ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка на плоскости

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
01.04.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001632

Черновой Ольги Викторовны

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Глушак А. В.

Рецензент:
кандидат физико-математических наук,
доцент Борисовский И. П.

БЕЛГОРОД – 2018

Оглавление

Введение

Особый интерес многих математиков к эллиптическим системам основан на том, что они играют весьма важную роль в различных вопросах анализа, геометрии и механики.

Самой первой по праву работой по изучению эллиптических задач в областях с угловыми точками считается работа И. Радона [64].

Для случая плоской области с угловыми точками на границе им был применен метод решения уравнений с частными производными путем сведения краевой задачи (Неймана и Дирихле) для оператора Лапласа к интегральным уравнениям на границе области.

Впоследствии метод, предложенный в [64], нашел широкое применение в различных направлениях: в краевых задачах теории функций [51], плоской теории упругости [57], общей теории эллиптических задач [56].

Во второй половине XX-го века теория краевых задач для эллиптических уравнений была изучена в работах многих математиков: S. Agmon [1], [2], S.Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [4], [5], L. Bers, A. John, M. Schechter [7], F. Browder [9], [10], L. Hormander [21], Ya. A. Roitberg [23]–[26], M. Schechter [27]–[32], М. С. Аграновича, М. И. Вишика [35], И. А. Бикчантаева [36], [37], В. С. Виноградова [42]–[44], М. И. Вишика [45], [46], Л. Р. Волевича [47], А. И. Вольперта [48], [49], Назарова, Б. А. Пламеневского [61], И. Г. Петровского [63], Я. А. Ройтберга [66], Я. А. Ройтберга, З. Г. Шефтеля [67], [68], В. А. Солонникова [81], Р.С. Сакса [69] и многих других.

Одной из основных краевых задач аналитических функций является краевая задача Римана–Гильберта. Первая ее постановка для аналитических функций исторически принадлежит Б. Риману [65]. В 1857 г. он сформулировал задачу следующим образом: найти аналитическую в области D функцию по известному соотношению между действительной и мнимой частями на границе области, но не указал способов ее решения.

Полное решение этой задачи в односвязной области, при условии что действительная и мнимая части u и v удовлетворяют на границе условию

$$\operatorname{Re}((\alpha - i\beta)(u + iv)) = \alpha u + \beta v = \gamma,$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ дал Гильберт [20]. В связи с этим данную задачу стали называть задачей Римана–Гильберта.

Уже к концу 50-х годов прошлого века в работах русских математиков И.Н. Векуа [41], Ф. Д. Гахова [50], Н. И. Мусхелешвили [60] изучение этой задачи было завершено. В монографии И.Н.Векуа [40] данная проблема рассматривалась для обобщенных аналитических функций и для некоторого класса эллиптических систем двух уравнений. Впоследствии работы многих математиков [39], [42], [49] были направлены на обобщение задачи на общие эллиптические системы $2n$ уравнений первого порядка. Так Б. Боярским [39] изучается краевая задача для $Q-$ аналитических функций в многосвязных областях, которые являются решением одной эллиптической системы специального вида. В трудах В. С. Виноградова [42] – [44] и А. И. Вольперта [48] изучены краевые задачи в односвязных областях для общих эллиптических систем, получена формула индекса и установлена фредгольмовость. Краевые задачи в односвязной области для однородной эллиптической системы с действительными коэффициентами, порядки производных в краевых условиях которых меньше порядка системы, изучены А.И.Вольпертом [49]. Много интересных результатов для эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами были получены Б. Боярским [39], W. Wendland [33], Gilbert R. P., Buchanan J. L [18] и др.

В своей работе Ф. Д. Гахов [50] впервые рассмотрел краевую задачу типа Гильберта для аналитических функций с краевым условием, содержащим производные. К этой задаче приводятся многие задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны, а также задачи безмоментной теории оболочек.

Законченные результаты по краевым задачам для общих эллиптических систем с постоянными коэффициентами можно увидеть в работах А. П. Солдатова [74], [75], [77], [80]. Так в работе [80] изучена краевая задача для эллиптических систем с постоянными матричными коэффициентами, которая охватывает широкий круг локальных и нелокальных краевых задач и предложен метод эквивалентной редукции этой задачи к системе граничных уравнений. Рассмотрения проводились в пространствах с весом для областей с кусочно–гладкой границей. В работе была получена формула индекса задачи, описана асимптотика ее решений в окрестности угловых точек и установлен критерий фредгольмовости.

Новый подход к задачам такого рода, который опирается на априорные оценки был разработан в работе В. А. Кондратьева [53]. Далее на этом направлении [55], [61] получены законченные результаты: сформулированы условия, необходимые и достаточные для фредгольмовости.

Краевая задача для общих эллиптических систем с переменными коэффициентами в ограниченной области с кусочно-гладкой границей рассматривалась в работе М. М. Сиражудинова [71], [72], в которой получена формула индекса и приведены условия фредгольмовости.

Задача о нахождении голоморфной функции в ограниченной области D, которая удовлетворяет условию: значение неизвестной функции в точке y границы области ∂D связано со значением в каждой точке $\Omega(y), \Omega \partial D \to \partial D-$гладкое невырожденное преобразование, $\Omega(\Omega(y)) = y$, где $y \in \partial D$ была рассмотрена T. Carleman [12] в 1932 г. Эта задача сводится к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом.

Исследованию общих краевых задач в областях с особенностями на границе типа угловой или конической точки посвящены работы В.Г. Мазья [58] и С. А. Назаров, Б.А. Пламеневский [61]. Эллиптические уравнения с абстрактными нелокальными краевыми условиями изучались в работах М. И. Вишика [46], R. Beals [6], F. Browder [11], M. Schechter [32].

В последние годы прошлого века усилился интерес к решению эллиптических краевых задач путем редукции их к сингулярным уравнениям на границе [57]. Известны два классических способа: метод потенциала и теоретико–функциональный метод. В работах [19], [59] были получены фундаментальные результаты по решению общих эллиптических задач методом потенциала. Отметим работу Я. Б. Лопатинского [56] как одну из первых работ, посвященных краевым задачам для эллиптических систем в двумерной области с угловой точкой. Я. Б. Лопатинским были рассмотрены краевые задачи с постоянными коэффициентами. Используя метод потенциала им были получены условия нормальной разрешимости краевой задачи в пространствах функций, все производные до порядка n включительно которых непрерывны. В дальнейшем метод потенциала для эллиптических систем высокого порядка на плоскости был развит в работах [3], [14], для эллиптических систем с постоянными старшими коэффициентами в работе [15].

Классический теоретико–функциональный метод восходит к трудам А. Пуанкаре, Л. Гильберта, Т. Карлемана, И.И. Привалова. Основываясь на представлении решений эллиптических уравнений через аналитические функции, он позволяет свести исследование исходной задачи к исследованию краевых задач теории функций. И. Н. Векуа в своей работе [41] был развит теоретико–функциональный метод для эллиптических уравнений на плоскости с вещественно аналитическими коэффициентами, для эллиптических систем с постоянными старшими коэффициентами данный метод получил развитие в работах А. В. Бицадзе [38], а также в работах Р. С. Сакса [70].

Отметим, что в представлении А. В. Бицадзе решений эллиптических систем наряду с аналитическими функциями участвуют и ее производные до некоторого порядка. Сравнительно недавно (А. П. Солдатов [73], З. Йех [22]) было обнаружено, что представление А. В. Бицадзе можно существенно упростить, заменив аналитические функции решениями канонических эллиптических систем первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

где все собственные значения λ постоянной матрицы $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ лежат в верхней полуплоскости, т.е. имеют положительную мнимую часть.

Как показано А. Дуглисом [13], все элементы теории аналитических функций распространяются и на решения этой системы.

Можно сказать, что по отношению к эллиптическим уравнениям и системам с постоянными (и только старшими) коэффициентами эти функции играют ту же роль, что и аналитические функции по отношению к уравнению Лапласса. Аналогичные свойства выявлены в работах Н. А. Жура [54] и для систем, эллиптических по Дуглису – Ниренбергу, а также для систем, гиперболических по Лере и Петровскому.

Теория эллиптических систем первого порядка для случая $l = 2$ получила законченный вид в трудах И. Н. Векуа [41] и Л. Берса [8] и известна под названием теории обобщенных аналитических функций.

Дальнейшее распространение: $l > 2$, проявилось в работах Б. В. Боярского [39], Р. Гилберта [16], Р. Гилберта, Г. Хилла [17] и др.

Важные результаты для общих эллиптических задач на плоскости методом, близким к теоретико–функциональному, получены А. И. Вольпертом [49].

В представленной работе в конечной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной z рассматривается эллиптическая система l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial x}\right)U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U}(z) = F(z), \quad z \in D, \tag{0.1}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ и $l-$вектор–функция $F(z)$ принадлежат классу $C(D)$ и матрица $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ постоянна.

Для этой системы рассматривается задача Римана–Гильберта

$$\mathrm{Re}\, C(t)U(t)^{+}\,|_{\Gamma}= f(t), \tag{0.2}$$

где $l \times l$ матрица-функция $C(t)$ принадлежит классу Гельдера $C^{\nu}(\Gamma)$ с показателем $0 < \nu < 1$ и $l-$вектор–функция $f(t) \in C(D)$.

В предположении $F(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$, $f(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $\mu < \nu$ задача исследуется в классе

$$C^{\mu}_{A}(\overline{D}) = \{U(z) \in C^{1}(D) \cap C^{\mu}(\overline{D}), L_{A}U(z) \in C^{\mu}(\overline{D})\}, \tag{0.3}$$

где введено обозначение

$$L_A = \frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial x}.$$

<u>Цель исследования:</u> доказать фредгольмову разрешимость задачи Римана–Гильберта (0.1)–(0.2) в классе (0.3) и найти формулу ее индекса с помощью интегралов типа Коши.

Для достижения поставленной цели необходимо:

– показать, что пространство $C^{\mu}_{A}(\overline{D})$ банахово относительно соответствующей нормы;

– получить представление для функции $\phi(z)$ из класса $C^{\mu}_{J}(\overline{D})$;

– свести исходную задачу к системе сингулярных интегральных уравнений;

<u>Объектом исследования</u> являются краевые задачи для эллиптических систем первого порядка на плоскости.

<u>Предметом исследования</u> – задача Римана–Гильберта (0.2) для эллиптической системы (0.1) в классе (0.3).

Представленная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка используемой литературы (83 наименований).В пределах каждой главы принята сквозная нумерация параграфов и формул. Теоремы и леммы нумеруются двумя цифрами, первая из которых указывает на номер параграфа, а вторая – на номер теоремы (леммы) внутри параграфа.

Во **введении** приведен краткий исторический обзор по теме магистерской диссертации, обосновывается актуальность выбранной темы исследования, формулируется цель, объект и предмет исследования, описывается структура работы и кратко излагается содержание основных результатов.

Первая глава магистерской диссертации содержит предварительные сведения, касающиеся эллиптических систем первого порядка и функций, аналитических по Дуглису.

В **первом параграфе** в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной z рассматривается система l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1\frac{\partial U(z)}{\partial x} + A_2\frac{\partial U(z)}{\partial y} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D,$$

где коэффициенты при старших членах — постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l\times l}$, а $l \times l-$матричные коэффициенты $a(z)$, $b(z) \in C(D)$ и $F(z) \in C(D)$.

По определению система эллиптична, если для каждого ненулевого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, выполнено $\det(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) \neq 0$, тогда матрица $A = -A_2^{-1}A_1$ не имеет вещественных собственных значений и предыдущую систему всегда можно представить в эквивалентном виде (0.1)

Пусть l_1 и l_2 число собственных значений матрицы A системы (0.1) (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскости, при этом $l = l_1 + l_2$. Множество всех собственных значений можно записать в виде

$$\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma_2}, \quad \sigma_i \subseteq \{\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

С помощью подходящей обратимой линейной подстановки систему (0.1) всегда можно преобразовать к каноническому виду, т.е. к аналогичной системе, в которой все собственные значения матрицы системы лежат в верхней полуплоскости. В основе этого преобразования лежит следующее предложение

Лемма 1.1. *Существуют такие обратимые $l \times l$ матрицы B, J блочной структуры*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

где $B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j}$, $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}, i, j = 1, 2$, что

$$B^{-1}AB = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$ имеют жорданову форму, при этом их диагональные элементы составляют множество σ_i.

В конце параграфа сформулирована и доказана теорема, которая позволяет привести общую эллиптическую систему (0.1) к каноническому виду эллиптической системы с треугольной матрицей J.

Теорема 1.1 *В обозначениях (0.4) подстановка $B^{-1}U = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1, 2,$$

преобразует систему (0.1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial \phi(z)}{\partial x} + c(z)\phi(c) + d(z)\overline{\phi(z)} = F_0, \tag{0.5}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \overline{\widetilde{d}_{21}} & \overline{\widetilde{c}_{22}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \overline{\widetilde{c}_{21}} & \overline{\widetilde{d}_{22}} \end{pmatrix}.$$

Второй параграф посвящен функциям, аналитическим по Дуглису. Напомним, что система Дуглиса имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{0.6}$$

где все собственные значения λ матрицы $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ лежат в верхней полуплоскости, т.е. имеют положительную мнимую часть. Очевидно, эта система получается из (0.5) в предположении $c = d = F_0 = 0$ и $l = l_1$, $l_2 = 0$. Именное название системы оправдано, так как в предположении теплицевой матрицы J [52] она впервые была изучена А. Дуглисом [13] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел.

В общем случае в уравнении (0.6) матрицу J можно выбрать с точностью до подобия и подчинить различным дополнительным требованиям. Например, J можно считать жордановой матрицей, или, более общим образом, треугольной матрицей.

Для того, чтобы подчеркнуть зависимость от J, $l-$вектор–функцию $\phi(z) = (\phi_1(z), \dots, \phi_l(z))$, являющуюся решением системы Дуглиса (0.6), называем также $J-$аналитической функцией.

Эту функцию будем рассматриваем в конечной области D, ограниченной гладким контуром Γ, который предполагается ориентированным положительно по отношению к области D, т.е. движение по Γ в выбранном направлении оставляет область D слева. Саму область D называем конечной, если она лежит внутри некоторого круга.

Основные сведения, касающиеся системы Дуглиса (0.6) подробно изложены в [78]. Напомним некоторые из них, основанные на аналогах теоремы и формулы Коши для решений этих систем.

С каждым комплексным числом $z = x + iy$ свяжем $l \times l-$матрицу

$$z_J = x \cdot 1 + y \cdot J, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

собственными значениями которой служат числа $x + \lambda y$, где $\lambda \in \sigma(J)$, а $1-$единичная матрица. В частности, при $z \neq 0$ эта матрица обратима.

Аналогом интегральной теоремы Коши для $J-$аналитической в конечной области D вектор–функции $\phi(z) \in C(\overline{D})$ является равенство

$$\int\limits_{\Gamma} dz_J \phi(z) = 0.$$

Здесь $(l \times l)-$матричный дифференциал dz_J, определяемый аналогично z_J, действует на $l-$вектор ϕ обычным образом и потому поставлен впереди. Это равенство является очевидным следствием системы (0.6) и формулы Грина.

Аналогом интегральной формулы Коши является обобщенная интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t-z)_J^{-1}dt_J\phi(t)=\phi(z), \quad z\in D.$$

Граничные свойства в классах Гельдера интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z\in D,$$

определяющего аналитическую в D функцию, хорошо известны [60].

Напомним, что функция φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, $0<\mu<1$, на некотором множестве E комплексной плоскости, если существует такая постоянная $C>0$, что $|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|\le C|z_1-z_2|^{\mu}$ для любых $z_1,z_2\in E$. Наименьшая постоянная C в этой оценке совпадает с полунормой

$$[\varphi]_{\mu}=\sup_{z_1\neq z_2}\frac{|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|}{|z_1-z_2|^{\mu}},$$

где верхняя грань берется по точкам $z_j\in E$. Класс ограниченных функций, удовлетворяющих этому условию, обозначается $C^{\mu}(E)$, относительно нормы

$$|\varphi|=\sup_{E}|\varphi(z)|+[\varphi]_{\mu}$$

он является банаховым пространством [79]. Заметим, что элементы φ этого пространства продолжаются до функций $\widetilde{\varphi}\in C^{\mu}(\overline{E})$ с сохранением $C^{\mu}-$норм, так что множество E всегда можно считать замкнутым.

Отметим, что семейство банаховых пространств $C^{\mu}(E)$ монотонно убывает по μ в смысле вложений, причем в случае ограниченного множества E вложение $C^{\nu}(E)\subseteq C^{\mu}(E)$ при $\mu<\nu$ компактно.

Если E является замкнутой областью $\overline{D}$, то можно ввести пространство $C^{1,\mu}(\overline{D})$ непрерывно дифференцируемых в D функций, которые вместе со своими частными производными принадлежат $C^{\mu}(\overline{D})$.

В соответствии с обобщенной формулой Коши можно ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I_J^1\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t-z)_J^{-1}dt_J\varphi(t), \quad z\in D, \tag{0.7}$$

с произвольной l−вектор–функцией $(\varphi_1, \ldots, \varphi_l) \in C(\Gamma)$ и матричным дифференциалом $dt_J = dt_1 + Jdt_2$.

Этот интеграл определяет функцию, J−аналитическую вне кривой Γ. С ним также связан обобщенный сингулярный интеграл

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t-t_0)_J^{-1}dt_J\varphi(t), \quad t_0\in \Gamma,$$

который понимается обычным образом в смысле главного значения по Коши.

Для этих интегралов справедлив результат [77], аналогичный классическому случаю. Единственное отличие состоит в том, что на контур Γ необходимо наложить дополнительное условие гладкости.

Обозначим $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ единичный касательный вектор к Γ в точек t, направление которого согласовано с ориентацией контура. Его можно рассматривать как непрерывную функцию на Γ. По определению Γ называют ляпуновским контуром, если эта функция удовлетворяет условию Гельдера. Более точно, этот контур принадлежит классу $C^{1,\nu}$, если функция $e(t) \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, $\mu < \nu$.

Теорема 2.2. *Пусть область $D \in \mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, ориентированным положительно по отношению к D. Тогда для вектор–функции $\varphi(t)$ из класса $C^\mu(\Gamma)$, функция $(I_J^1\varphi)(z)$, аналитическая по Дуглису, непрерывно продолжима на границу $\Gamma = \partial D$ области D, и оператор I_J^1 ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$. При этом для граничных значений $(I_J^1\varphi)^+$ этой функции справедливы формулы Сохоцкого–Племеля*

$$2(I_J^1\varphi)^+(t_0) = \varphi(t_0) + S_J\varphi(t_0) \quad t_0\in\Gamma.$$

В завершение второго параграфа приведена теорема о представлении $J-$аналитических функций обобщенными интегралами типа Коши с вещественной плотностью, которая является аналогом известной теоремы Н.И. Мусхелишвили [60] о представлении для аналитических функций.

Теорема 2.3. *Пусть область D конечна и ограничена гладким контуром Γ. Тогда любая $J-$ аналитическая в D функция $\phi^0(z) \in C^\mu(\overline{D})$ единственным образом представима в виде*

$$\phi^0(z) = (I_J^1\varphi)(z) + i\xi,$$

с некоторой вещественной $l-$вектор–функцией $\varphi(t) \in C^\mu(\Gamma)$ и вещественным $l-$вектором $\xi \in \mathbb{R}^l$.

Третий параграф второй главы посвящен одномерным сингулярным операторам.

Напомним [62], что оператор N, ограниченный в банаховых пространствах $X \to Y$, фредгольмов, если подпространство $\{x \in X,\ Nx = 0\}$, называемое его ядром $\ker N$, конечномерно, образ $\operatorname{im} N = N(X)$ замкнут в Y и фактор–пространство $Y/\operatorname{im} N$, называемое его коядром $\operatorname{coker} N$, также конечномерно. Удобно для краткости размерности $\dim(\ker N)$ и $\dim(\operatorname{coker} N)$ обозначать, соответственно, $\dim N$ и $\operatorname{codim} N$.

Целое число $\operatorname{ind} N = \dim N - \operatorname{codim} N$ называется индексом оператора N. Коядро $\operatorname{coker} N = Y/\operatorname{im} N$ часто отождествляется с ядром $\ker N^*$ сопряженного оператора N^*.

Следующая теорема сдержит основные свойства фредгольмовых операторов [62].

Теорема 3.1. (a) *Произведение N_1N_2 двух фредгольмовых операторов есть также фредгольмовый оператор индекса* $\operatorname{ind}\,(N_1N_2) = \operatorname{ind}\,N_1 + \operatorname{ind}\,N_2$.

(b) *Сумма фредгольмого и компактного оператора есть фредгольмовый оператор того же индекса. В частности, если оператор N_0 компактен в X, то оператор $N = 1 + N_0$ фредгольмов и его индекс равен нулю.*

(c) *Оператор* $N : X \to Y$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда существует такой фредгольмовый оператор* $M : Y \to X$, *что* $MN = 1 + N_1$, $NM = 1 + N_2$, *где операторы* N_1 *и* N_2 *компактны в, соответственно,* X *и* Y.

(d) *Сумма фредгольмого и ограниченного оператора достаточно малой нормы есть фредгольмовый оператор того же индекса.*

(e) *Пусть оператор* $N : X \to Y$ *фредгольмов и оператор* $\widetilde{N} : X \times \mathbb{C}^m \to Y \times \mathbb{C}^n$ *действует по формуле* $\widetilde{N}(x, \xi) = (y, \eta)$, *где*

$$y = Nx + \sum\nolimits_{j=1}^{m} a_j \xi_j, \quad \eta_i = b_i x + \sum\nolimits_{j=1}^{m} c_{ij} \xi_j, \quad 1 \le i \le n,$$

с некоторыми $a_j \in Y$ *и ограниченными линейными функционалами* $b_i \in X^*$. *Тогда оператор* $\widetilde{N}$ *фредгольмов и его индекс* $\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N + m - n$.

Исходя из $l \times l-$матриц–функций $a, b \in C^\mu(\Gamma)$, рассмотрим сингулярный оператор

$$2N = a(1 + S) + b(1 - S) + 2N_0, \tag{0.8}$$

где a и b понимаются как операторы умножения $\varphi \to a\varphi$, оператор N_0 компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и $1-$единичный оператор. По определению N принадлежит к нормальному типу, если матрицы–функции a и b обратимы, т.е. $\det a(t) \ne 0$ для всех $t \in \Gamma$ и аналогичным свойством обладает b.

Согласно [79] класс всех ограниченных операторов $N : X \to Y$ является векторным пространством, которое обозначим $\mathcal{L}(X, Y)$. При $X = Y$ пишем кратно $\mathcal{L}(X)$. Следующая лемма имеет важное значение, так как используется при доказательстве основной теоремы магистерской диссертации.

Лемма 3.1. *Пусть* $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ *и оператор* $N \in \mathcal{L}(X)$ *представляется треугольной* $n \times n-$*матрицей* (N_{ij}), $N_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)$, *например* $N_{ij} = 0$ *при* $i < j$. *Тогда, если диагональные элементы* $N_{ii} \in \mathcal{L}(X_i)$ *фредгольмовы, то оператор* N *фредгольмов и его индекс*

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N_{11} + \ldots + \operatorname{ind} N_{nn}.$$

Приведем результаты классической теории сингулярных уравнений [60].

Теорема 3.2. *Пусть матрицы–функции $a, b \in C^{\nu}(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. Тогда оператор (0.8) фредгольмов в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда матрицы a, b обратимы и его индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} N = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det b}{\det a}\right]_{\Gamma},$$

где $[\quad]_{\Gamma}$ означает приращение непрерывной ветви логарифма на контуре Γ в соответствии с заданной его ориентацией.

Примером компактного оператора в $C^{\mu}(\Gamma)$ служит интегральный оператор вида

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{k(t_0, t)}{t - t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{0.9}$$

где функция $k(t_0, t) \in C^{\nu}(\Gamma \times \Gamma)$ с некоторым $\nu > \mu$ и обращается в нуль при $t = t_0$. Очевидно, ядро $k(t_0, t)(t - t_0)^{-1}$ этого оператора имеет слабую особенность и потому интеграл понимается в обычном смысле.

Следующая лемма дает критерий компактности оператора этого вида.

Лемма 3.2. *Пусть функция $k(t_0, t) \in C^{\nu}(\Gamma \times \Gamma)$, $0 < \mu < \nu < 1$, и выполнено условие*

$$k(t, t) = 0, \quad t \in \Gamma.$$

Тогда оператор K ограничен $C(\Gamma) \to C^{\mu}(\Gamma)$ и, в частности, компактен в $C^{\mu}(\Gamma)$.

Если контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, то в соответствии с теоремой 2.2 сингулярный оператор S_J ограничен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. Более того справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, тогда оператор $K = S_J - S$ удовлетворяет условиям леммы 3.2.*

Далее в этом параграфе показана связь операторов (0.8) с комплексным сопряжением $\varphi(t) \to \overline{\varphi(t)}$.

Для оператора K вида (0.9) оператор $\overline{K}$ имеет тот же вид с функцией

$$\tilde{k}(t_0,t) = -\overline{k(t_0,t)}\frac{(t-t_0)\overline{e(t)}}{(\bar{t}-\bar{t}_0)e(t)}.$$

Аналогично для сингулярного оператора Коши S оператор $\overline{S}$ записывается в форме (0.9) с

$$k(t_0,t) = -\frac{(t-t_0)\overline{e(t)}}{(\bar{t}-\bar{t}_0)e(t)}.$$

Что касается оператора $\overline{S_J}$, то, очевидно, он совпадает с $-S_{\overline{J}}$ и справедлив следующий результат.

Лемма 3.4. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, тогда вместе с оператором K вида (0.9) условию леммы 3.2 удовлетворяет и оператор $\overline{K}$. Кроме того, каждый из операторов $S+\overline{S}$ и $\overline{S_J}+S_J$ представим в виде (0.9) и удовлетворяет условиям этой леммы.*

Обозначим $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ соответствующее пространство вещественных $l-$ вектор–функций. Если ограниченный в $C^{\mu}(\Gamma)$ оператор N обладает свойством

$$\overline{N} = N,$$

то он действует как $\mathbb{R}-$ линейный оператор $N_{\mathbb{R}}$ в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ вещественных функций. В случае его фредгольмовости индекс этого оператора понимается, конечно, по отношению к размерностям над полем $\mathbb{R}$.

Лемма 3.5. *Операторы N и $N_{\mathbb{R}}$ свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы совпадают.*

Следующий результат, который дает теорема 3.2. совместно с леммой 3.5 завершает третий параграф второй главы.

Теорема 3.3. *Пусть контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, матрица–функции $G(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. Тогда оператор*

$$R\varphi = \mathrm{Re}[G(\varphi + S\varphi + N_0\varphi)]$$

фредгольмов в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда матрица

G обратима, и его индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} R = -\frac{1}{\pi}[\arg \det G]_{\Gamma},$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma}$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D слева.

В заключительном **четвертом параграфе** рассматривается задача Римана–Гильберта для общей эллиптической системы (0.1) в конечной области $D \in \mathbb{C}$, ограниченной гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}, 0 < \nu < 1$.

Пусть $C-$комплекснозначная матрица блочной структуры, размерности $l \times l$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j} \quad i,j = 1,2.$$

Предполагая, что матрица–функция $C(t)$ принадлежит классу $C^{\nu}(\Gamma)$, задача ставится краевым условием (0.2).

Если матричные коэффициенты $a, b \in C^{\mu}(\overline{D})$, $\mu < \nu$ а правые части $F \in C^{\mu}(\overline{D})$, $f \in C^{\mu}(\Gamma)$, то задачу (0.1)–(0.2) естественно рассматривать в классе (0.3)

В параграфе доказано, что пространство $C^{\mu}_{A}(\overline{D})$ банахово относительно нормы

$$|U|_{C^{\mu}_{A}(\overline{D})} = |U|_{C^{\mu}(\overline{D})} + |L_A U|_{C^{\mu}(\overline{D})}.$$

Как обычно, задачу (0.1)–(0.2) будем называть фредгольмовой, если фредгольмов ее оператор, действующий $C^{\mu}_{A}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D}) \times C^{\mu}(\Gamma)$.

Напомним, что согласно лемме 1.1 матрица $B \in \mathbb{C}^{l \times l}$ имеет следующую блочную структуру

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j},\ i,j = 1,2.$$

Рассмотрим $l \times l-$матрицу–функцию $G(t)$ с блочными элементами вида

$$G_{i1} = C_{i1}B_{11} + C_{i2}B_{21} \quad G_{i2} = \overline{C}_{i1}B_{12} + \overline{C}_{i2}B_{22} \quad i, = 1,2.$$

В заключении доказывается **основная теорема** магистерской диссертации о фредгольмовой разрешимости задачи Римана–Гильберта (0.1)–(0.2) в классе (0.3).

Теорема 4.1. *Пусть область* D *конечна, ограничена гладким контуром* $\Gamma \in C^{1,\nu}$ *и матрица–функция* $C(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$. *Пусть* $l \times l-$*матричные коэффициенты* $a(z)$, $b(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$, *а правые части системы (0.1) и краевого условия (0.2) принадлежат соответственно* $F(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$, $f(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$. *Тогда условие обратимости*

$$\det\, G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (0.1)–(0.2) в классе (0.3) и ее индекс дается формулой

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma} + l,$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma}$ *берется в направлении, оставляющем область* D *слева.*

Глава 1

Вспомогательные ведения

1 Эллиптическая система первого порядка

Рассмотрим в области D на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной z систему l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1\frac{\partial U(z)}{\partial x}+A_2\frac{\partial U(z)}{\partial y}+a(z)U(z)+b(z)\overline{U(z)}=F(z),\quad z\in D,$$

где коэффициенты при старших членах – постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l\times l}$, а $l\times l-$матричные коэффициенты a, b и $l-$вектор–функция $F(z)\in C(D)$.

Под ее регулярным решением понимается комплексная $l-$вектор–функция $U=(U_1,...,U_l)\in C^1(D)$, удовлетворяющая этой системе тождественно.

По определению система эллиптична, если для каждого ненулевого вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$, выполнено $\det(\xi_1A_1+\xi_2A_2)\neq 0$.

В частности, это условие означает, что матрицы A_1, A_2 невырождены. Действительно, пусть для определенности $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$. Имеем $\det\, A_1\neq 0$. Аналогично и во втором случае.

Обозначим $A=-A_2^{-1}A_1$. Данное выше условие эллиптичности означает, что матрица A не имеет вещественных собственных значений. В самом деле, предположим противное: $\det(A-\lambda)=0$ и $\lambda-$вещественное. Подставим в это равенство выражение для A, получим

$$\det(-A_2^{-1}A_1-\lambda)=\det(-A_2^{-1})\det(A_1+\lambda A_2),$$

первый множитель не равен нулю, т.к. матрица A_2 невырожденна. Второй множитель также не равен нулю, т.к. должно выполняться условие эллиптичности, здесь $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda$. Получили противоречие.

Таким образом, умножая рассматриваемую систему слева на $-A_2^{-1}$ и переходя к переобозначениям $a=-A_2^{-1}a$, $b=-A_2^{-1}b$, $F=-A_2^{-1}F$, ее всегда можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial U(z)}{\partial y} - A\frac{\partial U(z)}{\partial x} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z). \tag{1.1}$$

Соответственно в этой общей эллиптической системе старшие коэффициенты при производных постоянны и матрица $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений.

Обозначим l_1 и l_2 число собственных значений матрицы A системы (1.1) (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскости, при этом $l = l_1 + l_2$.

Множество всех собственных значений можно записать в виде

$$\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma_2}, \quad \sigma_j \subseteq \{\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\}, \tag{1.2}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Напомним, что жордановой формой матрицы называют блочно–диагональную матрицу

$$J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_l(\lambda_l)), \tag{1.3}$$

где в свою очередь каждая матрица J_i, $1 \le i \le l$ также блочно–диагональна и составлена из клеток Жордана

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

различных порядков.

С помощью подходящей обратимой линейной подстановки систему (1.1) всегда можно преобразовать к аналогичной системе, в которой $l_2 = 0$, т.е. когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости. В основе этого преобразования лежит следующее предложение [82].

Лемма 1.1. *Существуют такие обратимые $l \times l$ матрицы B, J блочной структуры*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j}$, $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}, i = 1, 2$, что

$$B^{-1}AB = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Матрицы $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$ имеют жорданову форму (1.4), при этом их диагональные элементы составляют множество σ_i.

С $l-$вектор–функцией $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где ϕ_1 означают первые l_1 компонент, а ϕ_2 следующие l_2 компонент, свяжем вектор–функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$. Аналогично положим

$$\widetilde{F}_0 = B^{-1}F = (F_1, \overline{F}_2), \quad F_0 = (F_1, F_2),$$

и введем блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}aB, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \widetilde{d}_{21} & \widetilde{d}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}b\overline{B}. \tag{1.7}$$

Теорема 1.1. *В обозначениях (1.5) подстановка $B^{-1}U = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

преобразует систему (1.1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial \phi(z)}{\partial x} + c(z)\phi(z) + d(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z), \tag{1.9}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты c, d имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \overline{\widetilde{d}_{21}} & \overline{\widetilde{c}_{22}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \overline{\widetilde{c}_{21}} & \overline{\widetilde{d}_{22}} \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Подстановка (1.8) приводит систему (1.1) к виду

$$B\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - AB\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + aB\widetilde{\phi} + b\overline{B\widetilde{\phi}} = F.$$

Умножая это равенство слева на B^{-1}, в соответствии с леммой 1.1 получим систему

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - \widetilde{J}\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + (B^{-1}aB)\widetilde{\phi} + (B^{-1}b\overline{B})\overline{\widetilde{\phi}} = B^{-1}F,$$

С учетом (1.7) в соответствующей блочной записи она выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}\phi_1 + \widetilde{c}_{12}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{11}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{12}\phi_2 = F_1,$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial y} - \overline{J}_2\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial x} + \widetilde{c}_{21}\phi_1 + \widetilde{c}_{22}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{21}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{22}\phi_2 = \overline{F}_2.$$

Заменяя второе уравнение этой системы комплексно сопряженным, получим новую систему

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}\phi_1 + \widetilde{c}_{12}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{11}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{12}\phi_2 = F_1,$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y} - J_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \overline{\widetilde{c}_{21}\overline{\phi}_1} + \overline{\widetilde{c}_{22}}\phi_2 + \overline{\widetilde{d}_{21}}\phi_1 + \overline{\widetilde{d}_{22}}\overline{\phi}_2 = F_2,$$

которая, очевидно, имеет вид (1.9) с коэффициентами (1.10).

Отметим, что матрица J системы (1.9) составлена из клеток Жордана вида (1.4) с диагональными элементами из множеств σ_1 и σ_2, лежащих в верхней полуплоскости и фигурирующих в (1.2).

2 Функции, аналитические по Дуглису

Рассмотрим простейшую эллиптическую систему первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

где все собственные значения λ матрицы $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ лежат в верхней полуплоскости, т.е. имеют положительную мнимую часть. Очевидно, эта система получается из (1.9) в предположении $c = d = F_0 = 0$ и $l = l_1$, $l_2 = 0$. В предположении, что матрица $J-$ теплицева [52], система (2.1) впервые была изучена А. Дуглисом [13] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел.

В случае скалярной матрицы $J = \nu$ имеем уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - \nu\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0.$$

Если $J = i$ то решением системы (2.1) служит обычная аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Действительно, подставляя вместо ϕ выражение $u + iv$ в уравнение (2.1) и заменяя J на i, получим

$$\frac{\partial(u+iv)}{\partial y} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} = 0.$$

Или, после группировки действительной и мнимой части

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Откуда непосредственно следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Заметим, что условие (2.1) совпадает с условиями Коши–Римана в комплексной форме и, следовательно, возможно аналогичным образом ввести условие существования комплексной производной.

Теорема 2.1. *Если функция ϕ аналитична по Дуглису в области D, то в каждой точке $z_0 \in D$ существует предел*

$$\phi'(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)_J^{-1}[\phi(z) - \phi(z_0)] = \phi^{(1)}, \tag{2.2}$$

где

$$\phi^{(1)} = \frac{\partial^n\phi}{\partial x^n}.$$

Верно и обратное, если вектор-функция $\phi \in C^1(D)$ допускает предел (2.2) в каждой точке $z_0 \in D$, то она удовлетворяет (2.1), причем ее производной служит частная производная по x.

Доказательство. В самом деле, по условию дифференцируемости

$$\phi(z) - \phi(z_0) = (x - x_0)\frac{\partial \phi}{\partial x}(z_0) + (y - y_0)\frac{\partial \phi}{\partial y}(z_0) + |z - z_0|\varepsilon(z),$$

где вектор-функция $\varepsilon(z) \to 0$ при $|z - z_0| \to 0$.

В силу (2.1) и (2.2) получим

$$\phi(z) - \phi(z_0) = (z - z_0)_J \frac{\partial \phi}{\partial x}(z_0) + |z - z_0|\varepsilon(z).$$

Согласно [78] обратная матрица z_J^{-1} однородна степени -1 и ее норма в $\mathbb{C}^{l\times l}$ допускает оценку

$$|z_J^{-1}| \le C|z|^{-1}.$$

Таким образом, матрица функция $|z|z_J^{-1}$ однородна степени нуль и, очевидно, непрерывна. Поэтому она равномерно ограничена, что и приводит к справедливости (2.2).

Обратно, пусть $\phi \in C^1(D)$ и предел (2.1) существует в каждой точке $z_0 \in D$. Если под знаком этого предела $y = y_0$, то $(z - z_0)_J = x - x_0$ и

$$\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Полагая $x = x_0$, получим $(z - z_0)_J = (y - y_0)J$ и, следовательно,

$$\phi'(z_0) = J^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}(z_0).$$

Совместно с предыдущим равенством отсюда следует, что ϕ удовлетворяет уравнению (2.1) и $\phi' = \phi^{(1)}$.

В силу доказанной теоремы вектор–функцию $\phi(z) = (\phi_1(z), \dots \phi_l(z)) \in C^1$ комплексной переменной $z = x + iy$ назовем аналитической по Дуглису, если она удовлетворяет уравнению (2.1).

В общем случае в уравнении (2.1) матрицу J можно выбрать с точностью до подобия и подчинить различным дополнительным требованиям. Например, J можно считать жордановой матрицей, или, более общим образом, треугольной матрицей. Если $\sigma(J)$ состоит из точек $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то можно также J подчинить требованию

$$J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_n), \quad \sigma(J_k) = \{\lambda_k\},$$

с диагональными блоками $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$, $l_1 + ... + l_n = l$.

Основные сведения, касающиеся системы Дуглиса (2.1) подробно изложены в [78]. Напомним некоторые из них, основанные на аналогах теоремы и формулы Коши для решений этих систем.

С каждым комплексным числом $z = x + iy$ свяжем $l \times l-$матрицу

$$z_J = x \cdot 1 + y \cdot J, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

собственными значениями которой служат числа $x + \lambda y$, где $\lambda \in \sigma(J)$, а $1-$единичная матрица. В частности, при $z \neq 0$ эта матрица обратима.

Например, когда $l = 2$ и $J-$есть клетка Жордана (1.4), то в развернутом виде

$$z_J = \begin{pmatrix} z_\lambda & y \\ 0 & z_\lambda \end{pmatrix}, \quad z_J^{-1} = z_\lambda^{-2} \begin{pmatrix} z_\lambda & -y \\ 0 & z_\lambda \end{pmatrix},$$

где аналогично (2.3) положено $z_\lambda = x + \lambda y$.

Покажем, что справедливо следующее важное матричное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \zeta_J^{-1} d\zeta_J = 1, \quad \zeta \in \mathbb{C} \tag{2.4}$$

где 1 означает единичную матрицу.

Для фиксированного комплексного числа λ, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ рассмотрим аналитическую в верхней полуплоскости функцию

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta_\lambda}{\zeta_\lambda},$$

где аналогично (2.3) положено $\zeta_\lambda = \zeta_1 + \lambda\zeta_2$ и $d\zeta_\lambda = d\zeta_1 + \lambda d\zeta_2$. Тогда левая часть (2.4) является значением $\chi(J)$ этой функции от матрицы J. Согласно [78] имеет место формула

$$\chi(J) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\chi^{(k)}}{k!}(J-\lambda)^k,$$

где $l-$порядок матрицы. В силу этой формулы для справедливости соотношения (2.4) достаточно убедиться, что $\chi(\lambda) \equiv 1$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

В самом деле, замена $z = \zeta_1 + \zeta\zeta_2$ переводит единичную окружность $|\zeta| = 1$ в эллипс Γ_0, таким образом

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{dz}{z} = 1.$$

Аналогом интегральной теоремы Коши для $J-$аналитической в конечной области D вектор–функции $\phi(z) \in C(\overline{D})$ является равенство

$$\int\limits_{\Gamma} dz_J \phi(z) = 0.$$

Здесь $(l\times l)-$матричный дифференциал dz_J, определяемый аналогично (2.3), действует на $l-$вектор ϕ обычным образом и потому поставлен впереди. Это равенство является очевидным следствием (2.1) и формулы Грина.

Fyfjujv интегральной формулы Коши является обобщенная интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t-z)_J^{-1} dt_J \phi(t) = \phi(z), \quad z \in D.$$

С помощью теоремы Коши и (2.4) она устанавливается аналогично случаю обычных аналитических функций.

Граничные свойства в классах Гельдера интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D,$$

определяющего аналитическую в D функцию, хорошо известны [60].

Напомним, что функция φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, $0 < \mu < 1$, на некотором множестве E комплексной плоскости, если существует такая постоянная $C > 0$, что $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^\mu$ для любых $z_1, z_2 \in E$. Наименьшая постоянная C в этой оценке совпадает с полунормой

$$[\varphi]_\mu = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}, \tag{2.5}$$

где верхняя грань берется по точкам $z_j \in E$. Класс ограниченных функций, удовлетворяющих этому условию, обозначается $C^\mu(E)$, относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_E |\varphi(z)| + [\varphi]_\mu$$

он является банаховым пространством [79]. Заметим, что элементы φ этого пространства продолжаются до функций $\widetilde{\varphi} \in C^\mu(\overline{E})$ с сохранением $C^\mu-$норм, так что множество E всегда можно считать замкнутым.

Отметим, что семейство банаховых пространств $C^\mu(E)$ монотонно убывает по μ в смысле вложений, причем в случае ограниченного множества E вложение $C^\nu(E) \subseteq C^\mu(E)$ при $\mu < \nu$ компактно. Если E является замкнутой областью $\overline{D}$, то можно ввести пространство $C^{1,\mu}(\overline{D})$ непрерывно дифференцируемых в D функций, которые вместе со своими частными производными принадлежат $C^\mu(\overline{D})$.

Для интегралов типа Коши справедлив следующий классический результат [60]. Если $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, то функция $\phi = I\varphi$ непрерывно продолжима в замкнутую область $\overline{D}$ и принадлежит классу $C^\mu(\overline{D})$, причем оператор I ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, т.е. допускает оценку

$$|I\varphi|_{C^\mu(\overline{D})} \le C|\varphi|_{C^\mu(\Gamma)}.$$

При этом для ее граничных значений

$$\phi^+(t_0) = \lim_{z \to t_0} \phi(z), \quad t_0 \in \Gamma,$$

справедлива формула Сохоцкого–Племеля $2\phi^+ = \varphi + S\varphi$ с сингулярным интегралом Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2.6}$$

который понимается в смысле главного значения по Коши.

В соответствии с обощенной интегральной формулой Коши можно ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I^1_J\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t - z)^{-1}_J dt_J\varphi(t), \quad z \in D, \tag{2.7}$$

с произвольной $l-$вектор–функцией $(\varphi_1, \ldots, \varphi_l) \in C(\Gamma)$. Этот интеграл определяет функцию, $J-$аналитическую вне кривой Γ. С ним также связан обобщенный сингулярный интеграл

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t - t_0)^{-1}_J dt_J\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2.8}$$

который понимается обычным образом в смысле главного значения по Коши.

Для этих интегралов справедлив результат [77], аналогичный классическому случаю. Единственное отличие состоит в том, что на контур Γ необходимо наложить дополнительное условие гладкости. Обозначим $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ единичный касательный вектор к Γ в точек t, направление которого согласовано с ориентацией контура. Его можно рассматривать как непрерывную функцию на Γ. По определению Γ называют ляпуновским контуром, если эта функция удовлетворяет условию Гельдера. Более точно, этот контур принадлежит классу $C^{1,\nu}$, если функция $e(t) \in C^{1,\nu}(\Gamma)$. Заметим попутно, что в терминах e связь комплексного дифференциала dt в (2.6) и матричного дифференциала dt_J в (2.7) с элементом d_1t длины дуги определяется соотношениями $dt = e(t)d_1t$ и $dt_J = [e(t)]_J d_1t$.

Теорема 2.2. *Пусть область $D \in \mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, ориентированным положительно по отношению к D. Тогда для вектор–функции $\varphi(t)$ из класса $C^\mu(\Gamma), 0 < \mu < \nu < 1$, функция $(I^1_J\varphi)(z)$,* *аналитическая по Дуглису, непрерывно продолжима на границу* $\Gamma = \partial D$ *области* D, *и оператор* I^1_J *ограничен* $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$. *При этом для граничных значений* $(I^1_J\varphi)^+$ *этой функции справедливы формулы Сохоцкого–Племеля*

$$2(I^1_J\varphi)^+(t_0) = \varphi(t_0) + S_J\varphi(t_0) \quad t_0 \in \Gamma. \tag{2.9}$$

Хорошо известна теорема Мусхелишвили [60] о представлении аналитических функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области, интегралами типа Коши с вещественной плотностью. Аналог этой теоремы Мусхелишвили имеет место и для $J-$ аналитических функций [77], которые, напомним, рассматриваются для треугольных матриц J.

Теорема 2.3. *Пусть область* D *конечна и ограничена контуром* Γ. *Тогда любая* $J-$ *аналитическая в* D *функция* $\phi^0(z) \in C^\mu(\overline{D})$ *единственным образом представима в виде*

$$\phi^0(z) = (I^1_J\varphi)(z) + i\xi, \tag{2.10}$$

с некоторой вещественной $l-$*вектор–функцией* $\varphi(t) \in C^\mu(\Gamma)$ *и вещественным* $l-$*вектором* $\xi \in \mathbb{R}^l$.

Глава 2

Задача Римана–Гильберта

3 Одномерные сингулярные операторы

Простейшим сингулярным оператором на ориентированном гладком контуре Γ является оператор Коши S, действующий по формуле (2.6). Его рассматриваем в пространстве $l-$вектор–функций $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Как отмечено в §2, он ограничен в этом пространстве. Исходя из $l \times l-$матриц–функций $a, b \in C^\mu(\Gamma)$, рассмотрим сингулярный оператор

$$2N = a(1+S) + b(1-S) + 2N_0, \tag{3.1}$$

где a и b понимаются как операторы умножения $\varphi \to a\varphi$, оператор N_0 компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и 1 означает единичный оператор. По определению N принадлежит к нормальному типу, если матрицы–функции a и b обратимы, т.е. $\det a(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$ и аналогичным свойством обладает b.

Для операторов этого типа хорошо известен критерий фредгольмовости. Напомним [62], что оператор N, ограниченный в банаховых пространствах $X \to Y$, фредгольмов, если подпространство $\{x \in X,\ Nx = 0\}$, называемое его ядром $\ker N$, конечномерно, образ $\operatorname{im} N = N(X)$ замкнут в Y и фактор–пространство $Y/\operatorname{im} N$, называемое его коядром $\operatorname{coker} N$, также конечномерно. Удобно для краткости размерности $\dim(\ker N)$ и $\dim(\operatorname{coker} N)$ обозначать, соответственно, $\dim N$ и $\operatorname{codim} N$. Целое число $\operatorname{ind} N = \dim N - \operatorname{codim} N$ называется индексом оператора N. Коядро $\operatorname{coker} N = Y/\operatorname{im} N$ часто отождествляется с ядром $\ker N^*$ сопряженного оператора N^*.

Фредгольмовы операторы обладают следующими основными свойствами [62].

Теорема 3.1. (a) *Произведение N_1N_2 двух фредгольмовых операторов есть также фредгольмовый оператор индекса* $\operatorname{ind}(N_1N_2) = \operatorname{ind} N_1 + \operatorname{ind} N_2$.

(b) *Сумма фредгольмого и компактного оператора есть фредгольмовый оператор того же индекса. В частности, если оператор N_0 компактен в X, то оператор $N = 1 + N_0$ фредгольмов и его индекс равен нулю.*

(c) *Оператор $N : X \to Y$ фредгольмов тогда и только тогда, когда существует такой фредгольмовый оператор $M : Y \to X$, что $MN = 1 + N_1$, $NM = 1 + N_2$, где операторы N_1 и N_2 компактны в, соответственно, X и Y.*

(d) *Сумма фредгольмого и ограниченного оператора достаточно малой нормы есть фредгольмовый оператор того же индекса.*

(e) *Пусть оператор $N : X \to Y$ фредгольмов и оператор $\widetilde{N} : X \times \mathbb{C}^m \to Y \times \mathbb{C}^n$ действует по формуле $\widetilde{N}(x, \xi) = (y, \eta)$, где*

$$y = Nx + \sum\nolimits_{j=1}^{m} a_j \xi_j, \quad \eta_i = b_i x + \sum\nolimits_{j=1}^{m} c_{ij} \xi_j, \quad 1 \le i \le n,$$

с некоторыми $a_j \in Y$ и ограниченными линейными функционалами $b_i \in X^*$. Тогда оператор $\widetilde{N}$ фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N + m - n$.

Второе утверждение в (b) известно как теорема Рисса. Оператор M в утверждении (c) носит название регуляризатора N. Из утверждения (a) фредгольмовость N^k для некоторого натурального k влечет и фредгольмовость N. Еще одно утверждение такого рода выделим особо.

Напомним [79], что класс всех ограниченных операторов $N : X \to Y$ является векторным пространством, которое обозначим $\mathcal{L}(X, Y)$. При $X = Y$ пишем кратно $\mathcal{L}(X)$.

Лемма 3.1. *Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ и оператор $N \in \mathcal{L}(X)$ представляется треугольной $n \times n-$матрицей (N_{ij}), $N_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)$, например $N_{ij} = 0$ при $i < j$. Тогда, если диагональные элементы $N_{ii} \in \mathcal{L}(X_i)$ фредгольмовы, то оператор N фредгольмов и его индекс*

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N_{11} + \ldots + \operatorname{ind} N_{nn}.$$

Классический результат [60] для сингулярных операторов (3.1) нормального типа состоит в том, что они фредгольмовы и их индекс выражается через индекс Коши матрицы–функции $G = ba^{-1}$.

Теорема 3.2. *Пусть матрицы- функции $a, b \in C^{\nu}(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. Тогда оператор (3.1) фредгольмов в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда матрицы a, b обратимы и его индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} N = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det b}{\det a}\right]_{\Gamma}, \tag{3.2}$$

где $[\quad]_{\Gamma}$ означает приращение непрерывной ветви логарифма на контуре Γ в соответствии с заданной его ориентацией.

Примером компактного оператора в $C^{\mu}(\Gamma)$ служит интегральный оператор вида

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{k(t_0, t)}{t - t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.3}$$

где функция $k(t_0, t) \in C^{\nu}(\Gamma \times \Gamma)$ с некоторым $\nu > \mu$ и обращается в нуль при $t = t_0$. Очевидно, ядро $k(t_0, t)(t - t_0)^{-1}$ этого оператора имеет слабую особенность и потому интеграл понимается в обычном смысле. Критерий компактности оператора вида (3.3) дает следующая лемма [83].

Лемма 3.2. *Пусть $k(t_0, t) \in C^{\nu}(\Gamma \times \Gamma),\ 0 < \mu < \nu < 1$, и*

$$k(t, t) = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Тогда оператор K ограничен $C(\Gamma) \to C^{\mu}(\Gamma)$ и, в частности, компактен в $C^{\mu}(\Gamma)$.

Если контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, т.е. производная гладкой параметризации кривой принадлежит C^{ν}, то в соответствии с теоремой 2.2 сингулярный оператор S_J ограничен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma),\ 0 < \mu < \nu$. Утверждается, что к разности $S_J - S$ применима лемма 3.2 [34].

Лемма 3.3. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, тогда оператор $K = S_J - S$ удовлетворяет условиям леммы 3.2.*

Рассмотрим еще связь операторов (3.1) с комплексным сопряжением $\varphi(t) \to \overline{\varphi(t)}$, который можно рассматривать как линейный (над полем $\mathbb{R}$) оператор, совпадающий со своим обратным. Аналогичную инволюцию $N \to \overline{N}$ можно ввести в классе $\mathbb{C}-$ линейный операторов, полагая по определению

$$\overline{N}\varphi = \overline{N\bar{\varphi}}. \tag{3.5}$$

Например, для оператора K вида (3.3) оператор $\overline{K}$ имеет тот же вид с функцией

$$\tilde{k}(t_0,t) = -\overline{k(t_0,t)}\frac{(t-t_0)\overline{e(t)}}{(\bar{t}-\bar{t}_0)e(t)}.$$

Действительно, по определению (3.5) имеем

$$(\overline{K}\varphi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{k(t_0,t)}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\varphi(t)\overline{dt}.$$

Так как $dt = e(t)d_1t$, где $e(t)-$единичный касательный вектор, а d_1t-элемент длины дуги, то $\overline{dt} = \overline{e(t)}dt/e(t)$ и значит оператор $\overline{K}$ можно представить в виде (3.3) с функцией $\tilde{k}(t_0,t)$.

Аналогично для сингулярного оператора Коши S оператор $\overline{S}$ записывается в форме (3.3) с

$$k(t_0,t) = -\frac{(t-t_0)\overline{e(t)}}{(\bar{t}-\bar{t}_0)e(t)}.$$

Что касается оператора $\overline{S_J}$, то, очевидно, он совпадает с $-S_{\overline{J}}$. Совершенно аналогично лемме 3.3 устанавливается следующий результат.

Лемма 3.4. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, тогда вместе с оператором K вида (3.3) условию леммы 3.2 удовлетворяет и оператор $\overline{K}$. Кроме того, каждый из операторов $S+\overline{S}$ и $\overline{S_J}+S_J$ представим в виде (3.3) и удовлетворяет условиям этой леммы.*

Обозначим $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ соответствующее пространство вещественных $l-$ вектор–функций. Если ограниченный в $C^{\mu}(\Gamma)$ оператор N обладает свойством

$$\overline{N} = N, \tag{3.6}$$

то он действует как $\mathbb{R}-$ линейный оператор $N_{\mathbb{R}}$ в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ вещественных функций. В случае его фредгольмовости индекс этого оператора понимается, конечно, по отношению к размерностям над полем $\mathbb{R}$ [79].

Лемма 3.5. *Операторы N и $N_{\mathbb{R}}$ свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы совпадают.*

Примером оператора, действующего в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, служит оператор

$$R\varphi = \mathrm{Re}[G(\varphi + S\varphi + N_0\varphi)], \tag{3.7}$$

где $l \times l-$ матрица - функция $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. С учетом определения (3.5) и вещественности φ можем записать

$$2R\varphi = G(\varphi + S\varphi + N_0\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S}\varphi + \overline{N}_0\varphi),$$

так что $R = N_{\mathbb{R}}$ по отношению к $\mathbb{C}-$ линейному оператору

$$2N = G(1 + S) + \overline{G}(1 + \overline{S}) + 2N_1$$

с компактным оператором $2N_1 = GN_0 + \overline{GN}_0$. Очевидно, оператор N обладает свойством (3.6) и в условиях леммы 3.4 может записан в форме (3.1) с $a = G$, $b = \overline{G}$ и компактным оператором

$$2N_0 = \overline{G}N_2 + 2N_1.$$

Поэтому теорема 3.2 совместно с леммой 3.5 приводит к следующему результату.

Теорема 3.3. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, матрица–функции $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. Тогда оператор (3.7) фредгольмов в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда матрица G обратима, и его индекс дается формулой*

$$\mathrm{ind}\, R = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma}, \tag{3.8}$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma}$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D слева.

4 Задача Римана—Гильберта

Пусть конечная область $D \in \mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. В этой области рассмотрим эллиптическую систему l дифференциальных уравнений первого порядка (1.1), которую для удобства запишем в виде

$$L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad L_A = \frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial x}, \quad z \in D, \qquad (4.1)$$

где постоянная матрица $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений, $l-$вектор–функция $F(z)$ и $l \times l$ матричные коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ принадлежат классу $C(D)$ и под регулярным решением этой системы понимается $l-$вектор–функция $U = (U_1, \dots, U_l) \in C^1(D)$, удовлетворяющая этой системе тождественно.

Пусть $C-$комплекснозначная $l \times l$ матрица блочной структуры

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j} \quad i,j = 1,2. \qquad (4.2)$$

В предположении что матрица–функция $C(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$ рассмотрим краевую задачу Римана–Гильберта

$$\operatorname{Re} C(t)U(t)^{+}|_{\Gamma} = f(t), \quad t \in \Gamma. \qquad (5.3)$$

Если матричные коэффициенты $a, b \in C^{\mu}(\overline{D})$, $\mu < \nu$, а правые части $F \in C^{\mu}(\overline{D})$, $f \in C^{\mu}(\Gamma)$, то задачу (4.1)–(4.3) естественно рассматривать в классе

$$C^{\mu}_A(\overline{D}) = \{U \in C^1(D) \cap C^{\mu}(\overline{D}), L_A U \in C^{\mu}(\overline{D})\}.$$

Ниже, при доказательстве теоремы 4.1, будет установлено, что пространство $C^{\mu}_A(\overline{D})$ банахово относительно нормы

$$|U|_{C^{\mu}_A(\overline{D})} = |U|_{C^{\mu}(\overline{D})} + |L_A U|_{C^{\mu}(\overline{D})}. \qquad (4.4)$$

В области D задачу (4.1)–(4.3) будем называть фредгольмовой, если фредгольмов ее оператор, ставящий каждому решению U в соответствие пару (F, f) и действующий $C^{\mu}_{A}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D}) \times C^{\mu}(\Gamma)$.

Напомним, что согласно лемме 1.1. матрица $B \in \mathbb{C}^{l\times l}$ имеет следующую блочную структуру

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i\times l_j},\ i,j = 1,2.$$

Рассмотрим $l \times l-$матрицу–функцию $G(t)$ с блочными элементами вида

$$G_{i1} = C_{i1}B_{11} + C_{i2}B_{21} \quad G_{i2} = \overline{C}_{i1}B_{12} + \overline{C}_{i2}B_{22} \quad i, = 1,2. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть конечная область D ограничена гладким контуром Γ и матрица–функция $C(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$. Пусть $l \times l-$матричные коэффициенты $a(z), b(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$, а правые части (4.1) и (4.3) принадлежат, соответственно, $F(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$ и $f(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$. Тогда условие*

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{4.6}$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (4.1)–(4.3) в классе $C^{\mu}_{A}(\overline{D})$ и ее индекс дается формулой

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma} + l, \tag{4.7}$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma}$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D слева.

Доказательство. С помощью линейной замены из теоремы 1.1

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1,2, \tag{4.8}$$

представим систему (4.1) в эквивалентном виде

$$L_J\phi(z) + c\phi(z) + d\overline{\phi(z)} = F_0(z), \quad L_J = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}, \quad z \in D, \tag{4.9}$$

по отношению к $l-$вектор–функции $\phi = (\phi_1, \phi_2)$.

При этой подстановке $l \times l-$матричные коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ переходят в $l \times l-$матричные коэффициенты $c(z)$, $d(z) \in C^\mu(\overline{D})$, а правая часть $F(z) \in C^\mu(\overline{D})$ переходит в $F_0(z) \in C^\mu(\overline{D})$, где $F_0 = B^{-1}F = (F_1, F_2)$. Краевое условие (4.3) в обозначениях (4.8) примет вид

$$\operatorname{Re} G(t)\phi(t)^+|_\Gamma = f_0(t), \tag{4.10}$$

где $l-$вектор–функция f переобозначена в f_0.

В самом деле, с учетом подстановки (4.8) перепишем (4.3) в виде

$$\operatorname{Re}[C_{i1}(B_{11}\phi_1 + \overline{B_{12}\phi_2})] + \operatorname{Re}[C_{i2}(B_{22}\phi_1 + \overline{B_{22}\phi_2})] = f_i, \quad i = 1, 2,$$

или относительно $l-$вектор–функции $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ получим

$$\operatorname{Re}(C_{i1}B_{11} + C_{i2}B_{21})\phi_1 + \operatorname{Re}(\overline{C}_{i1}B_{12} + \overline{C}_{i2}B_{22})\phi_2 = f_i, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, в обозначениях (4.5) последнее равенство совпадает с условием (4.10).

Заметим что, если $U(z) \in C^\mu_A(\overline{D})$, то функция $\phi(z)$ принадлежит аналогичному классу

$$C^\mu_J(\overline{D}) = \{\phi \in C^1(D) \cap C^\mu(\overline{D}), L_J\phi \in C^\mu(\overline{D})\},$$

зависящему от J.

Таким образом, можно говорить, что задача (4.1)–(4.3) в классе $C^\mu_A(\overline{D})$ эквивалентна задаче (4.9)–(4.10) в классе $C^\mu_J(\overline{D})$, причем оператор этой задачи действует $C^\mu_J(\overline{D}) \to C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma)$.

Напомним, что матрицы J_i имеют жорданову форму (1.4) и согласно лемме 1.1 матрица J треугольна. Убедимся, что любая функция $\phi(z) \in C^\mu_J(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$\phi(z) = (I^1_J\varphi)(z) + (I^2_J\psi)(z) + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \tag{4.11}$$

с некоторой вещественной $l-$вектор–функцией $\varphi(t) \in C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ (здесь нижний индекс $\mathbb{R}$ указывает на то, что элементы соответствующего пространства являются вещественными вектор–функциями), комплексной $l-$вектор–функцией $\psi(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$ и постоянным вектором $\xi \in \mathbb{R}^l$.

Действительно, подействуем оператором (4.4) на функцию ϕ

$$L_J\phi = L_J I^1_J\varphi + L_J I^2_J\psi + L_J i\xi.$$

Как показано в §2 функция $I^1_J\varphi$ аналитична по Дуглису, а согласно [83]

$$L_J I^2_J\psi = \psi, \tag{4.12}$$

поэтому получаем $L_J\phi = \psi$. Далее полагая $\widetilde{\phi}^0 = \phi - I^2_J\psi$, имеем $L_J\widetilde{\phi}^0 = L_J(\phi - I^2_J\psi) = \psi - \psi = 0$, следовательно, функция $\widetilde{\phi}$ также является $J-$аналитичной и к ней можно применить представление (2.10) из теоремы 2.3. Таким образом существование этого представления доказано. Докажем его единственность. Предположим, что существуют $\widehat{\varphi} \in C^{\mu}(\Gamma)$ и $\widehat{\psi} \in C^{\mu}(\overline{D})$, такие, что $\phi = I^1_J\widehat{\varphi} + I^2_J\widehat{\psi} + i\xi, \xi \in \mathbb{R}^l$. Действуя оператором L_J на последнее равенство, получим

$$L_J I^1_J\widehat{\varphi} + L_J I^2_J\widehat{\psi} + L_J i\xi = \widehat{\psi},$$

но $L_J\phi = \psi$, а значит $\psi = \widehat{\psi}$, кроме того $L_J I^1_J(\varphi - \widehat{\varphi}) = 0$, таким образом, единственность доказана.

Покажем, что относительно нормы

$$|\phi|_{C^{\mu}_J(\overline{D})} = |\phi|_{C^{\mu}(\overline{D})} + |L_J\phi|_{C^{\mu}(\overline{D})}$$

пространство $C^{\mu}_J(\overline{D})$ банахово.

Как отмечено в §2, пространство $C^{\mu}(\overline{D})$ банахово в замкнутой области $\overline{D}$ относительно нормы $|\phi|_{C^{\mu}} = \sup_{\overline{D}}|\phi(z)| + [\phi]_{\mu}$, где $[\phi]_{\mu}-$полунорма (2.5).

Покажем, что $L_J\phi_n \to L_J\phi$, т.е. пространство $C^{\mu}(\overline{D})$ банахово относительно нормы $|L_J\phi|_{C^{\mu}(\overline{D})}$. Обозначим $L_J\phi_n = \varphi_n$. Оператор I^2_J является правым обратным для L_J и, согласно (4.12), $L_J I^2_J\varphi_n = \varphi_n$, поэтому

$$L_J(\phi_n - I^2_J\varphi_n) = 0,$$

таким образом $\phi_n^0 = \phi_n - I_J^2\varphi_n$ есть последовательность $J-$аналитичных функций. В силу обобщенной формулы Коши легко показать, что пространство $J-$аналитических функций полно, тогда $\phi_n^0 \to \phi^0$, где ϕ^0-функция, аналитична по Дуглису. Согласно [83] оператор $I_J^2 : C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$ ограничен, поэтому $I_J^2\varphi_n \to I_J^2\varphi$ в $C^\mu(\overline{D})$. Значит $\phi_n \to \phi$, где $\phi = \phi^0 + I_J^2\varphi$.

Таким образом

$$|L_J(\phi_n - \phi)|_{C^\mu(\overline{D})} = |L_J(\phi_n^0 + I_J^2\varphi_n) - L_J(\phi^0 + I_J^2\varphi)|_{C^\mu(\overline{D})} = |\varphi_n - \varphi)|_{C^\mu(\overline{D})} \to 0$$

и пространство $C_J^\mu(\overline{D})$ относительно введенной нормы банахово .

Так как классы $C_J^\mu(\overline{D})$ и $C_A^\mu(\overline{D})$ связаны линейной подстановкой (4.8) с постоянными коэффициентами, то, очевидно, пространство $C_A^\mu(\overline{D})$ банахово относительно нормы (4.4).

Подставим представление (4.11) в задачу (4.9)–(4.10), получим систему интегральных уравнений

$$L_J(I_J^1\varphi + I_J^2\psi + i\xi) + c(I_J^1\varphi + I_J^2\psi + i\xi) + d(\overline{I_J^1\varphi} + \overline{I_J^2\psi} - i\xi) = F_0,$$

$$\operatorname{Re} G[(I_J^1\varphi)^+ + (I_J^2\psi)^+ + i\xi)] = f_0.$$

Используя $J-$аналитичность функции $I_J^1\varphi$, и равенство (4.12) перепишем первое уравнение системы

$$\psi + cI_J^1\varphi + d\overline{I_J^1\varphi} + cI_J^2\psi + d\overline{I_J^2\psi} + i(c-d)\xi = F_0.$$

Обозначим оператор $(I_J^2\psi)^+$, действующий из области D на контур Γ, через

$$(I^{12}\psi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_D (\zeta - t_0)_J^{-1}\psi(\zeta)d_2\zeta, \quad t_0 \in \Gamma, \quad \zeta \in D, \tag{4.13}$$

где верхний индекс указывает на то, что этот оператор переводит двумерную функцию $\psi(z)$ в одномерную функцию $(I^{12}\psi)(t_0)$. Согласно теореме 4.2(a) он ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Применяя формулы Сохоцкого–Племеля (2.9) ко второму уравнению этой системы, с учетом (4.13), получим

$$\mathrm{Re}\, G(\varphi + S_J\varphi) + 2\mathrm{Re}\, GI^{12}\psi - 2\mathrm{Im}\, G\xi = 2f_0.$$

Таким образом, задача (4.9)–(4.10) в классе $C^{\mu}_J(\overline{D})$ эквивалентным образом редуцируется к следующей системе сингулярных интегральных уравнений

$$\psi(z) + c(z)(I^1_J\varphi)(z) + d(z)\overline{(I^1_J\varphi)(z)} + c(z)(I^2_J\psi)(z) +$$

$$+ d(z)\overline{(I^2_J\psi)(z)} + i(c(z) - d(z))\xi = F_0(z),$$

$$\mathrm{Re}\, G(t)(\varphi(t) + S_J\varphi(t)) + 2\mathrm{Re}\,(GI^{12}\psi)(t) - 2\mathrm{Im} G(t)\xi = 2f_0(t).$$

Обозначим:

$$2N_{11}\varphi = \mathrm{Re}\, G[\varphi + S_J\varphi], \quad N_{12}\psi = \mathrm{Re}\, GI^{12}\psi,$$

$$N_{21}\varphi = cI^1_J\varphi + d\overline{I^1_J\varphi}, \quad N_{22}\psi = cI^2_J\psi + d\overline{I^2_J\psi} \tag{4.14}$$

$$H_1(t) = -\mathrm{Im}\, G(t), \quad H_2(z) = i(c - d)(z),$$

тогда предыдущая система, относительно набора (φ, ψ, ξ) примет вид

$$(N_{11}\varphi)(t) + (N_{12}\psi)(t) + H_1(t)\xi = f_0(t),$$

$$(N_{21}\varphi)(z) + \psi(z)(1 + N_{22}) + H_2(z)\xi = F_0(z).$$

В краткой операторной форме, относительно $2l-$вектор–функции $\widetilde{\varphi} = (\varphi, \psi)$ и $l-$вектора ξ, систему запишем одним уравнением

$$N\widetilde{\varphi} + H\xi = f \tag{4.15}$$

где операторные матрицы N и H имеют вид

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & 1 + N_{22} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \quad f = (f_0, F_0).$$

Оператор уравнения (4.15) (N, H) действует $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D}) \times \mathbb{R}^l \to C^{\mu}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D})$, где, отметим, под пространством $C^{\mu}(\Gamma)$ в правой части понимается пространство комплексных $l-$вектор–функций.

Рассмотрим подробно каждый из операторов N_{ij}, $i, j = 1, 2$ в (4.14).

Для оператора N_{11} в силу вещественности $l-$вектор–функции φ имеем

$$(N_{11}\varphi)(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, G[\varphi(t) + S_J\varphi(t)] = \frac{1}{4}[G(\varphi + S_J\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S_J}\varphi)](t),$$

согласно рассуждениям §3, последнее равенство можно продолжить

$$(N_{11}\varphi)(t) = \frac{1}{4}[G(\varphi + S_J\varphi) + \overline{G}(\varphi - S_{\overline{J}}\varphi)](t).$$

Согласно леммам 3.3, 3.4, в обозначениях §3, $S_J \sim S$, $S_{\overline{J}} \sim S$, поэтому с точностью до компактного слагаемого, последнее равенство окончательно примет вид

$$(\widetilde{N}\varphi)(t) = \frac{1}{4}[G(\varphi + S\varphi) + \overline{G}(\varphi - S\varphi)](t),$$

где

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma$$

есть сингулярный интеграл Коши (2.6), который, как отмечено в §2, ограничен в $C^{\mu}(\Gamma)$. Оператор $\widetilde{N}$ действует в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ вещественных $l-$вектор–функций φ и, согласно выше сказанному, ограничен в этом пространстве.

Что касается оператора $(N_{12}\psi)(t) = \mathrm{Re}\, G(t)(I^{12}\psi)(t)$, то он ограничен $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\nu}(\Gamma)$ и компактен $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\Gamma)$.

Как уже было отмечено выше оператор $(I^2_J\psi)(z)$ ограничен $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, а так как вложение $C^{1,\mu}(\overline{D}) \subset C^{\mu}(\overline{D})$ компактно, то оператор $I^2_J : C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D})-$компактен, следовательно оператор $N_{22}\psi = cI^2_J\psi + d\overline{I^2_J\psi}$ компактен в этом пространстве.

Согласно теореме 2.2 оператор I^1_J ограничен $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\overline{D})$, а значит ограничен и оператор $N_{21}\varphi = cI^1_J\varphi + d\overline{I^1_J\varphi}$.

Таким образом, с точностью до компактного слагаемого оператор N совпадает с оператором

$$N_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{N} & 0 \\ N_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 3.1. оператор N_0 фредгольмов, если фредгольмов $\widetilde{N}$. Как показано в [60] все основные результаты классической теории сингулярных операторов распространяются и на $\widetilde{N}$. С учетом теоремы 3.3 оператор $\widetilde{N}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнено условие (4.6). В частности, согласно теореме 3.1 (c) существует его регуляризатор $\widetilde{M}$, такой что выполнено $\widetilde{N}\widetilde{M} \sim \widetilde{M}\widetilde{N} \sim 1$.

Но тогда непосредственно проверяется, что оператор

$$M_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{M} & 0 \\ -N_{21}\widetilde{M} & 1 \end{pmatrix}$$

служит регуляризатором к оператору N_0 и, следовательно, оператор N_0 фредгольмов. Так как операторы N и N_0 отличаются на компактное слагаемое, то согласно теореме 3.1(b) N фредгольмов, а вместе с ним фредгольмова и исходная задача (4.1)–(4.3).

Обратно, пусть задача (4.1)–(4.3) фредгольмова, так что фредгольмов и оператор N, а следовательно и N_0. Пусть M_0 его регуляризатор, запишем его в блочном виде

$$M_0 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

тогда из соотношений $N_0M_0 \sim M_0N_0 \sim 1$ получим $\widetilde{N}M_{11} \sim M_{11}\widetilde{N} \sim 1$, что, на основании теоремы 3.1 (c), приводит к фредгольмовости оператора $\widetilde{N}$, и в свою очередь, к справедливости условия (4.6).

Чтобы установить формулу индекса (4.7), введем оператор $N_0(t)$, зависящий от параметра $0 \le t \le 1$, который получается заменой $\widetilde{N}$ на $t\widetilde{N}$ в определении оператора N_0. Те же соображения показывают, что оператор

$N_0(t)$ также фредгольмов. Поскольку он непрерывно зависит от t, его индекс не зависит от t и, в частности, ind $N_0 =$ ind $N_0(0) =$ ind $\widetilde{N}$. Учитывая эти рассуждения и применяя снова теорему 3.1 (b) получим

$$\text{ind } N = \text{ind } N_0 = \text{ind } \widetilde{N}. \tag{4.16}$$

Заметим, что индекс оператора $\widetilde{N}$ выражается через индекс Коши матрицы–функции $G(t)$ по формуле $\text{ind}\,\widetilde{N} = \text{Ind } G^{-1}\overline{G}$, или, согласно теореме 3.1(a), $\text{ind } \widetilde{N} = -2\text{Ind } G$.

Пространство $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})\times\mathbb{R}^l$ есть расширение пространства $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$ на l измерений, поэтому на основании утверждения (e) теоремы 3.1 операторы (N, H) и N фредгольмово эквивалентны, а их индексы

$$\text{ind}\,(N, H) = \text{ind}\,N + l. \tag{4.17}$$

Совместно с (4.16), (4.17) и (3.8) окончательно получаем формулу индекса

$$æ = \text{ind}\,N + l(2-m) = -\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}[\arg\,\det G(t)]|_{\Gamma_i} + l(2-m),$$

которая и полностью завершает доказательство теоремы 4.1.

Литература

1. Agmon S. The approach to the Dirichlet problem// I. Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa. – 1959. – V. 13. – P. 405–448.

2. Agmon S. Lectures on elliptic boundary value problems// Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton New Jarsey-Toronto-New York-London. – 1965.

3. Agmon S. Milteple layer potentials and Dirichlet problem for higher order elliptic equation in the plane. I // Comm. Pure and Appl. Math. – 1957. – V. 10. – № 2. – P. 179—-239.

4. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions// I. Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – V. 12. – P. 623–727.

5. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions// II. Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – V. 17. – P. 35–92.

6. Beals R. Nonlocal elliptic boundary value problems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1964. – 70. – № 5. – P. 693–696.

7. Bers L., John A. and Schechter M. Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1964.

8. Bers L. Theory of pseudo-analytic functions // Lecture Notes. N. Y., 1953.

9. Browder F. E. Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1959. – V. 45. – P. 365–372.

10. Browder F. E. A priori estimates for solutions of elliptic boundary value

problems// I, II, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetenschap. – 1960. – V. 22. – P. 145–159, 160–196; III, Indag. Math. – 1961. – V. 23. – P. 404–410.

11. Browder F. E. Non-local elliptic boundary value problems. // Amer. J. Math. – 1964. – V. 86. – P. 735–750.

12. Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zurich. – 1932. – V. 1. – P. 138–151.

13. Douglis, A.A., A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables, Comm. Pure Appl. Math. – 1953. – V. 6. – P. 259–289.

14. Fichera G. Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity// Procees. of the Symp. «Part. Diff. Equations and Contin. Mech.» (Madison Wise, 1960). The Univ. of Wise. Pr., 1961.

15. Fichera G., Ricci P. E. The single layer potential approach in the theory of boundary value problems for elliptic equations // Lecture Notes in Math. Berlin — N. Y.: Springer – 1976. – V. 561. – P. 39–50.

16. Gilbert R. P. Constructive methods for elliptic equations // Springer Lecture Notes. – 1974. – V. 365.

17. Gilbert R. P. Hile G. N. Generalized hypcrcomplex function theory // Trans. Amer Math. Soc. – 1974. – V. 195. – P. 1—29.

18. Gilbert R. P., Buchanan J.L. First order elliptic systems, N.-Y., Ac. Pr., 1983.

19. Giraud G. Nouvelles méthode pour traiter certaines problèmes relatifs aux équations du type elliptique//J. de Math. – 1939. – V. 18. – P. 111–143.

20. Hilbert D. Grundzuge der Integralgleichungen. Leipzig Berlin., 1924.

21. Hormander L. Linear partial differential operators// Springer, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1963.

22. Ieh, R. Z. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane /R.Z. Ieh// Pacific Journ. of Mathem. -– 1990. -– V. 142. – № 2. — P.379–399.

23. Roitberg, Ya.A. Homeomorphism theorems and a Green formula for general elliptic boundary problems with nonnormal boundary conditions / Ya.A. Roitberg // Mat. Sb. – 1970. – P. 83–125.

24. Roitberg, Ya.A. On the boundary values of generalized solutions / Ya.A. Roitberg // Mat. Sb. – 1971. – V. 86. – № 2. P. 248–267.

25. Roitberg, Ya.A. A theorem on a complete selection of isomorphism for elliptic Douglis-Nirenberg systems / Ya.A. Roitberg // Ukrain. Mat. Zh. – 1975. V. 27. – № 4. –P. 544–548.

26. Roitberg, Ya.A. On the existence of boundary values of generalized solutions to elliptic equations / Ya.A. Roitberg // Sibirsk. Mat. Zh. – 1979. – V. 20. – P. 386–396.

27. Schechter M. Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions// Comm. Pure Appl. Math. – 1959. – V. 12. – P. 37–66.

28. Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations// Comm. Pure Appl. Math. – 1959. – V. 12. – P. 457–486.

29. Schechter M. Remarks on elliptic boundary value problems// Comm. Pure Appl. Math. – 1959. – V. 12. – P. 561–587.

30. Schechter M. Negative norms and boundary problems// Ann. Of Math. – 1960. – V. 72. – P. 581-593.

31. Schechter M. A local regularity theorem// J. Math. Mech. – 1961. – V. 10. – P. 279–287.

32. Schechter M. Nonlocal elliptic boundary value problems// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1966. – V. 20. – № 2. – P. 421–441.

33. Wendlahd W. Elliptic systems in the plane. Pitman, London etc., 1979.

34. Абаполова Е. А., Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Научные ведомости БелГУ. – 2010. – № 5 (76). – вып. 18. – С. 6–20.

35. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Успехи матем. наук. – 1964. – Т. 19. – Выпуск 3(117). – С. 53–161.

36. Бикчантаев И.А. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения эллиптического типа, Тр. сем. по краевым задачам. – 1971. – выпуск 8. – С. 31–40.

37. Бикчантаев И.А. Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения, II, Изв. вузов. Матем. – 1973. – № 12. – С. 10–21.

38. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. : Наука, 1966.

39. Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора.–Annales Polon. Math. – 1966. – V. 17.– N 3.– P. 281–320.

40. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л.: Гос- техиздат, 1948.

41. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. 2-ое изд., М., Наука, 1988.

42. Виноградов В. С. Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости.// Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7. – № 8. – С. 1440–1448.

43. Виноградов В. С. Об одном методе решения граничной задачи для эллиптической системы первого порядка на плоскости // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201. – №4. – С. 767–770.

44. Виноградов В. С. О граничных задачах для эллиптических систем на плоскости с непрерывными коэффициентами // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – №4. – С. 777–780.

45. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений.// Матем. сборник. – 1951. – Т. 29(71). – № 3. – С. 615–676.

46. Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений// Тр. Моск. Мат. об-ва. – 1952. – Т. 1. – С. 187–246.

47. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. // Матем. сборник. – 1965. – Т. 68(110). – № 3. – С. 373–416.

48. Вольперт А.И. Нормальная разрешимость граничных задач для эллипстических дифференциальных уравнений на плоскости // Теор. и прикс. матем. – 1958. – Вып. 1. – С. 28–57.

49. Вольперт А.И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости.// УМН. – 1960. – Т. 15. – выпуск 3(93).– С. 189–191.

50. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.–М.: ГИФМЛ, 1963.

51. Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.

52. Иохвидов, И. С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы : Алгебраич. теория. — М.: Наука, 1974. — 263 с.

53. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Т. Моск. матем. об-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 202–292.

54. Жура Н. А. Об общем решении систем Лере — Дуглиса — Ниренберга с постоянными коэффициентами на плоскости // Докл. АН СССР. – 1993. – Т. 331. – № 5. – С. 546—549.

55. Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладуих областях // УМН. – 1983. – Т. 38. – №2. – С. 3–76.

56. Лопатинский Я.Б. Теория общих граничных задач.–Киев: Наук. думка, 1984.

57. Магнарадзе Л.Г. Основыне задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1938. – Т. 4. – С. 43–76.

58. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения. // Современные проблемы математки. Фундаментальные направления.– Т.– 27 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М.: 1988. – С. 131–228.

59. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.

60. Мусхелишвили Н.И.Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд., М., Наука, 1968.

61. Назаров С. А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

62. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексею-М.:Мир, 1970.

63. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. –М.: Физматгиз, 1961.

64. Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала. // УМН. – 1946. – Т. 1. – вып. 3-4. – С.96–124.

65. Риман Б. Основы общей теории функций. (В сочинениях). М. : ГТИ, 1948.

66. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости обобщенных решений вплоть до границы// ДАН СССР. – 1964. – Т. 157. – № 4. – С. 798–801.

67. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем// Успехи матем. наук. – 1967. – Т. 22. – Выпуск 5(137). – С. 18–182.

68. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения// Матем. сборник. – 1969. – Т. 78(120). – № 3. – С. 446–472.

69. Сакс Р.С. Краевые задачи для некоторых систем, приводимых к эллиптическим.// Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10.– № 1– С. 132–142.

70. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравне- ний. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975.

71. Сиражудинов М.М. О задаче Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка в многосвязной области. // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 11. – С.39–62.

72. Сиражудинов М.М. Магомедов А. Г. , Магомедова В. Г. Краевые задачи для общих эллиптических систем на плоскости. 2. // Изв. РАН, сер. матем. – 2000. – №2.

73. Солдатов А. П. Эллиптические системы высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 1. – С. 136–142.

74. Солдатов А. П. Общая краевая задача $(k-1)-$порядка для эллиптических уравнений // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – № 1. – С. 39–43.

75. Солдатов А. П. Общая краевая задача для эллиптических систем // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – №3. – С. 539–543.

76. Солдатов А. П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М. : Высш. шк, 1991.

77. Солдатов А.П., Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. РАН СССР"(сер.матем.) – 1991. – Т. 55. – № 5. – С.1070–1100.

78. Солдатов А.П. Гипераналитические функции и их приложения: учебное пособие. Белгород : Белгородский гос. ун-т, 2006.

79. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 2017. – Т. 63. – С. 1–189.

80. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка на полуплоскости. // Известия РАН (сер. матем.) – 2006. – Т. 70. – № 6 – С. 161–192.

81. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Дуглиса–Ниренберга// Изв. АН СССР. Сер. матем. –1964. – Т. 28. – № 3. –С. 665–706.

82. Солдатов А.П., О.В. Чернова К теории эллиптических систем первого порядка.// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.– 2009. – Т. 11. – №1. – С. 79–83.

83. Солдатов А.П., Чернова О.В., Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера // Научные ведомости БелГУ.–2009.– № 13(68). – вып. 17/2. – С. 115–120.

Выпускная квалификационная работа выполнена мной совершенно самостоятельно. Все использованные в работе материалы и концепции из опубликованной научной литературы и других источников имеют ссылки на них.

«15» июня 2018 г.

_______________ Чернова О.В.

(подпись) *(Ф.И.О.)*