Научно-практический электронный журнал
Оригинальные исследования (ОРИС), *ISSN 2222-0402*
www.ores.su
original-research.ru

УДК: 314; 330.81

ПЬЕР ФРАНСУА ФЕРХЮЛЬСТ – ЗАБЫТЫЙ ПЕРВООТКРЫВАТЕЛЬ ЗАКОНА ЛОГИСТИЧЕСКОГО РОСТА И ОДИН ИЗ ОСНОВАТЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Московкин Владимир Мхайлович
доктор географических наук
профессор кафедры мировой экономики
НИУ «БелГУ», Белгород

Журавка Андрей Викторович
кандидат экономических наук
доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий
Харьковского национального универститета строительства и архитектуры, Харьков (Украина)

Аннотация

Дан детальный анализ научного творчества Пьера - Франсуа Ферхюльста в области построения математической теории динамики народонаселения, показано влияние Мальтуса и Кетле на его научные взгляды. Сделан вывод, что Ферхюльст является не только незаслуженно забытым первооткрывателем логистического закона роста, который сейчас используется во многих областях знаний, но и одним из основателей экономической динамики. Статья является перепечаткой одноименной статьи, опубликованной в 2003 году в журнале "Наука и науковедение" (Киев), в связи с отсутствием по вине издательства целой журнальной полосы (стр. 77) и возникшему в 2020 году большому интересу к работам Ферхюльста из-за пандемии COVID-19.

Ключевые слова: П.Ф. Ферхюльст, Т.Р. Мальтус, А. Кетле, логистичекая функция, логистическая кривая, экономическая динамика.

PIERRE FRANCOIS VERHULST – THE FORGOTTEN PIONEER OF THE LAW OF LOGISTIC GROWTH AND ONE OF THE CREATORS OF ECONOMIC DYNAMICS

Vladimir M. Moskovkin
Doctor of Geographical Sciences,
professor of World Economy Department
Belgorod State University, Belgorod (Russia)

Andrey V. Zhuravka
Candidate of Economical Sciences,
Associate Professor of Economic Cybernetics and Information
Technology Department Kharkov National University of Civil Engineering and Architecture, Kharkov (Ukraine)

ABSTRACT

In the article a detailed analysis of the scientific work of Pierre-Francois Verhulst in the field of constructing a mathematical theory of population dynamics was given, an influence of Malthus and Quetelet on his scientific views was shown. It was concluded that Verhulst is not only the undeservedly forgotten pioneer of the logistic law of growth, which is now used in many fields of knowledge, but also one of the creators of economic dynamics. This article is a reprint of the article of the same name published in 2003 in the journal “Nauka i naukovedeniye” (in Russian; Kiev) as a consequence of a lack of the whole journal page (p. 77) at a publisher’s fault and a great interest in Verhulst's works arose in 2020 due to the COVID-19 pandemic.

Key words: P.F. Verhulst, T.R. Malthus, A. Quetelet, logistic function, logistic curve, economic dynamics.

Предисловие к переиданию работы [1]

Нами в начале нулевых годов удалось воссоздать любопытную историю по открытию Ферхюльстом логистичекого закона роста народонаселения, после того, как мы разыскали в "Ленинке" не известную нас его франкоязычную работу 1838 года, перевели ее на русский язык и детально проанализировали в работе: Московкин В.М., Журавка А.В. "Пьер-Франсуа Верхульст - забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей экономической динамики", опубликованной в ведущем постсоветском науковедческом журнале "Наука и науковедение" [1].

Вернувшись через 17 лет к этой теме, в связи в пандемией COVID-19, мы впервые для себя обнаружили, что наш переводчик не правильно перевел фамилию этого замечательного ученого. С фламандского языка на русский она должна переводиться как Ферхюльст, а не Верхульст, как в случае перевода с французского языка.

Кроме того, в то время нам удалось разыскать и перевести франкоязычную работу Мартьяля Штикзеля под названием "Пьер-Франсуа Ферхюльст (1804 - 1849). Первое открытие логистической функции", опубликованную в парижском журнале "Population" в 1981 году (Schtekzelle 1981). Эта работа была опубликована сразу же после конгресса Общества исторической демографии, посвященного Мальтусу. В ней отмечалась роль Ферхульста в критическом переосмыслении идей Мальтуса.

Только сейчас мы также обнаружили, что в нашей статье [1], по вине издательства, была потеряна целая журнальная полоса (стр.77) с обсуждением важных положений классической работы Адольфа Кетле по социальной физике. Все вышесказанное, включая популярность первой работы Ферхюльста, которая она приобрела в последнее время в связи с найденным в 1976 году Робертом Мэем сложным поведением его уравнения, записанного в дискретном виде (автоколебания, детерминированный хаос), а также в связи с пандемией COVID - 19, заставило нас снова обратиться к его творчеству.

Долгое время имя Ферхюльста было практически забыто, и его уравнение в 1920-м году переоткрывалось американскими статистиками Р.Перлом (1879 - 1940) и Л. Ридом

(1886 - 1966), а потом и Николаем Кондратьевым (1892 - 1938) в 1934 году, когда он сидел в суздальском политизоляторе, и в одном из писем к своей жене записал это уравнение применительно к трем кумулятивным показателям - капиталу, рабочей силе и уровню новой техники. У нас долгое время о сути работ Ферхюльста мало что знали, так как они не переводились и не комментировались, но само его уравнение, часто без ссылки на него, использовалось в различных областях знаний. Отметим, что в последнее десятилетие ссылки на его работу 1838 года стали появляться достаточно часто. Так на 5 июля 2020 года расширенный поиск в Google Scholar на имя P.-F. Verhulst дает 307 откликов. Отметим, что после нахождения в дискретном аналоге его уравнения детерминированного хаоса Робертом Мэем в 1976 году (May 1976), как мы отмечали ранее, резко возросло количество упоминаний о нем, их количество в Googe Scholar составило 240 из 307 (поиск в закрытом временном интервале 1976 - 2020) . Сама же работа Ферхюльста 1838 года цитировалась в Google Scholar 3227 раз на рассматриваемую дату.

Оригинальная работа [1] с восстановлением утерянного фрагмента и правками, касающимися правильного написания фамилии Ферхюльст

В связи с тем, что в настоящее время закон логистического роста используется во многих областях знаний, мы решили прояснить вопрос зарождения этого закона, который связывают с именем малоизвестного бельгийского математика Пьера-Франсуа Ферхюльста (1804—1849 гг.), незаслуженно забытого сейчас. Мы также попытаемся проследить влияние более известных современников Пьера-Франсуа Ферхюльста – знаменитого английского экономиста, основоположника мальтузианства Томаса Роберта Мальтуса (1766—1834 гг.) и бельгийского социолога-позитивиста, одного из создателей научной статистики Адольфа Кетле (1796—1874 гг.) – на его исследования в области поиска закона роста народонаселения. В нашем анализе мы будем придерживаться четырех ключевых первоисточников:

1. Работы Мальтуса «Опыт о законе народонаселения» в русскоязычном издании 1993 г. [2]; первое англоязычное ее издание вышло в 1798 г.
2. Работы Кетле «Человек и развитие его способностей, или опыт общественной физики» в русскоязычном издании 1865 г. [3]; первое франкоязычное парижское ее издание вышло в 1835 г. Этот труд под названием «Социальная физика, или опыт о развитии способностей человека» выходил в Известиях Киевского коммерческого института и Трудах Общества экономистов при этом институте в период с 1910 по 1914 гг.
3. Работы Кетле «Социальная система и законы, ею управляющие» в русскоязычном издании 1866 г. [4].
4. Работы Ферхюльста «Краткая записка о законе, по которому следует увеличение населения», изданной на французском языке в Брюсселе в 1838 г. в томе 10 «Сообщений по физике и математике» [5]. Журнал, в котором вышла небольшая статья Ферхюльста, издавался Кетле под эгидой Бельгийского библиотечного общества. Работа Ферхюльста в этом журнале была забыта и она, насколько нам известно, не переводилась на русский язык и практически осталась неизвестной отечественным исследователям.

Мы также исходили из практически единственного развернутого исследования двух других работ Ферхюльста, проделанного Мартьялем Штикзелем, под названием «Пьер-Франсуа Ферхюльст (1804—1849). Первое открытие логистической функции», посвященного жизни и творчеству Ферхюльста и опубликованного в парижском журнале «Population» в 1981 г. [6]. Эта статья была опубликована сразу же после конгресса Общества исторической демографии, посвященного Мальтусу. В ней отмечена роль Верхульста в критическом переосмыслении идей Мальтуса.

Свою первую работу 1838 г. [5], посвященную рассматриваемой проблеме, Ферхюльст сразу же начинает ссылкой на труд Мальтуса [2], который он, как и Кетле, изучал по франкоязычному изданию «Essai sur le principe de population», вышедшему в Женеве в 1830г.: «Известно, что знаменитый Мальтус взял за принцип то обстоятельство, что человеческое население стремится к увеличению в геометрической прогрессии, удваиваясь через определенный период времени, например, через каждые 25 лет. Это предположение является неопровержимым, если абстрагироваться от постоянно возрастающих трудностей в добыче продовольствия (пропитания) по мере распространения населения …» (Здесь и далее выдержки из работ [5,6] приведены в нашем переводе).

Обсуждая закон роста народонаселення, Мальтус отмечал, что его сущность состоит в проявляющемся во всех живых существах постоянном стремлении размножаться быстрее, чем это допускается находящимся в их распоряжении количеством пищи [2].

По наблюдениям доктора Франклина, пишет Мальтус, единственной границей воспроизводительной способности растений и животных является лишь то обстоятельство, что, размножаясь, они взаимно лишают себя средств к существованию. Далее Мальтус приходит к следующему обобщению: «Таким образом, недостаток пропитания является постоянным препятствием к размножению человеческой породы; это препятствие обнаруживается всюду, где скопляются люди, и беспрерывно проявляется в разнообразных формах нищеты и вызываемого ею справедливого ужаса» [2]. В дальнейшем Кетле пытался выявить физический механизм этих препятствий, а также способы его математического описания. В связи с этим он долгое время стимулировал деятельность своего ученика математика Ферхюльста в данном направлении. Как мы знаем, позднее физический механизм препятствий к росту численности популяции стали связывать в экологии с механизмами внутривидовой и межвидовой конкуренции. Отметим, что термин «конкуренция» в работах Мальтуса, Кетле и Ферхюльста еще не использовался, так как он появмлся значительно позже.

В труде [2] Мальтус сформулировал два своих знаменитых утверждения:

1. Итак, мы можем признать несомненным то положение, что если возрастание населения не задерживается какими-либо препятствиями, то это население удваивается через каждые 25 лет и, следовательно, возрастает в каждый последующий двадцатипятилетний период в геометрической прогрессии[1].

2. Средства существования при наиболее благоприятных условиях применения человеческого труда никогда не могут возрастать быстрее, чем в арифметической прогрессии.

Несоответствие в этих двух законах роста обусловливает необходимость действия ограничительных препятствий, сдерживающих рост численности населения в геометрической прогрессии.

Как мы отмечали выше, общим и важнейшим препятствием к размножению населения по Мальтусу является недостаток пищи. Далее Мальтус классифицирует все препятствия на предупредительные и разрушительные и формулирует три следующих заключительных положения [2]:

1. Количество народонаселения неизбежно ограничивается средствами существования.

[1] 25-летний период удвоения численности населения был обнаружен Мальтусом на основе анализа статистических данных по США за период более 150 лет, при этом он соглашался с мнением В. Петти, что под влиянием особо благоприятных условий население может удваиваться каждые 10 лет.

2. Народонаселение неизменно возрастает всюду, где возрастают средства существования, если только оно не будет остановлено явными и могущественными препятствиями.

3. Эти особые препятствия, точно так же, как и все те, которые, останавливая силу размножения, возвращают население к уровню средств существования, могут быть сведены к следующим трем видам: нравственному обузданию, пороку и несчастью [2].

Посмотрим теперь, как шло развитие идей Мальтуса в классических исследованиях Кетле [3,4], которые в отличие от работы Мальтуса не издавались у нас после революции (первое послереволюционное московское издание труда Мальтуса осуществлено в 1993 г. в «Антологии экономической классики», в Украине он вышел в 1995 г.).

Развивая два знаменитых положения Мальтуса, Кетле пишет [4]: «В странах, где население увеличилось почти до такого печального уровня, чаша должна неизбежно переполниться и излишек должен вылиться через края и погибнуть. Два только средства могут прекратить такое критическое положение дел: нужно или лишить народонаселение склонности к размножению, или увеличить средства существования» глава 5 «Теория народонаселения» (с.169-179) книги 2 «Об обществах»).

Во втором случае подразумевается не только возможность улучшения плодородия земель, но и интенсификация торгового обмена между странами. Кетле в отличие от Мальтуса впервые пишет о возможности установления равновесия в динамике роста населения: «Вообще нужно принять некоторое состояние равновесия, к которому постоянно стремится народонаселение … . Даже прежде достижения равновесия в народонаселении замечается явное уменьшение склонности к размножению; народонаселение увеличивается, но с большим трудом, как будто бы ему приходиться преодолевать сопротивление среды. Можно даже сказать, что чем сильнее склонность к размножению, тем сильнее растут препятствия, задерживающие его. Мы замечаем здесь то же, что и во всех явлениях природы: препятствия, по-видимому, увеличиваются как квадрат скорости возрастания народонаселения. Понятно, что иначе и быть не может: народонаселение увеличивается от умножения числа детей, которые с одной стороны, подвержены большей смертности, а с другой – нимало не способствуют производству жизненных потребностей, количество которых они, напротив, еще уменьшают».

Здесь Кетле пытается найти аналогии в процессах механического движения тел в вязкой (сопротивляющейся) среде и роста народонаселения. В другом своем исследовании [3] (параграф 1 «Народонаселение и его увеличение» (с.189-206) главы 7 книги 1) он утверждает, что, несмотря на исследования Мальтуса и его сторонников, влияние препятствий не было установлено. Он отмечает, что указанными исследователями «не было дано способов перемещения теории населения в область математических наук, к которой она должна была, казалось, специально принадлежать». Кетле полагал, что он решил эту проблему, сформулировав два основных принципа анализа развития населения и причин, влияющих на него:

1. Население стремится к возрастанию в геометрической прогрессии.

2. Сопротивление (или сумма препятствий его развитию) при равенстве прочих условий равно квадрату скорости, с которой население стремится возрастать.

Кетле пишет: «Препятствия быстроте прироста населения действуют, стало быть, на самом деле так же, как сопротивление, оказываемое движению тел той средой, через которую они проходят. Это распространение закона физики, самым поразительным

---

[2] Это положение Мальтуса влечет за собой возможность установления колебательного процесса в динамике народонаселения, о чем он прямо пишет в своем исследовании. При описании этих колебаний Мальтус ссылается на работу Джемса Стюварта, сравнивающего производительную силу с пружиной, на которую действует переменная тяжесть, вследствие чего и происходят колебания.

образом подтверждающегося, когда его применяют к данным, доставляемым обществом, представляет пример аналогий, которые находим во многих случаях между законами, регулирующими материальные явления, и теми, которые относятся к человеку. Таким образом, из двух принципов, которые я принял за основу математической теории населения, первый вообще принят всеми экономистами и, кажется, не может быть оспариваемым, а другой оправдается при всех применениях, когда приходится рассматривать движение и непрерывно действующие препятствия».

Кетле далее подчеркивает, что в условиях постоянного сопротивления или действия «всякого рода препятствий» население стремится стать стационарным. Он отмечает, что предел, за который не может выйти численность населения, различен по своей природе, и регулируется количеством жизненных припасов. Здесь Кетле делает важный вывод, «что при установившемся однажды равновесии население становится стационарным или колеблется по крайней мере вокруг определенного состояния в зависимости от соответствующих изменений в климате и количестве пищи». Как мы уже видели, на возможность установления колебательного процесса в динамике численности населения указывал также Мальтус.

Итак, мы описали все ключевые положения Мальтуса и Кетле в построении теории динамики народонаселения, которые будут очень важны при анализе идей Ферхюльста, развивающего эту теорию.

В своих рассуждениях Ферхюльст солидарен с Кетле. Он пишет, что «возможное увеличение населения встречает ограничение в пространстве и в плодородии страны и, следовательно, население все более и более стремится к постоянной величине». Далее он пишет: «Можно привести различные гипотезы о сопротивлении или сумме препятствий, оказываемых бесконечному росту населения. Господин Кетле предполагает его пропорциональным квадрату скорости, с которой население стремится к увеличению». Ферхюльст полагает, что все эти гипотезы должны удовлетворять условиям принятия максимума, который будет достигнут только в бесконечно удаленном времени, причем этот максимум будет цифрой постоянного (стационарного) населения.

Следует предположить, что ни Мальтус, ни Кетле не владели математическим аппаратом дифференциального и интегрального исчислений и поэтому не смогли описать гипотезу роста численности населения в геометрической прогрессии и сопротивления этому росту в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Заслуга Ферхюльста и состоит в том, что он впервые переложил на язык теории дифференциальных уравний идеи Мальтуса и Кетле. Прежде чем обосновать свой математический подход, Ферхюльст дает следующее интересное вступление: «Я попробовал уже давно определить при помощи анализа вероятный закон роста населения, но я оставил этот вид исследования, потому что данные наблюдений были слишком малочисленны, чтобы проверить формулы настолько, чтобы не оставалось сомнений в их точности. Однако, так как процесс исследования, которому я следовал, мне кажется, должен непременно привести к знанию действительного закона, когда будет достаточное количество данных, и результаты, которых я добился, могут представлять интерес, по крайней мере, как предмет умозрительного построения, я посчитал, что нужно уступить предложению господина Кетле и предать их огласке». Ниже мы дословно в обозначениях Ферхюльста покажем ход его математических выкладок:

«Пусть численность населения будет равняться P, тогда представим величиной dP бесконечно малое приращение, которое численность населения имеет за бесконечно малое время dt. Если бы численность населения возрастала в геометрической прогрессии, мы бы имели уравнение $\frac{dP}{dt} = mP$. Но вследствие того, что скорость роста численности населения замедляется с увеличением количества жителей, мы должны вычесть из mP некоторую функцию от P так, чтобы формула для интегрирования[3] имела вид:

$$\frac{dP}{dt} = mP - \varphi(P)$$

Самая простая гипотеза, которую можно привести по виду функции $\varphi(P)$, это допустить, что $\varphi(P) = np^2$.

Тогда находим интеграл из вышеприведенного уравнения

$$t = \frac{1}{m}\left[\log .P - \log .(m - np)\right] + \text{Constante}^4$$

и достаточно будет трех наблюдений, чтобы определить два постоянных коэффициента и независимую постоянную[5].

Решая последнее уравнение по отношению к P, получим[6]

$$P = \frac{mP'e^{mt}}{nP'e^{mt} + m - nP'} \quad , (1)$$

где P' — численность населения, которое соответствует t=0, а e – основание неперовых логарифмов.

При $t = \infty$ видим, что соответствующее P равняется $P = \frac{m}{n}$. Эта величина является высшей границей численности населения. Вместо предположения, что $\varphi(P) = np^2$, можно взять $\varphi(P) = np^{\alpha}$, где α — любое число, или $\varphi(P) = n\log .P$. Все эти гипотезы хорошо соответствуют наблюдаемым фактам, но они дают очень разные значения для верхней границы численности населения. Я предположил последовательно, что $\varphi(P) = np^2$, $\varphi(P) = np^3, \varphi(P) = np^4, \varphi(P) = n\log .P$. ..».

Далее Ферхюльст кратко рассматривает случай, когда численность населения возрастает в прогрессии, большей, чем геометрическая: $\frac{dP}{dt} = mp + \varphi(P)$.

Он отмечает, что это дифференциальное уравнение интегрируется так же, как и предыдущее, но не имеет стационарного ограниченного решения.

В своей работе Ферхюльст проделал аппроксимационные расчеты, исходя из формулы (1), для статистических демографических данных по Франции (1817—1831 гг.), Бельгии (1815—1833 гг.), графству Эссекс в Англии (1811—1831 гг.) и России (1796—1810 гг.).

Верхульст утверждает, что мог бы расширить таблицы по Франции и Бельгии до 1837 г. с помощью статистических ежегодников и, таким образом, более точно проверить свою формулу, но, как он замечает, «мои занятия не оставили мне свободного времени. Моя работа была закончена в 1833 году, и я к ней больше не прикасался».

Верхульст заканчивает свою работу следующими словами: «В остальном только будущее сможет нам показать настоящий образ действия замедляющей движение силы, которую мы представили величиной φ (P)» (имеется в виду развитие (рост) населения).

[3] Ферхюльст не называет здесь, как это принято сейчас, полученное уравнение дифференциальным. Он моделирует случай, когда численность населения возрастает в прогрессии меньшей, чем геометрическая. В то же время при рассмотрении этого уравнения со знаком плюс перед $\varphi(p)$ он называет его дифференциальным уравнением.

[4] В современных обозначениях log ( )=ln( ) представляет собой натуральный логарифм.

[5] Отсюда можно сделать вывод, что Ферхюльст рассматривает полученное решение, как требующее дальнейшей аппроксимации по статистическим данным или колибровки.

[6] Это решение было в дальнейшем названо Ферхюльстом (в 1844 г.) логистической функцией [6,7].

Внимательное рассмотрение работы Ферхюльста [5] показывает, что он в отличие от Кетле не заботился о физическом смысле замедляющей функции $\varphi(P)$ и рассматривал целый спектр этих функций. Почему он подробно остановился на квадратичной функции $\varphi(P)$, трудно сказать. То ли потому, что эта простейшая нелинейная функция, допускающая простое аналитическое решение исходного уравнения, то ли по ассоциации с квадратичной функцией Кетле. Относительно гипотезы Кетле он пишет следующее: «Это движение населения уподобляется с движению тела, которое падает, проходя сквозь среду, оказывающую сопротивление. Результаты этого сравнения согласовываются удовлетворительно со статистическими данными и с данными, которые я получил при помощи собственных формул, когда предполагаются слои проницаемой среды бесконечно возрастающей плотности». Заметим, что эти расчеты он не приводит ни в этой работе, ни в последующих [6].

Несмотря на то, что Кетле стимулировал работы Ферхульста, они почти не имели отклика в то время. По этому поводу Мартьяль Штиксель пишет: «Вероятно, это случилось из-за мнения Кетле, что идеи Ферхульста не имеют физических аналогов, поэтому они не получили достаточной поддержки с его стороны». Тем не менее, уравнение, найденное Ферхульстом, названное впоследствии его именем, оказало большое влияние на различные области знаний и является очень актуальным до сих пор, а гипотеза Кетле, основанная на, казалось бы, убедительной физической аналогии, оказалась нежизнеспособной. Попробуем строго доказать последнее. На наш взгляд, знания Ферхюльста в области математики и физики, как видно из работы [5], были вполне достаточны, чтобы записать на языке дифференциальных уравнений физическую аналогию «движения населения» с падением твердого тела в сопротивляющейся (вязкой) сфере. В обозначениях Ферхюльста это уравнение примет вид обычного уравнения II закона Ньютона:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \alpha - \beta\left(\frac{dP}{dt}\right)^2, \quad (2)$$

где α — аналог постоянной силы тяжести, $\beta\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ — точная запись гипотезы Кетле.

Ясно, что в отсутствие сопротивления (β=0) численность населения растет по квадратичному временному закону. Можно показать, что стационарное решение исходного уравнения имеет вид $P_{cm}(t) = t\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + C$, где C=const. Таким образом, приходим к асимптотическому линейному временному росту численности населения (рост численности населения в арифметической прогрессии). Следовательно, гипотеза Кетле не приводит к ограниченному росту численности населения[7]. Запишем теперь уравнение (2) так, чтобы в нем при β=0 наблюдался мальтузианский (экспоненциальный) рост численности населения со временем:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \alpha\frac{dP}{dt} - \beta\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 \quad (3).$$

[7] Для твердого тела, падающего в вязкой среде (жидкости), характерно установление со временем постоянной скорости, но по аналогии Кетле эта скорость равняется $\frac{dP}{dt}$, откуда следует неограниченный линейный рост самой численности населения.

После замены переменной $v = \frac{dP}{dt}$ мы получим уравнение Верхульста для новой переменной:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v - \beta v^2, \ (4)$$

откуда придем к стационарному решению $v_{ст} = \frac{\alpha}{\beta}$ и, следовательно, $P_{ст} = \frac{\alpha}{\beta} t + C$, где C=const.

Таким образом, мы вернулись к предыдущему результату – асимптотическому линейному росту численности населения во времени.

Итак, сопротивление по гипотезе Кетле может снизить рост численности населения в геометрической прогрессии только до роста численности населения в арифметической прогрессии, то есть с помощью гипотезы Кетле не достигается цель получения стационарного населения на постоянном уровне его численности.

Как мы отмечали ранее, обстоятельное изучение двух других работ Ферхюльста [7,8], опубликованных в 1845 и 1847 годах, было проделано в работе Мартьяля Штикзеля [6]. К сожалению, ему была не известна первая работа Ферхюльста [5], и он ошибочно рассматривает весь творческий путь Ферхюльста в части его изысканий по математической теории роста народонаселения в контексте только двух его работ. В связи с этим важно отметить, что фактически логистический закон роста народонаселения был предложен Ферхюльстом в 1838 г. [4], хотя само название “loi logistique” восходит к его работе 1845 г. [7], о чем говорится в [6]. Как отмечено в последней работе, эта логистическая функция впоследствии почти не использовалась и была повторно открыта Р. Перлом и Л. Ридом в 1920 г. [9]. Они работали с тем же статистическим материалом по динамике численности населения США, который использовали Мальтус, Кетле и Верхульст, начинающимся с 1790 г., но существенно более расширенным. В 1921 г. Р. Перл признал приоритет Ферхульста [10]. На наш взгляд, третье открытие логистической функции принадлежит одному из крупнейших экономистов первой половины XX века, основателю теории длинных волн Н. Кондратьеву, который в 1934 г. показал, что динамика трех кумулятивных характеристик — количества самодеятельного населения, национального капитала и уровня техники — описывается уравнением вида [11]

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y).$$

На связь этого уравнения с уравнением Ферхульста мы обращали внимание в работе [12].

В отличие от работы [5] Ферхульст дает несколько иную интерпретацию своему уравнению в работе [7]. Он рассматривает относительную скорость прироста населения $\frac{1}{p}\frac{dP}{dt} = r$ и отмечает, что данные переписей населения США за период с 1790 по 1840 гг. приводят к значению r=2,77% (процент роста населения). Далее Верхульст полагает, что уменьшение r связано равным образом с уменьшением плодородия земель или возрастанием смертности населения, то есть с превентивными и деструктивными препятствиями, введенными в рассмотрение еще Мальтусом.

Как отмечает Мартьяль Штикзель [6], Ферхюльст по просьбе Кетле разрабатывает различные типы гипотез, касающиеся закона уменьшения процента роста r. В одной из основных гипотез рассматривается уменьшение r пропорционально росту избыточного населения. Здесь Ферхюльст вводит понятие нормального населения, которое соответствует «тому моменту времени, когда уже использованы все хорошие земли». Он обозначает такое население буквой b и берет исходное начало времени именно в этот момент. Затем он определяет избыточное население в произвольный момент времени t через P-b и записывает следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{p}\frac{dP}{dt} = r - k(P - b) \text{ для } t \geq 0. \quad (5)$$

Таким образом, препятствия к росту населения прямо пропорциональны избыточному населению. Ферхюльст приводит решение этого уравнения к функции

$$t = \frac{1}{m}\ln\frac{P(m - kb)}{b(m - kP)}, \quad m = r + kb, \ t \geq 0, \quad (6)$$

которой он дает впервые название логистической.

Решение (6) может быть приведено к экспоненциальному виду (1).

Верхульст изучает свойства этой функции и показывает, что ее стационарное максимальное значение равняется m/k, а точка перегиба на графике кривой (6) равняется $\frac{1}{2}\frac{m}{k}$ (половина стационарного уровня).

Если длинные ряды переписей населения для США Ферхюльст использовал для проверки мальтузианского закона, то более короткие ряды для Бельгии и Франции он применял для проверки логистического закона, определяя три неизвестных параметра функции (6) на основе подстановки в нее трех значений численности населения, соответствующих трем заданным моментам времени. В своей работе [7] Ферхюльст также рассматривает гипотезы, когда препятствия росту населения пропорциональны корню квадратному или квадрату избыточного населения, но он находит эти гипотезы менее удовлетворительными.

В дальнейшем Ферхюльста в уравнении (5) не удовлетворяло то обстоятельство, что в левой части этого уравнения стояла относительная скорость роста численности населения, а в правой – абсолютная численность населения. Поэтому в следующей своей работе [8] он решил ввести в правую часть уравнения (5) относительную численность избыточного населения.

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r - k\left(\frac{P - b}{P}\right), \ t \geq 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) им было получено в виде

$$P = M - (M - b)\exp(-mt), \quad (8)$$

где $M = \frac{bk}{m}$, $m = k - r$.

В этом решении так же, как и в логистической функции, наблюдался стационарный уровень $P_{ст} = \frac{bk}{m}$. Верхульст выполняет численные расчеты с помощью (8) на базе статистических данных по Бельгии (1815-1845 гг.).

По утверждению Мартьяля Штикзеля [6], свое произведение 1845 г. Ферхюльст заканчивает такими словами: «Закон населения нам неизвестен, я не знаю природы функции, которая служит изменению препятствий, как превентивных, так и деструктивных, которые противопоставляются бесконечному увеличению человеческого рода». Но его заслуга состоит в том, что он впервые получил закон логистического роста населения, который в отличие от мальтузианского закона приводит к самоограничению роста и стационарному уровню численности населения. Полученная им логистическая функция и лежащее в ее основе обыкновенное дифференциальное уравнение оказались в дальнейшем настолько универсальными, что позволяли описывать различные процессы в естественных и общественных науках. Недаром логистический закон роста дважды открывался вновь в США (1920 г.) и России (1934 г.). Уже после Ферхюльста в популяционной экологии и других областях знаний физический смысл его уравнения стал объясняться лежащими в его основе конкурентными механизмами.

Мартьяль Штиксель в работе [6] приводит следующие сведения, основанные на речи Кетле, произнесенной им после смерти Ферхюльста [13]: «В декабре 1841 г. Ферхюльст становится членом Академии наук Бельгии, но его здоровье снова ухудшилось, и он уезжает лечиться в Италию. Год спустя он возвращается оттуда вялым, апатичным, бросает чисто математические работы, так как они требуют непрерывной отдачи всего себя. Именно в этот период, под влиянием Кетле, Ферхюльст заинтересовался теорией народонаселения и стал пытаться найти математические законы, определяющие рост населения лучше, чем закон геометрической прогрессии Мальтуса. Он пишет два научных сочинения на эту тему в 1844 и 1846 годах, где изобретает функцию, которой он дает название логистика».

Однако, как мы уже знаем из работы Ферхюльста, опубликованной в 1838 г. [5], он еще до 1833 г. закончил большую часть своих исследований и расчетов, посвященных этой проблематике.

Несомненно, что рассматриваемая проблема имела очень важное значение для развития экономической теории. Об этом говорит хотя бы то, какое внимание ей уделял Мальтус. По этому поводу сам Ферхюльст пишет следующее [7]: «Из всех проблем, которые политическая экономика предлагает философам для размышления, одной из самых интересных, несомненно, является знание закона, который управляет развитием народонаселения».

Все это, а также тот факт, что Ферхюльст получил первое динамическое уравнение в экономической теории, позволяет считать его одним из основателей экономической динамики, что до сих пор никем не было доказано в отличие от вклада Ферхюльста в популяционную экологию, который является признанным.

Список литературы

1. Московкин В.М., Журавка А.В. Пьер-Франсуа Верхульст – забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей экономической динамики // Наука та наукознавство. – 2003. – № 3. – С. 75-84.
2. *Мальтус Т.* Опыт о законе народонаселення // Мальтус Т., Кейнс, Ларин Ю. Антология экономической классики. – М., 1993. – 134 с.
3. *Кетле А.* Человек и его развитие, или опыт общественной физики. Т. 1. – СПб, 1865. – 228 с.
4. *Кетле А.* Социальная система и законы, ею управляющие. – СПб., 1866. – 313 с.
5. *Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondence Mathematique et Physique (Bruxelles). – 1838. – Tome 10. – P. 113-121.
6. *Schtekzelle M.* Piere Francois Verhulst (1804-1849). La premiere decouverte de la fonction logistique // Population (Paris). – 1981. – № 3. – P. 541-556.
7. *Verhulst P.F.* Recherches mathematiques sur la loi d’accroissement de la population // Nouveaux Memoires de l’Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles. – 1845. – Tome 18. – P. 1-42.
8. *Verhulst P.F.* Deuxieme memoire sur la loi d’accroissement de la population // Ibid. – 1847. – Tome 20. – P. 1-32.
9. *Pearl R., Reed L. J.* On the Rate Growth of the Population of the United States since 1790 and its Mathematical Representation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1920. – Vol. 6. – P. 274-288.

10. *Pearl R.* The Biology of Death-VII. Natural Death, Public Health and the Population Problem // Sci. Month. – 1921. – Vol. 13. – P. 193-213.
11. *Кондратьев Н.Д.* Проблемы экономической динамики. – М.: Экономика, 1989. – 528 с.
12. *Московкин В.М.* Основы концепции диффузии инноваций // Бізнес-информ (Харьков). – 1998. – № 17-18. – С. 41-48.
13. *Quetelet A.* Notice sur Pierre-Francois Verhulst // Annales de l'Academie Royale des Sciences, Belles Lettres et Beaux Arts de Belgique, 1850. – P. 97-124.

References

1. Moskovkin V.M., Zhuravka A.V. Pierre Francois Verhulst – zabytyy pervootkryvatel zakona logisticheskogo rosta i odin iz osnovateley ekonomicheskoy dinamiki // Nauka ta naukoznavstvo. – 2003. – № 3. – P. 75-84. (in Russian)
2. Malthus T. Opyt o zakone narodonaselennya // Malthus T., Keynes J., Larin Yu. Antologiya ekonomicheskoy klassiki. – M., 1993. – 134 p. (in Russian)
3. Quetelet A. Chelovek i ego razvitiye, ili opyt obshchestvennoy fiziki. T. 1. – St. Petersburg, 1865. – 228 p. (in Russian)
4. Quetelet A. Sotsialnaya sistema i zakony, eyu upravlyayushchiye. – St. Petersburg, 1866. – 313 p. (in Russian)
5. *Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondence Mathematique et Physique (Bruxelles). – 1838. – Vol. 10. – P. 113-121.
6. *Schtekzelle M.* Piere Francois Verhulst (1804-1849). La premiere decouverte de la fonction logistique // Population (Paris). – 1981. – № 3. – P. 541-556.
7. *Verhulst P.F.* Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population // Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles. – 1845. – Vol. 18. – P. 1-42.
8. *Verhulst P.F.* Deuxieme memoire sur la loi d'accroissement de la population // Ibid. – 1847. – Vol. 20. – P. 1-32.
9. *Pearl R., Reed L. J.* On the Rate Growth of the Population of the United States since 1790 and its Mathematical Representation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1920. – Vol. 6. – P. 274-288.
10. *Pearl R.* The Biology of Death-VII. Natural Death, Public Health and the Population Problem // Sci. Month. – 1921. – Vol. 13. – P. 193-213.
11. Kondratyev N.D. Problemy ekonomicheskoy dinamiki. – M.: Ekonomika. 1989. – 528 p. (in Russian)
12. Moskovkin V.M. Osnovy kontseptsii diffuzii innovatsiy // Biznes-inform (Kharkov). – 1998. – № 17-18. – P. 41-48. (in Russian)
13. *Quetelet A.* Notice sur Pierre-Francois Verhulst // Annales de l'Academie Royale des Sciences, Belles Lettres et Beaux Arts de Belgique, 1850. – P. 97-124.