ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Кафедра математики

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НА ОЧЕНЬ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Научно-квалификационная работа
аспиранта очной формы обучения
направления подготовки: 01.06.01 — Математика и механика
образовательная программа: Математическая
логика, алгебра и теория чисел
4 курса
До Дык Тама

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук
Гриценко Сергей Александрович

БЕЛГОРОД — 2018

Оглавление

Обозначения

$c, c_1, c_2, \cdots$ — положительные постоянные;

$p, p_1, p_2 \cdots$ — простые числа;

s — комплексное число, $\sigma = \Re(s)$, $t = \Im(s)$;

$\tau(n)$ — число различных натуральных делителей числа n;

$\varphi(n)$ — функция Эйлера — число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n;

запись $d \mid n$ означает, что n кратно d;

запись $a \equiv b \pmod m$ означает, что $m \mid (a-b)$;

$\mu(n)$ — функция Мебиуса, которая равна единице при $n = 1$, равна нулю, если $p^2|n$ и равна $(-1)^k$, если n равно произведению k различных простых сомножителей;

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, которая равна $\ln p$ при $n = p^k$, равна нулю, если $n \neq p^k$;

$\pi(x)$— число простых чисел, не превосходящих x;

$\psi(x)$ — функция Чебышева — сумма значений функции $\Lambda(n)$ по n, не превосходящим x;

(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b;

$\|\xi\|$ — расстояние от действительного числа ξ до ближайшего целого числа;

$[\alpha]$ — целая часть числа α;

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера;

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана;

запись $A \ll B$ означает, что существует постоянная c такая, что $|A| \leqslant cB$;

запись $A \asymp B$ означает, что существуют постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 B \leqslant A \leqslant c_2 B$.

Введение

Актуальность темы

Распределение нулей дзета-функции Римана на критической прямой

Дзета-функция Римана определяется в полуплоскости $\Re(s) > 1$ суммой ряда Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

При вещественных s эта функция изучалась Л. Эйлером, которому принадлежит замечательное тождество, выражающее $\zeta(s)$ через эйлерово произведение

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \Re(s) > 1,$$

где в правой части стоит произведение по всем простым числам p. Тождество Эйлера указывает на связь, которая существует между функцией $\zeta(s)$ и простыми числами.

Бернхард Риман стал изучать дзета-функцию как функцию комплексного переменного. Им была доказана формула:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}\right)\omega(x)dx, \tag{1}$$

где

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Эта формула продолжает $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость. Правая часть (1) не изменится при замене s на $1-s$, т.е. справедливо следующее равенство:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{2}$$

Равенство (2) называют функциональным уравнением дзета-функции Римана.

Из (1) следует, что $\zeta(s)$ на всей комплексной плоскости является аналитической функцией с единственной особенностью в точке $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Хорошо известно, что $\zeta(s)$ не обращается в нуль при $\Re(s) > 1$ и при $\Re(s) < 0$ за исключением $s = -2, -4, \cdots$. Значения $s = -2, -4, \cdots$ называют тривиальными нулями дзета-функции Римана. Они являются полюсами функции $\Gamma(s/2)$.

Б. Риман доказал, что $\zeta(s)$ имеет бесконечно много нетривиальных нулей. Все эти нули лежат в полосе $0 < \Re(s) < 1$ и являются комплексными числами.

В теории дзета-функции полосу $0 < \Re(s) < 1$ называют критической. В 1859 г. Б. Риман высказал гипотезу о том, что все комплексные нули дзета-функции Римана лежат на прямой $\Re(s) = 1/2$. Прямая $\Re(s) = 1/2$ называется критической. В настоящее время гипотеза Римана о нулях $\zeta(s)$ не доказана и не опровергнута.

Нули дзета-функции Римана играют исключительную роль в теории простых чисел. Б. Риман в работе [1, с. 216] «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, выражается через сумму с комплексными нулями дзета-функции $\zeta(s)$. Для функции Чебышева справедлива формула

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im(\rho)| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x(\ln x)^2}{T}\right),$$

где $2 \leqslant T \leqslant x$, и ρ — нули дзета-функции Римана в критической полосе. В предположении, что справедлива гипотеза Римана, можно получить асимптотическую формулу

$$\psi(x) = x + O\left(\sqrt{x}(\ln x)^2\right).$$

Проблема распределения нулей дзета-функции Римана, в особенности гипотеза Римана, является одной из труднейших и интересных проблем аналитической теории чисел. На протяжении полутора столетий получено большое количество результатов, посвященных этой проблеме.

В 1914 г. Г. Харди [2] доказал бесконечность множества нулей дзета-функции Римана на критической прямой. Позднее, в 1921 г. Г. Харди совместно с Дж. Литтлвудом [3] доказал, что для $a > 0,5$ существуют $T_0 = T_0(a)$ и $c = c(a) > 0$ такие, что при $T > T_0$ промежуток $(T, T + H)$, $H = T^a$ содержит не меньше, чем $c(a)H$ нулей функции $\zeta(0,5 + it)$.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей функции $\zeta(0,5 + it)$ таких, что $0 < t \leqslant T$.

В сороковых годах XX века А. Сельберг [4], усовершенствовав рассуждения Г. Харди и Дж. Литтлвуда, получил правильную по порядку оценку снизу для числа нулей дзета-функции Римана на промежутках критической прямой. С помощью так называемой идеи «успокаивающего множителя» он доказал следующую теорему:

Теорема A. Если $H \geq T^a$, где $a > 1/2$, то существуют $c = c(a) > 0$ и $T_0 = T_0(a)$ такие, что при $T > T_0$ справедливо неравенство

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geqslant c(a)H(\ln T). \tag{3}$$

Из формулы Римана-Мангольдта (см. [5, с. 44]):

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T) \tag{4}$$

для числа $N(T)$ нулей дзета-функции Римана в прямоугольнике $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$, $0 \leqslant \Im(s) \leqslant T$ и теоремы А следует, что положительная доля нулей функции $\zeta(s)$ лежит на прямой $\Re(s) = 1/2$. А. Сельберг высказал гипотезу о том, что параметр a в его теореме можно взять меньшим, чем $1/2$.

Сельберговское усовершенствование подхода Харди и Литтлвуда состоит в том, что функция $\zeta(s)$ успокаивается с помощью многочлена Дирихле. Для построения этого многочлена А. Сельберг существенно воспользовался наличием у $\zeta(s)$ эйлерового произведения

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \Re(s) > 1,$$

где в правой части стоит произведение по всем простым числам p. Метод Сельберга-Харди-Литтлвуда изучения нулей дзета-функции Римана применен во многих задачах о нулях рядов Дирихле, имеющих эйлеровое произведение.

Также стоить отметить роботу Н. Левинсона [6], в которой он получил сильный результат о доле нулей функции $\zeta(s)$ на критической прямой. Доказано, что $N_0(T) > 1/3N(T)$ для достаточно больших T. Потом Б. Корни [7] уточнил это неравенство, заменив константу $1/3$ в правой части на $2/5$.

В восьмидесятых годах XX века А. А. Карацуба выполнил ряд замечательных работ о нулях дзета-функции Римана [8–16]. В частности, в [8] он доказал методом тригонометрических сумм гипотезу А. Сельберга о числе нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой. Доказано, что утверждение теоремы А имеет место при $H = T^{a+\omega_1}$, где $a = 27/82$ и ω_1 — произвольное фиксированное число с условием $0 < \omega_1 < 0,001$. Обстоятельством, которое позволяет получить улучшение, являются нетривиальные оценки тригонометрических сумм специального вида $W_1(T)$ и $W_2(T)$ (см. лемма 16).

В 1984 г. А. А. Карацуба [9] получил оценку вида (3) для почти всех значений T из промежутка $[X, 2X]$ и $H = T^{\omega_2}$, ω_2 — произвольное положительное число. Другими словами, он решил задачу получения оценок сельберговского типа для почти всех очень коротких промежутков.

В 1992 г., применив свой новый подход, А. А. Карацуба [10] доказал, что при достаточном большом X и

$$\exp\left(\exp\left(2a_1\sqrt{\ln\ln X}\right)\right) \leqslant H \leqslant X^{1/3},$$

где a_1 — некоторая постоянная, почти все промежутки $(T, T+H)$, где $X \leqslant T \leqslant 2X$, содержат не меньше, чем

$$H\,(\ln H)\exp\left(-a_1\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}\right)$$

нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$.

Заметим, что при любом малом $\delta > 0$ нижний предел H существенно меньше X^{δ}. Для $H \geqslant \exp\left(\exp\left(2a_1\sqrt{\ln\ln X}\right)\right)$ имеет место неравенство

$$H(\ln H)\exp\left(-a_1\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}\right) > H\exp\left(a_1\sqrt{\ln\ln X}\right).$$

Это неравенство означает, что оценка А.А. Карацубы при малых H несколько слабее оценки А. Сельберга в теореме А, но точнее той, которая получена Харди-Литтлвудом в 1921 г.

В этом направлении Л. В. Киселева [17] получила результат подобного рода для почти всех значений T из промежутка $\left[X, X + X^{11/12+\omega_3}\right]$ и $H = X^{\omega_3}$, ω_3 — произвольное положительное число.

Распределение нулей дзета-функции Римана в окрестности критической прямой

В 1896 г. Валле-Пуссен доказал, что $\zeta(1+it)$ не обращается в нуль при действительных t. Отсюда следует асимптотический закон распределения простых чисел $\psi(x) \sim x$.

В 1899 г. Валле-Пуссен получил более точный результат о границе нулей дзета-функции Римана. Доказано, что существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что в области s-плоскости вида

$$\Re(s) \geqslant 1 - \frac{c}{(\ln|t| + 2)}$$

нет нулей дзета-функции $\zeta(s)$. Границу нулей $\zeta(s)$ уточняли многие математики. Приведем только результат И. М. Виноградова [18]: Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что в области s-плоскости вида

$$t \geqslant 10, \quad \Re(s) \geqslant 1 - \frac{c}{(\ln t)^{2/3}(\ln\ln t)^{1/3}},$$

дзета-функция Римана не имеет нулей.

Пусть $N(\sigma, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma < \Re s < 1$, $0 < \Im s \leqslant T$.

Если верна гипотеза Римана, то при $\sigma > 1/2$ функция $N(\sigma, T)$ тождественно равна нулю. Поскольку гипотеза Римана не доказана и не опровергнута, ряд выдающихся математиков занимался безусловными оценками сверху функции $N(\sigma, T)$ при $\sigma > 1/2$.

В 1924 г. Дж. Литтлвуд [19] на основе теоремы о количестве нулей аналитической функции в прямоугольнике доказал следующую теорему:

Теорема (Литтлвуд). При $1/2 < \sigma \leqslant 1$ равномерно по σ справедлива оценка

$$N(\sigma, T) = O\left(\frac{T}{\sigma - 0,5}\ln\frac{1}{\sigma - 0,5}\right).$$

Следствие (Литтлвуд). Если $\Phi(t)$ — положительная и стремящаяся к бесконечности вместе с t функция, то почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в области

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \Phi(t)\frac{\ln\ln t}{\ln t}.$$

В сороковых годах А. Сельберг [4, 20] доказал следующие теоремы:

Теорема D. Если $H \geq T^a$, где $a > 1/2$, то при $1/2 < \sigma \leqslant 1$ равномерно по σ справедлива оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right).$$

А. Сельберг также высказал гипотезу о том, что параметр a в теореме D можно взять меньшим, чем $1/2$.

Теорема (А. Сельберг). Если $T^a \leqslant H \leqslant T$, где a — фиксированное число, $0,5 < a \leqslant 1$, то равномерно по σ, $0,5 \leqslant \sigma \leqslant 1$, справедлива оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) = O\left(H\left(\ln T\right)\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right)^{-\frac{1}{2}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}\right).$$

Значение этой теоремы состоит в том, что «почти все» нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ лежат в очень узкой окрестности критической прямой.

Нетривиальная оценка тригонометрической суммы специального вида $W(T)$ (см. лемму 18) позволила в 1985 г. А.А. Карацубе [11] доказать гипотезу А. Сельберга. Доказана следующая теорема:

Теорема (А.А. Карацуба). Если $H \geqslant T^a$, где $a > 27/82$, то при $1/2 < \sigma \leqslant 1$ равномерно по σ справедлива оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right). \tag{5}$$

Позднее, в 1996 г. А.А. Карацуба [16] доказал плотностную теорему для случая короткого промежутка $(T, T+H)$ с $H < T^{1/2}$:

Теорема (А.А. Карацуба). Пусть $27/82 < a \leqslant 1$ — фиксированное число, $T > T_0(a) > 0$, $H = T^a$. При $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$ выполняется оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) = O\left(H\left(\ln T\right)\left(H^{-1}T^{27/82}\right)^{0,0001(2\sigma-1)}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от a.

Л.В. Киселева [21, 22] доказала, что при $0,5 < \sigma \leqslant 1$ и $H = T^{\omega_4}$, ω_4 — произвольное положительное число, неравенство (5) справедливо для почти всех значений T из промежутка $[X, X + X^{11/12+\omega_4}]$.

В 2003 г. М.А. Королёв [23] получил результат, являющийся аналогом плотностных теорем А. Сельберга и А.А. Карацубы для очень коротких промежутков $(T, T+H]$, который справедлив для «почти всех» значений T:

Теорема (М.А. Королёв). Пусть ω_5 — произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству $0 < \omega_5 < 0,01$, $c = c(\omega_5) > 0$ — постоянная, $X > X_0(\omega_5) > 0$, $H = X^{\omega_5}$, и пусть E — множество значений T из промежутка $(X, 2X)$, для которых при любом σ, $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, верна оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leqslant cHX^{-0,01\omega_5(2\sigma-1)} \ln X.$$

Тогда для меры этого множества справедлива асимптотическая формула

$$\mu(E) = X - O(X^{1-0,1\omega_5}).$$

Цель работы

Цель данной работы — получить оценки «сельберговского типа» (см. теоремы A и D) для числа нулей дзета-функции Римана на «почти всех» очень коротких промежутках критической прямой и её окрестности в случае, когда осреднение идёт по короткому отрезку.

Объект исследования

Объект исследования — дзета-функция Римана и её нули.

Предмет исследования

Предмет исследования — нули дзета-функции Римана на очень коротких промежутках критической прямой и её окрестности.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и заключаются в следующем:

1. Получена оценка снизу числа нулей функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих на очень коротких промежутках вида $[T, T+X^{\varepsilon}]$, для «почти всех» значений T из промежутка $[X, X+X^{7/8+\varepsilon}]$, $0 < \varepsilon < 0,01$ — произвольное малое число.

2. Получена оценка снизу числа нулей функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих на очень коротких промежутках вида $[T, T+H]$, $\exp\left(\exp\left(2a\sqrt{\ln\ln X}\right)\right) \leqslant H \leqslant X^{\varepsilon}$, для «почти всех» значений T из промежутка $[X, X+X^{7/8+\varepsilon}]$, где $0 < \varepsilon < 0,01$ — произвольное малое число и $a > 0$ — некоторая постоянная.

3. Получена оценка сверху числа нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольниках вида $0,5 < \sigma \leqslant \Re s < 1$, $T \leqslant \Im s \leqslant T+X^{\varepsilon}$, для «почти всех» значений T из промежутка $[X, X+X^{7/8+\varepsilon}]$, $0 < \varepsilon < 0,01$ — произвольное малое число.

Методы исследования

В диссертации используются методы А. А. Карацубы получения оценки «сельберговского типа» для числа нулей $\zeta(s)$ на «почти всех» коротких промежутках критической прямой и её окрестности, оценка классической суммы Клостермана, а также метод тригонометрических сумм.

Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях, посвященных распределению нулей дзета-функции Римана и $L-$функции Дирихле.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались

- на Международной Российско-Китайской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Приэльбрусье, пос. Эльбрус, Россия, 14–18 декабря 2015 г.
- на XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, г. Тула, Россия, 25–30 мая 2015 г.
- на XXIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», г. Москва, Россия, 11-15 апреля 2016 г.
- на Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 70-летию со дня рождения профессоров Г. И. Архипова и С. М. Воронина, г. Саратов, Россия, 12–15 сентября 2016 г.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ, в том числе 7 в изданиях по перечню ВАК. Список статей автора приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Список литературы содержит 28 наименований. Общий объем диссертации - 84 страницы машинописного текста.

Содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, дается краткий исторический обзор результатов, полученных ранее и связанных с тематикой диссертационной работы, формулируются основные результаты диссертации и дается краткое описание методов доказательства.

Первая глава диссертации содержит ряд вспомогательных лемм, известных в литературе, а также основную лемму 14, в которой оценивается кратная тригонометрическая сумма, переменные суммирования которой удовлетворяют определенным условиям связи. При оценке этой суммы используются метод тригонометрических сумм и классическая оценка известной тригонометрической суммы Клоостермана.

Вторая глава состоит их трех параграфов и содержит исследование распределения нулей дзета-функции Римана на критической прямой. В первом параграфе доказаны леммы 16 и 17, которые посвящены оценкам в среднем значений тригонометрических сумм специального вида $W_j(T)$ и $Q_j(T)$, $j = 1, 2$. Из этих лемм следуют оценки сверху сумм $W_j(T)$ и $Q_j(T)$, $j = 1, 2$, для «почти всех» значений T из промежутка $[X, X + X_1]$.

Основным результатом второй главы являются теоремы:

Теорема **1.** *Пусть* ε_1 *— произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \varepsilon_1 < 0,01$*. Пусть, далее,* $c_1 = c_1(\varepsilon_1) > 0$ *— некоторая постоянная,*

$$X \geqslant X_0(\varepsilon_1) > 0, \quad H = X^{\varepsilon_1}, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon_1}.$$

Через E_1 *обозначим множество тех* $T \in [X, X + X_1]$*, для которых интервал* $[T, T + H]$ *содержит меньше, чем* $c_1 H (\ln T)$ *нулей нечетного порядка функции* $\zeta(0,5+it)$*. Тогда для меры этого множества* $\mu(E_1)$ *справедлива оценка*

$$\mu(E_1) \ll X_1 H^{-0,4},$$

где постоянная в знаке $\ll$ *абсолютная.*

Теорема **2.** *Пусть* ε_2 *— произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \varepsilon_2 < 0,01$*,* a *— некоторая положительная постоянная. Пусть, далее,*

$$X \geqslant X_0(\varepsilon_2) > 0, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon_2}, \quad \exp\left(\exp 2a\sqrt{\ln\ln X}\right) \leqslant H \leqslant X^{\varepsilon_2}.$$

Через E_2 *обозначим множество тех значений* T *из промежутка* $[X, X + X_1]$*, для которых интервал* $[T, T + H]$ *содержит меньше, чем*

$$H\,(\ln H) \exp\left(-a\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}\right)$$

нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$. Тогда для меры этого множества $\mu(E_2)$ справедлива оценка

$$\mu(E_2) \ll X_1 H^{-0,4},$$

где постоянная в знаке $\ll$ абсолютная.

Доказательства теорем 1 и 2 составляют содержание параграфов 2 и 3 второй главы.

Опишем основные этапы доказательства теоремы 1.

Пусть $0 < h < h_1 < 1$ — некоторые числа, значения которых будут определены позднее. Для $T \in [X, X+X_1]$ определим множество E таких t из $[T, T+H]$, что выполняется неравенство

$$j_1(t) > j_2(t),$$

где

$$j_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \left| F(t+u) \right| du; \quad j_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} F(t+u) du \right|.$$

Здесь $F(t)$ — функция Харди-Сельберга (см. лемму 9). Заметим, что если $t \in E$, то в отрезке $(t-h_1, t+h_1)$ содержится по крайней мере один нуль нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$. Из определения множества E легко находим неравенство:

$$\sqrt{\mu(E) I_1} + \sqrt{H I_2} \geqslant I_3, \tag{6}$$

где $\mu(E)$ — мера множества E,

$$I_1 = \int_T^{T+H} (j_1(t))^2 \, dt, \; I_2 = \int_T^{T+H} (j_2(t))^2 \, dt, \; I_3 = \int_T^{T+H} j_1(t) dt.$$

Если справедливы следующие оценки

$$I_1 \ll h^2 H, \; I_3 \geqslant chH, \; I_2 \leqslant c' h^2 H, \tag{7}$$

где $c > 2\sqrt{c'}$, то из неравенства (6) следует оценку $\mu(E) \gg H$. Откуда при $h_1 \asymp (\ln X)^{-1}$ следует неравенство

$$N_0(T+H) - N_0(T) \gg H \ln T.$$

Можно доказать для всех $T \in [X, X+X_1]$ за исключением подмножества меры $O\left(X_1 H^{-0,4}\right)$ имеет место неравенство

$$I_3 \geqslant chH, \; c > 0.$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются почти одинаково. Рассмотрим, на пример, интеграл I_1. Пользуясь приближенным функциональным уравнением функции Харди-Сельберга (см. лемма 9), получим

$$I_1 \ll h^2 \int_T^{T+H} \left| \sum_{\lambda \leqslant \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt + O\left(h^2 H L^{-10}\right);$$

$$I_1 \ll h^2 H \left(\Sigma'(T) + W'(T)\right) + O\left(h^2 H L^{-10}\right),$$

где

$$\Sigma'(T) = \sum_{\lambda \leqslant \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda}$$

сумма диагональных слагаемых, а

$$W'(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right)$$

сумма не диагональных слагаемых. Сумма $\Sigma'(T)$ оценена в лемме 10 величиной $O(1)$. Можно доказать, что

$$W'(T) = O\left(H^{-0,2}\right)$$

для всех $T \in [X, X + X_1]$ за исключением подмножества меры $O\left(X_1 H^{-0,4}\right)$.

Таким образом, оценки (7) справедливы для всех $T \in [X, X + X_1]$ за исключением подмножества меры $O\left(X_1 H^{-0,4}\right)$. Откуда следует утверждение теоремы 1.

Вторая задача, решаемая в третьем параграфе, родственна первой. Особенность второй задачи состоит в том, что при любом $\delta > 0$ нижний предел $H = \exp\left(\exp 2a\sqrt{\ln\ln X}\right)$ существенно меньше X^δ. В этом случае не удается получить оценку для суммы диагональных слагаемых вида $\Sigma'(T) = O(1)$. Оценка для числа нулей функции $\zeta(0,5 + it)$ в интервале $[T, T + H]$ немного слабее той, которая получена в случае $H = X^\delta$. При её доказательстве применяется подход А. А. Карацубы (см. [10]).

Третья глава диссертации посвящена исследованию количества нулей $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой и состоит из двух параграфов. В первом параграфе доказаны леммы 18 и 19, которые посвящены оценкам в среднем значений тригонометрических сумм специального вида $W(T)$ и $Q(T)$. Из этих лемм следуют оценки сверху сумм $W(T)$ и $Q(T)$ для «почти всех» значений T из промежутка $[X, X + X_1]$.

Основным результатом второй главы являются теоремы:

Теорема **3.** *Пусть* ε_3 *— произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \varepsilon_3 < 0,01$. *Пусть, далее,* $c_3 = c_3(\varepsilon_3) > 0$ *— некоторая постоянная,*

$$X > X_0(\varepsilon_3) > 0, \quad H = X^{\varepsilon_3}, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon_3}.$$

При $1/2 < \sigma < 1$ *обозначим через* E_3 *множество тех* T *из промежутка* $[X, X + X_1]$, *для которых неравенство*

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T) \leqslant c_3 \frac{H}{\sigma - 0,5}$$

не выполняется. Тогда для меры этого множества $\mu(E_3)$ *справедлива оценка:*

$$\mu(E_3) \ll X_1 H^{-0,4},$$

где постоянная в знаке $\ll$ *абсолютная.*

Доказательство теоремы 3 составляет содержание параграфа 2 третьей главы. Оно проводится по схеме работы А. А. Карацубы [11], при этом существенно используются оценки сумм $W(T)$ и $Q(T)$ для «почти всех» значений T из промежутка $[X, X + X_1]$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. А. Гриценко за постановку задачи и полезные обсуждения.

1 Глава 1. Вспомогательные утверждения

1.1 Вспомогательные леммы

В этом параграфе формулируются известные в литературе утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма **1.** *Пусть q — целое положительное; u и v — целые числа. Имеет место оценка*

$$\sum_{x \mod q} \exp\left(\frac{2\pi i\,(ux+v\bar{x})}{q}\right) \ll q^{\frac{1}{2}+\varkappa} \min\left\{\sqrt{(u,q)}, \sqrt{(v,q)}\right\},$$

где $\bar{x}$ означает, что $\bar{x}x \equiv 1 \pmod q$; $\varkappa$ — произвольное положительное число; постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $\varkappa$.

Доказательство см., например, в [24], с. 50.

Лемма **2.** *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — действительные функции, $G(x)/F'(x)$ монотонная функция и $F'(x)/G(x) \geqslant m > 0$ (или $F'(x)/G(x) \leqslant -m < 0$) на всем интервале (a,b). Тогда*

$$\left|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx\right| \leqslant \frac{4}{m}.$$

Доказательство см., например, в [25], с. 73.

Лемма **3.** *Пусть $F(x)$ — действительная, дважды дифференцируемая функция и пусть $F''(x) \geqslant r > 0$ (или $F''(x) \leqslant -r < 0$) на интервале (a,b), пусть $G(x)/F'(x)$ монотонна, а $|G(x)| \leqslant M$. Тогда*

$$\left|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx\right| \leqslant \frac{8M}{\sqrt{r}}.$$

Доказательство см., например, в [25], с. 73.

Лемма **4.** *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a,b]$ следующим условиям:*
1) $f''(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны;
2) $|f'(x)| \leqslant \delta < 1$, $0 < f''(x) \ll 1$;
3) существуют числа $0 < H$, $0 < b-a \leqslant U$ такие, что $\varphi(x) \ll H$, $\varphi'(x) \ll HU^{-1}$.

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i f(x)}dx + O(H),$$

причем постоянная в знаке O зависит только от δ.

Доказательство см. в [26], с. 73.

Лемма **5.** *Пусть $F(x)$ и $\varphi(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:*

1) существуют числа $H > 0$, $1 < A \ll U$, такие, что

$$A^{-1} \ll F''(u) \ll A^{-1}, F'''(u) \ll (AU)^{-1},$$

$$\varphi(u) \ll H, \varphi'(u) \ll HU^{-1}, \varphi''(u) \ll HU^{-2};$$

2) при некотором u_0, $a \leqslant u_0 \leqslant b$, $F'(u_0) = 0$;

3) функция

$$G = \frac{\varphi(u+u_0)}{F'(u+u_0)} - \frac{\varphi(u_0)}{\sqrt{2\left(F(u+u_0) - F(u_0)\right)F''(u_0)}}$$

имеет конечное число участков монотонности.

Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\int_a^b \varphi(u) e^{2\pi i F(u)} du = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(u_0) e^{2\pi i F(u_0)}}{\sqrt{F''(u_0)}} + O\left(H\right) +$$

$$+ O\left(H \min\left(\left|F'(a)\right|^{-1}, \sqrt{A}\right)\right) + O\left(H \min\left(\left|F'(b)\right|^{-1}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Доказательство см., например, в [27, с. 23].

Лемма **6.** *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},\ (a, q) = 1,\ q \geqslant 1,\ |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда при любом β, $U > 0$, $P \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \|\alpha x + \beta\|^{-1}\right) \leqslant 6(Pq^{-1} + 1)(U + q\ln q).$$

Доказательство см., например, в [27, с. 94].

Лемма **7.** *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, c_n — произвольные комплексные числа,*

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{a < n \leqslant x} c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a < n \leqslant b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathbb{C}(x) f'(x) dx + \mathbb{C}(b) f(b).$$

Доказательство см., например, в [27, с. 29].

Лемма **8.** *Пусть $f(s)$ — регулярная функция в полосе $a \leqslant \Re s \leqslant b$, $s = \sigma + it$. Пусть $|f(s)| \longrightarrow +\infty$ равномерно по $\sigma \in [a, b]$, и пусть при $\lambda > 0$*

$$J(\sigma; \lambda) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma + it)|^{1/\lambda} \, dt \right)^{\lambda}.$$

Тогда при произвольных положительных числах λ, μ справедливо неравенство

$$J(\sigma; \lambda p + \mu q) \leqslant J^p(a; \lambda) J^q(b; \mu),$$

где

$$p = \frac{b - \sigma}{b - a}, \quad q = \frac{\sigma - a}{b - a}, \quad a \leqslant \sigma \leqslant b.$$

Доказательство см. в [28].

Введем теперь обозначения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

Y — некоторый параметр, значение которого будем определять в конкретном случае;

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \cdots$ — рациональные числа, знаменатель которых не превосходит Y;

действительные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^2}, \qquad \Re s > 1,$$

причем $\alpha(1) = 1$, $|\alpha(\nu)| \leqslant 1, \nu = 1, 2, \cdots$;

числа $\beta(\nu)$ и $a(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu) \left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln Y}\right), \text{если } 1 \leqslant \nu < Y, \\ 0, \text{если } \nu \geqslant Y, \end{cases}$$

$$a(\lambda) = \sum_{n\nu_1 = \lambda\nu_2} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2}; \tag{8}$$

функция $F(t)$ задается равенством

$$F(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(0,5 + it\right) \left|\varphi\left(0,5 + it\right)\right|^2,$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \frac{\pi^{-it/2} \Gamma\left(1/4 + it/2\right)}{\left|\Gamma\left(1/4 + it/2\right)\right|}, \; \varphi(s) = \sum_{\nu \leqslant Y} \frac{\beta(\nu)}{\nu^s}.$$

Для функции $F(t)$ справедливо следующее приближенное уравнение.

Лемма **9.** *При* $T \leqslant t \leqslant T+H$, $H \leqslant T^{1/3}$, $P = \sqrt{T/2\pi}$, $Y \leqslant H^{0,01}$ *имеет место равенство*

$$F(t) = F_1(t) + \overline{F_1(t)} + O\left(H^2T^{-0,75}Y\ln^3 T\right),$$

где

$$F_1(t) = e^{i\theta_1(t)}\sum_{\lambda \leqslant P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it},\ \theta_1(t) = t\left(\ln P\right) - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

Доказательство см., например, в [15], с. 28-30.

Лемма **10.** *Пусть* c *— постоянное число,* $0 < c < 1$. *Справедливы оценки*

$$\sum_{\lambda \leqslant P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} = O\left(\frac{\ln P}{\ln Y}\right),$$

$$\sum_{\lambda \leqslant P^{1-c}}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} = O\left(\frac{\ln P}{\ln Y}\right),$$

$$\sum_{P^{1-c}<\lambda \leqslant P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} = O\left(\frac{c\ln P}{\ln Y}\right).$$

Доказательство см., например, в [8].

Лемма **11.** *Пусть* ε *— произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \varepsilon < 0,01$, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $X_1 = X^{7/8+\varepsilon}$, $H = X^{\varepsilon}$, $Y = H^{0,01}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int_X^{X+X_1}\left|\int_{1/2}^{2}\zeta(\sigma+it)\left|\varphi(\sigma+it)\right|^2 d\sigma\right|^2 dt \ll X_1Y^2L^3.$$

Доказательство см. в [17, с. 494].

Лемма **12.** *Пусть* $t \geqslant 2\pi$, *положительные числа* x *и* y *удовлетворяют условиям* $x \geqslant h > 0$, $y \geqslant h > 0$, $2\pi xy = t$. *Тогда при* $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ *справедливо следующее равенство:*

$$\zeta(s) = \zeta(\sigma+it) = \sum_{n \leqslant y}\frac{1}{n^s} + \exp(-2\pi i\theta(t))\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma}\sum_{n \leqslant x}\frac{1}{n^{1-s}} +$$

$$+O\left(t^{1/2-\sigma}x^{-1+\sigma}\right) + O\left(y^{-\sigma}\ln t\right),$$

где

$$\theta(t) = \frac{t}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{8}$$

и постоянные в знаке O *зависят только от* h *и* σ_0.

Доказательство см. в [26, с. 83].

Лемма **13.** *Пусть при натуральных ν и m числа $\delta(\nu)$ и $a(m)$ определяются следующим равенством*

$$\delta(\nu) = \sum_{r\nu<Y} \frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)} \left(\sum_{r<Y} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^{-1},$$

$$a(m) = \sum_{\substack{n\nu=m \\ n\leqslant P,\nu<Y}} \frac{\sqrt{\nu}\delta(\nu)}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Справедлива следующая оценка

$$\Sigma = \sum_{m<PY} a^2(m) = O(1).$$

Доказательство см. в [26, с. 149].

1.2 Основные леммы

В этом параграфе будут доказаны леммы об оценках тригонометрических интегралов специального вида. При оценке этих интегралов используются методом тригонометрических сумм и классической оценкой известной суммы Клоостермана.

В этом параграфе будем употреблять следующие обозначения:
ε — произвольно число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 0,01$, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $X_1 = X^{7/8+\varepsilon}$, $\exp\left(\exp 2a\sqrt{\ln\ln X}\right) \leqslant H \leqslant X^\varepsilon$, $a > 0$ — постоянная, $Y = H^{0,01}$, $P_0 = \sqrt{X/(2\pi)}$, $P_2 = \sqrt{(X+X_1)/(2\pi)}$, $M = [P_2Y]+1$, $L = \ln X$, $0 < \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < Y$ — целые числа, $\alpha = \nu_2/\nu_1$, $\beta = \nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3)$, $\gamma = \nu_4/\nu_3$.

Лемма **14.** *Пусть $N < N_1 \leqslant 2N \leqslant P_0\alpha$. Интегралы I, J определяются следующими равенствами*

$$J = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant P_2\alpha} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)} \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} \times \right.$$

$$\left. \times n_1^{-ig_1} n_2^{ig_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2 \right) \exp\left(\frac{2\pi i n_1 l}{M}\right) \right|^2 dT,$$

$$I = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\leqslant N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)} \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} \times \right.$$

$$\times n_1^{-ig_1} n_2^{ig_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right)\Bigg|^2 dT,$$

где $-M/2 < l \leqslant M/2$ — фиксированное целое число и g_1, g_2 — фиксированные числа такие, что $|g_1| < 1$, $|g_2| < 1$.

Тогда справедливы неравенства

$$J \ll \frac{X_1 Y^2 L^3}{H}, I \ll \frac{X_1 Y^4 L^7}{H},$$

где постоянные в знаках $\ll$ абсолютные.

Доказательство. I) Оценим J. Воспользуемся следующей формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-t^2 - iat\right) dt = \sqrt{\pi}\exp\left(-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right). \tag{10}$$

Применяя (10), последовательно находим:

$$J \ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{T-X}{X_1}\right)^2} \Bigg| \sum_{P_0\alpha < n_1 \leqslant P_2\alpha} \sum_{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \times$$

$$\times \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} n_1^{-ig_1} n_2^{ig_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right) \exp\left(\frac{2\pi i n_1 l}{M}\right)\Bigg|^2 dT =$$

$$= X_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \Bigg| \sum_{P_0\alpha < n_1 \leqslant P_2\alpha} \sum_{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \times$$

$$\times \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{i(vX_1+X)} n_1^{-ig_1} n_2^{ig_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right) \exp\left(\frac{2\pi i n_1 l}{M}\right)\Bigg|^2 dv =$$

$$= X_1 \sum_{\substack{P_0\alpha < n_1 \leqslant P_2\alpha \\ P_0\alpha < n_3 \leqslant P_2\alpha}} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H}) \\ n_3\beta < n_4 \leqslant n_3\beta(1+\frac{L}{H})}} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4}} \left(\frac{n_2 n_3}{n_1 n_4}\right)^{iX} \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^{ig_1} \times$$

$$\times \left(\frac{n_2}{n_4}\right)^{ig_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_4}{n_3\beta}\right)\right)^2\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{2\pi i(n_1 - n_3)l}{M}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-v^2 + ivX_1\ln\left(\frac{n_2 n_3}{n_1 n_4}\right)\right) dv \ll$$

$$\ll X_1 \sum_{P_0\alpha < n_1, n_3 \leqslant P_2\alpha} \sum_{P_0\gamma < n_2, n_4 \leqslant P_2\gamma(1+\frac{L}{H})} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4}} \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2 n_3}{n_1 n_4}\right)\right)^2\right).$$

Если $|n_2n_3 - n_1n_4| > P_2^2\alpha\gamma\frac{L}{X_1}$, то

$$\left|\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right| \geqslant \frac{L}{2X_1},\ \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right)^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{L^2}{16}\right).$$

Отсюда следует, что часть последней кратной суммы, отвечающая таким слагаемым, есть величина $O(e^{-0,01L^2})$. Тем самым, получаем:

$$J \ll \frac{X_1}{P_0^2\alpha\gamma}\sum_{P_0\alpha<n_1,n_3\leqslant P_2\alpha}\ \sum_{\substack{P_0\gamma<n_2,n_4\leqslant P_2\gamma(1+\frac{L}{H})\\ |n_2n_3-n_1n_4|\leqslant P_2^2\alpha\gamma\frac{L}{X_1}}} 1 + O\left(e^{-0,01L^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X_1}{P_0^2\alpha\gamma}R + O\left(e^{-0,01L^2}\right),$$

где R — число возможных наборов (n_1, n_2, n_3, n_4), удовлетворяющих условиям:

$$P_0\alpha < n_1, n_3 \leqslant P_2\alpha,$$

$$P_0\gamma < n_2, n_4 \leqslant P_2\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right),$$

$$|n_2n_3 - n_1n_4| \leqslant P_2^2\alpha\gamma\frac{L}{X_1}.$$

Если зафиксируем числа n_1 и n_4, то число возможных пар (n_2, n_3) не превосходит величины R_1, где

$$R_1 = \sum_{-P_2^2\alpha\gamma L/X_1+n_1n_4\leqslant m\leqslant n_1n_4+P_2^2\alpha\gamma L/X_1} \tau(m) \ll \frac{P_2^2\alpha\gamma L^2}{X_1}.$$

Откуда получаем

$$R \ll (P_2 - P_0)\alpha\frac{P_2\gamma L}{H}\frac{P_2^2\alpha\gamma L^2}{X_1} \ll \frac{X\alpha^2\gamma^2L^3}{H}.$$

Следовательно,

$$J \ll \frac{X_1}{P_0^2\alpha^2\beta}\frac{X\alpha^2\gamma^2L^3}{H} = \frac{X_1\alpha\gamma L^3}{H} \leqslant \frac{X_1Y^2L^3}{H}.$$

II) Оценим теперь I. Как это было сделано для J имеем:

$$I \ll X_1\left|\sum_{N<n_1,n_3\leqslant N_1}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})\\ n_3\beta<n_4\leqslant n_3\beta(1+\frac{L}{H})}} \left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{i(X+g_2)} \times\right.$$

$$\times \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^{i(g_1-g_2)} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4)\Bigg|,$$

где

$$\eta(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_4}{n_3\beta}\right)\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right)^2\right).$$

Если $|n_2n_3 - n_1n_4| > N^2\beta L/X_1$, то

$$\left|\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right| \geqslant \frac{L}{2X_1},\ \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right)^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{L^2}{16}\right).$$

Отсюда следует, что часть последней кратной суммы, отвечающая таким слагаемым, есть величина $O(e^{-0{,}01L^2})$. Тем самым, получаем:

$$I \leqslant X_1\left(\Sigma + 2\,|W|\right) + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right), \tag{11}$$

где Σ — часть последней суммы, отвечающая таким слагаемым, у которых

$$n_2n_3 = n_1n_4,$$

а W — слагаемым, у которых

$$1 \leqslant n_2n_3 - n_1n_4 \leqslant N^2\beta L/X_1.$$

Оценим сумму Σ. Тривиально имеем:

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{N<n_1,n_3\leqslant N_1} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H}) \\ n_3\beta<n_4\leqslant n_3\beta(1+\frac{L}{H}) \\ n_1n_4=n_2n_3}} 1.$$

Пусть $d = (n_1, n_3)$. Тогда

$$n_1 = db, \quad n_3 = da, \quad (b,a) = 1.$$

Из условия

$$n_1n_4 = n_2n_3$$

следует, что

$$n_4 = ma \text{ и } n_2 = mb.$$

Откуда получаем

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \sum_{\substack{\frac{N}{d}<b,a\leqslant\frac{N_1}{d} \\ (b,a)=1}} \sum_{d\beta<m\leqslant d\beta(1+\frac{L}{H})} 1.$$

Воспользуемся тем, что $\beta = \nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3)$ и ν_j, $j = 1, 2, 3, 4$ — целые числа. Имеем

$$\sum_{d\beta < m \leqslant d\beta(1+\frac{L}{H})} 1 = \sum_{d\nu_1\nu_4 < m\nu_2\nu_3 \leqslant d\nu_1\nu_4(1+\frac{L}{H})} 1 \leqslant \frac{d\nu_1\nu_4 L}{H}.$$

Откуда следует

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \frac{N^2}{d^2} \frac{d\nu_1\nu_4 L}{H} \leqslant \frac{Y^2L^2}{H}. \tag{12}$$

Рассмотрим сумму W. Пусть

$$l = n_2n_3 - n_1n_4 \text{ и } d = (n_1, n_3).$$

Тогда

$$1 \leqslant l \leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}, \quad n_3 = da, \quad n_1 = db, \quad (a, b) = 1.$$

Следовательно

$$l = dl_1, \quad 1 \leqslant l_1 \leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}, \quad an_2 - bn_4 = l_1.$$

Последнее равенство равносильно тому, что

$$n_4 \equiv -l_1\bar{b} \pmod a \text{ и } n_2 = \frac{bn_4 + l_1}{a}.$$

Пользуясь формулой:

$$\frac{1}{a} \sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i x(n_4 + l_1\bar{b})}{a}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } n_4 \equiv -l_1\bar{b} \pmod a, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

преобразуем сумму W следующим образом:

$$W = \sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}} \frac{1}{d} \sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\substack{\frac{N}{d}<b,\, a\leqslant\frac{N_1}{d} \\ (b,\, a)=1}} \frac{1}{a} \sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}} \sum_{ad\beta<n_4\leqslant ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)-\frac{l_1}{b}}$$

$$\left(1 + \frac{l_1}{bn_4}\right)^{iX'} \left(\frac{a}{b}\right)^{i(g_1-g_2)} \exp\left(\frac{2\pi i x(n_4 + l_1\bar{b})}{a}\right) \eta_1(b, a, l_1, n_4), \tag{13}$$

где $X' = X + g_2$,

$$\eta_1(b, a, l_1, n_4) = \frac{e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{bn_4+l_1}{dab\beta}\right)\right)^2} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_4}{da\beta}\right)\right)^2} e^{-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{bn_4+l_1}{bn_4}\right)\right)^2}}{\sqrt{bn_4(bn_4 + l_1)}}.$$

В W суммирование по n_4 идет по промежутку

$$ad\beta < n_4 \leqslant ad\beta\left(1 + \frac{L}{H}\right) - \frac{l_1}{b}.$$

Добавить к W те слагаемые, у которых

$$ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)-\frac{l_1}{b}<n_4\leqslant ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right),$$

а потом отнять их. Приходим к неравенству:

$$|W|\leqslant|W'|+|W''|, \tag{14}$$

где W' — часть суммы W, отвечающая тем n_4, которые удовлетворяют условию

$$ad\beta<n_4\leqslant ad\beta(1+\frac{L}{H}),$$

а W'' — часть суммы W, отвечающая

$$ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)-\frac{l_1}{b}<n_4\leqslant ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right).$$

1) Рассмотрим сумму W''. Заметим, что

$$\frac{l_1}{b}\leqslant\frac{N\beta L}{X_1}\ll X^{-0{,}25}.$$

Поэтому в промежутке

$$ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)-\frac{l_1}{b}<n_4\leqslant ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right).$$

либо нет целого числа, либо содержится только одно целое число, которое равняется

$$n_4^*=\left[ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)\right].$$

Меняем порядок суммирование по n_4 и b. Приходим к неравенству:

$$|W''|\leqslant\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\frac{1}{d}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a}\sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}}\times$$

$$\times\left|\sum_{\substack{\frac{N}{d}<b\leqslant B\\(b,a)=1}}\left(1+\frac{l_1}{bn_4^*}\right)^{iX'}\left(\frac{a}{b}\right)^{i(g_1-g_2)}e^{\frac{2\pi ixl_1\bar{b}}{a}}\eta_1(b,a,l_1,n_4^*)\right|,$$

где

$$B=\min\left(\frac{N_1}{d};\frac{l_1}{ad\beta(1+L/H)-n_4^*}\right).$$

Чтобы выделить множители

$$\exp\left(\frac{2\pi ixl_1\bar{b}}{a}\right),$$

применим к сумме по b преобразование Абеля (см. лемму 7). Положим в этой лемме

$$c_b = \exp\left(\frac{2\pi i x l_1 \bar{b}}{a}\right);$$

$$f(u) = \left(1 + \frac{l_1}{u n_4^*}\right)^{iX'} \left(\frac{a}{u}\right)^{i(g_1 - g_2)} \eta_1(u, a, l_1, n_4^*).$$

Из определения функции $\eta_1(u, a, l_1, n_4^*)$ (см. формулу (13)) следуют неравенства:

$$f(u) \ll \frac{Y^2 d}{N^2}; f'(u) \ll \frac{XY^2 L d}{X_1 N^2 u}.$$

Отсюда найдем оценку:

$$W'' \ll \frac{XY^2 L}{X_1 N^2} \sum_{d \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1}} \sum_{l_1 \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d} < a \leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a} \sum_{-\frac{a}{2} \leqslant x < \frac{a}{2}} |U|, \tag{15}$$

где

$$U = \sum_{\substack{\frac{N}{d} < b \leqslant B_1 \\ (a,b)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i x l_1 \bar{b}}{a}\right),$$

$N/d < B_1 \leqslant B$ — некоторое фиксированное число. Если $x = 0$, то имеет место тривиальная оценка

$$U \leqslant B_1 - \frac{N}{d} \leqslant \frac{N}{d}.$$

Если $x \neq 0$, то в силу леммы 1 имеем

$$U \ll a^{0,5} X^{0,01\varepsilon} (x l_1, a) L.$$

Подставляя полученные оценки для U в (15), получим:

$$W'' \ll \frac{XY^2 L^2}{X_1 N^2} \sum_{d \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1}} \sum_{l_1 \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d} < a \leqslant \frac{N_1}{d}} \left(1 + \sum_{\substack{-\frac{a}{2} \leqslant x < \frac{a}{2} \\ x \neq 0}} \frac{X^{0,01\varepsilon} (x l_1, a)}{\sqrt{a}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{XY^2 L^2}{X_1 N^2} \sum_{d \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1}} \sum_{l_1 \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d} < a \leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{X^{0,01\varepsilon}}{\sqrt{a}} \sum_{\substack{-\frac{a}{2} \leqslant x < \frac{a}{2} \\ x \neq 0}} (x l_1, a) + X^{-0,2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X^{1+0,01\varepsilon} Y^2 L^2}{X_1 N^2} \sum_{d \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1}} \sum_{\frac{N}{d} < a \leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1 \leqslant |m| \leqslant \frac{N^2 a \beta L}{2 d X_1}} \tau(m) \, (m, a) + X^{-0,2} =$$

$$= \frac{X^{1+0,01\varepsilon} Y^2 L^2}{X_1 N^2} \sum_{d \leqslant \frac{N^2 \beta L}{X_1}} \sum_{\frac{N}{d} < a \leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1 \leqslant |m| \leqslant \frac{N^2 a \beta L}{2 d X_1}} \tau(m) \sum_{d_1 | (m,a)} \varphi(d_1) + X^{-0,2} =$$

$$= \frac{X^{1+0{,}01\varepsilon}Y^2L^2}{X_1N^2}\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\ \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{d_1|a}\varphi(d_1)\sum_{\substack{1\leqslant|m|\leqslant\frac{N^2a\beta L}{2dX_1}\\ d_1|m}}\tau(m)+X^{-0{,}2}\ll$$

$$\ll \frac{X^{1+0{,}01\varepsilon}Y^2L^2}{X_1N^2}\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\ \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{N^2aX^{0{,}01\varepsilon}\beta L}{2dX_1}\sum_{d_1|a}\frac{\varphi(d_1)}{d_1}+X^{-0{,}2}\ll$$

$$\ll \frac{X^{1+0{,}01\varepsilon}Y^2L^2}{X_1N^2}\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\ \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{N^2aX^{0{,}02\varepsilon}\beta L}{2dX_1}+X^{-0{,}2}\leqslant\frac{1}{H}. \qquad (16)$$

2) Рассмотрим сумму

$$W' = \sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\frac{1}{d}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1d}}\ \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a}\sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}}\ \sum_{\substack{\frac{N}{d}<b\leqslant\frac{N_1}{d}\\ (a,b)=1}}$$

$$\sum_{ad\beta<n_4\leqslant ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)} e^{iX'\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)}e^{\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar{b})}{a}}\left(\frac{a}{b}\right)^{i(g_1-g_2)}\eta_1(b,a,l_1,n_4).$$

При фиксированных числах d, a и l_1, положим

$$B=\frac{N}{d}; B_1=\frac{N_1}{d}; M=ad\beta; M_1=ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right);$$

$$\varphi(b,n_4,x)=e^{iX'\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)}e^{\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar{b})}{a}}; h(u,v)=\left(\frac{a}{u}\right)^{i(g_1-g_2)}\eta_1(u,a,l_1,v).$$

Пусть

$$F(u,v)=\sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}}\ \sum_{\substack{\frac{N}{d}<b\leqslant u\\ (a,b)=1}}\ \sum_{ad\beta<n_4\leqslant v}\varphi(b,n_4,x).$$

Из определения функции $\eta_1(u,a,l_1,v)$ (см. (13)) находим неравенства:

$$|h(u,v)|\leqslant\frac{1}{uv}; |h_u(u,v)|\ll\frac{L^2}{u^2v}; |h_v(u,v)|\ll\frac{HL}{uv^2}; |h_{uv}(u,v)|\ll\frac{HL^3}{u^2v^2}.$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$S=\sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}}\ \sum_{\substack{\frac{N}{d}<b\leqslant\frac{N_1}{d}\\ (a,b)=1}}\ \sum_{ad\beta<n_4\leqslant ad\beta\left(1+\frac{L}{H}\right)}\varphi(b,n_4,x)h(b,n_4).$$

Применим преобразования Абеля к сумме по b и n_4 в S. Получаем:

$$S=\int_B^{B_1}\int_M^{M_1}F(u,v)h_{uv}dudv-\int_B^{B_1}F(u,M_1)h_u(u,M_1)du-$$

$$-\int_{M}^{M_1} F(B_1,v)h_v(B_1,v)dv + F(B_1,M_1)h(B_1,M_1).$$

Переходя к неравенству, получим:

$$S \ll F(B_2,M_2)\frac{L^4 d}{N^2\beta},$$

где

$$F(B_2,M_2) = \max_{\substack{B<u\leqslant B_1\\ M<v\leqslant M_1}} |F(u,v)|\,.$$

Заметим, что числа B, B_2 зависят от d, а M, M_2 зависят от a, d. Для любых a и d, удовлетворяющих $a \asymp N/d$, выполняются условия:

$$B \asymp B_2 \asymp \frac{N}{d}; M \asymp M_2 \asymp N\beta; M_2 - M \ll \frac{N\beta L}{H}.$$

Поставляя полученную оценку в формулу, определяющую W', получим:

$$|W'| \ll \frac{L^4}{N^2\beta}K, \tag{17}$$

где

$$K = \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a}\times$$

$$\times\left|\sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}} \sum_{\substack{B<b\leqslant B_2\\ (a,b)=1}} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} e^{iX'\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)} e^{\frac{2\pi i x(n_4+l_1\bar{b})}{a}}\right|.$$

Разобьем сумму K на две суммы: K_1 — часть этой суммы, отвечающая слагаемым с условием $x\neq 0$, K_2 — остальным слагаемым.

2.1) Оценим сумму K_2. Пользуясь формулой

$$\sum_{d_1/(b,a)} \mu(d_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } (b,a)=1,\\ 0, & \text{если } (b,a)>1,\end{cases}$$

преобразуем сумму K_2 так:

$$K_2 = \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a}\left|\sum_{M<n_4\leqslant M_2} \sum_{B<b\leqslant B_2} \left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)^{iX'} \sum_{d_1|(a,b)} \mu(d)\right|.$$

Отсюда следует неравенство:

$$K_2 \leqslant \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{d_1\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{d_1} \sum_{\frac{N}{dd_1}<a_1\leqslant \frac{N_1}{dd_1}} \frac{1}{a_1}\times$$

$$\times \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \left| \sum_{\frac{B}{d_1}<b_1\leqslant\frac{B_2}{d_1}} \left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)^{iX'} \right|.$$

Разобьем последнюю сумму на две суммы $K_{2.1}$ и $K_{2.2}$, где в $K_{2.1}$ входят слагаемые, у которых $d_1 > \frac{X}{X_1}$, а в $K_{2.2}$ — слагаемые с $d_1 \leqslant \frac{X}{X_1}$. Оценивая тривиально сумму $K_{2.1}$, получаем:

$$|K_{2.1}| \ll \sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{X}{X_1}<d_1\leqslant\frac{N_1}{d}} \frac{1}{d_1}\times$$

$$\times \sum_{\frac{N}{dd_1}<a_1\leqslant\frac{N_1}{dd_1}} \frac{1}{a_1} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \sum_{\frac{B}{d_1}<b_1\leqslant\frac{B_2}{d_1}} 1 \ll \frac{N^2Y^2L^2}{H}.$$

Оценим сумму $K_{2.2}$. Пусть

$$K_{2.3} = \sum_{\frac{B}{d_1}<b_1\leqslant\frac{B_2}{d_1}} \exp\left(iX' \ln\left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)\right).$$

Применяя к сумме $K_{2.3}$ лемму 4 и полагая в ней

$$a=\frac{B}{d_1},\ b=\frac{B_2}{d_1},\ \varphi(z)=1,\ f(z)=\frac{X'}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1zn_4}\right),$$

$$|f'(z)| = \left|\frac{Xl_1}{2\pi z(d_1n_4z+l_1)}\right| \ll \frac{X^2N\beta L}{X_1^3} < X^{-0,1} < 1,$$

находим

$$K_{2.3} = \left|\int_{\frac{B}{d_1}}^{\frac{B_2}{d_1}} e^{2\pi i f(x)}dx\right| + O(1).$$

Для оценки $K_{2.3}$ воспользуемся леммой 2. Находим оценку:

$$\left|\int_{\frac{B}{d_1}}^{\frac{B_2}{d_1}} e^{2\pi i f(z)}dz\right| \ll \frac{N^3\beta}{Xl_1d^2d_1}.$$

Тем самым, получаем:

$$K_{2.3} \ll \frac{N^3\beta}{Xl_1d^2d_1} + 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству:

$$|K_{2.2}| \ll \sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{d_1\leqslant\frac{X}{X_1}} \frac{1}{d_1} \sum_{\frac{N}{dd_1}<a_1\leqslant\frac{N_1}{dd_1}} \frac{1}{a_1} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \left(\frac{N^3\beta}{Xl_1d^2d_1}+1\right).$$

Следовательно
$$K_{2.2} \ll \frac{N^2Y^2L^3}{H}.$$
Из оценок для $K_{2.1}$ и $K_{2.2}$ следует, что
$$K_2 \ll \frac{N^2Y^2L^3}{H}. \tag{18}$$
2.2) Оценим теперь сумму K_1 сверху. Можно считать, что
$$N \geqslant X_1^{0,5-0,5\varepsilon}.$$
Если это не так, то $1 \leqslant l_1 \leqslant \beta L X^{-\varepsilon} < 1$. Кроме этого, имеет место равенство
$$\exp\left(2\pi i\left(\frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)\right)\right) = \exp\left(2\pi i\left(\frac{Xl_1}{2\pi bn_4}\right)\right) + O\left(X^{-0,7}\right).$$
Таким образом, имеем
$$|K_1| \leqslant \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a}\times$$
$$\times\left|\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}\\ x\neq 0}} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \exp\left(\frac{2\pi i x n_4}{a}\right) S\right| + O\left(\frac{N^2}{X^{0,075+\varepsilon}}\right), \tag{19}$$
где
$$S = \sum_{\substack{B<b\leqslant B_2\\ (b,a)=1}} \exp\left(\frac{iXl_1}{bn_4}\right)\exp\left(\frac{2\pi i x l_1 \overline{b}}{a}\right).$$
Далее, применим преобразование Абеля к сумме S. Получаем:
$$S = S_1 + S_2, \tag{20}$$
где
$$S_1 = \int_B^{B_2} \sum_{\substack{B<b\leqslant u\\ (b,a)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i x l_1\overline{b}}{a}\right)\exp\left(\left(\frac{iXl_1}{un_4}\right)\right)\frac{iXl_1}{u^2n_4}du,$$
$$S_2 = \sum_{\substack{B<b\leqslant B_2\\ (b,a)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i x l_1\overline{b}}{a}\right)\exp\left(\frac{iXl_1}{B_2n_4}\right).$$
Освободимся от зависимости предела суммирования по b в сумме S_1 от переменного интегрирования. Получаем:
$$S_1 = \frac{1}{a}\sum_{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}} \sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\ (b,a)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i(xl_1\overline{b}+yb)}{a}\right)\times$$

$$\times \int_B^{B_2} \sum_{B<r\leqslant u} \exp\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right) \exp\left(\frac{iXl_1}{un_4}\right) \frac{iXl_1}{u^2 n_4} du. \qquad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (19), получим:

$$K_1 \leqslant K_3 + K_4 + O\left(\frac{N^2}{X^{0{,}075+\varepsilon}}\right),$$

где

$$K_3 = \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}\\ x\neq 0}} \times$$

$$\times \left| \sum_{M<n_4\leqslant M_2} e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi B_2 n_4}\right)} \sum_{\substack{B<b\leqslant B_2\\ (b,a)=1}} e^{\frac{2\pi i x l_1 \bar{b}}{a}} \right|,$$

$$K_4 = \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a^2} \sum_{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}} \times$$

$$\times \left| \int_B^{B_2} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}\\ x\neq 0}} \sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\ (b,a)=1}} e^{\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{B<r\leqslant u} e^{-\frac{2\pi i y r}{a}} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u n_4}\right)} \frac{iXl_1}{u^2 n_4} du \right|.$$

Разобьем сумму K_4 на 3 суммы: K_5 отвечает таким слагаемым, у которых $y=0$, K_6 — слагаемым, у которых

$$y\neq 0 \text{ и } x<\frac{Xl_1 a}{2\pi u M_2^2} \text{ либо } x>\frac{Xl_1 a}{2\pi u M^2},$$

K_7 — слагаемым, у которых

$$y\neq 0 \text{ и } \frac{Xl_1 a}{2\pi u M_2^2}\leqslant x\leqslant \frac{Xl_1 a}{2\pi u M^2}.$$

Таким образом, получаем:

$$|K_1| \leqslant |K_3|+|K_5|+|K_6|+|K_7|+O\left(\frac{N^2}{X^{0{,}075+\varepsilon}}\right). \qquad (22)$$

а) Оценим K_3. Имеет место неравенство:

$$|K_3| \leqslant \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}\\ x\neq 0}} |U|\,|E|,$$

где

$$U = \sum_{\substack{B<b\leqslant B_2\\(a,b)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i x l_1 \bar{b}}{a}\right),$$

$$E = \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi B_2 n_4}\right)\right).$$

В силу леммы 1 имеем

$$U \ll a^{0,5} X^{0,01\varepsilon}\,(xl_1, a)\,L.$$

Оценим сумму E. Заменим сумму E интегралом, применив лемму 4. Все условия леммы выполняются. Получим:

$$E = \int_M^{M_2} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi B_2 z}\right)\right) dz + O(1).$$

Если $x<0$ или $x>2Xl_1/(\pi N^2\beta^2)$, то применим к последнему интегралу лемму 2. Все условия леммы выполняются. Находим оценку

$$E \ll \frac{a}{|x|}.$$

Если $0<x\leqslant 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2)$, то для оценки последнего интеграла воспользуемся леммой 3. Полагая в этой лемме

$$f(z) = \frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi B_2 z},$$

найдём

$$f'(z) = \frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi B_2 z^2}, \quad f''(z) = \frac{Xl_1}{\pi B_2 z^3} \geqslant \frac{Xl_1 d}{\pi N^4 \beta^3} > 0.$$

Следовательно

$$E \ll \frac{N^2\beta^{1,5}}{\sqrt{Xl_1 d}}.$$

Из полученных оценок для U и E следует, что

$$K_3 \ll \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}} \frac{1}{a}\left(\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\x\neq 0}} \frac{a^{1,5}X^{0,01\varepsilon}\,(xl_1,a)\,L}{|x|}+\right.$$

$$\left.+\sum_{0<x\leqslant 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2)} \frac{a^{0,5}X^{0,01\varepsilon}\,(xl_1,a)\,LN^2\beta^{1,5}}{\sqrt{Xl_1 d}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2X^{0,01\varepsilon}L \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}} \sqrt{a} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{0<x\leqslant\frac{a}{2}} \frac{(xl_1,a)}{x}+$$

$$+\frac{N^2\beta^{1,5}X^{0,01\varepsilon}L}{\sqrt{X}}\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{0<x\leqslant\frac{2XL}{\pi X_1 d\beta}}\frac{(xl_1,a)}{\sqrt{l_1}}.$$

Внутренняя сумма по x и l_1 в первом слагаемом оценивается следующим образом:

$$\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{0<x\leqslant\frac{a}{2}}\frac{(xl_1,a)}{x}\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{0<x\leqslant\frac{a}{2}}\frac{(xl_1,a)}{l_1 x}=$$

$$=\frac{N^2\beta L}{X_1 d}\sum_{1\leqslant m\leqslant\frac{N^2 a\beta L}{2X_1 d}}\tau(m)\frac{(m,a)}{m}=\frac{N^2\beta L}{X_1 d}\sum_{1\leqslant m\leqslant\frac{N^2 a\beta L}{2X_1 d}}\frac{\tau(m)}{m}\sum_{d_1|(m,a)}\varphi(d_1)=$$

$$=\frac{N^2\beta L}{X_1 d}\sum_{d_1|a}\varphi(d_1)\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant\frac{N^2 a\beta L}{2X_1 d}\\ d_1|m}}\frac{\tau(m)}{m}\ll$$

$$\ll\frac{N^2X^{0,01\varepsilon}\beta L^2}{X_1 d}\sum_{d_1|a}\frac{\varphi(d_1)}{d_1}\ll\frac{N^2X^{0,02\varepsilon}\beta L^2}{X_1 d}.$$

По аналогии имеем:

$$\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{0<x\leqslant\frac{2XL}{\pi X_1 d\beta}}\frac{(xl_1,a)}{\sqrt{l_1}}\ll\frac{X^{1+0,02\varepsilon}NL^2}{\sqrt{(X_1 d)^3\beta}}.$$

Таким образом, получаем

$$K_3\ll YL\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\sqrt{a}\frac{N^2X^{0,02\varepsilon}\beta L^2}{X_1 d}+$$

$$+\frac{N^2\beta^{1,5}YL}{\sqrt{X}}\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{X^{1+0,02\varepsilon}NL^2}{\sqrt{(X_1 d)^3\beta}}\ll$$

$$\ll\frac{N^{3,5}X^{0,02\varepsilon}Y\beta L^3}{X_1}+\frac{X^{0,5+0,02\varepsilon}N^{3,5}Y\beta L^3}{X_1^{1,5}}<\frac{N^2}{H}.$$

b) Оценим сверху сумму

$$K_5=\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a^2}\left|\int_B^{B_2}\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}\\ x\neq 0}}\sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\ (b,a)=1}}e^{\frac{2\pi i x l_1\bar{b}}{a}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{B<r\leqslant u}\sum_{M<n_4\leqslant M_2}e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u n_4}\right)}\frac{iXl_1}{u^2 n_4}du\right|.$$

Сумма по b в K_5 представляет собой сумму Рамануджана. Для неё справедлива оценка

$$\left|\sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\(b,a)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i x l_1\bar{b}}{a}\right)\right|\leqslant (xl_1,a).$$

Откуда тривиально имеем:

$$K_5\leqslant\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a^2}\times$$

$$\times\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a}{2}\\x\neq 0}}(xl_1,a)Xl_1\left|\sum_{M<n_4\leqslant M_2}e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u' n_4}\right)}\frac{1}{n_4}\right|,$$

где $B<u'\leqslant B_2$ — некоторое фиксированное число. Применим к сумме по n_4 преобразование Абеля. Получаем

$$\left|\sum_{M<n_4\leqslant M_2}e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u' n_4}\right)}\frac{1}{n_4}\right|\ll\frac{1}{N\beta}\left|\sum_{M<n_4\leqslant M_3}e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u' n_4}\right)}\right|,$$

где $M<M_3\leqslant M_2$ — некоторое фиксированное число. Последняя сумма по n_4 уже оценена в пункте а). Таким образом, получаем:

$$K_5\leqslant\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a^2}\times$$

$$\times\frac{Xl_1}{N\beta}\left(2\sum_{0<x\leqslant\frac{a}{2}}(xl_1,a)\frac{a}{x}+\sum_{0<x\ll\frac{XL}{X_1\beta d}}(xl_1,a)\frac{N^2\beta^{1,5}}{\sqrt{Xl_1 d}}\right).$$

После несложных вычислений приходим к оценке

$$K_5\ll\frac{N^2}{H}.$$

c) Оценим сумму

$$K_6=\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a^2}\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\y\neq 0}}\left|\int_B^{B_2}\sum_{\substack{x\notin\left[Xl_1a/(2\pi uM_2^2),Xl_1a/(2\pi uM^2)\right]\\x\neq 0}}\times\right.$$

$$\times \sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\(b,a)=1}} e^{\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}} \sum_{\frac{N}{d}<r\leqslant u} e^{-\frac{2\pi iyr}{a}} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \frac{e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi un_4}\right)}}{n_4}\frac{iXl_1}{u^2}du\Bigg|.$$

В силу леммы 1 имеет место неравенство

$$\sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\(b,a)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}\right) \ll a^{0,5}X^{0,01\varepsilon}\,(a,y)\,. \tag{23}$$

Кроме этого, справедливо неравенство:

$$\left|\sum_{B<r\leqslant u} e^{-\frac{2\pi iyr}{a}}\right| \leqslant \frac{a}{|y|}. \tag{24}$$

Откуда получаем

$$K_6 \ll \frac{X^{1+0,01\varepsilon}}{N} \sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1 d}} l_1 \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\y\neq 0}} \frac{(a,y)}{|y|}\times$$

$$\times \sum_{\substack{x\notin\left[Xl_1a/(2\pi u_0M_2^2),Xl_1a/(2\pi u_0M^2)\right]\\x\neq 0}} |Q|\,, \tag{25}$$

где $B<u_0\leqslant B_2$ — некоторое фиксированное число и

$$Q=\sum_{M<n_4\leqslant M_2}\frac{e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0n_4}\right)}}{n_4}.$$

Применяя к Q преобразования Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получим:

$$Q\ll\frac{1}{N\beta}\left|Q_1\right|,$$

где

$$Q_1=\sum_{M<n_4\leqslant M_3} e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0n_4}\right)},$$

где $M<M_3\leqslant M_2$ — некоторое фиксированное число. Заменить Q_1 интегралом, применив к ней лемму 4. Полагая в этой лемме

$$\varphi(z)=1,\ f(z)=\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0z},$$

находим

$$|f'(z)|=\left|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0z^2}\right|<\frac{3}{4}<1.$$

Получим:

$$Q_1 = \int_M^{M_3} \exp\left(2\pi i \left(\frac{xz}{a} + \frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right) dz + O\left(1\right).$$

Оценим последний интеграл в зависимости от значения x. Если $x < 0$, то этот интеграл оценивается с помощью леммы 2. Получаем

$$Q_1 \ll \frac{a}{|x|}.$$

Следовательно, при $x < 0$ имеет место неравенство:

$$Q \ll \frac{a}{N\beta\left|x\right|}.$$

Пусть $0 < x < Xl_1a/(2\pi u_0 M_2^2)$ либо $x > Xl_1a/(2\pi u_0 M^2)$. Оценим последний интеграл двумя способами. Применяем к этому интегралу лемму 3. Получаем:

$$\left|\int_M^{M_3} \exp\left(2\pi i \left(\frac{xz}{a} + \frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right) dz\right| \ll \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}.$$

С другой стороны, если $0 < x < Xl_1a/(2\pi u_0 M_2^2)$, то

$$f'(z) = \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 z^2} \leqslant \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M_3^2} \leqslant \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M_2^2} < 0.$$

В силу леммы 2 имеем

$$\left|\int_M^{M_3} \exp\left(2\pi i \left(\frac{xz}{a} + \frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right) dz\right| \ll \left\|\frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M_3^2}\right\|^{-1}.$$

Таким образом, при $0 < x < Xl_1a/(2\pi u_0 M_2^2)$ для Q_1 справедлива оценка:

$$Q_1 \ll \min\left(\left\|\frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M_3^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right) + O(1).$$

Следовательно,

$$Q \ll \frac{1}{N\beta} \min\left(\left\|\frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M_3^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right) + O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

А если $x > Xl_1a/(2\pi u_0 M^2)$, то

$$f'(z) = \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 z^2} \geqslant \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M^2} > 0.$$

По аналогии при $x > Xl_1a/(2\pi u_0 M^2)$ для Q справедлива оценка:

$$Q \ll \frac{1}{N\beta} \min\left(\left\|\frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right) + O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Подставляем выше полученные оценки для Q в (25):

$$K_6 \ll \frac{X^{1+0,01\varepsilon}}{N^2\beta} \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} l_1 \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}} \frac{1}{\sqrt{a}}\times$$

$$\times \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} \frac{(a,y)}{|y|} \left(\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant x<a/2\\ x\neq 0}} 1 + \sum_{-\frac{a}{2}\leqslant x<0} \frac{a}{|x|} + G + G_1 \right), \tag{26}$$

где

$$G = \sum_{1\leqslant x<a/2} \min\left(\left\| \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M_3^2} \right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}} \right),$$

$$G_1 = \sum_{1\leqslant x<a/2} \min\left(\left\| \frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u_0 M^2} \right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}} \right).$$

Применить к сумме G лемму 6. Пологая в этой лемме

$$P = \frac{a}{2}, \alpha = \frac{1}{a}, U = \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}};$$

находим

$$G \ll \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}} + aL.$$

По аналогии имеем

$$G_1 \ll \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}} + aL.$$

Оценить внутреннюю сумму по y в правой части (26) следующим образом:

$$\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} \frac{(a,y)}{|y|} = \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|} \sum_{d^*|(a,y)} \varphi(d^*) = \sum_{d^*|a} \varphi(d^*) \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0,\, d^*|y}} \frac{1}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{d^*|a} \frac{\varphi(d^*)}{d^*} \ll X^{0,01\varepsilon} L. \tag{27}$$

Подставить полученные оценки в (26). Получаем:

$$K_6 \ll \frac{X^{1+0,02\varepsilon}L}{N^2\beta} \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} l_1 \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(aL + \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}} \right) \ll$$

$$\ll \frac{X^{1+0,02\varepsilon} N^{3,5} Y^2 L^4}{X_1^2} + \frac{X^{0,5+0,02\varepsilon} N^{3,5} Y^2 L^3}{X_1^{1,5}} < \frac{N^2}{H}.$$

c) Остается оценить сумму

$$K_7 = \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a^2} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} \left| \int_B^{B_2} \sum_{\frac{Xl_1 a}{2\pi u M_2^2}\leqslant x\leqslant \frac{Xl_1 a}{2\pi u M^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\ (b,a)=1}} e^{\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}} \sum_{B<r\leqslant u} e^{-\frac{2\pi i y r}{a}} \sum_{M<n_4\leqslant M_2} \frac{e^{2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u n_4}\right)}}{n_4} \frac{Xl_1}{u^2} du \right|.$$

Через P будем обозначать внутреннюю сумму по n_4 в правой части. Заменить P интегралом, применив к ней лемму 4. Находим:

$$P = \int_M^{M_2} \frac{1}{z} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u z}\right)\right) dz + O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Далее, применить к последнему интегралу метод стационарной фазы (лемма 5). Полагая в ней

$$H = \frac{1}{N\beta}, A = \frac{N^4\beta^3}{Xl_1 d}, U = N\beta, \varphi(z) = \frac{1}{z}, f(z) = \frac{xz}{a} + \frac{Xl_1}{2\pi u z}.$$

Заметим, что условие $A \ll U$ не выполняется, однако, лемма 5 остается справедливой и без этого требования, если остаток $O(H)$ заменить на $O(HAU^{-1})$. Все остальные условия выполняются; находим:

$$P = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\pi u a}{Xl_1 x}\right)^{1/4} \exp\left(4\pi i \sqrt{\frac{Xl_1 x}{2\pi u a}}\right) + O(R),$$

где

$$R = \frac{1}{N\beta} + \frac{N^2\beta}{Xl_1 d} + \frac{1}{N\beta} \min\left(\left\|\frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u M^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}}\right) +$$

$$+\frac{1}{N\beta} \min\left(\left\|\frac{x}{a} - \frac{Xl_1}{2\pi u M_2^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}}\right).$$

Подставляем эту асимптотическую формулу в K_7. Получаем:

$$|K_7| \ll |K_{7.1}| + |K_{7.2}|,$$

где $K_{7.1}$ — часть суммы K_7, отвечающая главному члену асимптотической формулы, а $K_{7.2}$ – остаточному.

Оценим $K_{7.2}$. Сначало имеем:

$$|K_{7.2}| \ll \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a^2} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} \sqrt{a} Y(a,y) \frac{a}{|y|} \frac{Xl_1 d}{N} \times$$

$$\times \sum_{x\asymp\frac{Xl_1}{N^2\beta^2}} \left(\frac{1}{N\beta}+\frac{N^2\beta}{Xl_1d}+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi uM^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi uM_2^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right)\right).$$

Здесь мы воспользовались выше полученными неравенствами (23) и (24). Применим к внутренней сумме по x лемму 6, приходим к неравенству:

$$|K_{7.2}|\ll\frac{XY}{N}\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}d\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1d}}l_1\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}}\frac{(a,y)}{|y|}\times$$

$$\times\left(\frac{Xl_1}{N^3\beta^3}+\frac{1}{d\beta}+\frac{aL}{N\beta}+\frac{N\beta^{1/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right).$$

Пользуясь неравенством (27), получим:

$$|K_{7.2}|\ll\frac{X^{2+0{,}01\varepsilon}YL^4N^{2{,}5}}{X_1^3}+\frac{X^{1+0{,}01\varepsilon}N^{3{,}5}YL^3}{X_1^2}+$$

$$+\frac{X^{2+0{,}01\varepsilon}N^{3{,}5}Y^3L^3}{X_1^2}+\frac{X^{0{,}5+0{,}01\varepsilon}N^{3{,}5}Y^3L^{2{,}5}}{X_1^{3/2}}\ll\frac{N^2}{H}.$$

Рассмотрим $K_{7.1}$. Меняем порядок суммирования по x и интегрирования. Получаем

$$K_{7.1}=\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1d}}\sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant\frac{N_1}{d}}\frac{1}{a^2}\sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}}\times$$

$$\times\left|\sum_{\frac{Xl_1a}{2\pi B_2M_2^2}\leqslant x\leqslant\frac{Xl_1}{2\pi BM^2}}\sum_{\substack{B<b\leqslant B+a\\ (b,a)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_U^{U_1}\sum_{B<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\frac{(1+i)(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{2}}\left(\frac{au}{Xl_1x}\right)^{1/4}\frac{Xl_1}{u^2}e^{4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}}du\right|,$$

где

$$U=max\left(B,\frac{Xl_1a}{2\pi xM_2^2}\right)\asymp\frac{N}{d},U_1=min\left(B_2,\frac{Xl_1a}{2\pi xM^2}\right)\asymp\frac{N}{d}.$$

С помощью оценки суммы Клоостермана приходим к неравенству:

$$K_{7.1}\ll X^{3/4}L\sum_{d\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1}}\sum_{l_1\leqslant\frac{N^2\beta L}{X_1d}}l_1^{3/4}\times$$

$$\times \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a^{5/4}} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} (a,y)X^{0,01\varepsilon} \sum_{x\asymp \frac{Xl_1}{(N\beta)^2}} \frac{1}{x^{1/4}}\times$$

$$\times \left| \int_U^{U_1} \sum_{B<r\leqslant u} \exp\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right) \exp\left(4\pi i \sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi u a}}\right) \frac{1}{u^{7/4}} du \right|, \qquad (28)$$

Рассмотрим последний интеграл. Пусть

$$g(u) = 2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi u a}}.$$

Тогда легко находим

$$g'(u) = -\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi u^3 a}} < -\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi U_1^3 a}} < 0, \quad g'(u) \asymp \frac{Xl_1d^2}{N^3\beta}.$$

Пусть $r \leqslant U$. По лемме 2 имеем

$$\sum_{B<r\leqslant U} e^{\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right)} \int_U^{U_1} e^{2\pi i g(u)} \frac{1}{u^{7/4}} du \ll \frac{N^{9/4}\beta}{Xl_1 d^{5/4}\,|y|}.$$

Пусть $r > U$. Поменяем порядок суммирование и интегрирования.

$$\int_U^{U_1} \sum_{U<r\leqslant u} e^{-\frac{2\pi i y r}{a}} e^{2\pi i g(u)} \frac{1}{u^{7/4}} du = \sum_{U<r\leqslant U_1} e^{-\frac{2\pi i y r}{a}} \int_r^{U_1} e^{2\pi i g(u)} \frac{1}{u^{7/4}} du.$$

Далее, интегрируем интеграл по частям, занеся экспоненту под дифференциалом. Получаем:

$$\int_r^{U_1} e^{2\pi i g(u)} \frac{1}{u^{7/4}} du = \frac{e^{2\pi i g(U_1)}}{2\pi i g'(U_1)(U_1)^{7/4}} - \frac{e^{2\pi i g(r)}}{2\pi i g'(r) r^{7/4}} -$$

$$- \int_r^{U_1} e^{2\pi i g(u)} d\left(\frac{1}{2\pi i g'(u) u^{7/4}}\right).$$

Откуда приходим к неравенству:

$$\sum_{U<r\leqslant U_1} e^{\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right)} \int_r^{U_1} e^{2\pi i g(u)} \frac{1}{u^{7/4}} du \ll \left| \sum_{U<r\leqslant U_1} e^{\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right)} \right| \frac{1}{g'(U_1)(U_1)^{7/4}} +$$

$$+ \left| \sum_{U<r\leqslant U_1} e^{\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right)} \frac{e^{2\pi i g(r)}}{g'(r) r^{7/4}} \right| + \int_U^{U_1} \left| \sum_{U<r\leqslant u} e^{\left(-\frac{2\pi i y r}{a}\right)} \right| d\left(\frac{1}{g'(u) u^{7/4}}\right) \ll$$

$$\ll \frac{N\beta}{Xl_1\,|y|} \left(\frac{N}{d}\right)^{5/4} + \left| \sum_{U<r\leqslant U_1} e^{2\pi i\left(-\frac{yr}{a} + 2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi r a}}\right)} \frac{1}{g'(r) r^{7/4}} \right|.$$

Через S будем обозначать сумму по r. Применяя к S преобразование Абеля, потом переходя к неравенству, получаем:

$$S \ll \frac{N^{5/4}\beta}{Xl_1 d^{1/4}} \left| \sum_{U<r\leqslant U_2} e^{2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)} \right|,$$

где $U < U_2 \leqslant U_1$ — некоторое фиксированное число. Далее, заменить сумму по r интегралом, применив лемму 4. Получаем:

$$\sum_{U<r\leqslant U_2} \exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right) =$$

$$= \int_U^{U_2} \exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right) dv + O(1).$$

Оценим последний интеграл сверху в зависимости от значения y. Обозначим этот интеграл через V. Если

$$y < -\sqrt{\frac{2Xl_1xad^3}{\pi N^3}} = D \text{ или } \frac{a}{2} > y > 0,$$

то для оценки интеграла V воспользуемся леммой 2. Получим:

$$V \ll \frac{a}{|y|}.$$

В случае когда $D \leqslant y < 0$, применяя к V лемму 3, получим

$$V \ll \sqrt[4]{\frac{N^5 a}{Xl_1xd^5}} \asymp \frac{N^2\beta^{1/2}}{\sqrt{d^3Xl_1}}.$$

Здесь мы воспользовались $x \asymp Xl_1/(N^2\beta^2)$.

Из полученных оценок следует, что

$$K_{7.1} \ll X^{3/4+0,01\varepsilon} L \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} l_1^{3/4} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a^{5/4}} \sum_{x\asymp \frac{Xl_1}{(N\beta)^2}} \frac{1}{x^{1/4}} \times$$

$$\times \left(\frac{N^{9/4}\beta}{Xl_1d^{5/4}} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} \frac{(a,y)}{|y|} + \frac{N^{5/4}\beta}{Xl_1d^{1/4}} \sum_{\substack{-\frac{a}{2}\leqslant y<\frac{a}{2}\\ y\neq 0}} (a,y)\left(\frac{a}{|y|}+1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{N^{5/4}\beta}{Xl_1d^{1/4}} \sum_{D\leqslant y<0} \frac{N^2\beta^{1/2}(a,y)}{\sqrt{Xl_1d^3}} \right).$$

Внутренние суммы по y оцениваются сверху по аналогии с тем, как было получено неравенство (27). Кроме этого, имеем:

$$-\sqrt{\frac{2Xl_1xad^3}{\pi N^3}} = D \asymp \frac{Xl_1d}{N^2\beta}.$$

После несложных вычислений получим:

$$K_{7.1} \ll X^{3/4+0,01\varepsilon}L \sum_{d\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1}} \sum_{l_1\leqslant \frac{N^2\beta L}{X_1 d}} l_1^{3/4} \sum_{\frac{N}{d}<a\leqslant \frac{N_1}{d}} \frac{1}{a^{5/4}} \sum_{x\asymp \frac{Xl_1}{(N\beta)^2}} \frac{1}{x^{1/4}}\times$$

$$\times\left(\frac{N^{9/4}X^{0,01\varepsilon}\beta L}{Xl_1d^{5/4}} + \frac{N^{5/4}X^{0,01\varepsilon}\sqrt{\beta}}{\sqrt{Xl_1}d^{3/4}}\right) \ll \frac{X^{0,5+0,02\varepsilon}N^{2,5}\beta^2L^2}{X_1}+$$

$$+\frac{X^{1+0,01\varepsilon}N^{3,5}\beta L^2}{X_1^2} \ll \frac{N^2}{H}.$$

Из оценок для $K_{7.1}$ и $K_{7.2}$ следует, что

$$K_7 < \frac{N^2}{H}.$$

Из (18), (22) и оценок для сумм K_j, $j = 3, 5, 6, 7, 8$, получаем:

$$K \ll \frac{N^2Y^2L^3}{H}.$$

Из (11), (12), (14), (16), (17) и оценки для K следует:

$$I \ll \frac{X_1Y^4L^7}{H}.$$

$\square$

Лемма **15.** *Пусть*

$$Q(T) = \sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1\leqslant P\alpha} \sum_{P\gamma<n_2\leqslant P_0\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right)} \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} n_2^{ig_2}n_1^{-ig_1}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1\beta}\right)^2}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$I = \int_X^{X+X_1} |Q(T)|\,dT \ll \frac{X_1L^7}{H}.$$

Доказательство. Через $D(\overline{n}, T)$ обозначаем слагаемое суммы $Q(T)$. Справедлива следующая последовательность соотношений

$$|Q(T)| = \left| \sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1\leqslant P_2\alpha} \sum_{P_0\gamma<n_2\leqslant P_0\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right)} \sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1'\leqslant P\alpha} \sum_{P\gamma<n_2'\leqslant P_0\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right)} \frac{1}{M^2}\times \right.$$

$$\times \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{l'=0}^{M-1} D(\overline{n},T)e^{2\pi i\frac{l(n_1-n_1')}{M}}e^{2\pi i\frac{l'(n_2-n_2')}{M}}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l,l'=0}^{M-1}\frac{1}{l+1}\frac{1}{l'+1}\left|\sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1\leqslant P_2\alpha}\ \sum_{P_0\gamma<n_2\leqslant P_0\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right)} D(\overline{n},T)e^{2\pi i\frac{ln_1}{M}}e^{2\pi i\frac{l'n_2}{M}}\right|.$$

Откуда получаем

$$I \leqslant L^2\int_X^{X+X_1}|Q'(T)|\,dT, \tag{29}$$

где

$$Q'(T) = \sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1\leqslant P_2\alpha}\ \sum_{P_0\gamma<n_2\leqslant P_0\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right)} D(\overline{n},T)e^{2\pi i\frac{ln_1}{M}}e^{2\pi i\frac{l'n_2}{M}},$$

$0 \leqslant l, l' < M$ — некоторые фиксированные натуральные числа. Пусть

$$A = \frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}, B = P_2\alpha,$$

$$A_1 = P_0\gamma,\ B_1 = P_0\gamma\left(1+\frac{L}{H}\right),\ g(u,v) = e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{v}{u\beta}\right)^2},$$

$$F(u,v) = \sum_{A<n_1\leqslant u}\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left(n_1\right)^{i(T-g_1)}e^{2\pi i\frac{ln_1}{M}}\sum_{A_1<n_2\leqslant v}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\left(n_2\right)^{i(T+g_2)}e^{2\pi i\frac{l'n_2}{M}}.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$g(u,v)\leqslant 1; g_u(u,v)\ll\frac{HL}{u}; g_v(u,v)\ll\frac{HL}{v}; g_{uv}(u,v)\ll\frac{H^2L^2}{uv}.$$

Применяя к сумме по n_1 и n_2 в $Q(T)$ преобразование Абеля, получим

$$Q'(T) = \int_A^B\int_{A_1}^{B_1}F(u,v)g_{uv}(u,v)dudv - \int_A^B F(u,B_1)g_u(u,B_1)du-$$

$$-\int_{A_1}^{B_1}F(B,v)g_v(B,v)dv + F(B,B_1)g(B,B_1).$$

Откуда следует

$$\int_X^{X+X_1}|Q'(T)|\,dT \ll L^4 I_1, \tag{30}$$

где

$$I_1 = \max_{\substack{A<u\leqslant B\\ A_1<v\leqslant B_1}}\int_X^{X+X_1}|F(u,v)|\,dT = \int_X^{X+X_1}|F(B',B_1')|\,dT.$$

Применяя к I_1 интегральное неравенство Коши, получим
$$I_1 \leqslant \sqrt{J_1 J_2}, \tag{31}$$
где
$$J_1 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{A<n_1\leqslant B'} \frac{1}{\sqrt{n_1}} (n_1)^{i(T-g_1)} e^{2\pi i \frac{ln_1}{M}} \right|^2 dT,$$
$$J_2 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{A_1<n_2\leqslant B_1'} \frac{1}{\sqrt{n_2}} (n_2)^{i(T+g_2)} e^{2\pi i \frac{l'n_2}{M}} \right|^2 dT.$$

Оценим J_1. Имеет место неравенство
$$J_1 \ll X_1 \sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1,\, n_3\leqslant P_2\alpha} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_3}} e^{-\left(\frac{X_1}{2}\ln\frac{n_1}{n_3}\right)^2}.$$
Если $n_1 \neq n_3$, то
$$\left|\frac{n_1-n_3}{n_3}\right| \geqslant \sqrt{\frac{2\pi}{X+X_1}}.$$
Следовательно,
$$e^{-\left(\frac{X_1}{2}\ln\frac{n_1}{n_3}\right)^2} < e^{-\sqrt{X}}.$$
Откуда получаем
$$J_1 \ll X_1 \left(\sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1\leqslant P_2\alpha} \frac{1}{n_1} + e^{-\sqrt{X}} \left(\sum_{\frac{P_0\alpha}{1+\frac{L}{H}}<n_1\leqslant P_2\alpha} \frac{1}{\sqrt{n_1}} \right)^2 \right) \ll$$
$$\ll \frac{X_1 L}{H} + X_1\sqrt{X} e^{-\sqrt{X}} \ll \frac{X_1 L}{H}.$$

Аналогично получим
$$J_2 \ll \frac{X_1 L}{H}.$$

Утверждение леммы следует из (29)-(31) и оценок J_1 и J_2. □

1.3 Выводы по первой главе

Используя известные работы и оценки (раздел 1.2) удалось доказать 2 леммы, которые являются уточнением ранее существующих оценок из работ А. А. Карацубы, Л. В. Киселевой. В леммах 14 и 15 получены новые оценки сверху для тригонометрических интегралов специального вида. Эти леммы необходимы для получения результатов о нулях дзета-функции Римана на критической прямой.

2 Глава 2. Нули дзета-функции Римана на критической прямой

В этой главе приведены доказательства теорем 1 и 2, сформулированные во введении.

2.1 Вспомогательные леммы

Лемма **16.** *Пусть ε — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 0,01$, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $\exp\left(\exp 2a\sqrt{\ln\ln X}\right) \leqslant H \leqslant X^{\varepsilon}$, $a > 0$ — некоторая постоянная, $Y = H^{0,01}$, $X_1 = X^{7/8+\varepsilon}$. Пусть, далле, $0 < h < h_1 < 1$ — некоторые фиксированные числа. При $j = 1, 2$ суммы $W_j(T)$ определяются равенствами:*

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_2(T) = \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2} \frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)a(\lambda_2)\overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

где $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, числа $a(\lambda)$ определены в (8), и

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int_X^{X+X_1} |W_1(T)|^2\, dT \ll \frac{X_1 Y^{12} L^9}{H},$$

$$\int_X^{X+X_1} |W_2(T)|^2\, dT \ll \frac{X_1 h^4 Y^{12} L^9}{H},$$

где $L = \ln X$ и постоянные в знаке $\ll$ абсолютные.

Доказательство. Пользуясь определением $d(\lambda)$, находим

$$W_2(T) = \int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u_1/h)^2} e^{-(u_2/h)^2} \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \times$$

$$\times \lambda_1^{-iu_1}\lambda_2^{iu_2} P^{i(u_1-u_2)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right) du_1 du_2;$$

$$|W_2(T)| \leqslant \int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u_1/h)^2} e^{-(u_2/h)^2} \left| \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \times \right.$$

$$\times \lambda_1^{-iu_1}\lambda_2^{iu_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right)\Bigg| du_1du_2 =$$

$$= h^2\int_{-h_1/h}^{h_1/h}\int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-u_1^2}e^{-u_2^2}\Bigg|\sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{\lambda_1<\lambda_2}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\times$$

$$\times \lambda_1^{-ihu_1}\lambda_2^{ihu_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right)\Bigg| du_1du_2.$$

Поэтому, применяя неравенство Коши, будем иметь

$$\int_X^{X+X_1}|W_2(T)|^2\,dT \leqslant 2h^4\int_X^{X+X_1}|W_3(T)|^2\,dT,$$

где

$$W_3(T) = \sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{\lambda_1<\lambda_2}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\lambda_1^{-ig_1}\lambda_2^{ig_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

g_1, g_2 — некоторые фиксированные числа такие, что $|g_1| < 1$, $|g_2| < 1$.

Пусть $W(T)$ — одна из двух сумм $W_1(T)$ и $W_3(T)$. Через $D(\overline{\lambda}, T)$ обозначаем слагаемые $W(T)$. Легко видеть, что часть суммы $W(T)$, отвечающая таким слагаемым, у которых

$$\lambda_2 > \lambda_1\left(1+\frac{L}{H}\right),$$

есть величина $O(e^{-0{,}01L^2})$. Таким образом, получаем

$$|W(T)| \leqslant \left|\sum_{\substack{\lambda_1\leqslant P\\ \lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_1(1+\frac{L}{H})}} D(\overline{\lambda}, T)\right| + O\left(e^{-0{,}02L^2}\right).$$

В силу определения числа $a(\lambda)$ (см. (8)) имеем

$$|W(T)| \ll \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\leqslant Y}\left|\sum_{\substack{n_1\leqslant P\frac{\nu_2}{\nu_1}\\ n_1\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3}<n_2\leqslant n_1\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3}(1+\frac{L}{H})}}\Phi(\overline{n}, T)\right| + O(e^{-0{,}02L^2}),$$

где

$$\Phi(\overline{n}, T) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)\right)^2}$$

если $W(T) = W_1(T)$, а

$$\Phi(\overline{n}, T) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}n_2^{ig_2}n_1^{-ig_1}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)\right)^2}$$

если $W(T) = W_3(T)$.

Далее, применяя неравенство Коши к сумме по $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$, получаем

$$|W(T)|^2 \ll Y^4 \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 \leqslant Y} \left| \sum_{\substack{n_1 \leqslant P\frac{\nu_2}{\nu_1} \\ n_1\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3} < n_2 \leqslant n_1\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3}(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n}, T) \right|^2 + O\left(e^{-0{,}02L^2}\right).$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2 \, dT \ll Y^8 \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{\substack{n_1 \leqslant \alpha P \\ n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n}, T) \right|^2 dT + O\left(X_1 e^{-0{,}02L^2}\right),$$

где $\alpha = \nu_2/\nu_1$, $\beta = \nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3)$ и $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ — некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y. Пусть $P_0 = \sqrt{X/2\pi}$. Разбивая промежуток суммирования по n_1 на два промежутка точкой $P_0\alpha$, приходим к неравенству:

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2 \, dT \ll Y^8 \left(G_1 + G_2\right) + O\left(X_1 e^{-0{,}02L^2}\right), \tag{32}$$

где

$$G_1 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{n_1 \leqslant P_0\alpha} \sum_{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n}, T) \right|^2 dT,$$

$$G_2 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{P_0\alpha < n_1 \leqslant P\alpha} \sum_{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n}, T) \right|^2 dT.$$

Оценим G_2 сверху. Пусть $P_2 = \sqrt{(X + X_1)/(2\pi)}$, $M = [P_2\alpha] + 1$. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{M} \sum_{-\frac{M}{2} < l \leqslant \frac{M}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i l(n - n')}{M}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = n', \\ 0, \text{ если } n \neq n', \end{cases}$$

преобразуем подынтегральную сумму по n_1, n_2 в G_2 так:

$$\sum_{\substack{P_0\alpha < n_1 \leqslant P\alpha \\ n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n}, T) = \frac{1}{M} \sum_{-\frac{M}{2} < l \leqslant \frac{M}{2}} K(l, T) \sum_{P_0\alpha < n_1' \leqslant P\alpha} \exp\left(-\frac{2\pi i n_1' l}{M}\right),$$

где

$$K(l, T) = \sum_{P_0\alpha < n_1 \leqslant P_2\alpha} \sum_{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n}, T) \exp\left(\frac{2\pi i n_1 l}{M}\right).$$

Переходя от последнего равенства к неравенству, получим:

$$\left|\sum_{\substack{P_0\alpha<n_1\leqslant \alpha P\\ n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n},T)\right| \leqslant \sum_{-\frac{M}{2}<l\leqslant \frac{M}{2}} \frac{|K(l,T)|}{|l|+1}.$$

Применим к правой части неравенство Коши:

$$\left|\sum_{\substack{P_0\alpha<n_1\leqslant \alpha P\\ n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n},T)\right|^2 \leqslant L \sum_{-M/2<l\leqslant M/2} \frac{|K(l,T)|^2}{|l|+1}.$$

Следовательно,

$$G_2 \leqslant L \sum_{-\frac{M}{2}<l\leqslant \frac{M}{2}} \frac{1}{|l|+1}\int_X^{X+X_1} |K(l,T)|^2\,dT \leqslant L^2 \int_X^{X+X_1} |K(l',T)|^2\,dT,$$

где $M/2 < l' \leqslant M/2$ — некоторое фиксированное целое число. Вспоминая определение $K(l,T)$, перепишем это неравенство в следующем виде:

$$G_2 \ll L^2 J,$$

где

$$J = \int_X^{X+X_1} \sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant \alpha P_2} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n},T)\exp\left(\frac{2\pi i n_1 l'}{M}\right)dT.$$

Интеграл J оценен в лемме 14:

$$J \ll \frac{X_1Y^2L^3}{H}.$$

Следовательно,

$$G_2 \ll \frac{X_1Y^2L^5}{H}. \tag{33}$$

Осталось оценить сверху G_1. Разобьем промежуток суммирования по n_1 в G_1 на $\ll L$ промежутки вида $N < n_1 \leqslant N_1 \leqslant 2N$, $N \leqslant P_0\alpha$. Приходим к неравенству:

$$G_1 \ll L^2 \int_X^{X+X_1} \left|\sum_{N<n_1\leqslant N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n},T)\right|^2 dT.$$

Последний интеграл оценен в лемме 14 так:

$$I \ll \frac{X_1Y^4L^7}{H}.$$

Следовательно,

$$G_1 \ll \frac{X_1 Y^4 L^9}{H}. \tag{34}$$

Из (32)-(34) следует:

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2\, dT \ll \frac{X_1 Y^{12} L^9}{H}.$$

Откуда следует утверждение леммы. $\square$

Следствие **1.** *Пусть $W_1(T)$ и $W_2(T)$ суммы в лемме 16, и пусть*

$$S^* = \left\{T \in [X, X+X_1] \mid |W_1(T)| \geqslant H^{-0,2}\right\};$$

$$S^{**} = \left\{T \in [X, X+X_1] \mid |W_2(T)| \geqslant h^2 H^{-0,2}\right\}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\mu(S^*) \leqslant X_1 H^{-0,4}; \quad \mu(S^{**}) \leqslant X_1 H^{-0,4},$$

где $\mu(S)$ означает меру множества S.

Доказательство. В силу леммы 16 имеем

$$\int_X^{X+X_1} |W_1(T)|^2\, dT \leqslant A X_1 H^{-1} L^9 Y^{12},$$

где постоянная $A > 0$ в правой части абсолютная. С другой стороны, имеем

$$\int_X^{X+X_1} |W_1(T)|^2\, dT \geqslant \int_{S^*} |W_1(T)|^2\, dT \geqslant \mu(S^*) H^{-0,4}.$$

Следовательно,

$$\mu(S^*) \leqslant A X_1 H^{-0,6} L^9 Y^{12} \leqslant X_1 H^{-0,4}.$$

По аналогии имеет место неравенство:

$$\mu(S^{**}) \leqslant X_1 H^{-0,4}.$$

$\square$

Лемма **17.** *Пусть ε — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 0,01$, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $\exp\left(\exp 2a\sqrt{\ln\ln X}\right) \leqslant H \leqslant X^{\varepsilon}$, $a > 0$ — некоторая постоянная, $Y = H^{0,01}$, $X_1 = X^{7/8+\varepsilon}$. Пусть, далле, $0 < h < h_1 < 1$ — некоторые фиксированные числа. При $j = 1,2$ суммы $Q_j(T)$ определяются равенствами:*

$$Q_1(T) = \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{P < \lambda_2} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$Q_2(T)=\sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{P<\lambda_2}\frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)a(\lambda_2)\overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

где $P=\sqrt{T/(2\pi)}$, числа $a(\lambda)$ определены в (8), и

$$d(\lambda)=\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int_X^{X+X_1}|Q_1(T)|\,dT\ll X_1H^{-1}L^7Y^4,$$

$$\int_X^{X+X_1}|Q_2(T)|\,dT\ll h^2X_1H^{-1}L^7Y^4,$$

где $L=\ln X$ и постоянные в знаке $\ll$ абсолютные.

Доказательство. Пользуясь определением $d(\lambda)$, находим

$$|Q_2(T)|\leqslant\int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u_1/h)^2}e^{-(u_2/h)^2}\left|\sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{P<\lambda_2}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\times\right.$$

$$\left.\times\,\lambda_1^{-iu_1}\lambda_2^{iu_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right)\right|du_1du_2\leqslant$$

$$\leqslant h^2\int_{-h_1/h}^{h_1/h}\int_{-h_1/h}^{h_1/h}e^{-u_1^2}e^{-u_2^2}\left|\sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{P<\lambda_2}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\times\right.$$

$$\left.\times\,\lambda_1^{-ihu_1}\lambda_2^{ihu_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right)\right|du_1du_2.$$

Поэтому имеем:

$$\int_X^{X+X_1}|Q_2(T)|\,dT\leqslant h^2\int_X^{X+X_1}|Q_3(T)|\,dT,\tag{35}$$

где

$$Q_3(T)=\sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{P<\lambda_2}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\lambda_1^{-ig_1}\lambda_2^{ig_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

g_1,g_2 — некоторые фиксированные числа такие, что $|g_1|<1$, $|g_2|<1$.

Пусть $Q(T)$ — одна из двух сумм $Q_1(T)$ и $Q_3(T)$. Через $D(\overline{\lambda},T)$ обозначаем слагаемые $Q(T)$. Пусть $P_0=\sqrt{X/(2\pi)}$. Легко видеть, что часть суммы $W(T)$, отвечающая таким слагаемым, у которых

$$\lambda_2>P_0\left(1+\frac{L}{H}\right)$$

или
$$\lambda_1 \leqslant P_0 \left(1+\frac{L}{H}\right)^{-1},$$
есть величина $O(e^{-0{,}01L^2})$. Таким образом, получаем
$$|Q(T)| \leqslant \left| \sum_{\substack{P_0/(1+\frac{L}{H})<\lambda_1\leqslant P \\ P<\lambda_2\leqslant P_0(1+\frac{L}{H})}} D(\overline{\lambda},T) \right| + O\left(e^{-0{,}02L^2}\right).$$
В силу определения числа $a(\lambda)$ (см. (8)) имеем
$$|Q(T)| \ll \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\leqslant Y} \left| \sum_{\substack{\frac{P_0\nu_2}{\nu_1(1+\frac{L}{H})}<n_1\leqslant P\frac{\nu_2}{\nu_1} \\ P\frac{\nu_4}{\nu_3}<n_2\leqslant P_0\frac{\nu_4}{\nu_3}(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n},T) \right| + O(e^{-0{,}02L^2}),$$
где
$$\Phi(\overline{n},T) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)\right)^2}$$
если $Q(T)=Q_1(T)$, а
$$\Phi(\overline{n},T) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} n_2^{ig_2}n_1^{-ig_1}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)\right)^2}$$
если $Q(T)=Q_3(T)$. Следовательно,
$$\int_X^{X+X_1} |Q(T)|\,dT \ll Y^4 I + O\left(X_1 e^{-0{,}01L^2}\right), \tag{36}$$
где
$$I = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{\substack{\frac{P_0\alpha}{(1+\frac{L}{H})}<n_1\leqslant P\alpha \\ P\gamma<n_2\leqslant P_0\gamma(1+\frac{L}{H})}} \Phi(\overline{n},T) \right| dT,$$
$\alpha=\nu_2/\nu_1, \beta=\nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3), \gamma=\nu_4/\nu_3$ и ν_1,ν_2,ν_3,ν_4 — некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y.

Интеграл I оценен в лемме 15 так:
$$I \ll \frac{X_1L^7}{H}.$$
Утверждение леммы следует из (35), (36) и этого неравенства. $\square$

Следствие **2.** *Пусть $Q_1(T)$ и $Q_2(T)$ суммы в лемме 17 и*

$$V^* = \left\{T \in [X, X+X_1] \mid |Q_1(T)| \geqslant H^{-0,4}\right\};$$

$$V^{**} = \left\{T \in [X, X+X_1] \mid |Q_2(T)| \geqslant h^2 H^{-0,4}\right\}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\mu(V^*) \leqslant X_1 H^{-0,4}; \quad \mu(V^{**}) \leqslant X_1 H^{-0,4},$$

где $\mu(V)$ означает меру множества V.

Доказательство следствия 2 проводится по аналогии с доказательством следствия 1.

2.2 Доказательство теоремы 1

Теорема **1.** *Пусть ε_1 — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon_1 < 0,01$, и пусть $c_1 = c_1(\varepsilon_1) > 0$ — некоторая постоянная,*

$$X > X_0(\varepsilon_1) > 0, \quad H = X^{\varepsilon_1}, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon_1}.$$

Через E_1 обозначим множество тех $T \in [X, X+X_1]$, для которых интервал $[T, T+H]$ содержит меньше, чем $c_1 H \ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$. Тогда для меры этого множества $\mu(E_1)$ справедлива оценка

$$\mu(E_1) \ll X_1 H^{-0,4},$$

где постоянная в знаке $\ll$ абсолютная.

Доказательство. Пусть $W_j(T)$ и $Q_j(T)$, $j = 1, 2$ — суммы из лемм 16 и 17. Пусть, далее S^*, S^{**}, V^* и V^{**} множества в следствиях 1 и 2. Будем рассматривать числа T из множества

$$[X, X+X_1] \setminus (S^* \cup S^{**} \cup V^* \cup V^{**}).$$

Для них выполняются следующие неравенства:

$$|Q_1(T)| < H^{-0,4}; \quad |Q_2(T)| < h^2 H^{-0,4},$$

$$|W_1(T)|^2 < H^{-0,4}; \quad |W_2(T)|^2 < h^4 H^{-0,4}. \tag{37}$$

Из рассматриваемых чисел T выбросим те, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_{1/2}^2 \zeta(\sigma + i(T+H-1)) \left|\varphi(\sigma + i(T+H-1))\right|^2 d\sigma\right| +$$

$$+ \left|\int_{1/2}^2 \zeta(\sigma + i(T+1)) \left|\varphi(\sigma + i(T+1))\right|^2 d\sigma\right| > \frac{H}{L}.$$

Обозначаем через S' множество выброшенных чисел. Имеет место следующее неравенство:

$$\mu(S')HL^{-1} \leqslant J_1 + J_2, \tag{38}$$

где

$$J_1 = \int_{S'} \left| \int_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+1)) \left|\varphi(\sigma + i(T+1))\right|^2 d\sigma \right| dT,$$

$$J_2 = \int_{S'} \left| \int_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+H-1)) \left|\varphi(\sigma + i(T+H-1))\right|^2 d\sigma \right| dT.$$

Применить к J_1 интегральное неравенство Коши. Находим:

$$J_1^2 \leqslant \mu\left(S'\right) \int_{X}^{X+X_1} \left| \int_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+1)) \left|\varphi(\sigma + i(T+1))\right|^2 d\sigma \right|^2 dT.$$

В силу леммы 11 следует, что

$$J_1 \leqslant \sqrt{\mu\left(S'\right) X_1 Y^2 L^3}.$$

По аналогии находим

$$J_2 \leqslant \sqrt{\mu\left(S'\right) X_1 Y^2 L^3}.$$

Подставить оценки J_1 и J_2 в неравенство (38). Получаем:

$$\mu\left(S'\right) \leqslant X_1 H^{-1}. \tag{39}$$

Пусть $P_0 = \sqrt{X/(2\pi)}$. Введем следующие параметры

$$h = \frac{A}{\alpha \ln P_0}, \quad h_1 = 2h.$$

Будем считать, что X так велико, что $0 < h < h_1 < 1$. Числа $0 < \alpha < 1$ и $0 < A$ будут определены позднее. При $T \leqslant t \leqslant T+H$ рассматриваются интегралы $j_1(t)$ и $j_2(t)$:

$$j_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \left|F(t+u)\right| du,\ j_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} F(t+u) du \right|,$$

где $F(t)$ — функция Харди–Сельберга.

Обозначим через E подмножество интервала $(T, T+H)$, на котором выполняется неравенство $j_1(t) > j_2(t)$. Так как вне E два интеграла $j_1(t)$ и $j_2(t)$ равны, то имеем

$$\int_E j_1(t)dt = \int_T^{T+H} j_1(t)dt - \int_{\bar{E}} j_2(t)dt \geqslant \int_T^{T+H} j_1(t)dt - \int_T^{T+H} j_2(t)dt.$$

Применяя интегральное неравенство Коши, приходим к соотношению:

$$\sqrt{\mu(E)I_1} + \sqrt{HI_2} \geqslant I_3, \tag{40}$$

где $\mu(E)$ — мера множества E,

$$I_1 = \int_T^{T+H} (j_1(t))^2\, dt,\ I_2 = \int_T^{T+H} (j_2(t))^2\, dt,\ I_3 = \int_T^{T+H} j_1(t) dt.$$

Оценим интеграл I_3 снизу. Имеем

$$I_3 = \int_T^{T+H} \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \left|F(t+u)\right| dudt =$$

$$= h \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2} \int_T^{T+H} \left|F(t+hv)\right| dtdv =$$

$$= h \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2} \int_{T+hv}^{T+H+hv} \left|F(t)\right| dtdv \geqslant he^{-1} \int_{T+1}^{T+H-1} \left|F(t)\right| dt \geqslant$$

$$\geqslant he^{-1} \left| \int_{T+1}^{T+H-1} \zeta(0,5+it)\varphi^2(0,5+it)dt \right|. \tag{41}$$

Пусть Γ— прямоугольник с вершинами $0,5+i(T+1)$, $2+i(T+1)$, $2+i(T+H-1)$ и $0,5+i(T+H-1)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_\Gamma \zeta(s)\varphi^2(s)ds = 0.$$

Это равенство можно переписать так:

$$\int_{T+1}^{T+H-1} \zeta(0,5+it)\varphi^2(0,5+it)dt = \int_{T+1}^{T+H-1} \zeta(2+it)\varphi^2(2+it)dt +$$

$$+ i \int_{0,5}^{2} \zeta(\sigma+i(T+H-1))\varphi^2(\sigma+i(T+H-1))d\sigma -$$

$$- i \int_{0,5}^{2} \zeta(\sigma+i(T+1))\varphi^2(\sigma+i(T+1))d\sigma. \tag{42}$$

При $\Re(s) > 1$ имеем

$$\zeta(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\nu_1<Y} \sum_{\nu_2<Y} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{(n\nu_1\nu_2)^s} = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{a(m)}{m^s},$$

где

$$a(m) = \sum_{n\nu_1\nu_2=m} \beta(\nu_1)\beta(\nu_2).$$

Заметим, что

$$|a(m)| \leqslant \sum_{n\nu_1\nu_2=m} 1 \leqslant \tau_3(m).$$

Отсюда находим

$$\int_{T+1}^{T+H-1} \zeta(2+it)\varphi^2(2+it)dt = H-2+\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{a(m)}{m^2} \int_{T+1}^{T+H-1} m^{-it}dt =$$

$$= H + O(1).$$

Кроме этого, так как $T \notin S'$, то два последних интеграла в правой части (42) есть величина $O(HL^{-1})$. Таким образом, получаем:

$$\int_{T+1}^{T+H-1} \zeta(0,5+it)\varphi^2(0,5+it)dt = H + O\left(HL^{-1}\right).$$

Из (41) следует, что

$$I_3 \geqslant e^{-1}hH + O\left(hHL^{-1}\right). \tag{43}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_T^{T+H} \left(\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}|F(t+u)|du\right)^2 dt.$$

Имеем

$$\left(\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}|F(t+u)|du\right)^2 = h^2\left(\int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2}|F(t+vh)|dv\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant h^2 \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2}dv \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2}|F(t+vh)|^2dv <$$

$$< \sqrt{\pi}h^2 \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2}|F(t+vh)|^2dv.$$

Подставить это неравенство в формулу, определяющую I_1. Получаем:

$$I_1 \leqslant \sqrt{\pi}h^2 \int_T^{T+H} \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2}|F(t+vh)|^2dvdt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi}h^2 \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-v^2}dv \int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2dt \leqslant \pi h^2 \int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2dt.$$

Пользуясь приближенным функциональным уравнением $F(t)$ (лемма 9), приходим к неравенству

$$I_1 \ll h^2(J + HL^{-10}),$$

где

$$J = \int_{T-1}^{T+H+1} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt.$$

Далее, имеет место следующая последовательность соотношений:

$$J \ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((t-T)/H)^2} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt =$$

$$= H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-i(vH+T)} \right|^2 dv \leqslant$$

$$\leqslant H \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_2 \leqslant P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2 + ivH \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} dv =$$

$$= \sqrt{\pi} H \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_2 \leqslant P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right) =$$

$$= \sqrt{\pi} H \left(\Sigma_1 + |W_1'(T)| \right),$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_1'(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right).$$

Заметим, что здесь мы воспользовались следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-t^2 - iat\right) dt = \sqrt{\pi} \exp\left(-\left(\frac{a}{2} \right)^2 \right).$$

Сумма Σ_1 оценена в лемме 10 так:

$$\Sigma_1 = O\left(\frac{\ln P}{\ln Y} \right).$$

В силу (37) имеем:

$$|W_1'(T)| = |W_1(T) - Q_1(T)| \leqslant |W_1(T)| + |Q_1(T)| \leqslant 2H^{-0,2}.$$

Таким образом, получаем оценку сверху для I_1:

$$I_1 \ll h^2 H \left(\frac{\ln P}{\ln Y} + 2H^{-0,2} + L^{-10} \right) \ll 200 \varepsilon_1^{-1} h^2 H, \tag{44}$$

при достаточно большом X.

Оценим интеграл

$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} F(t+u) du \right|^2 dt.$$

Пользуясь леммой 9, находим

$$I_2 \ll \int_T^{T+H} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda) d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt + H h^2 L^{-10},$$

где

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{iu} du.$$

Оценим интеграл в правой части так же, как был оценен интеграл J:

$$I_2 \ll H \left(\Sigma_2 + W_2'(T) + h^2 L^{-10} \right), \tag{45}$$

где

$$\Sigma_2 = \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a^2(\lambda) d^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_2'(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant P} \frac{a(\lambda_1) d(\lambda_1) a(\lambda_2) \overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} e^{\left(-(H/2 \ln(\lambda_2/\lambda_1))^2 \right)}.$$

Оценим $d(\lambda)$ двумя разными способами. Тривиально, имеем

$$|d(\lambda)| \leqslant \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} du \leqslant 2h \int_0^{h_1/h} e^{-u^2} du < \sqrt{\pi} h.$$

Кроме того, если $0 < \lambda < P$, то

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \exp\left(iu \ln \frac{P}{\lambda} \right) du =$$

$$= h \int_{-h_1/h}^{h_1/h} e^{-u^2} \exp\left(iuh \ln \frac{P}{\lambda} \right) du =$$

$$= h \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2 + iuh \ln \frac{P}{\lambda} \right) du -$$

$$- h \int_{|u| > h_1/h} e^{-u^2} \exp\left(iuh \ln \frac{P}{\lambda} \right) du =$$

$$= \sqrt{\pi} h \exp\left(-\left(\frac{h}{2} \ln \frac{P}{\lambda} \right)^2 \right) - R_1,$$

где

$$|R_1| \leqslant 2 \left| h \int_{h_1/h}^{+\infty} e^{-u^2} \exp\left(iuh \ln \frac{P}{\lambda} \right) du \right| =$$

$$= 2 \left| -\frac{1}{ih \ln(P/\lambda)} \exp\left(-(h_1/h)^2 + ih_1 \ln \frac{P}{\lambda} \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{ih \ln(P/\lambda)} \int_{h_1/h}^{+\infty} \exp\left(iuh \ln \frac{P}{\lambda} \right) de^{-u^2} \right| \ll \left(h \ln \frac{P}{\lambda} \right)^{-1} e^{-(h_1/h)^2}.$$

Следовательно,

$$|d(\lambda)| \ll \min\left(h, h \exp\left(-\left(\frac{h}{2} \ln \frac{P}{\lambda} \right)^2 \right) + \left(\ln \frac{P}{\lambda} \right)^{-1} e^{-(h_1/h)^2} \right). \qquad (46)$$

Теперь оценим Σ_2. Разбивая суммирование по λ на две части и пользуясь для каждой их частей своей оценкой $|d(\lambda)|$, получаем

$$\Sigma_2 \ll \sum_{\lambda \leqslant PP_0^{-\alpha}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda} \left(h^2 \exp\left(-2 \left(\frac{h}{2} \ln \frac{P}{\lambda} \right)^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\ln \frac{P}{\lambda} \right)^{-2} \exp\left(-2 \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \right) \right) + h^2 \sum_{PP_0^{-\alpha} < \lambda \leqslant P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda}. \qquad (47)$$

Пользуясь тем, что

$$h = \frac{A}{\alpha \ln P_0}, \quad h_1 = 2h,$$

при $\lambda \leqslant PP_0^{-\alpha}$ получаем оценки

$$\frac{h}{2} \ln \frac{P}{\lambda} \geqslant \alpha \frac{h}{2} \ln P_0 = \frac{A}{2},$$

$$\left(\ln \frac{P}{\lambda} \right)^{-2} \leqslant (\alpha \ln P_0)^{-2} \leqslant \left(\frac{h}{A} \right)^2,$$

$$\sum_{\lambda \leqslant PP_0^{-\alpha}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda} \left(h^2 \exp\left(-2 \left(\frac{h}{2} \ln \frac{P}{\lambda} \right)^2 \right) + \left(\ln \frac{P}{\lambda} \right)^{-2} e^{-2(h_1/h)^2} \right) \ll$$

$$\ll \sum_{\lambda \leqslant PP_0^{-\alpha}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda} h^2 \left(e^{-\frac{A^2}{2}} + \frac{1}{A^2 e^4} \right) \ll h^2 \left(\frac{\ln P}{\ln Y} \right) h^2 \left(e^{-\frac{A^2}{2}} + \frac{1}{A^2 e^4} \right).$$

Здесь для оценки суммы по λ мы воспользовались леммой 10.

Вторая сумма по λ в правой части (47) оценена в лемме 10:

$$\sum_{PP_0^{-\alpha} < \lambda \leqslant P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda} < \sum_{P^{1-\alpha} < \lambda \leqslant P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda} \ll \frac{\alpha \ln P}{\ln Y}.$$

Таким образом, из (47) следует, что:

$$\Sigma_2 \ll h^2\frac{\ln P}{\ln Y}\left(e^{-\frac{A^2}{2}}+\frac{1}{A^2e^4}+\alpha\right) \ll h^2 200\varepsilon_1^{-1}\left(e^{-\frac{A^2}{2}}+\frac{1}{A^2e^4}+\alpha\right).$$

Для оценки суммы $W_2'(T)$ воспользуемся (37). Находим:

$$|W_1'(T)| = |W_2(T)-Q_2(T)| \leqslant |W_2(T)|+|Q_2(T)| \leqslant 2h^2H^{-0,2}.$$

Из (45) и оценок для Σ_2 и $W_2'(T)$ получаем:

$$I_2 \leqslant c_1h^2H\left(200\varepsilon_1^{-1}\left(e^{-\frac{A^2}{2}}+\frac{1}{A^2e^4}+\alpha\right)+2H^{-0,2}+L^{-10}\right).$$

Возьмем A и X такие большие, чтобы

$$c_1 200\varepsilon_1^{-1}\left(e^{-\frac{A^2}{2}}+\frac{1}{A^2e^4}\right) \leqslant \frac{1}{16e^2};$$

$$c_1 200\varepsilon_1^{-1}\left(2H^{-0,2}+L^{-10}\right) \leqslant \frac{1}{8e^2}.$$

Далее, возьмем α такое маленькое, чтобы

$$c_1 200\varepsilon_1^{-1}\alpha \leqslant \frac{1}{16e^2}.$$

Тогда имеем

$$I_2 \leqslant \frac{h^2H}{4e^2}. \tag{48}$$

Из (40), (43), (44) и (48) получаем неравенство

$$\mu(E) \geqslant c_2H, \quad c_2=c_2(\varepsilon_1)>0.$$

Разделим интервал $(T,T+H)$ на интервалы вида (nh_1,nh_1+h_1), где $n=\left[Th_1^{-1}\right],\left[Th_1^{-1}\right]+1,\cdots,\left[(T+H)h_1^{-1}\right]$. Из последнего неравенства следует, что по крайней мере $\left[c_2Hh_1^{-1}\right]-2$ из них содержит точку t из множества E. Если интервал (nh_1,nh_1+h_1) содержит точку t из множества E, то в интервале $(t-h_1,t+h_1)$, а следовательно, и в интервале (nh_1-h_1,nh_1+2h_1) содержится хотя бы один нуль нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$. Следовательно, нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$ на интервале $(T,T+H)$ не меньше, чем

$$\frac{1}{3}\left(\left[c_2Hh_1^{-1}\right]-2\right) \geqslant c_3H\ln T, c_3=c_3(\varepsilon_1)>0.$$

Тем самым, мы доказали, что каждый интервал $(T,T+H)$, где $T\in[X,X+X_1]\setminus(S^*\cup S^{**}\cup S'\cup V^*\cup V^{**})$, содержит не меньше $c_3H\ln T$ нулей функции $\zeta(0,5+it)$. Из следствий 1, 2 и (39) получаем:

$$\mu(S^*\cup S^{**}\cup S'\cup V^*\cup V^{**}) \ll X_1H^{-0,4},$$

откуда следует утверждение теоремы 1. □

2.3 Доказательство теоремы 2

Теорема **2.** *Пусть ε_2 — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon_2 < 0,01$, a — некоторая положительная постоянная. Пусть, далее,*

$$X \geqslant X_0(\varepsilon_2) > 0, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon_2}, \exp\left(\exp 2a\sqrt{\ln\ln X}\right) \leqslant H \leqslant X^{\varepsilon_2}.$$

Через E_2 обозначим множество тех значений T из промежутка $[X, X + X_1]$, для которых интервал $[T, T+H]$ содержит меньше, чем

$$H\left(\ln H\right)\exp\left(-a\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}\right)$$

нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$. Тогда для меры этого множества $\mu(E_2)$ справедлива оценка

$$\mu(E_2) \ll X_1 H^{-0,4},$$

где постоянная в знаке $\ll$ абсолютная.

Доказательство. Заметим, что при любом фиксированном δ с условием $0 < \delta < 1$ и $X^{\delta} \leqslant H \leqslant X^{\varepsilon_2}$, утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1. Поэтому будем предполагать, что $H \leqslant X^{\delta}$, где конкретное малое значение δ будет определено позднее.

Пусть $W_j(T)$ и $Q_j(T)$, $j = 1,2$ — суммы из лемм 16 и 17. Пусть далее S^*, S^{**}, V^* и V^{**} множества в следствиях 1 и 2.

Будем рассматривать числа T из множества

$$[X, X+X_1] \setminus \left(S^* \cup S^{**} \cup V^* \cup V^{**}\right).$$

Для них выполняются следующие неравенства:

$$\begin{gathered}|Q_1(T)| < H^{-0,4}; \quad |Q_2(T)| < h^2 H^{-0,4}, \\ |W_1(T)|^2 < H^{-0,4}; \quad |W_2(T)|^2 < h^4 H^{-0,4}. \end{gathered} \tag{49}$$

Введем следующие параметры

$$\ln\frac{1}{c} = \sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}, \quad h = \frac{1}{c\ln H}\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)},$$

$$h_1 = 2h\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)}, \quad \alpha = \frac{a_1}{\ln(1/c)}.$$

При $T \leqslant t \leqslant T+H$ рассматриваются интегралы $j_1(t)$ и $j_2(t)$:

$$j_1(t)=\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}\,|F(t+u)|\,du,\ j_2(t)=\left|\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}F(t+u)du\right|,$$

где $F(t)$ — функция Харди–Сельберга (см. лемму 9).

Обозначим через E подмножество интервала $[T,T+H]$, на котором выполняется $j_1(t)>j_2(t)$. Так как вне E два интеграла $j_1(t)$ и $j_2(t)$ равны, то имеем

$$\int_E j_1^\alpha(t)dt=\int_T^{T+H} j_1^\alpha(t)dt-\int_{\bar{E}} j_2^\alpha(t)dt\geqslant\int_T^{T+H} j_1^\alpha(t)dt-\int_T^{T+H} j_2^\alpha(t)dt;$$

то есть

$$I_1+I_2\geqslant I_3. \tag{50}$$

где

$$I_1=\int_E (j_1(t))^\alpha\,dt,\quad I_2=\int_T^{T+H}(j_2(t))^\alpha\,dt,\quad I_3=\int_T^{T+H}(j_1(t))^\alpha\,dt.$$

Оценим I_3 снизу. Сначало имеем

$$\left(\int_{-h_1}^{h_1}\exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2\right)|F(t+u)|du\right)^\alpha=$$

$$=h^\alpha\left(\int_{-h_1/h}^{h_1/h}\exp\left(-v^2\right)|F(t+vh)|dv\right)^\alpha\geqslant$$

$$\geqslant h^\alpha e^{-\alpha}\left(\int_{-1}^{1}|F(t+vh)|dv\right)^\alpha.$$

Далее, в силу неравенства Гельдера имеем

$$\int_{-1}^{1}|F(t+vh)|^\alpha dv\leqslant\left(\int_{-1}^{1}1dv\right)^{1-\alpha}\left(\int_{-1}^{1}|F(t+vh)|dv\right)^\alpha.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$(j_1(t))^\alpha\geqslant\frac{1}{2}h^\alpha e^{-\alpha}\int_{-1}^{1}|F(t+vt)|^\alpha\,dv.$$

Подставляя это неравенство в формулу, определяющую I_3, получаем

$$I_3\geqslant\frac{1}{2}h^\alpha e^{-\alpha}\int_T^{T+H}\int_{-1}^{1}|F(t+vh)|^\alpha dvdt\geqslant h^\alpha e^{-1}\int_{T+1}^{T+H-1}|F(t)|^\alpha dt. \tag{51}$$

Пусть $A=2[\ln^2 T]+1$. Рассмотрим функцию

$$f(s)=(s+iT-1)\zeta(s+iT)\varphi^2(s+iT)\exp\left(\left(\frac{s}{H}\right)^{2A}\right).$$

Функция $f(s)$ является целой. Далее, имеем

$$\left|\exp\left(\left(\frac{s}{H}\right)^{2A}\right)\right| = \exp\left(\Re\left(\frac{s}{H}\right)^{2A}\right),$$

$$(s)^{2A} = (\sigma+it)^{2A} = -\sum_{k=0}^{2A} i^{-k} C_{2A}^{k} t^{2A-k}\sigma^{k},$$

$$\Re s^{2A} = -t^{2A} + \sum_{k=1}^{A} (-1)^{k+1} C_{2A}^{2k} t^{2A-2k}\sigma^{2k}$$
$$= -t^{2A} + O\left(t^{2A-2}\right) \text{ при } t \longrightarrow \infty,$$

Кроме того, при $1/2 \leqslant \Re s \leqslant 2$ и $t \longrightarrow \infty$

$$(s+iT-1)\zeta(s+iT)\varphi^2(s+iT) = O(|t|^2), \left|\varphi^2(s)\right| = O(Y).$$

Таким образом,

$$|f(s)| \longrightarrow 0 \text{ при } |t| \longrightarrow +\infty \text{ равномерно по } \sigma.$$

Применим к функции $f(s)$ лемму 8. Полагая

$$a = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{\alpha}, b = 2, \mu = \frac{1}{2-\alpha}, p = \frac{\alpha}{2}, q = \frac{2-\alpha}{2}, \sigma = 2 - \frac{3\alpha}{4},$$

$$J(\sigma;\lambda) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma+it)|^{1/\lambda}\, dt\right)^{\lambda},$$

находим

$$J\left(2-\frac{3\alpha}{4};1\right) \leqslant J^{\alpha/2}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\alpha}\right) J^{(2-\alpha)/2}\left(2;\frac{1}{2-\alpha}\right). \tag{52}$$

Оценим $J\left(2-3\alpha/4;1\right)$ снизу. Имеем

$$J\left(2-\frac{3\alpha}{4};1\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f\left(2-\frac{3\alpha}{4}+it\right)\right| dt >$$

$$> \int_{0}^{0,5H} \left|\left(1-\frac{3\alpha}{4}+it+iT\right)\zeta\left(2-\frac{3\alpha}{4}+it+iT\right) \times\right.$$

$$\left.\times\, \varphi^2\left(2-\frac{3\alpha}{4}+it+iT\right)\exp\left(\Re\left(\frac{2-3\alpha/4+it}{H}\right)^{2A}\right)\right| dt \geqslant$$

$$\geqslant e^{-1}T\int_{0}^{0,5H} \left|\zeta\left(2-\frac{3\alpha}{4}+it+iT\right)\varphi^2\left(2-\frac{3\alpha}{4}+it+iT\right)\right| dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $0 \leqslant t \leqslant 0,5H$

$$\left|2-\frac{3\alpha}{4}+it\right| < H,$$

то

$$\left|\frac{2-3\alpha/4+it}{H}\right|^{2A}<1, \quad \exp\left(\Re\left(\frac{2-3\alpha/4+it}{H}\right)^{2A}\right)>e^{-1}.$$

Пусть $s=2-3\alpha/4+it+iT$, $0\leqslant t\leqslant 0,5H$. Воспользуемся простейшим приближением функции $\zeta(s)$. При $0<\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant 2$, $\pi x\geqslant|t_1|\geqslant 2\pi$, $s_1=\sigma+it_1$

$$\zeta(s_1)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{s_1}}+\frac{x^{1-s_1}}{s_1-1}+O\left(x^{-\sigma}\ln x\right).$$

Положим для нашего случая $x=2T$; найдем

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant 2T}\frac{1}{n^s}+O\left(T^{-1}\right).$$

Кроме этого,

$$\varphi(s)=\sum_{\nu<Y}\frac{\beta(\nu)}{\nu^s}; \quad \varphi(s)=O(1).$$

Поэтому

$$\zeta(s)\varphi(s)=\sum_{n\leqslant 2TY^2}\frac{c(m)}{m^s}+O\left(T^{-1}\right),$$

где

$$c(m)=\sum_{n\nu_1\nu_2=m}\beta(\nu_1)\beta(\nu_2).$$

Так как $\beta(1)=1$, то $c(1)=1$; так как $|\beta(\nu)|\leqslant 1$, $|c(m)|\leqslant\tau_3(m)$. Следовательно,

$$J\left(2-\frac{3\alpha}{4};1\right)\geqslant$$

$$\geqslant e^{-1}T\left|0,5H+\int_0^{0,5H}\sum_{2\leqslant m\leqslant 2TY^2}\frac{c(m)}{m^{2-3\alpha/4}}m^{-i(t+T)}dt+O\left(HT^{-1}\right)\right|\gg TH. \quad (53)$$

Оценим теперь $J\left(2;1/(2-\alpha)\right)$ сверху. Имеем

$$J\left(2;\frac{1}{2-\alpha}\right)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(2+it)|^{2-\alpha}dt\right)^{1/(2-\alpha)}.$$

Прежде всего,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(2+it)|^{2-\alpha}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(|1+it+iT|\times$$

$$\times\left|\zeta(2+it+iT)\varphi^2(2+it+iT)\right|)^{2-\alpha}\exp\left((2-\alpha)\Re\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right)dt\ll$$

$$\ll \int_{-\infty}^{+\infty} (|t| + T)^{2-\alpha} \exp\left((2-\alpha)\Re\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt.$$

Если $|t| \leqslant 0,5H$, то

$$\left|\Re\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right| < 1.$$

и, следовательно,

$$\int_{-0,5H}^{0,5H} (|t| + T)^{2-\alpha} \exp\left((2-\alpha)\Re\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt \ll T^{2-\alpha}H.$$

Если $|t| > 0,5H$, то

$$\Re(2+it)^{2A} = -t^{2A} - \sum_{n=1}^{A} C_{2A}^{2n}(-1)^n t^{2A-2n}2^{2n} \leqslant -\frac{1}{2}t^{2A}.$$

Следовательно,

$$\int_{|t|>0,5H} (|t| + T)^{2-\alpha} \exp\left((2-\alpha)\Re\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt \ll$$

$$\ll \int_{0,5H}^{+\infty} (|t| + T)^{2-\alpha} \exp\left(-\frac{2-\alpha}{2}\Re\left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right) dt \ll$$

$$\ll T^{2-\alpha}\int_{0,5H}^{T} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right) dt + \int_{T}^{+\infty} t^{2-\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right) dt \ll$$

$$\ll T^{2-\alpha}H\int_{0,5}^{+\infty} \exp\left(-0,5v^2\right) dv + H^{3-\alpha}\int_{T/H}^{+\infty} t^2 \exp\left(-0,5t^{2A}\right) \ll T^{2-\alpha}H.$$

Тем самым получили

$$J\left(2; 1/(2-\alpha)\right) \ll TH^{1/(2-\alpha)}. \tag{54}$$

Из (52) – (54) находим

$$TH \ll J^{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\alpha}\right)\left(TH^{1/(2-\alpha)}\right)^{(2-\alpha)/2}; \quad T^{\alpha/2}H^{1/2} \ll J^{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(1/2+it)|^{\alpha}\, dt \geqslant c_1 T^{\alpha} H,$$

где c_1 — абсолютная постоянная.

Далее имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(1/2+it)|^{\alpha}\,dt \leqslant \int_{-2H}^{+2H} |f(1/2+it)|^{\alpha}\,dt + \int_{|t|\geqslant 2H} |f(1/2+it)|^{\alpha}\,dt.$$

Оценим второй интеграл в правой части последнего неравенства сверху. Прежде всего

$$\left|f\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \leqslant \left|-\frac{1}{2}+i(t+T)\right|\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i(t+T)\right)\right| \times$$
$$\times\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+i(t+T)\right)\right|^{2}\exp\left(\Re\left(\frac{0,5+it}{H}\right)^{2A}\right).$$

При $|t|>2H$ имеем

$$\Re\,(0,5+it)^{2A} = -t^{2A} - \sum_{m=1}^{A} C_{2A}^{2m}(-1)^{m}t^{2A-2m}2^{-2m} \leqslant$$

$$\leqslant -t^{2A} + C_{2A}^{2}t^{2A-2} \leqslant -\frac{1}{2}t^{2A};$$
$$\exp\left(\Re\left(\frac{0,5+it}{H}\right)^{2A}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right).$$

Следовательно, пользуясь тривиальными оценками функций $\zeta(s)$ и $\varphi(s)$, приходим к неравенству

$$\int_{|t|>2H} |f(1/2+it)|^{\alpha}\,dt \ll \int_{2H}^{+\infty} (t+T)^{4\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant T^{4}\int_{2H}^{+\infty} t^{4}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right)dt = T^{4}H^{5}\int_{2}^{+\infty} t^{4}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^{2A}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2A}T^{4}H^{5}\int_{2^{2A}}^{+\infty}\exp\left(-\left(\frac{\alpha u}{2}\right)\right)u^{2/A+1/(2A)-1}du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2A}T^{4}H^{5}2^{-A}\int_{2^{2A}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha u}{2}\right)du \leqslant \frac{1}{\alpha A}T^{4}H^{5}2^{-A}.$$

По определению

$$A = 2\left[\ln^{2}T\right]+1,\, 1>\alpha \geqslant \frac{1}{\ln(1/c)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\ln\ln X}} \geqslant \frac{1}{\ln\ln 2T}.$$

Поэтому

$$\int_{|t|>2H} |f(1/2+it)|^\alpha \, dt \leqslant 0,5c_1T^\alpha H; \int_{-2H}^{2H} |f(1/2+it)|^\alpha \, dt \geqslant 0,5c_1T^\alpha H.$$

Вспоминая определение функции $f(s)$, перепишем это неравенство так

$$0,5c_1T^\alpha H \leqslant \int_{-2H}^{2H} |-0,5+i(t+T)|^\alpha \left|\zeta\left(0,5+i(t+T)\right)\right|^\alpha \times$$

$$\times \left|\varphi^2(0,5+it+iT)\right|^\alpha \exp\left(\alpha \Re\left(\frac{0,5+it}{H}\right)^{2A}\right) dt.$$

Если $|t| \leqslant 0,5H$, то

$$\left|\Re\left(\frac{0,5+it}{H}\right)^{2A}\right| \leqslant \left|\frac{0,5+it}{H}\right|^{2A} < 1.$$

А если $|t| > 0,5H$, то

$$\left|\Re\left(\frac{0,5+it}{H}\right)^{2A}\right| \leqslant \frac{-t^{2A}+C_{2A}^2t^{2A-2}}{H^{2A}} < 0.$$

Поэтому

$$\exp\left(\alpha \Re\left(\frac{0,5+it}{H}\right)^{2A}\right) \leqslant e.$$

Следовательно,

$$\frac{c_1}{2}T^\alpha H \leqslant e\int_{-2H}^{2H} \left|-\frac{1}{2}+i(t+T)\right|^\alpha \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i(t+T)\right)\right|^\alpha \left|\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+T)\right)\right|^\alpha dt \leqslant$$

$$\leqslant 2eT^\alpha \int_{-2H}^{2H} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i(t+T)\right)\right|^\alpha \left|\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+T)\right)\right|^\alpha dt;$$

$$\int_{-2H}^{2H} \left|\zeta(0,5+i(t+T))\varphi^2(0,5+i(t+T))\right|^\alpha dt \geqslant c_2H,$$

где $c_2 > 0$ — абсолютная постоянная. Так как $T_1 = T+0,5H$, $H_1 = 0,25H-0,5$ такие же по порядку роста, так T и H, то из этого неравенства следует

$$\int_{T+1}^{T+H-1} |F(t)|^\alpha dt = \int_{-2H_1}^{2H_1} |F(t+T_1)|^\alpha \, dt \geqslant c_3H,$$

где $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная. Из (51) и последнего неравенства находим

$$I_3 \geqslant e^{-1}c_3h^\alpha H. \tag{55}$$

Оценим I_1 сверху. Пользуясь неравенством Гельдера, находим

$$I_1 \leqslant (\mu(E))^{1-\alpha/2} \left(\int_T^{T+H} \left(\int_{-h_1}^{h_1} \exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2 \right) |F(t+u)| du \right)^2 dt \right)^{\alpha/2}.$$

Имеем

$$\left(\int_{-h_1}^{h_1} \exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2 \right) |F(t+u)| du \right)^2 =$$

$$= h^2 \left(\int_{-h_1/h}^{h_1/h} \exp\left(-v^2\right) |F(t+vh)| dv \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant h^2 \int_{-h_1/h}^{h_1/h} \exp\left(-v^2\right) dv \int_{-h_1/h}^{h_1/h} \exp\left(-v^2\right) |F(t+vh)|^2 dv \ll$$

$$\ll h^2 \int_{-h_1/h}^{h_1/h} \exp\left(-v^2\right) |F(t+vh)|^2 dv.$$

Таким образом, получаем:

$$I_1^{2/\alpha} \ll (\mu(E))^{2/\alpha-1} h^2 \int_T^{T+H} \int_{-h_1/h}^{h_1/h} \exp\left(-v^2\right) |F(t+vh)|^2 dv dt \leqslant$$

$$\leqslant (\mu(E))^{2/\alpha-1} h^2 \int_{-h_1/h}^{h_1/h} \exp\left(-v^2\right) dv \int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2 dt \ll$$

$$\ll (\mu(E))^{2/\alpha-1} h^2 \int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2 dt.$$

Пользуясь приближенным уравнением $F(t)$ (см. лемму 9), приходим к неравенству

$$\int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2 dt \ll \int_{T-1}^{T+H+1} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt + HX^{-0,2}.$$

Наконец, для интеграла в правой части последнего неравенства находим оценку

$$\int_{T-1}^{T+H+1} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt \ll \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2 \right) \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \left| \sum_{\lambda \leqslant P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-i(T+vH)} \right|^2 dv \ll H \left(\sum_{\lambda \leqslant P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda} + |W_1'(T)| \right),$$

где

$$W_1'(T) = \sum_{\lambda_1 \leqslant P} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant P} \frac{a(\lambda_1) a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

Сумма «диагональных слагаемых» оценена в лемме 10 так:

$$\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda}\ll\frac{\ln X}{\ln Y}.$$

Сумма «недиагональных слагаемых» $W_1'(T)$ оценим с помощью (49) так:

$$|W_1'(T)|=|W_1(T)-Q_1(T)|\leqslant|W_1(T)|+|Q_1(T)|<2H^{-0,2}.$$

Таким образом, получаем

$$I_1\leqslant c_4^{\alpha/2}(\mu(E))^{1-\alpha/2}h^{\alpha}H^{\alpha/2}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{\alpha/2}, c_4>0. \tag{56}$$

Перейдем к оценке I_2. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$I_2\leqslant H^{1-\alpha/2}\left(\int_T^{T+H}\left|\int_{-h_1}^{h_1}\exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2\right)F(t+u)du\right|^2dt\right)^{\alpha/2}.$$

Опять пользуясь леммой 9, находим

$$\int_T^{T+H}\left|\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}F(t+u)du\right|^2dt\leqslant\int_T^{T+H}\left|\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{a(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2dt+$$

$$+HX^{-0,2}h^2\leqslant e\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-((t-T)/H)^2}\left|\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{a(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2dt+HX^{-0,2}h^2\ll$$

$$\ll H\left(\Sigma+W_2'(T)+h^2X^{-0,2}\right),$$

где

$$\Sigma=\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{|a(\lambda)d(\lambda)|^2}{\lambda},\quad d(\lambda)=\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du,$$

и

$$W_2'(T)=\sum_{\lambda_1\leqslant P}\sum_{\lambda_1<\lambda_2\leqslant P}\frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)a(\lambda_2)\overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2}.$$

Теперь оценим Σ. Разбивая суммирование по λ на две части и пользуясь неравенством (46), получаем

$$\Sigma\ll\sum_{\lambda\leqslant PH^{-4c}}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda}\left(h^2\exp\left(-2\left(\frac{h}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)^2\right)+\left(\ln\frac{P}{\lambda}\right)^{-2}e^{-2(h_1/h)^2}\right)+$$

$$+h^2\sum_{PH^{-4c}<\lambda\leqslant P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda}. \tag{57}$$

Пользуясь тем, что

$$h = \frac{1}{c\,(\ln H)}\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)}, \quad h_1 = 2h\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)},$$

при $\lambda \leqslant PH^{-4c}$ получаем оценки

$$\frac{h}{2}\ln\frac{P}{\lambda} \geqslant 2ch\,(\ln H) = 2\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)} = \frac{h_1}{h},$$

$$\left(\ln\frac{P}{\lambda}\right)^{-2} \leqslant (4c\,(\ln H))^{-2} \leqslant h^2,$$

$$\sum_{\lambda \leqslant PH^{-4c}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda}\left(h^2\exp\left(-2\left(\frac{h}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)^2\right) + \left(\ln\frac{P}{\lambda}\right)^{-2} e^{-2(h_1/h)^2}\right) \ll$$

$$\ll h^2\exp\left(-8\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)\right)\sum_{\lambda \leqslant P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} \ll h^2\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7}. \qquad (58)$$

Заметим, что здесь мы воспользовались оценкой из леммы 10

$$\sum_{\lambda \leqslant P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} = O\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right).$$

Опять в сулу леммы 10 имеет место оценка второй суммы по λ в правой части (57):

$$\sum_{PH^{-4c} < \lambda \leqslant P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} \ll \frac{c\ln H}{\ln Y}. \qquad (59)$$

Из (57) – (59) получаем

$$\Sigma \ll h^2\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7} + \frac{c\ln H}{\ln Y}\right) \qquad (60)$$

Сумма $W_2'(T)$ оценим с помощью (49) так:

$$|W_2'(T)| = |W_2(T) - Q_2(T)| < 2h^2H^{-0{,}2}.$$

Таким образом, имеем

$$I_2 \leqslant h^\alpha H\left(c_5\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7} + \frac{c\ln H}{\ln Y} + 2H^{-0{,}2}\right)\right)^{\alpha/2},$$

где $c_5 > 0$ — абсолютная постоянная.

Так как $Y = H^{0,01}$, то
$$\frac{c \ln H}{\ln Y} = 100c.$$
Далее,
$$c \geqslant \left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7},$$
так как это эквивалентно таким неравенствам:
$$\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{7} \geqslant \frac{1}{c}; \quad 7 \ln \left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right) \geqslant \ln \frac{1}{c} = \sqrt{\ln \left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}.$$
Кроме этого,
$$c \geqslant H^{-0,2},$$
так как
$$H^{0,2} \geqslant \frac{1}{c}; \quad 0,2 \ln H \geqslant \ln \left(\frac{1}{c}\right) = \sqrt{\ln \left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}; \quad H \geqslant (\ln X)^{1000}.$$
Из приведенных оценок следует, что
$$\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7} + \frac{c \ln H}{\ln Y} + 2H^{-0,2} \leqslant 103c.$$
Поэтому оценку I_2 можно переписать так:
$$I_2 \leqslant H h^{\alpha} \left(103 c c_5\right)^{\alpha/2} = H h^{\alpha} e^{\frac{\alpha}{2} \ln(103 c c_5)}.$$
Будем считать параметр δ таким, что выполняется неравенство
$$\sqrt{\ln(1/\delta)} \geqslant 2 \ln(103 c_5). \tag{61}$$
Тогда имеем
$$\ln(103 c c_5) = -\left(\ln \frac{1}{c} - \ln(103 c_5)\right) =$$
$$= -\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{c} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{c} - \ln(103 c_5)\right) \leqslant -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{c},$$
Так как $H \leqslant X^{\delta}$, то
$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \sqrt{\ln \left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)} \geqslant \frac{1}{2} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \geqslant \ln(103 c_5).$$
Следовательно,
$$\ln(103 c c_5) \leqslant -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{c}.$$

В силу
$$\alpha = \frac{a_1}{\ln(1/c)}$$
следует, что
$$I_2 \leqslant h^\alpha H e^{-a_1/4}.$$
Подставляя (55), (56) и это неравенство в (50), получаем:
$$\left(e^{-1}c_3 - e^{-a/4}\right) H^{1-\alpha/2} \leqslant c_4^{\alpha/2} \mu(E)^{1-\alpha/2} \left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{\alpha/2}.$$
Без ограничения общности можно считать $c_3 < e^{-1}$. Число a_1 найдем из уравнения
$$e^{-a_1/4} = e^{-2}c_3$$
Ясно, что $a_1 \geqslant 12$. По заданному теперь a_1 определим положительную константу δ, как наибольшее число, удовлетворяющее условию (61) и неравенству
$$\frac{a_1}{\sqrt{\ln(1/\delta)}} \leqslant \frac{1}{2},$$
т. е. возьмем
$$\delta = \min\left(0,01; e^{-4a_1^2}; e^{-4\ln^2(103c_5)}\right).$$
Тогда при $H \leqslant X^\delta$ выполняются неравенства
$$\ln\frac{1}{c} = \sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)} \geqslant \sqrt{\ln\frac{1}{\delta}} \geqslant 2a_1; \quad 0 < \alpha = \frac{a_1}{\ln(1/c)} \leqslant \frac{1}{2}.$$
Таким образом,
$$\mu(E) \geqslant c_4^{-\alpha/(2-\alpha)} (e^{-2}c_3)^{2/(2-\alpha)} H \left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha/(2-\alpha)}.$$
Так как $0 < \alpha \leqslant 1/2$, то из этого неравенства находим
$$\mu(E) \geqslant c_6 H \left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha}. \qquad (62)$$

Разделим интервал $(T, T+H)$ на интервалы вида $(nh_1, nh_1 + h_1)$, где $n = \left[Th_1^{-1}\right], \left[Th_1^{-1}\right] + 1, \cdots, \left[(T+H)h_1^{-1}\right]$. Из последнего неравенства следует, что по крайней мере
$$\left[c_6 H \left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha} h_1^{-1}\right] - 2$$
из них содержит точку t из множества E. Если интервал $(nh_1, nh_1 + h_1)$ содержит точку t из множества E, то в интервале $(t - h_1, t + h_1)$, а следовательно,

и в интервале $(nh_1 - h_1, nh_1 + 2h_1)$ содержится хотя бы один нуль нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$. Следовательно, нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$ на интервале $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$\frac{1}{3}\left(\left[c_6\frac{H}{h_1}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha}\right] - 2\right) \geqslant c_7\frac{H}{h_1}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha}.$$

Так как

$$h_1 = \frac{1}{c\,(\ln H)}\ln\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right), \alpha = \frac{a_1}{\ln(1/c)}, \ln\frac{1}{c} = \sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}, Y = H^{0,01},$$

то

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H\,(\ln H)\,e^{-R},$$

где

$$R = \sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)} + \ln\ln R_1 + \alpha\ln R_1, \quad R_1 = \frac{\ln X}{\ln Y}.$$

Так как

$$\ln\ln(R_1) = \ln\ln\left(100\frac{\ln X}{\ln H}\right) < \sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)},$$

$$\alpha\ln R_1 = \frac{a_1\ln\left(100\frac{\ln X}{\ln H}\right)}{\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}} < 2a_1\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)},$$

то

$$R \leqslant (2+2a_1)\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)};$$

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H\,(\ln H)\exp\left(-a\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}\right),$$

где $a > 0$ — абсолютная постоянная.

Тем самым, мы доказали, что каждый интервал $(T, T+H)$, где $T \in [X, X+X_1] \setminus (S^* \cup S^{**} \cup V^* \cup V^{**})$, содержит не меньше

$$H\,(\ln H)\exp\left(-a\sqrt{\ln\left(\frac{\ln X}{\ln H}\right)}\right)$$

нулей функции $\zeta(0,5+it)$. Из следствия 1 и 2 получаем:

$$\mu(S^* \cup S^{**} \cup V^* \cup V^{**}) \ll X_1 H^{-0,4},$$

откуда следует утверждение теоремы 2. $\square$

2.4 Выводы по второй главе

В этой главе с помощью метода А. А. Карацубы доказано что почти все очень короткие промежутки критической прямой содержат, правильно по порядку, число нулей дзета-функции Римана, которые асимптотически, с точностью до константы описывается формулой Мангольдта.

3 Глава 3: Нули дзета-функции Римана в окрестности критической прямой

3.1 Вспомогательные леммы

Лемма **18.** *Пусть* ε *— произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \varepsilon < 0,01$, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^{\varepsilon}$, $Y = H^{0,01}$, $X_1 = X^{7/8+\varepsilon}$. *При натуральных числах* m, m_1, m_2 *положим*

$$D(m_1, m_2) = a(m_1)a(m_2)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right),$$

$$W(T) = \sum_{m_1 < PY}\sum_{m_1 < m_2} D(m_1, m_2),$$

где $P = \sqrt{T/(2\pi)}$*; числа* $a(m)$ *определены в (9).*

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2\, dT \ll \frac{X_1 Y^{10} L^9}{H},$$

где $L = \ln X$*; постоянная в знаке* $\ll$ *абсолютная.*

Доказательство. Если

$$\frac{m_2}{m_1} > 1 + \frac{L}{H},$$

то

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{L^2}{64}\right).$$

С другой стороны

$$\delta(\nu) = \sum_{r\nu < Y}\frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)}\left(\sum_{r<Y}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\mu(\nu)}{\varphi(\nu)}\sum_{\substack{r\nu < Y\\ (r,\nu)=1}}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\left(\sum_{r<Y}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1} < \frac{1}{\varphi(\nu)}.$$

Таким образом, тривиально оценивая часть суммы $W(T)$, отвечающую таким слагаемым, у которых

$$m_2 > m_1(1 + \frac{L}{H}),$$

имеем

$$\sum_{\substack{m_1 < PY\\ m_2 > m_1(1+\frac{L}{H})}} D(m_1, m_2) \ll \sum_{\nu_1,\nu_2 < Y}\ \sum_{\substack{n_1\nu_1 < n_2\nu_2 < PY\\ n_2\nu_2 > n_1\nu_1(1+\frac{L}{H})}}\frac{\sqrt{\nu_1\nu_2}}{\sqrt{n_1 n_2}}e^{-\frac{L^2}{64}} = O\left(\exp(-0,01L^2)\right).$$

Следовательно,

$$|W(T)|^2 \ll \left|\sum_{\nu_1,\nu_2<Y} S(\nu_1,\nu_2)\right|^2 + O(e^{-0{,}02L^2}),$$

где

$$S(\nu_1,\nu_2) = \sum_{n_1\leqslant PY/\nu_1}\ \sum_{n_1\nu_1<n_2\nu_2\leqslant n_1\nu_1(1+\frac{L}{H})} D\left(n_1\nu_1, n_2\nu_2\right).$$

Далее, применяя неравенство Коши к сумме по ν_1, ν_2, получим

$$|W(T)|^2 \ll Y^2 \sum_{\nu_1,\nu_2<Y} |S(\nu_1,\nu_2)|^2 + O(e^{-0{,}02L^2}).$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2\, dT \ll$$

$$\ll Y^6 \int_X^{X+X_1} \left|\sum_{n_1\leqslant PY/\nu_1}\ \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n},T)\right|^2 dT + O(X_1 e^{-0{,}02L^2}),$$

где

$$\Phi(\overline{n},T) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right),$$

$\alpha = Y/\nu_1$, $\beta = \nu_1/\nu_2$ и ν_1, ν_2 — некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y. Пусть $P_0 = \sqrt{X/(2\pi)}$. Разбивая промежуток суммирования по n_1 на два промежутка точкой $P_0\alpha$, приходим к неравенству:

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2\, dT \ll Y^6(G_1+G_2), \tag{63}$$

где

$$G_1 = \int_X^{X+X_1} \left|\sum_{n_1\leqslant P_0\alpha}\ \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n},T)\right|^2 dT,$$

$$G_2 = \int_X^{X+X_1} \left|\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha}\ \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \Phi(\overline{n},T)\right|^2 dT.$$

Оценим G_2 сверху. Пусть $P_2 = \sqrt{(X+X_1)/(2\pi)}$, $M = [P_2\alpha]+1$. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i l(n-n')}{M}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = n',\\ 0, & \text{если } n \neq n',\end{cases}$$

преобразуем подынтегральную сумму в G_2 так:

$$\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha}\ \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}\Phi(\overline{n},T)=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\ \sum_{P_0\alpha<n_1'\leqslant P\alpha}\exp\left(-\frac{2\pi i\,(n_1'l)}{M}\right)K(l,T), \tag{64}$$

где

$$K(l,T)=\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant P_2\alpha}\ \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}\Phi(\overline{n},T)\exp\left(\frac{2\pi i n_1 l}{M}\right).$$

Для внутренней суммы по n_1' в правой части (64) справедлива следующая оценка:

$$\left|\sum_{P_0\alpha<n_1'\leqslant P\alpha}\exp\left(-\frac{2\pi i n_1' l}{M}\right)\right|\ll\frac{M}{l+1}.$$

Из равенства (64) следует, что:

$$\sum_{\substack{P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha\\ n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}}\Phi(\overline{n},T)\ll\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{l+1}\left|K(l,T)\right|.$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$\left|\sum_{\substack{P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha\\ n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}}\Phi(\overline{n},T)\right|^2\ll L\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{l_1+1}\left|K(l,T)\right|^2.$$

Следовательно,

$$G_2\leqslant L\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{l+1}\int_X^{X+X_1}\left|K(l,T)\right|^2dT\leqslant L^2\int_X^{X+X_1}\left|K(l',T)\right|^2dT,$$

где $0\leqslant l'<M$ — некоторое фиксированное натуральное число. Вспоминая определение $K(l,T)$, получим

$$G_2\ll L^2J,$$

где

$$J=\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant P_2\alpha}\ \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right)\exp\left(\frac{2\pi i n_1 l'}{M}\right)\right|^2dT.$$

Интеграл J оценен в лемме 14 так:

$$J \ll \frac{X_1 Y^2 L^3}{H}.$$

Следовательно,

$$G_2 \ll \frac{X_1 Y^2 L^5}{H}. \tag{65}$$

Рассмотрим G_1. Разобьем промежуток суммирования по n_1 в G_1 на $\ll L$ промежутки вида $N < n_1 \leqslant N_1 \leqslant 2N$, $N \leqslant P_0\alpha$. Приходим к неравенству:

$$G_1 \ll L^2 I,$$

где

$$I = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\leqslant N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+\frac{L}{H})} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2} \right|^2 dT.$$

Интеграл I оценен в лемме 14 так:

$$I \ll \frac{X_1 Y^4 L^7}{H}.$$

Следовательно,

$$G_1 \ll \frac{X_1 Y^4 L^9}{H}. \tag{66}$$

Утверждение леммы следует из (63), (65) и (66). □

Следствие **3.** *Пусть S — множество тех T из интервала $[X, X+X_1]$, для которых выполняется неравенство*

$$|W(T)|^2 \geqslant H^{-0,4}.$$

Тогда для меры множества S справедлива оценка

$$\mu(S) \leqslant X_1 H^{-0,4}.$$

Доказательство следствия 3 проводится по аналогии с доказательством следствия 1 главы 2.

Лемма **19.** *Пусть ε — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 0,01$, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^\varepsilon$, $Y = H^{0,01}$, $X_1 = X^{7/8+\varepsilon}$. При натуральных числах m, m_1, m_2 положим*

$$D(m_1, m_2) = a(m_1)a(m_2)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right),$$

$$Q(T) = \sum_{m_1 \leqslant PY} \sum_{PY < m_2} D(m_1, m_2),$$

где $P = \sqrt{T/(2\pi)}$*; числа* $a(m)$ *определены в (9).*

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\int_X^{X+X_1} |Q(T)|\, dT \ll \frac{X_1 Y^2 L^7}{H}$$

где $L = \ln X$*; постоянная в знаке* $\ll$ *абсолютная.*

Доказательство. Пусть $P_0 = \sqrt{X/(2\pi)}$. Легко видеть, что часть суммы $Q(T)$, отвечающая таким слагаемым, у которых

$$m_1 \leqslant P_0 \left(1 + \frac{L}{H}\right)^{-1} \text{ или } m_2 > P_0 \left(1 + \frac{L}{H}\right),$$

есть величина $O\left(e^{-0{,}01L^2}\right)$. Поэтому имеем

$$Q(T) = \sum_{\frac{P_0}{1+\frac{L}{H}} < m_1 \leqslant PY} \sum_{PY < m_2 \leqslant P_0(1+\frac{L}{H})} D(m_1, m_2) + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right).$$

Из определения числа $a(m)$ (см. (9)) и последнего равенства следует:

$$|Q(T)| \leqslant \sum_{\nu_1, \nu_2 < Y} \left| \sum_{\frac{P_0}{\nu_1\left(1+\frac{L}{H}\right)} < n_1 \leqslant PY/\nu_1} \sum_{PY/\nu_2 < n_2 \leqslant P_0/\nu_2(1+\frac{L}{H})} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2\nu_2}{n_1\nu_1}\right)\right)^2} \right| + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right).$$

Поэтому будем иметь

$$\int_X^{X+X_1} |Q(T)|\, dT \leqslant Y^2 I + \left(X_1 e^{-0{,}01L^2}\right),$$

где

$$I = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{\substack{\frac{P_0}{\nu_1(1+\frac{L}{H})} < n_1 \leqslant PY/\nu_1 \\ PY/\nu_2 < n_2 \leqslant P_0/\nu_2(1+\frac{L}{H})}} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2\nu_2}{n_1\nu_1}\right)\right)^2} \right| dT,$$

$0 < \nu_1, \nu_2 < Y$ — некоторые фиксированные числа. Интеграл I оценен в лемме 15 так

$$I \ll X_1 L^7 H^{-1}.$$

Откуда следует утверждение леммы. $\square$

Следствие **4.** *Пусть V — множество тех T из интервала $[X, X+X_1]$, для которых выполняется неравенство*

$$|Q(T)| \geqslant H^{-0,4}.$$

Тогда для меры множества V справедлива оценка

$$\mu(V) \leqslant X_1 H^{-0,4}.$$

Следствие 4 доказывается по аналогии с доказательством следствия 1 главы 2.

3.2 Доказательство теоремы 3

Теорема **3.** *Пусть ε_3 — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon_3 < 0,01$, и пусть $c_3 = c_3(\varepsilon_3) > 0$ — некоторая постоянная,*

$$X > X_0(\varepsilon_3) > 0, \quad H = X^{\varepsilon_3}, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon_3}.$$

При $0,5 < \sigma < 1$ обозначим через E_3 множество тех T из промежутка $[X, X+X_1]$, для которых неравенство

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \leqslant c_3 \frac{H}{\sigma - 0,5}$$

не выполняется. Тогда для меры этого множества $\mu(E_3)$ справедлива оценка:

$$\mu(E_3) \ll X_1 H^{-0,4},$$

где постоянная в знаке $\ll$ абсолютная.

Доказательство. Пусть $W(T)$ и $Q(T)$ — суммы в леммах 18 и 19. Пусть, далее, S и V множества в следствиях 3 и 4.

Будем рассматривать числа T из множества $[X, X+X_1] \setminus (S \cup V)$. Для них выполняются неравенства

$$|W(T)|^2 < H^{-0,4}, \ |Q(T)| < H^{-0,4}. \tag{67}$$

Введем теперь функцию

$$f(s) = \sum_{\nu < Y} \delta(\nu) \nu^{1-s},$$

где числа $\delta(\nu)$ определены в лемме 13.

Воспользуемся неравенством, вывод которого содержится в работе [4, с. 53]:

$$2\pi \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma \leqslant \frac{H}{2} \ln\left(\frac{J}{H}\right) + O(\ln T),$$

где

$$J = \int_T^{T+H} |\zeta(0,5+it)|^2 \, |f(0,5+it)|^2 \, dt.$$

Пользуясь приближенным функциональным уравнением $\zeta(s)$ (лемма 12), получаем

$$J \leqslant 8J_1 + O\left(HT^{-0,5}YL^4\right),$$

где

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{n \leqslant P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} \right|^2 |f(0,5+it)|^2 \, dt.$$

Вспоминая определение $f(s)$, можно переписать J_1 так:

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{m \leqslant PY} a(m) m^{it} \right|^2 dt,$$

где числа $a(m)$ определены в (9). Имеет место цепочка соотношений

$$J_1 \leqslant e \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{m \leqslant PY} a(m) m^{it} \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant eH \sum_{m_1, m_2 \leqslant PY} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-v^2 - ivH \ln \frac{m_1}{m_2}\right) dv =$$

$$= e\sqrt{\pi} H \sum_{m_1, m_2 \leqslant PY} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant e\sqrt{\pi} H \left(\Sigma + 2\left|W'(T)\right|\right),$$

где

$$\Sigma = \sum_{m < PY} a^2(m),$$

и

$$W'(T) = \sum_{m_1 < m_2 < PY} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2}{m_1}\right)^2\right).$$

Сумма Σ оценена в лемме 13 так:

$$\Sigma = O(1).$$

$W'(T)$ оценивается с помощью (67):

$$|W'(T)| = |W(T) - Q(T)| \leqslant 2H^{-0,2}.$$

Таким образом, справедливы следующие неравенства:

$$J_1 = O(H), \quad J = O(H), \quad \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma = O(H).$$

Пусть $\sigma > 0,5$ и $\sigma_1 = 0,5 + 0,5(\sigma - 0,5) < \sigma$. Определяем

$$g(\alpha) = N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T).$$

Заметим, что $g(\alpha_2) \leqslant g(\alpha_1)$ при $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Отсюда следует, что

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \leqslant \frac{1}{\sigma - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sigma - 0,5} \int_{0,5}^{1} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) d\alpha = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right).$$

Тем самым мы доказали неравенство

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \ll \left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right)$$

справедливо для всех T из множества $[X, X + X_1] \setminus (S \cup V)$. В силу следствия 3 имеем

$$\mu(S \cup V) \ll X_1 H^{-0,4},$$

откуда следует утверждение теоремы 3. □

3.3 Выводы по третьей главе

В этой главе доказана теорема о количестве нулей дзета-функции Римана в узкой окрестности критической прямой. Результат является новым и уточняет результаты А. А. Карацубы и Л. В. Киселевой.

Заключение

В диссертации исследовано распределение нулей $\zeta(s)$ на критической прямой и в окрестности этой прямой. Показано, что для почти всех $T \in [X, X^{7/8+\varepsilon}]$, $0 < \varepsilon < 0,01$, промежуток $[T, T + X^{\varepsilon}]$ критической прямой содержит правильное по порядку количество нулей дзета-функции Римана. Также получен аналогичный результат для почти всех промежутков критической прямой длины существенно меньше X^{ε}. В этом случае оценка снизу числа нулей функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих в таких коротких промежутках, слабее той, которая получена А. Сельбергом в 1942 г., но точнее классической оценки Харди-Литтлвуда 1921 года. Изучена функция $N(\sigma, T)$ — число нулей функции $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике $1/2 < \sigma \leqslant \Re(s) < 1$, $0 < \Im(s) \leqslant T$. Получена равномерная оценка по σ величины $N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T)$ для почти всех $T \in [X, X^{7/8+\varepsilon}]$, $0 < \varepsilon < 0,01$.

Основанием доказательств результатов диссертации является оценка сверху для специальной кратной тригонометрической суммы. Отметим, что длину отрезка осреднения $X_1 = X^{\theta}$, $\theta > 7/8$ определяет оценка этой тригонометрической суммы. Перспективной для дальнейших исследований представляется задача об уменьшении длины отрезка осреднения. Метод исследования нулей $\zeta(s)$, использованный в настоящей работе, можно применить в задачах о нулях рядов Дирихле, имеющих эйлерово произведение.

Список литературы

[1] Риман Б. Сочинения// М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 479 с.

[2] Hardy G.H. "Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$// Comp. Rend. Acad. Sci., 1914.vol. 158. pp. 1012-1014.

[3] Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Mathematische Zeitschrift. 1921. Vol. 10. pp. 283-317.

[4] Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10. pp. 1-59.

[5] Карацуба А.А., Королёв М. А. Аргумент дзета-функции Римана// УМН. 2005 Т. 60, №3. С. 41-96.

[6] Levinson N. More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$// Adv. in Math. 1974, v. 13, p. 383-436.

[7] Conrey B. More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line// J. Reine Angew. Math. 1989. Vol. 399. pp. 1-26.

[8] Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, №3. С. 569-584.

[9] Карацуба А. А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, вып. 6. С. 1214-1224.

[10] Карацуба А. А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56,№2. С. 372-397.

[11] Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985 Т. 49, вып. 2. С. 326–333.

[12] Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157. С. 49-63.

[13] Карацуба А. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 167, С. 167-178.

[14] Карацуба А. А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2+it)$ // УМН. 1985. Т. 40, №4. С. 171-172.

[15] Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40, №5. С. 23-82.

[16] Карацуба А. А. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1996. Т.60, №3. С. 448–449.

[17] Киселева Л. В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на "почти всех" коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 479-500.

[18] Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$// Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958. Т. 22, вып. 2. С. 161-164.

[19] Littlewood J. E. On the zeros of the Riemann zeta-function// Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1924 Vol. 22. pp 295-318 doi:10.1017/S0305004100014225

[20] Selberg A. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. 1946. Vol. 48. № 5. pp. 89-155.

[21] Киселева Л. В. О распределении нулей функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой// Матем. заметки. 1988. Т. 43, вып. 1. С. 3-11.

[22] Киселева Л. В. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой// Матем. заметки. 1989 Т. 46, вып. 4. С. 114–115.

[23] Королёв М. А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой// Изв. РАН. Сер. матем., 2003. Vol.67, №2. С. 21–60.

[24] Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР 1962. Т. 65. С. 3-212.

[25] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана // М.: Мир, 1953. 406 с.

[26] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. // М.: Физматлит, 1994. 376 с.

[27] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.

[28] Gabriel R. M. Some results concerning the intergrals of moduli of regular functions along certain curves// J. London Math. Soc. 1927. vol. 2. P. 112-117.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. До Дык Там О распределении нулей линейных комбинаций L- функций Дирхле, лежащих на критической прямой// Научные ведомости БелГУ Серия: Математика. Физика 2015. № 5(202) вып. 38. С. 38-43.

2. До Дык Там Распределение нулей, лежащих на критической прямой, линейных комбинаций L-функций Дирихле// Чебышевский сборник. 2015. № 16, вып. 3. С.183-208.

3. До Дык Там Об одной задаче А.А. Карацубы// Научные ведомости БелГУ Серия: Математика. Физика 2016. № 6(227) вып. 42. С. 70-76.

4. До Дык Там О нулях дзета-функции Римана, лежащих на почти всех очень коротких промежутках критической прямой// Научные ведомости БелГУ Серия: Математика. Физика 2016. №13(234) вып. 43. С. 59-66.

5. До Дык Там О количестве нулей $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой// Научные ведомости БелГУ Серия: Математика. Физика 2016. № 13(234) вып. 43. С. 67-71.

6. До Дык Там О нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой// Чебышевский сборник. 2016. №. 17, вып. 1. С. 71-89.

7. До Дык Там О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих в «почти всех» очень коротких промежутках окрестности критической прямой// Чебышевский сб., 2016. №. 17, вып. 3. С 106-124.