

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
( Н И У « Б е л Г У » )**

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛООБМЕНА НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ  
СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ С ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДОЙ**

Выпускная квалификационная работа  
обучающегося по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
очной формы обучения группы 07001414  
Гасанова Шамиля Наримановича

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Малай Н. В.

БЕЛГОРОД 2018

## РЕФЕРАТ

Рассмотрено влияние теплообмена на термо-и фотофоретическое движение крупной твердой частицы сфероидальной формы поверхности. Получены выражения для полей скорости, давления и температуры вне и внутри частицы до первого порядка малости по числу Рейнольдса при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности и выражения для силы и скорости термо-и фотофореза.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....</b>	<b>8</b>
<b>II. РЕШЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ.....</b>	<b>14</b>
<b>III. РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ. АНАЛИЗ ПО- ЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.....</b>	<b>27</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>34</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>35</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Тема исследования:** влияние теплообмена на термо-и фотофоретическое движение сфероидальной частицы при малых перепадах температуры в её окрестности.

**Актуальность исследования:** в газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей не скомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное внешним заданным градиентом температуры, называют термофорезом [1-2]. Термофоретическая сила перемещает частицы в области с более низкой температурой. Когда термофоретическая сила становится равной по величине силе сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно со скоростью, называемой термофоретической. Явление фотофореза в газе заключается в движении частиц в поле электромагнитного излучения под действием радиометрической силы [3]. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей, внутри нее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью  $q_i$ , которая неоднородно нагревает поверхность частицы. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает не скомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы, более горячей может оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение ча-

стицы в газе. Явления термо-и фотофореза практически всегда сопутствуют термодинамически неравновесным аэродисперсным системам.

Как термофорез, так и фотофорез связаны с неоднородным нагревом поверхности частицы, т.е. с теплообменом между частицей и окружающей газообразной средой. Явления переноса представляют собой неравновесные процессы, в результате которых в физической системе происходит пространственный процесс переноса вещества, импульса, энергии, энтропии или какой-либо другой физической величины. Причина процессов переноса – возмущения, нарушающие состояние термодинамического равновесия: наличие пространственных неоднородностей состава, температуры или средней скорости движения частиц системы. Перенос физической величины происходит в направлении, обратном ее градиенту, в результате чего изолированная от внешних воздействий система приближается к состоянию термодинамического равновесия. Явления переноса протекают стационарно, если внешние воздействия поддерживаются постоянными.

При взаимодействии конденсированных сред, у которых различные температуры, происходит обмен энергией. Интенсивность движения частиц среды существенно зависит от ее температуры. Например, если температура тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, то интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой уменьшается. Вследствие такого взаимодействия одно из тел остывает, а другое тело нагревается. Перенос теплоты есть перенос энергии. Поток энергии, который передается частицами тела с более высокой температурой частицам тела с более низкой температурой в литературе принято называть тепловым потоком. Отсюда следует, чтобы возник тепловой поток, т.е. возник процесс теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях, имели место разные температуры. Перенос энергии осуществляется одним или несколькими носителями. Носителями теплоты могут быть любые вещественные системы: атомы, молекулярные комплексы, вихревые образования, гидродинамические потоки и т.д.

Термо-и фотофорез могут оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло-и массообменников, на движение частиц в зонах просветления дисперсных систем и в окрестностях, вымывающих частицы, капель; их можно использовать при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесении, заданной толщины, специальных покрытий из частиц, получении высококачественных оптических волокон и т.д. Поэтому исследование влияния теплообмена на термо-и фотофорез имеют большое теоретическое и практическое значение.

Во многих природных и производственных процессах участвуют частицы, по форме более близкие к сфероиду, чем к сфере, поэтому данная работа актуальна ещё и тем, что в ней рассматривается влияние теплообмена на термо-и фотофорез крупных твердых частиц со сфероидальной формой поверхности.

**Объектом исследования** является термо-и фотофоретическое движение частиц со сфероидальной формой поверхности при малых относительных перепадах температуры в их окрестности.

**Предметом исследования** является влияние теплообмена на термо-и фотофорез твердой крупной нагретой частицы сфероидальной формы.

**Цель исследования** – получить выражения для компонент массовой скорости и давления из решения уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат и оценить влияние теплообмена на термо-и фотофорез.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие **задачи исследования**:

- ознакомиться с явлениями термо-и фотофореза в вязких газообразных средах;
- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных;
- получить выражения для компонент массовой скорости, давления и температур вне и внутри частицы, а также найти выражение для силы и скорости термо-и фотофореза;
- провести качественные оценки влияния теплообмена на термо-и фотофорез.

**Научная новизна исследования и практическая значимость исследования:** найдены компоненты массовой скорости методом, отличным от метода с использованием функции тока. Новый метод позволяет раскрыть некоторые важные детали при решении уравнения Навье-Стокса, которые невозможно заметить, решая уравнение методом функции тока.

**Практическая значимость** состоит в том, что результаты выпускной квалификационной работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц; при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при оценке каналов просветления и т.д.

**Апробация исследования.** Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференции «**Современные проблемы математики и механики: теория и практика**» (г. Белгород, БУКЭиП, 2018) и по теме выпускной квалификационной работы опубликованы тезисы.

**Структура работы.**

Дипломная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

## ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается установившееся движение твёрдой крупной частицы сферической формы в вязкой газообразной среде с плотностью  $\rho_e$ , теплопроводностью  $\lambda_e$  и вязкостью  $\mu_e$ , внутри которой действуют неравномерно распределённые по её объёму тепловые источники плотностью  $q_i$ . В дипломной работе мы не конкретизируем физическую природу плотности тепловых источников  $q_i(\mathbf{r})$ . Это позволяет рассмотреть процесс теплообмена в общей постановке.

Неравномерный нагрев приводит к неоднородному распределению температуры вдоль её поверхности, что приводит к возникновению фотофоретической силы. С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры  $\nabla T$ , что приводит к возникновению термофоретической силы. Когда обе эти силы уравниваются силой вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называют скоростью термо-и фотофореза.

Термо-и фотофорез рассматривается при малых относительных перепадах температуры. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы  $T_{is}$  и температурой газообразной среды вдали от неё  $T_{e\infty}$ , к последней, т. е.

$$\frac{(T_{is} - T_{e\infty})}{T_{e\infty}}.$$

Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство

$$\frac{(T_{is} - T_{e\infty})}{T_{e\infty}} \ll 1.$$

При выполнении этого условия коэффициенты переноса (вязкости, теплопроводности) и плотность газообразной среды можно считать постоянными ве-



личинами, а газ рассматривать как несжимаемую среду. Индексы «e» и «i» здесь и далее относятся к газу и частице, соответственно; индексом «s» обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы и индексом «∞» - физические величины, характеризующие газообразную среду вдали от неё.

Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена

$$Kn = \frac{\lambda_{cp}}{L},$$

где  $\lambda_{cp}$  - средняя длина свободного пробега частиц,  $L$  - характерный размер частицы. Частицы называются крупными, если  $Kn \leq 0,01$  и умеренно крупными при  $0,01 \leq Kn \leq 0,3$ .

При теоретическом описании термо-и фотофореза будем предполагать, что в силу малости времен тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица–газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса. Задача решается гидродинамическим методом, т. е. решаются уравнения газовой динамики с соответствующими граничными условиями.

Термо-и фотофорез удобно описывать в системе координат сплюснутого сфероида  $(\tau, \eta, \varphi)$ , которые связаны с декартовой системой координат следующими соотношениями: (1.1) в случае вытянутого сфероида и (1.2) – в случае сплюснутого сфероида [4]:

$$x = csh(\tau) \sin(\eta) \cos(\varphi), \quad y = csh(\tau) \sin(\eta) \sin(\varphi), \quad z = cch(\tau) \cos(\varphi), \quad (1.1)$$

$$x = cch(\tau) \sin(\eta) \cos(\varphi), \quad y = cch(\tau) \sin(\eta) \sin(\varphi), \quad z = csh(\tau) \cos(\varphi), \quad (1.2)$$

где  $0 \leq \tau < \infty$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  ( $a > b$ ) - в случае сплюснутого сфероида,  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$  ( $a < b$ ) - в случае вытянутого сфероида,  $a, b$  – полуоси

сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы ось  $z$  совпадала с осью симметрии сфероида. Фиксированное значение  $\tau_0$  соответствует сфероидальной поверхности с общим центром, совпадающим с началом координат. Поэтому области с заданными длинами полуосей  $a, b$  соответствует строгое (определённое) значение координаты  $\tau = \tau_0$ , которое связано с полуосями  $a, b$  соотношением:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|.$$

Уравнения газовой динамики, описывающие термо-и фотофорез, а также теплообмен, имеют следующий вид[5]:

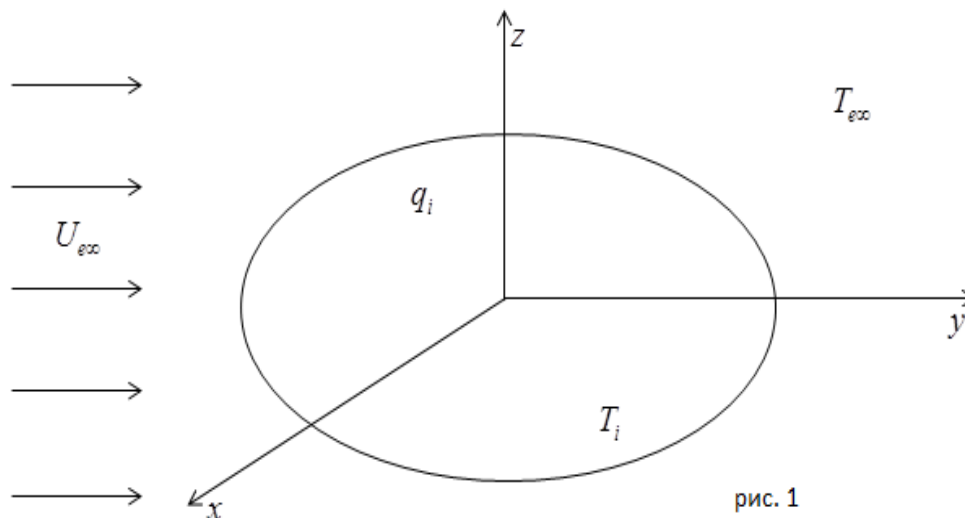
$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla p_e, \operatorname{div}(\mathbf{U}_e) = 0, \quad (1.3)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad (1.4)$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (1.5)$$

Здесь  $p_e, \mathbf{U}_e$  – давление и массовая скорость газа,  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности частицы,  $T_e, T_i$  – температуры вне и внутри частицы.

Свяжем систему координат с центром масс частицы (см. рис.1).



В этом случае частица покоится. Наша задача сводится к обтеканию частицы плоскопараллельным потоком со скоростью  $U_\infty = -U_{iph}$ , где  $U_{iph}$  - скорость термо-и фотофореза.

Система уравнений (1.3) – (1.5) решалась со следующими граничными условиями, записанными в сфероидальной системе координат. На поверхности частицы ( $\tau = \tau_0$ ), учитываются равенство температур (1.6) и равенство радиальных потоков тепла с учётом излучения (1.7):

$$T_e = T_i, \quad (1.6)$$

$$\lambda_e (\nabla T_e \mathbf{e}_\tau) = \lambda_i (\nabla T_i \mathbf{e}_\tau) + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4). \quad (1.7)$$

Здесь  $\sigma_0$  - постоянная Стефана-Больцмана,  $\sigma_1$  - интегральная степень черноты, вещества частицы.

На большом расстоянии от частицы ( $\tau \rightarrow \infty$ ) справедливы стандартные условия:

$$\mathbf{U}_e = U_\infty \frac{cch(\tau)}{H_1} \cos(\eta) \mathbf{e}_\tau - U_\infty \frac{csh(\tau)}{H_1} \sin(\eta) \mathbf{e}_\eta, \quad p_e = p_{e\infty}, \quad (1.8)$$

$$T_e = T_{e\infty} + |\nabla T| csh(\tau) \cos(\eta), \quad (1.9)$$

и конечность физических величин, характеризующих частицу при  $\tau \rightarrow 0$ , учтена в (1.10):

$$T_i = \infty. \quad (1.10)$$

Здесь  $\mathbf{e}_\tau$ ,  $\mathbf{e}_\eta$  - единичные векторы сфероидальной системы координат,  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ ,  $U_\infty$  - скорость плоскопараллельного потока, обтекающего сфероид ( $U_\infty \parallel Oz$ ),  $H_1 = c\sqrt{ch^2\tau - \sin^2\eta}$  - коэффициенты Ламе [4].

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные  $\mu_e$ ,  $\rho_e$ ,  $\lambda_e$  и сохраняющиеся в процессе движения частицы  $R$ ,  $|\nabla T|$ ,  $T_{e\infty}$  и  $U_\infty$ . Из этих параметров, кроме числа Рейнольдса, можно составить безразмерную комбинацию  $\varepsilon = \frac{c|\nabla T|}{T_{e\infty}}$ , характеризующую перепад температуры на размере частицы. При описании термофореза  $\varepsilon$  играет роль малого параметра [6], а при описании явления фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса [7]. Покажем, что они связаны друг с другом. Действительно, скорость частицы в поле градиента температуры по порядку величины равна:

$$\frac{\mu_e}{\rho_e T_{e\infty}} \frac{\Delta T}{L},$$

где  $\frac{\Delta T}{L}$  – средний градиент температуры вдали от частицы. Этот градиент равен отношению перепада температуры  $\Delta T_e$  на конечном отрезке  $L$ . Скорость термофореза равна, с обратным знаком, скорости центра инерции газовой среды на большом расстоянии от частицы, поэтому мы можем записать:

$$|U_\infty| \sim \frac{\mu_e}{\rho_e T_e} \frac{\Delta T_e}{L} = \frac{\mu_e}{\rho_e c} \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{c|\nabla T|}{T_{e\infty}}$$

и тогда число Рейнольдса, построенное по характерной скорости, равно:

$$\text{Re} = \frac{|U_\infty| c \rho_e}{\mu_e} = \frac{c \rho_e}{\mu_e} \frac{\mu_e}{\rho_e c} \varepsilon = \varepsilon.$$

Таким образом, для фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса, а для термофореза -  $\varepsilon$ . Поэтому в дальнейшем мы просто будем писать  $\varepsilon$  и только в конечном результате уже будем их различать.

При  $\varepsilon \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений газовой динамики будем искать в виде:

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots, \quad p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, \quad (1.11)$$

$$t_e = t_e^{(0)} + \varepsilon t_e^{(1)} + \dots, \quad t_i = t_i^{(0)} + \varepsilon t_i^{(1)} + \dots, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e / U_\infty$ ,  $t_e = T_e / T_{e\infty}$ ,  $t_i = T_i / T_{e\infty}$  - обезразмеренные скорость и температуры, соответственно.

## ГЛАВА II. РЕШЕНИЕ ТЕЛОВОЙ ЗАДАЧИ. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР ВНЕ И ВНУТРИ ЧАСТИЦЫ.

При нахождении силы и скорости термо-и фотофореза мы ограничимся поправками первого порядка малости по  $\varepsilon$ . Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (1.4) и (1.5). Решать эти уравнения будем методом разделения переменных. Найдём решение уравнения (1.4):

$$\Delta T_e = 0. \quad (2.1)$$

В сфероидальной системе координат уравнение (2.1) имеет вид:

$$\frac{1}{ch(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( ch(\varepsilon) \frac{\partial t_e}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{\sin(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sin(\eta) \frac{\partial t_e}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (2.2)$$

где  $t_e = \frac{T_e}{T_{\infty}}$ .

В уравнении (2.2) делаем замену переменных:

$$\lambda = sh(\varepsilon), \quad x = \cos(\eta)$$

и тогда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_e}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - x^2) \frac{\partial t_e}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.3)$$

С учётом вышесказанного (см. выражения (1.10)–(1.11)), решение уравнения (2.3) будем писать в виде:

$$t_e(\lambda, x) = t_{e0}(\lambda) + \varepsilon t_{e1}(\lambda, x). \quad (2.4)$$

После подстановки (2.4) в уравнение (2.3), до первого порядка малости по  $\varepsilon$ , имеем два уравнения:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{dt_{e0}}{d\lambda} \right] = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_{e1}}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - x^2) \frac{\partial t_{e1}}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.6)$$

Найдём решение уравнения (2.5). Интегрируя уравнение (2.5) два раза, получаем:

$$t_{e0} = N_0 + \frac{\Gamma_0}{c} \operatorname{arccctg} \lambda, \quad (2.7)$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Постоянную интегрирования  $N_0$  определяем из граничного условия (1.9):

$$N_0 = 1. \quad (2.8)$$

Таким образом,

$$t_{e0}(\lambda) = 1 + \frac{\Gamma_0}{c} \operatorname{arccctg} \lambda, \quad (2.9)$$

и это решение удовлетворяет граничному условию (1.9).

Найдём решение уравнения (2.6), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_{e1}}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - x^2) \frac{\partial t_{e1}}{\partial x} \right] = 0, \quad (2.10)$$

с граничным условием

$$t_{e1}(\lambda \rightarrow \infty, x) = \lambda x. \quad (2.11)$$

Исходя из граничного условия (2.11), решение уравнения (2.10) будем писать в виде:

$$t_{e1}(\lambda, x) = f_e(\lambda)x. \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.12) в уравнение (2.11), получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции  $f_e(\lambda)$ :

$$(1 + \lambda^2) \frac{d^2 f_e}{d\lambda^2} + 2\lambda \frac{df_e}{d\lambda} - 2f_e = 0. \quad (2.13)$$

В уравнении (2.13) делаем замену переменной

$$v = i\lambda; \quad \frac{dv}{d\lambda} = i, \quad (2.14)$$

$$\frac{df_e}{d\lambda} = \frac{df_e}{dv} \frac{dv}{d\lambda} = i \frac{df_e}{dv}, \quad \frac{d^2 f_e}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{df_e}{d\lambda} \right) = -\frac{d^2 f_e}{dv^2},$$

и тогда, имеем:

$$(1 - v^2) \frac{d^2 f_e}{dv^2} - 2v \frac{df_e}{dv} + 2f_e = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) совпадает с уравнением Лежандра [8]:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} + n(n+1)f = 0,$$

при  $n=1$ .

Решениями уравнения Лежандра являются функции Лежандра первого рода  $P_n(x)$  и второго рода  $Q_n(x)$ .



Возвращаясь снова к переменной  $\lambda$ , находим, что решениями уравнения (2.13) являются функции:

$$P_n(i\lambda), Q_n(i\lambda), \quad (2.16)$$

которые в литературе называются функциями Лежандра первого и второго рода мнимого аргумента [9]. В частности:

$$Q_n(i\lambda) = -P_n(i\lambda)\text{arcctg}(\lambda) - \frac{2n-1}{n}P_{n-1}(i\lambda) - \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(i\lambda) - \dots$$

Вронскиан этих функций  $W(P_n(i\lambda), Q_n(i\lambda)) = \frac{1}{1+\lambda^2}$ ,  $Q_1(i\lambda) = \lambda\text{arcctg}(\lambda) - 1$ .

Следовательно, решением уравнения (2.13) являются функции:

$$f_e^{(1)} = \lambda, f_e^{(2)} = \lambda\text{arcctg}(\lambda) - 1. \quad (2.17)$$

Таким образом, поле температуры вне сфероида, удовлетворяющее граничному условию (1.9), имеет вид:

$$t_e(\lambda, x) = t_{e0}(\lambda) + \varepsilon t_{e1}(\lambda, x), \quad (2.18)$$

где  $t_{e0}(\lambda) = 1 + \frac{\Gamma_0}{c}\text{arcctg} \lambda$ ,  $t_{e1}(\lambda, x) = \cos(\eta) \{ \lambda + \Gamma_1 (\lambda\text{arcctg}(\lambda) - 1) \}$ .

Найдём распределение температуры внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнение (1.5):

$$\Delta t_i = -\frac{q_i}{\lambda_i T_{e\infty}},$$

в сфероидальной системе координат  $(\tau, \eta, \varphi)$  оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_i}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - x^2) \frac{\partial t_i}{\partial x} \right] = - \frac{c^2 (\lambda^2 + x^2)}{\lambda_i T_{e\infty}} q_i(\lambda, x). \quad (2.19)$$

Поскольку у нас есть уже решение левой части в виде разложения по полиномам Лежандра, то и правую часть представим в виде:

$$- \frac{c^2 (\lambda^2 + x^2)}{\lambda_i T_{e\infty}} q_i = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\lambda) P_n(x), \quad (2.20)$$

и далее воспользуемся свойством полиномов Лежандра [8,9], а именно:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, m = n \end{cases};$$

Умножим выражение (2.20) на  $P_m(x) dx$ , проинтегрируем от -1 до +1 и, учитывая свойство полиномов Лежандра, получаем:

$$q_n(\lambda) = - \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} c^2 \frac{\lambda^2 + x^2}{\lambda_i T_{e\infty}} q_i P_n(x) dx. \quad (2.21)$$

В дальнейшем нам потребуется выражения:

$$q_0(\lambda) = - \frac{c^2}{2 \lambda_i T_{e\infty}} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2 + x^2) q_i dx, \quad (2.22)$$

$$q_1(\lambda) = - \frac{3}{2} \frac{c^2}{\lambda_i T_{e\infty}} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2 + x^2) x q_i dx. \quad (2.23)$$

Поскольку мы ограничиваемся до первого порядка малости по  $\varepsilon$ , то решение уравнения (2.19) ищем в виде:

$$t_i(\lambda, x) = t_{i0}(\lambda) + \varepsilon t_{i1}(\lambda, x). \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в уравнение (2.19), имеем два уравнения:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_{i0}}{\partial \lambda} \right] = q_0(\lambda); \quad \frac{d^2 t_{i0}}{d\lambda^2} + \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \frac{dt_{i0}}{d\lambda} = \frac{q_0}{1 + \lambda^2}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_{i1}}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - x^2) \frac{\partial t_{i1}}{\partial x} \right] = q_1(x)x. \quad (2.26)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  - фундаментальная система решений неоднородного уравнения [8]

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \quad (*)$$

то общее решение уравнения (\*) имеет вид:

$$y(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \varphi_2 \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1 h}{W} dx - \varphi_1 \int_{x_0}^x \frac{\varphi_2 h}{W} dx, \quad (**)$$

где  $W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' \\ \varphi_2 & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2$  - определитель Вронского,  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,

$h(x)$  - непрерывные функции на отрезке  $[a, b]$ ,  $x_0 \in [a, b]$ .

Найдём решение уравнения (2.25). В нашем случае  $\varphi_1 \sim const$ ,  $\varphi_2 \sim \text{arcctg}(\lambda)$ ,  $W(\lambda) = -\frac{1}{1 + \lambda^2}$ .

На основании выражения (\*\*), получаем:

$$t_{i0}(\lambda) = B_0 + C_0 \text{arcctg}(\lambda) + \text{arcctg}(\lambda) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{h}{W} d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\text{arcctg}(\lambda)}{W} h d\lambda,$$

где  $h = \frac{q_0(\lambda)}{(1 + \lambda^2)}$ , или

$$t_{i0}(\lambda) = B_0 + C_0 \operatorname{arcctg}(\lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_0 \operatorname{arcctg}(\lambda) d\lambda - \operatorname{arcctg}(\lambda) \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_0 d\lambda. \quad (2.27)$$

Для нахождения постоянной  $C_0$  воспользуемся граничным условием:

$$t_{i0}(\lambda \rightarrow 0) \neq \infty, \quad (2.28)$$

находим

$$C_0 = \int_{\lambda_0}^0 q_0 d\lambda. \quad (2.29)$$

Аналогично поступаем и с уравнением (2.26), имеем:

$$f_i(\lambda) = B_1 \lambda + C_1 (1 - \lambda \operatorname{arcctg}(\lambda)) + (\lambda \operatorname{arcctg}(\lambda) - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_1 \lambda d\lambda - \\ - \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arcctg}(\lambda) - 1) q_1 d\lambda,$$

и, следовательно:

$$t_{i1}(\lambda, x) = \cos(\eta) \left\{ B_1 \lambda + C_1 (1 - \lambda \operatorname{arcctg}(\lambda)) + (\lambda \operatorname{arcctg}(\lambda) - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_1 \lambda d\lambda - \right. \\ \left. - \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arcctg}(\lambda) - 1) q_1 d\lambda \right\}.$$

Постоянную  $C_1$  определяем из граничного условия:

$$t_{i1}(\lambda \rightarrow 0, \eta) \neq \infty, \quad C_1 = \int_{\lambda_0}^0 \lambda q_1 d\lambda$$

или

$$C_1 = \frac{3}{4\pi c^2 \lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_1 z dV, \quad z = \cosh(\tau) \cos(\varphi).$$

Таким образом, до первого порядка малости по  $\varepsilon$ , мы нашли поля температуры вне и внутри крупной частицы сферoidalной формы и они имеют вид:

$$t_e(\lambda, x) = t_{e0}(\lambda) + \varepsilon t_{e1}(\lambda, x), \quad (2.30)$$

$$t_i(\lambda, x) = t_{i0}(\lambda) + \varepsilon t_{i1}(\lambda, x), \quad (2.31)$$

где  $t_{e0}(\lambda) = 1 + \frac{\Gamma_0}{c} \operatorname{arcctg} \lambda$ ,

$$t_{i0}(\lambda) = B_0 + C_0 \operatorname{arcctg}(\lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_0 \operatorname{arcctg}(\lambda) d\lambda - \operatorname{arcctg}(\lambda) \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_0 d\lambda,$$

$$t_{e1}(\lambda, x) = \cos(\eta) \{ \lambda + \Gamma_1 (\lambda \operatorname{arcctg}(\lambda) - 1) \},$$

$$t_{i1}(\lambda, x) = \cos(\eta) \left\{ B_1 \lambda + C_1 (1 - \lambda \operatorname{arcctg}(\lambda)) + (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} q_1 \lambda d\lambda - \right. \\ \left. - \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arcctg}(\lambda) - 1) q_1 d\lambda \right\}$$

$$C_0 = \frac{1}{4\pi c \lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_i dV, \quad C_1 = \frac{3}{4\pi c^2 \lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_i z dV$$

Оставшиеся неизвестные постоянные интегрирования  $B_0, \Gamma_0, B_1, \Gamma_1$  определяются из граничных условий на поверхности частицы. На поверхности частицы ( $\lambda = \lambda_0$ ) имеем следующие граничные условия (см. (1.6)–(1.7)):

$$t_e = t_i \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad (2.32)$$

$$\lambda_e \frac{1}{H_1} \frac{\partial t_e}{\partial \tau} = \lambda_i \frac{1}{H_1} \frac{\partial t_i}{\partial \tau} + \sigma_0 \sigma_1 T_{e\infty}^3 (t_i^4 - 1) \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (2.33)$$

Линеаризуем граничные условия (2.32)– (2.33):

$$t_i = t_{i0} + \varepsilon t_{i1}; \quad t_i^4 - 1 = (t_{i0} + \varepsilon t_{i1})^4 - 1 = t_{i0}^4 \left( 1 + \varepsilon \frac{t_{i1}}{t_{i0}} \right)^4 - 1 \approx t_{i0}^4 + 4\varepsilon t_{i0}^3 t_{i1}$$

и разложим функцию  $H_1$  в ряд по полиномам Лежандра:

$$c\sqrt{\lambda^2 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\lambda) P_n(x),$$

где

$$h_n(\lambda) = c \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\lambda^2 + x^2} P_n(x) dx.$$

Далее нам понадобится, только  $h_0$  и  $h_1$ , которые равны:

$$h_0(\lambda) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx,$$

$$h_1(\lambda) = \frac{3}{2} c \int_{-1}^{+1} x \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx.$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{\lambda^2 + x^2} + \lambda^2 \ln \left( x + \sqrt{\lambda^2 + x^2} \right) \right) \Big|_{-1}^{+1} = \sqrt{1 + \lambda^2} +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1+\lambda^2}+1}{\sqrt{1+\lambda^2}-1} \right)$$

$$\int_{-1}^{+1} x\sqrt{\lambda^2+x^2} dx = \frac{1}{3}(\lambda^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{+1} = 0,$$

получаем:

$$h_0(\lambda) = \frac{c}{2} \left[ \sqrt{1+\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1+\lambda^2}+1}{\sqrt{1+\lambda^2}-1} \right) \right], \quad h_1(\lambda) = 0.$$

Таким образом:

– нулевое приближение ( $\varepsilon = 0$ ):

$$\begin{cases} t_{e0} = t_{i0} \\ \lambda_e \frac{\partial t_{e0}}{\partial \tau} = \lambda_i \frac{\partial t_{i0}}{\partial \tau} + \sigma_0 \sigma_1 h_0 T_{\infty}^3 (t_{i0}^4 - 1) \end{cases}; \quad (2.34)$$

– первое приближение ( $\sim \varepsilon$ ):

$$\begin{cases} t_{e1} = t_{i1} \\ \lambda_e \frac{\partial t_{e1}}{\partial \tau} = \lambda_i \frac{\partial t_{i1}}{\partial \tau} + 4\sigma_0 \sigma_1 h_0 T_{\infty}^3 t_{i0}^3 t_{i1} \end{cases}; \quad (2.35)$$

Подставляя выражения (2.30)–(2.31) последовательно в (2.34)–(2.35), получаем:

$$B_1 = 1 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_0} (\lambda_0 \operatorname{arcctg}(\lambda_0) - 1) \frac{C_1}{\lambda_0} (1 - \lambda_0 \operatorname{arcctg}(\lambda_0)),$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{\delta} \left( 1 + \delta_1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) + \frac{3}{4\pi c^2 \lambda_i T_{\infty}^3 \delta \lambda_0 (1 + \lambda_0^2)} \int_V q_i z dV, \quad (2.36)$$

$$\delta = \text{arcctg}(\lambda_0) \left( 1 + \delta_1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) + \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0^2} - \frac{1 + \delta_1}{\lambda_0},$$

$$\delta_1 = 2C \frac{\sigma_0 \sigma_1 T_{e\infty}^3 t_{is}^3}{\lambda_i} \lambda_0 \delta_0,$$

где индексом "s" обозначены значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы  $T_{is}$ , которая определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{es} = t_{is} \\ \frac{\Gamma_0}{C} = \frac{1}{4\pi c \lambda_e T_{e\infty}} \int_V q_i dV - C \frac{\sigma_0 \sigma_1 T_{e\infty}^3}{2\lambda_e} \delta_0 (1 + \lambda_0^2) (t_{is}^4 - 1), \end{cases} \quad (2.37)$$

в которой  $T_{is} = t_{is} T_{e\infty}$ ,  $T_{es} = t_{es} T_{e\infty}$ ,  $\delta_0 = 1 + \frac{\lambda_0}{2\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \lambda_0^2} + 1}{\sqrt{1 + \lambda_0^2} - 1} \right)$ .

Из приведённых выше формул видим, что на среднюю температуру поверхности частицы существенное влияние оказывает плотность тепловых источников  $q_i$  и дипольный момент плотности тепловых источников  $\int_V q_i z dV$ .

Поскольку выражения для полей температур вне и внутри крупной нагретой частицы сфероидальной формы нами получены, то мы можем найти локальный тепловой поток. Этот поток оказывает влияние на поведение частицы, т. е. на силу и скорость термо-и фотофореза.

Если обозначить через  $\mathbf{j}_T$  плотность локального потока тепла, переносимого посредством теплопроводности и ограничиться случаем, когда градиент температуры в среде не слишком велик, то мы можем разложить  $\mathbf{j}_T$  в ряд по степени градиента температуры и ограничиться первыми членами разложения. Постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает, поскольку  $\mathbf{j}_T$  должно обращаться в нуль вместе с  $\nabla T$ .



Таким образом, получаем [5]:

$$\mathbf{j}_T = -\lambda_e \nabla T. \quad (2.38)$$

В литературе полученное выше выражение называется законом Фурье. Поскольку локальный поток энергии должен быть направлен из мест с более высокой в места с более низкой температурой  $\mathbf{j}_T$  и  $\nabla T$  должны иметь противоположные направления.

Найдем  $\mathbf{j}_T$  для нашего случая. В сфероидальной системе координат имеем:

$$\mathbf{j}_T = -\lambda_e \nabla T = -\lambda_e \frac{1}{H_\tau} \left( \frac{\partial T_e}{\partial \tau} \mathbf{e}_\tau + \frac{\partial T_e}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta \right),$$

где  $\mathbf{e}_\tau$ ,  $\mathbf{e}_\eta$  - единичные векторы сфероидальной системы координат,

$H_\tau = c \sqrt{ch^2(\tau) - \sin^2(\eta)}$  - коэффициент Ламе.

Учитывая, что

$$t_e(\lambda, x) = t_{e0}(\lambda) + \varepsilon t_{e1}(\lambda, x),$$

до членов порядка  $\varepsilon$  получаем следующее выражение для локального потока тепла:

$$\mathbf{j}_T = \frac{\lambda_e}{H_\tau T_{e\infty}} \left\{ \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2} \frac{\Gamma_0}{c} \mathbf{e}_\tau - \varepsilon \left[ \sqrt{1+\lambda^2} \cos(\eta) \left\{ 1 + \Gamma_1 \left( \text{arcctg}(\lambda) - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) \right\} \mathbf{e}_\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin(\eta) \left\{ 1 + \Gamma_1 (\lambda \text{arcctg}(\lambda) - 1) \right\} \mathbf{e}_\eta \right] \right\}.$$

Зная локальный поток тепла можно найти: молекулярный поток тепла  $Q_T^{(M)}$  и тепловое число Нуссельта  $N_{UT}$ :

$$Q_T^{(M)} = \oint_{(s_p)} \mathbf{j}_T ds_p,$$

$$N_{UT} = - \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{H_\tau} \frac{\partial t_e}{\partial \tau} \right) dx,$$

где  $ds_p$  - дифференциальный векторный элемент поверхности частицы  $s_p$ , направление которого совпадает с направлением внешней нормали.

Поскольку распределение температуры в окрестности нагретой частицы нам известно, то мы можем оценить влияние теплообмена на силу и скорость термо-и фотофореза.

### ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Найдем решение гидродинамической задачи. В сфероидальной системе координат уравнения Навье-Стокса имеют вид [4,5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = & \frac{\partial \sigma_{\tau\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\tau} \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} (\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\eta\eta}) + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} (\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \\ & + \sigma_{\tau\eta} \left( \frac{2}{H_\tau} \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_e}{\partial \eta} = & \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial \tau} - \frac{1}{H_\tau} \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} (\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\eta\eta}) + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \eta} (\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \\ & + \sigma_{\tau\eta} \left( \frac{2}{H_\tau} \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} + \left( \frac{1}{H_\tau} \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} \right) U_\tau + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \left( \frac{1}{H_\tau} \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \eta} \right) U_\eta = 0, \quad (3.3)$$

где  $U_\tau(\tau, \eta)$ ,  $U_\eta(\tau, \eta)$  - компоненты массовой скорости  $\mathbf{U}_e$ ,  $H_i$  - коэффициенты Ламе в системе координат сплюснутого сфероида  $(\tau, \eta, \varphi)$ ,  $\sigma_{ik}$  - компоненты тензора напряжений, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau\tau} = & \frac{2\mu_e}{H_\tau} \left( \frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\tau} U_\eta \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{\eta\eta} = & \frac{2\mu_e}{H_\tau} \left( \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\tau} U_\tau \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu_e}{H_\tau} \left( \frac{1}{H_\varphi} U_\tau \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\varphi} U_\eta \frac{\partial H_\varphi}{\partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{\tau\eta} = \frac{\mu_e}{H_\tau} \left( \frac{\partial U_\eta}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\tau}{\partial \eta} - \frac{1}{H_\tau} U_\eta \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} - \frac{1}{H_\tau} U_\tau \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} \right).$$

Вид граничных условий вдали от частицы показывает, что решения для компонент массовой скорости можно найти непосредственно из уравнения Навье-Стокса, а не через функцию тока [4]. Будем писать их в виде:

$$U_\tau(\tau, \eta) = \frac{U_\infty}{cch(\tau)H_\tau} G(\tau) \cos(\eta), \quad U_\eta(\tau, \eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\tau} g(\tau) \sin(\eta), \quad (3.5)$$

где  $G(\tau)$  и  $g(\tau)$  - неизвестные функции, которые определяются из решения системы уравнений (3.1) – (3.3).

Из уравнения непрерывности (3.3) находим связь между функциями  $G(\tau)$  и  $g(\tau)$ . После их подстановки в уравнение Навье-Стокса (3.1) – (3.2), получаем однородное дифференциальное уравнение третьего порядка, из решения которого находится функция  $G(\tau)$ , а также функция  $g(\tau)$  и поле давления  $p_e$ . Таким образом, имеем следующие выражения:

$$U_\tau(\tau, \eta) = \frac{U_\infty}{cch(\tau)H_\tau} \cos(\eta) \left\{ A_1 \left[ \lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arcctg}(\lambda) \right] + \lambda A_2 + (1 + \lambda^2) A_3 \right\}, \quad (3.6)$$

$$U_\eta(\tau, \eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\tau} \sin(\eta) \left\{ A_1 (1 - \lambda \operatorname{arcctg}(\lambda)) + \frac{A_2}{2} + \lambda A_3 \right\}, \quad (3.7)$$

$$p_e(\tau, \eta) = p_\infty + c \frac{\mu_e u_\infty}{H_\tau^4} x (\lambda^2 + x^2) A_2. \quad (3.8)$$

Постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , для компонент массовой скорости, определяются из граничных условий на поверхности частицы и вдали от неё. Действительно, из граничного условия (1.8) имеем:

$$U_\tau(\tau \rightarrow \infty, \eta) = U_\infty \frac{cch(\tau)}{H_\tau} \cos(\eta);$$

$$U_\infty \frac{cch(\tau)}{H_\tau} \cos(\eta) = \cos(\eta) \frac{U_\infty cch(\tau)}{H_\tau} \frac{1}{c^2 ch^2(\tau)} \left\{ A_1 \left[ \lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arcctg}(\lambda) \right] + \lambda A_2 + ch^2(\tau) A_3 \right\}$$

и, при  $\tau \rightarrow \infty$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), имеем:

$$A_3 = c^2. \quad (3.9)$$

На поверхности частицы имеем граничные условия [2]:

$$U_\tau = 0 \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad U_\eta = K_{ts} \frac{v_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \eta} \frac{1}{H_\tau} \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad (3.10)$$

$K_{ts}$  - коэффициент теплового скольжения [2].

Подставляя (3.6) – (3.7) в (3.10), находим постоянные  $A_1$  и  $A_2$ . В дальнейшем нам потребуется только коэффициент  $A_2$ , который имеет следующий вид:

$$A_1 = - \frac{\lambda_0 A_2}{\lambda_0 - (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} - c^2 \frac{1 + \lambda_0^2}{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)},$$

$$A_2 = - \frac{2c^2}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} + \frac{\varepsilon}{u_\infty} 2K_{ts} \frac{\lambda_0 - (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} c \frac{v_e}{t_{es} \delta} \left( \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{1}{1 + \lambda_0^2} + \frac{3(1 - \lambda_0 \operatorname{arcctg}(\lambda_0))}{4\pi c^2 \lambda_i T_{e\infty} \lambda_0 (1 + \lambda_0^2)} \int_V q_i z dV \right).$$

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности [5]. В нашем случае она имеет вид:

$$F_z = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( -p_e \cos(\eta) + \sigma_{\tau\tau} \cos(\eta) - \frac{sh(\tau)}{ch(\tau)} \sigma_{\tau\eta} \sin(\eta) \right) c^2 ch^2(\tau) \sin(\eta) d\eta d\varphi \Big|_{\tau=\tau_0} \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) полученные выше выражения, и после интегрирования, получаем:

$$F_z = -4\pi \frac{\mu_e U_\infty}{c} A_2. \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.12) коэффициент  $A_2$ , имеем:

$$F_z = 8\pi\mu_e U_\infty \frac{c}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} - 8\pi\mu_e \varepsilon K_{ts} \frac{\lambda_0 - (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} \frac{v_e}{t_{es} \delta} \times \\ \times \left( \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{1}{1 + \lambda_0^2} + \frac{3(1 - \lambda_0 \operatorname{arcctg}(\lambda_0))}{4\pi c^2 \lambda_i T_{e\infty} \lambda_0 (1 + \lambda_0^2)} \int_V q_i z dV \right). \quad (3.13)$$

Из выражения (3.13) следует, что общая сила складывается из силы вязкого сопротивления среды  $\mathbf{F}_\mu$ , термофоретической силы  $\mathbf{F}_{th}$  и фотофоретической силы  $\mathbf{F}_{ph}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{th} + \mathbf{F}_{ph}, \quad (3.14)$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = 8\pi\mu_e U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_{th} = -8\pi\mu_e f_{th} |\nabla T| \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_{ph} = -8\pi\mu_e f_{ph} \int_V q_i z dV \mathbf{n}_z \varepsilon,$$

$$f_\mu = \frac{c}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)},$$

$$f_{th} = K_{ts} c \frac{\lambda_0 - (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} \frac{v_e}{t_{es} \delta T_{e\infty}} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{1}{1 + \lambda_0^2},$$

$$f_{ph} = 3K_{ts} \frac{\lambda_0 - (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)} \frac{v_e}{t_{es} \delta} \frac{1 - \lambda_0 \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{4\pi c^2 \lambda_i T_{e\infty} \lambda_0 (1 + \lambda_0^2)},$$

где  $\mathbf{n}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси z.

Приравнивая полную силу к нулю, получаем следующее выражение для скорости термо-и фотофореза крупной твёрдой частицы сфероидальной формы:

$$\mathbf{U}_{tph} = -(h_{ph} + h_{th}) \mathbf{n}_z, \quad (3.15)$$

где  $h_{ph} = \frac{f_{ph}}{f_\mu}$ ,  $h_{th} = \frac{f_{th}}{f_\mu}$ .

Удобно выражения для силы и скорости термо-и фотофореза представлять через отношения полуосей сфероида. Заметим, что:

$$\lambda_0 = \frac{b}{c}, \frac{b}{a} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}}, \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}},$$

тогда

$$\mathbf{U}_{th} = -\frac{b}{a} K_{ts} \frac{1 - (\lambda_0 + 1/\lambda_0) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{t_{es} \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \frac{v_e}{T_{e\infty}} \frac{\lambda_e}{\delta \lambda_i} |\nabla T| \mathbf{n}_z, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{U}_{ph} = -\frac{b}{a} K_{ts} \frac{1 - (\lambda_0 + 1/\lambda_0) \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{t_{es} T_{e\infty}} \frac{v_e}{\delta} \sqrt{1 + \lambda_0^2} \frac{1 - \lambda_0 \operatorname{arcctg}(\lambda_0)}{\lambda_i} I_1 \varepsilon \mathbf{n}_z, \quad (3.17)$$

где  $I_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$ .

Если в формулах (3.16) и (3.17) в пределе перейти к сфере ( $a = b = R$ ,  $c = 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $c\lambda_0 = r$ ), мы получаем формулу для силы и скорости термо-и фотофореза крупной частицы сферической формы радиуса  $R$ .

$$\mathbf{U}_{th}^{(c\phi.)} = -2K_{ts} \frac{v_e}{T_{e\infty}} \frac{\lambda_e/\lambda_i}{1 + 2\lambda_e/\lambda_i} |\nabla T| \mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{U}_{ph}^{(c\phi.)} = -K_{ts} \frac{v_e}{2\pi\lambda_i R^3 (1 + 2\lambda_e/\lambda_i) T_{e\infty}} \int_V q_i z dV \mathbf{n}_z.$$

### Анализ полученных результатов

Формулы (3.14), (3.16) – (3.17) позволяют оценить влияние теплообмена на силу и скорость термо-и фотофореза твердых крупных аэрозольных частиц сферической формы при малых относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Видим, что величина и направление силы и скорости фотофореза крупных аэрозольных частиц определяется величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников  $\int_V q_i z dV \mathbf{n}_z$ . В тех случаях, когда дипольный момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к потоку излучения), частица движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы), частица будет двигаться навстречу направлению распространения излучения. Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Отсюда следует, что фотофоретическая сила и скорость с увеличением интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. При постоянной величине дипольного момента, увеличение экваториального радиуса  $R = b/a$  сфероида приводит к уменьшению фотофоретической силы и скорости обратно пропорционально  $R^3$ . Фотофоретическая сила и скорость суще-



ственно зависят и от теплопроводности вещества частицы. При  $\lambda_{is} \rightarrow \infty$  (высоко теплопроводные частицы) сила и скорость фотофореза, при фиксированной величине дипольного момента, стремятся к нулю. Чтобы оценить зависимость силы и скорости фотофореза от числа Кнудсена и нагрева поверхности частицы необходимо конкретизировать плотность тепловых источников. Степень неоднородности распределения энергии излучения в частице зависит от оптических констант материала частицы ( $m_s$ ) и параметра дифракции ( $x_a$ ). Выражение для плотности излучения в частице, трансформируемой в тепло, можно записать в виде  $q_i = 4\pi \frac{n_s a_s}{n_0 \lambda_0} I_0 B_s$ , где  $m_s = n_s + ia_s$ ,  $x_a = 2\pi R / \lambda_0$ ,  $n_s$  – показатель преломления,  $a_s$  – показатель поглощения,  $n_0$  – показатель преломления среды,  $I_0, \lambda_0$  – интенсивность и длина волны излучения,  $B_s$  – функция координат, рассчитываемая по теории Ми. Для термофоретической силы и скорости качественные оценки показывают их существенную зависимость от отношения теплопроводностей газа и частицы, а также средней температуры поверхности частицы, т.е. от величины  $q_i$ . Полученные формулы для термо-и фотофореза указывают на то, что при описании поведения крупных частиц сфероидальной формы, в термодинамически неравновесных, по температуре, дисперсных системах, необходимо учитывать совместное влияние этих эффектов.

## **Заключение.**

В рамках дипломной работы получены выражения для полей скорости, давления и температур вне и внутри крупной твердой частицы сфероидальной формы. Исследовано влияние теплообмена между частицей и окружающей газообразной средой на силу и скорость термо-и фотофореза. Проведена качественная оценка этого влияния.

### Список литературы:

1. Epstein P.S. Zur theorie des radiometers //Z. Phys. 1929. Bd. 54. No. 7/8. S. 537-539.
2. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах /В.С. Галоян, Ю.И. Яламов. Ереван: Луйс. 1985. 207 с.
3. Ehrenhaft Г. Die Photophorese // Ann. Phys. 1918.Bd. 55.S. 81-132.
4. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса /Хаппель Дж., Бреннер Г. М.: Мир. 1976. 630 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред /Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: ТТЛ. 1954. 795 с.
6. Малай Н.В., Лиманская А.В, Щукин Е.Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы //ПМТФ. 2016. Т. 57, № 2(336). С. 164-171.
7. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы //ЖТФ. 2012, Т. 82,Вып. 10. С. 42-50.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики /Тихонов А.Н., Самарский А.А.М.: Наука. 1972. 735 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами /Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука. 1979. 830 с.