача сводится к решению совокупности уравнений: $f_1(x) = 0;\ f_2(x) = 0$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$$

Решение.

Произведение равно нулю тогда, когда один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл, поэтому

$$\sin x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{или} \quad \cos x + \frac{2}{5} = 0.$$

Следовательно, задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим:

1) $\sin x = \frac{1}{3}, \qquad x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, \qquad n \epsilon Z.$

2) $\cos x = -\frac{2}{5}, \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример 4. Решить уравнение:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 5x - \cos 5x = 0.$$

Решение.

Вынесем за скобки $\cos 5x$:

$$\cos 5x\left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда, когда один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл, поэтому

$$\cos 5x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Следовательно, задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\cos 5x = 0; \quad \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из этих уравнений находим:

1) $\cos 5x = 0, \qquad 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, \qquad n \in Z$

2) $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x}{2} = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad \frac{x}{2} = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{6} + \pi n,$

$x = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, x = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Замечание!

Переход от уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ к совокупности уравнений $f_1(x) = 0; \;\; f_2(x) = 0$ не всегда безопасен. Так, например, рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x\,(\sin x - 1) = 0$.

Произведение равно нулю тогда, когда один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл, поэтому

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 1 = 0.$$

Следовательно, задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad \sin x = 1.$$

Из этих уравнений находим:

1) $\operatorname{tg} x = 0, x = \pi n, \quad n \in Z.$

2) $\sin x - 1 = 0, \qquad \sin x = 1, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

Однако обе серии решений в ответ включать нельзя, так как при значениях $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла, т.е. данное значение не принадлежит ОДЗ, это посторонние корни.

Пример 5. Решить уравнение:

$$\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$$

Решение.

Сгруппируем синусы по два так, чтобы при разложении на множители в каждой группе появились одинаковые множителю:

$$(\sin 2x + \sin 3x) + (\sin 4x + \sin 5x) = 0.$$

Применим к скобкам формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\left(2\sin\left(\frac{2x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-3x}{2}\right)\right) + \left(2\sin\left(\frac{4x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-5x}{2}\right)\right) = 0.$$

Путем элементарных преобразований, учитывая четность косинуса $\cos(-x) = \cos x$, получим:

$$\left(2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{-x}{2}\right)\right) + \left(2\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\cos\left(\frac{-x}{2}\right)\right) = 0.$$

$$\left(2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) + \left(2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Вынесем общий множитель $2\cos\frac{x}{2}$ за скобку:

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{9x}{2}\right) = 0.$$

Вновь для скобки применим формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$2\cos\frac{x}{2}\,2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{9x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{9x}{2}}{2}\right) = 0,$$

$$4\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\frac{14x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{-\frac{4x}{2}}{2}\right) = 0,$$

$$4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}\cos\left(\frac{-2x}{2}\right) = 0,$$

$$4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}\cos(-x) = 0,$$

$$4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}\cos x = 0,$$

Произведение равно нулю тогда, когда один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл, поэтому уравнение сводится к решению совокупности уравнений:

$$4\cos\frac{x}{2} = 0, \qquad \sin\frac{7x}{2} = 0, \qquad \cos x = 0.$$

Из этих уравнений находим:

1) $4\cos\frac{x}{2} = 0, \quad \cos\frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$

2) $\sin\frac{7x}{2} = 0, \quad \frac{7x}{2} = \pi k, \quad 7x = 2\pi k, \quad x = \frac{2\pi k}{7}, \quad k\epsilon Z.$

3) $\cos x = 0, \ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in Z.$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, \ x = \frac{2\pi k}{7}, \ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \ n, k, m\epsilon Z.$

Встречаются и такие уравнения, в которых прежде чем преобразовывать сумму тригонометрических функций в произведение, необходимо сперва преобразовать произведение в сумму. В таких случаях нам понадобятся формулы произведений тригонометрических функций:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta);$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta);$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$$

Пример 5. Решить уравнение:

$$\sin 7x\cos 3x = \sin 8x\cos 2x.$$

Решение.

Уравнение в таком виде не получается разложить на множители, поэтому преобразуем в начале произведения в сумму:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

$$\frac{1}{2}(\sin(7x+3x)+\sin(7x-3x))=\frac{1}{2}(\sin(8x+2x)+\sin(8x-2x)),$$

$$\sin(10x)+\sin(4x)=\sin(10x)+\sin(6x),$$

$$\sin(10x)+\sin(4x)-\sin(10x)-\sin(6x)=0,$$

$$\sin(4x)-\sin(6x)=0.$$

Применим формулу разности синусов:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$2\sin\frac{4x-6x}{2}\cos\frac{4x+6x}{2}=0,$$

$$2\sin\left(\frac{-2x}{2}\right)\cos\frac{10x}{2}=0,$$

$$\sin(-x)\cos 5x=0.$$

Так как синус функция нечетная $\sin(-x)=-\sin x$, то:

$$-\mathrm{sinx}\cos 5x=0,$$

$$\mathrm{sinx}\cos 5x=0.$$

Произведение равно нулю тогда, когда один из сомножителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл, таким образом, уравнение сводится к решению совокупности уравнений:

$$\mathrm{sinx}=0,\qquad \cos 5x=0.$$

Из этих уравнений находим:

1)$\mathrm{sinx}=0,\qquad \mathrm{x}=\pi n,\quad n\epsilon Z.$

2) $\cos 5x=0,\ \ 5x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\qquad x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5},\qquad m\in Z.$

Ответ: $\mathrm{x}=\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5},\ \ \ n,m\epsilon Z.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Решение тригонометрических уравнений

Самостоятельная работа.

Вариант 1.

1. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$

2. $\cos 2x + \sin x = 0.$

3. $2\cos x + 3\sin 2x = 0.$

Вариант 2.

1. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$

2. $4\cos^2 2x + 16\sin 2x - 11 = 0.$

3. $3\sin 2x - \cos x = 0.$

Ответы:

Вариант 1.

1. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0.$

$t_1 = 2, \qquad t_2 = \frac{1}{2}.$

1) $\cos x = 2, \qquad x \in \emptyset.$

2)$\cos x = \frac{1}{2}, \qquad x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in Z.$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in Z.$

2. $\cos 2x + \sin x = 0.$

($\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x -$ формула двойного угла)

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0,$

$(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x + \sin x = 0,$

$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0,$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$2t^2 - t - 1 = 0.$

$t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}.$

1) $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

2) $\sin x = -\frac{1}{2}, \quad x = (-1)^{\mathrm{k}} \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,$

т.к. $\arcsin(-a) = \arcsin a$, то

$x = (-1)^{\mathrm{k}} \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad n, k \in Z.$

3. $2\cos x + 3\sin 2x = 0.$

($\sin 2x = 2\sin x \cos x -$ формула двойного угла)

$2\cos x + 3 \cdot 2\sin x \cos x = 0,$

$2\cos x\,(1 + 3\sin x) = 0.$

1) $2\cos x = 0, \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in Z.$

2) $1 + 3\sin x = 0, \quad \sin x = -\frac{1}{3}, \quad x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad k \epsilon Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \; n, k \in Z$.

Вариант 2.

1. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$2t^2 + 3t - 2 = 0.$

$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -2.$

1) $\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^{\mathrm{k}} \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \quad x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$

2) $\sin x = -2, \quad x \in \emptyset.$

Ответ: $x = (-1)^{\mathrm{k}} \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \qquad k \in Z.$

2. $2\cos x + 3\sin 2x = 0.$

$(\sin 2x = 2\sin x \cos x -$ формула двойного угла)

$2\cos x + 3 \cdot 2\sin x \cos x = 0,$

$2\cos x\,(1 + 3\sin x) = 0.$

1) $2\cos x = 0, \qquad \cos x = 0, \qquad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

2) $1 + 3\sin x = 0, \qquad \sin x = -\dfrac{1}{3}, \qquad x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \;\; x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi k, \quad n, k \in Z$.

3. $3\sin 2x - \cos x = 0.$

$(\sin 2x = 2\sin x \cos x -$ формула двойного угла)

$3 \cdot 2\sin x \cos x - \cos x = 0,$

$6\sin x \cos x - \cos x = 0,$

$\cos x\,(6\sin x - 1) = 0.$

1) $\cos x = 0, \qquad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

2) $6\sin x - 1 = 0, \qquad \sin x = \dfrac{1}{6}, \qquad x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\dfrac{1}{6} + \pi k, \qquad k \epsilon Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \;\; x = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin\dfrac{1}{6} + \pi k, \quad n, k \in Z$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Решение простейших тригонометрических неравенств

План:

1. Простейшие тригонометрические неравенства вида:
$\sin x > a,\ \sin x \geq a,\ \sin x < a,\ \sin x \leq a$.
2. Простейшие тригонометрические неравенства вида:
$\cos x > a,\ \cos x \geq a, \cos x < a,\ \cos x \leq a.$

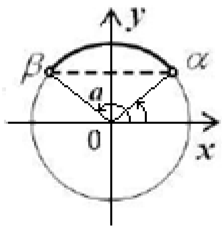
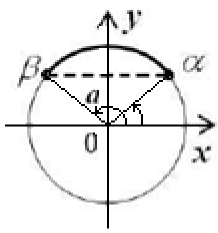
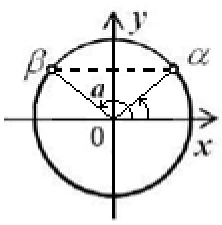
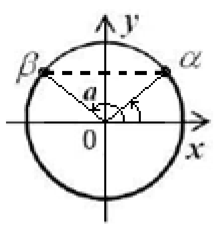
Неравенства, которые содержат переменную под знаком тригонометрической функции, называют тригонометрическими неравенствами. Как правило, существует два метода решений простейших тригонометрических неравенств: с помощью единичной окружности и графическое решение. Сегодня на уроке мы научимся решать простейшие тригонометрические неравенства при помощи единичной окружности.

Алгоритм решения простейшего тригонометрического неравенства.

1. На оси, соответствующей заданной тригонометрической функции, отметить данное числовое значение этой функции.
2. Провести через отмеченную точку пунктирную линию, пересекающую единичную окружность.
3. Выделить точки пересечения пунктирной линии и окружности с учетом строгого или нестрогого знака неравенства.
4. Выделить дугу окружности, на которой расположены решения неравенства.
5. Определить значения углов в начальной и конечной точках дуги окружности.
6. Записать решение неравенства с учетом периодичности заданной тригонометрической функции.

1. *Простейшие тригонометрические неравенства вида:*

$\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$.

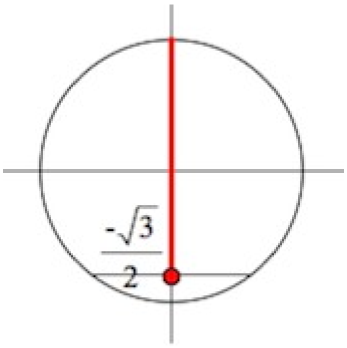
$\boldsymbol{\sin x > a}$ 	а) При $a \geq 1$ неравенство $\sin x > a$ решений не имеет: $x \in \emptyset$. б) При $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число: $x \in R$. в) При $-1 \leq a < 1$ имеем решение неравенства $\sin x > a$ в виде: $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.
$\boldsymbol{\sin x \geq a}$ 	а) $a > 1, x \in \emptyset$. б) $a \leq -1, x \in R$. в) $-1 < a < 1, \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$. г)$a = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.
$\boldsymbol{\sin x < a}$ 	а) $a > 1, x \in R$. б) $a \leq -1, x \in \emptyset$. в) $-1 < a \leq 1, -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.
$\boldsymbol{\sin x \leq a}$ 	а)$a \geq 1, x \in R$. б) $a < -1, x \in \emptyset$. в) $-1 < a < 1, -\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$. г)$a = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 1. Решить неравенство

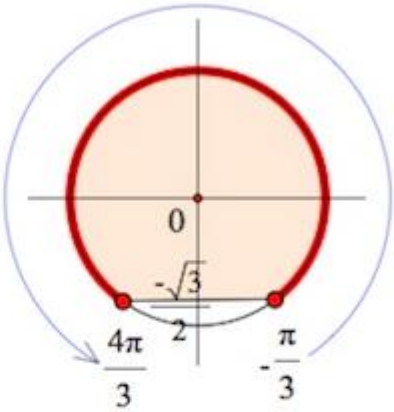
$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.

Начертим единичную окружность, отметим на оси синусов точку $-\sqrt{3}/_2$. Все значения $\sin x$, большие или равные $-\sqrt{3}/_2$, располагаются выше точки $-\sqrt{3}/_2$, включая саму точку.



Выделим все значения (дугу) тригонометрической окружности, синус которых будет больше либо равен $-\sqrt{3}/_2$.



Запишем числовые значения граничных точек. Для этого определим начальную точку движения. Ей соответствует точка $-\pi/_3$ $(\arcsin\left(-\sqrt{3}/_2\right) == -\arcsin \sqrt{3}/_2 = -\pi/_3)$. Двигаясь по выделенной дуге в положительном направлении (против часовой стрелки) определим конечную точку движения. Ей соответствует точка $4\,{}^{\pi}/_{3}$ $\left(\pi - \left(-\arcsin {}^{\sqrt{3}}/_{2}\right) = \pi - \left({}^{\pi}/_{3}\right) = {}^{4\pi}/_{3}\right)$.

Запишем общее решение неравенства, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \le x \le \pi - \left(-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

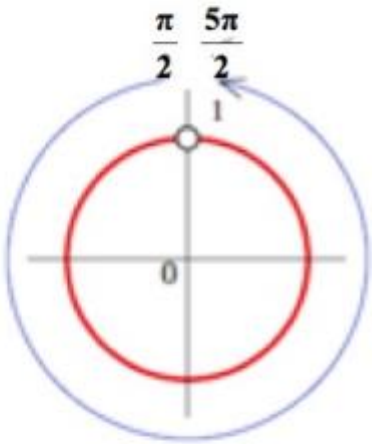
$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$

Пример 2. Решить неравенство

$$\sin x < 1.$$

Решение.



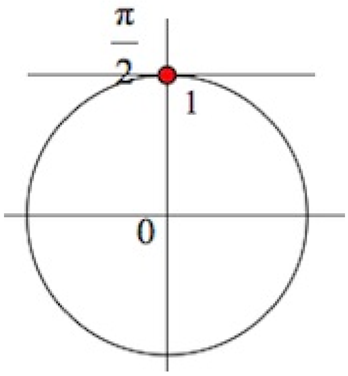
Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{2} + 2\pi n,$ или все x, кроме $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z.$

Пример 3. Решить неравенство

$$\sin x \ge 1.$$

Решение.

Неравенство $\sin x \geq 1$ равносильно уравнению $\sin x = 1$, т.к. область значений функции y=$\sin x$ – $[-1; 1]$.

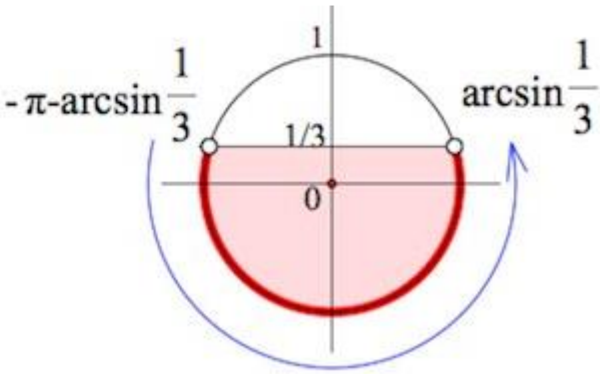


Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sin x < \frac{1}{3}.$$

Решение.



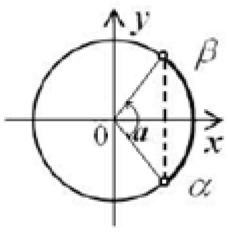
Ответ: $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z$.

2. *Простейшие тригонометрические неравенства вида:*

$\boldsymbol{\cos x} > a$, $\boldsymbol{\cos x \geq a}$, $\boldsymbol{\cos x} < a$, $\boldsymbol{\cos x \leq a}$ **.**

<table>
<tr>
<td>

$\boldsymbol{\cos x} > a$



</td>
<td>

а) При $a \geq 1$ неравенство $\cos x > a$ решений не имеет: $x \in \emptyset$.

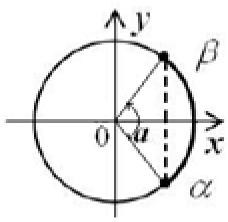
б) При $a < -1$ решением неравенства $\cos x > a$ является любое действительное число: $x \in R$.

в) При $-1 \leq a < 1$ имеем решение неравенства $\cos x > a$ в виде:

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\boldsymbol{\cos x \geq a}$



</td>
<td>

а) $a > 1$, $x \in \emptyset$.

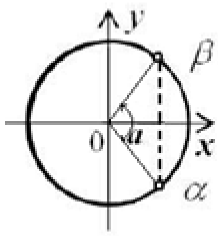
б) $a \leq -1$, $x \in R$.

в) $-1 < a < 1$, $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

г) $a = 1, x = 2\pi n, n \in Z$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\boldsymbol{\cos x} < a$



</td>
<td>

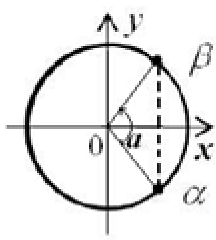
) $a > 1$, $x \in R$.

б) $a \leq -1$, $x \in \emptyset$.

в) $-1 < a \leq 1$, $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\boldsymbol{\cos x \leq a}$



</td>
<td>

а) $a \geq 1$, $x \in R$.

б) $a < -1$, $x \in \emptyset$.

в) $-1 < a < 1$, $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

г) $a = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

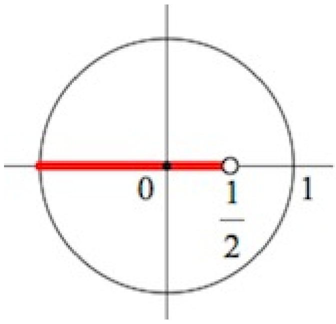
</td>
</tr>
</table>

Пример 5. Решить неравенство

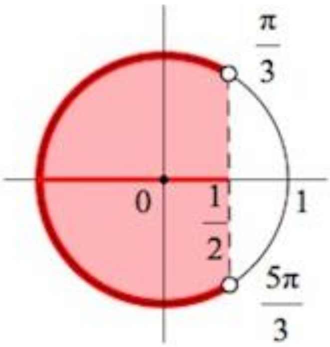
$$\cos x < \frac{1}{2}.$$

Решение.

Начертим единичную окружность, отметим на оси косинусов точку ${}^{1}/_{2}$, Все значения $\cos x$, меньшие ${}^{1}/_{2}$, располагаются левее этой точки.



Выделим все значения (дугу) тригонометрической окружности, косинус которых будет меньше ${}^{1}/_{2}$.



Запишем числовые значения граничных точек. Для этого определим начальную точку движения. Ей соответствует точка ${}^{\pi}/_{3}$ ($\arccos {}^{1}/_{2} = {}^{\pi}/_{3}$). Двигаясь по выделенной дуге в положительном направлении (против часовой стрелки) определим конечную точку движения. Ей соответствует точка $5\,{}^{\pi}/_{3}$ ($2\pi - \arccos {}^{1}/_{2} = {}^{5\pi}/_{3}$).

Тогда общее решение неравенства будет выглядеть так:

$$\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

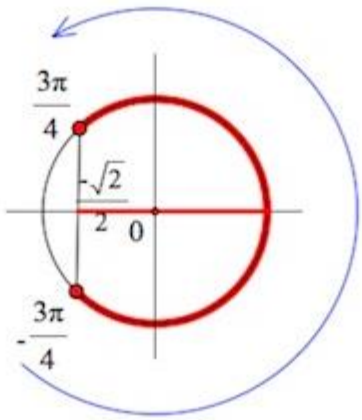
Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n, \qquad n\in Z.$

Пример 6. Решить неравенство

$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение.

На оси косинусов отмечаем точку $-\sqrt{2}/_{2}$. Все значения $\cos x$, большие или равные этой точки, располагаются правее, включая саму точку.



Ответ: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \qquad n\in Z.$