ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ,
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

РОЛЬ ТЕМЫ «ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ» В СТАРШИХ КЛАССАХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

Выпускная квалификационная работа
обучающейся по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, Математика,
заочной формы обучения, группы 02041556
Бредихиной Марины Олеговны

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2019

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Переход из средней школы в старшую школу обучения начинается с изучения дисциплины «Алгебры и начала анализа» в 10 классе, учащиеся сталкиваются с довольно значительными препятствиями. Это касается и одной из главных тем школьного курса «Производная».

На сегодняшний день необходимы учебные программы и учебники по школьным предметам, позволяющие эффективно дифференцировать усвоение материала учащимися. Это возможно реализовать с помощью межпредметных и внутрипредметных связей. Важность межпредметных и внутрипредметных связей обусловлена тем, что они в процессе обучения помогают систематизировать и расширить знания учащихся, формировать навыки и умения самостоятельной познавательной деятельности. Роль внутрипредметных связей в процессе обучения велика, так как они влияют на цель обучения. А также внутрипредметные связи способствуют определению логических связей между понятиями, формируют мировоззрение, уменьшают затраты учебного времени, тем самым устраняя перегрузку учащихся.

Практика показывает, что относительно нетрудно подготовить учащихся давать определение производной, вычислять ее и, используя основные правила дифференцирования, находить производную функции в точке. Учащиеся без каких-либо усилий решают задачи на исследование функции с применением производной. Приступая к изучению этой темы, нужно определить правильный путь введения производной, объяснить учебный материал на доступном уровне для понимания всеми учащимися. Можно отметить, что учащийся сможет определять производную в разных приложениях, например, в физике, биологии или химии, если сумеет использовать её определение для нахождения значения производной, показать геометрический и физический смыслы.

Цель работы: разработка элективного курса «Производная и ее применение» с учетом возможности реализации внутрипредметных и межпредметных связей при обучении математике в 10-11 классах»

Объектом исследования является изучение производной в школьном курсе математики общеобразовательной школы.

Предмет исследования – внутрипредметные и межпредметные связи в школьном курсе математики общеобразовательной школы при изучении производной.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Раскрыть сущность внутрипредметных и межпредметных связей.

2. Изучить формы организации внутрипредметных и межпредметных связей в процессе обучения.

3. Разработать элективный курс по теме «Производная и ее применение».

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**:

1. Обобщение педагогического передового опыта учителей.

2.Анализ учебной и учебно-методической литературы по теме исследования.

Теоретический материал выпускной квалификационной работы может быть использован студентами при прохождении педагогической практики, а также учителями при проведении уроков.

Цель и задачи определили структуру выпускной квалификационной работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников (34 наименования).

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В СТАРШИХ КЛАССАХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

1.1. История развития и возникновения понятия производной

В современной науке математика играет двойную роль: формирование понятий и вычисления. Нет закона движения без дифференциальных или операторных уравнений, как нет понятия мгновенной скорости без понятия производной. Математические понятия представляют собой суть физических идей, также это удобные вспомогательные средства. Без дедуктивной силы внутренне присущей формализму теории невозможным было бы элементарное предсказание будущего состояния системы или вероятности свершения того или иного события. Эта дедуктивная сила настолько впечатляюща, что мы нередко стремимся приравнивать теоретическую физику вычислениям, забывая о роли математики в самом формировании физических понятий, формул и теорий.

В 1797 году французский математик Ж. Лагранж вводит термин «Производная», который переводится на русский язык с французского языка, как «derivee».Также Лагранж является автором современного обозначения производнойy', f'.В. И. Висковатов впервые употребил русский термин «производная функции».

Производная функции – понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции в некоторой точке. В свою очередь функцию, которая имеет конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке). Поэтому дифференцированием называют процесс вычисления производной, а обратный процесс – нахождение первообразной – интегрированием.

Производная – это одно из основных понятий в математике, которое возникло, прежде всего, для построения касательной к кривой, которая описывает зависимость пройденного расстояния от времени, а также для определения скорости прямолинейного движения и с необходимостью решения ряда задач из физики, механики, кинематики и математики.

Начиная с 15 века, нам знакома формула производной. В своих трудах её применяет выдающийся итальянский математик Тартальи, рассматривая и развивая вопрос о зависимости дальности полёта снаряда от наклона орудия. Эта формула также часто встречается нам в работах других известных гениев в области математики 17 века. Ею пользуются Ньютон и Лейбниц. Основанная на учении Г.Галилея о движении, активно развивалась кинематическая концепция производной, которая связана с введением им понятия ускорения и дальнейшего обобщения его для случая криволинейного движения голландским учёным Христианом Гюйгенсом (1629 – 1695). Он первый кто применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие. О роли производной в математике Галилей посвящает целый трактат.

Работы французского математика и юриста Пьера Ферма (1601 - 1665)предшествовали открытию основ дифференциального исчисления. В 1629 г. Пьер предложил способы, опирающиеся на применение производных, нахождения наибольших и наименьших значений функций, проведения касательных к произвольным кривых. Работы Рене Декарта (1596 - 1650) также этому способствовали. Он разработал метод координат и основы аналитической геометрии. Лишь в 1666 г. независимо друг от друга Ньютон и несколько позднее Лейбниц построили теорию дифференциального исчисления. Решая задачи о мгновенной скорости, Ньютон пришел к понятию производной, а Лейбниц, - рассматривая геометрическую задачу о проведении касательной к кривой. Ньютон и Лейбниц работали над проблемой максимумов и минимумов функций. В частности, Лейбниц сформулировал теорему о достаточном условии роста и убывания функции на отрезке.

В1755году Эйлер различал локальный экстремум и наибольшие и наименьшие значения функции на определенном отрезке в своей работе "Дифференциальное исчисление". Он первый кто начал использовать греческую букву Δ для обозначения приращения аргумента $\Delta X = X_2 - X_1$ и приращения функции $\Delta Y = Y_2 - Y_1$.

Производную функции можно применить там, где есть неравномерное протекание процесса: переменный ток, радиоактивный распад и другие химические реакции, неравномерное механическое движение и другие. Например:

– в физике: при решении задач на скорость движения материальной точки в некоторый момент времени, а также для вычисления наибольшего и наименьшего значения какой-либо величины.

– в химии: для построения математических моделей химических реакций, для описания их свойств. Так как скорость реакции выражают производной по времени концентрации реагирующих веществ, так как она непрерывно изменяется в ходе процесса.

– в экономике: для нахождения производительности труда, максимальной выпуска и прибыли, минимальных издержек. Каждый из этих показателей представляет функцию от одной или нескольких переменных, нахождение которых сводится к нахождению производной.

Тема «Производная и ее практическое применение» курса «Алгебра и начала анализа» старшей школы является одним из основных разделов. И если изучение элементарных функций (степенных, показательных и логарифмических) продолжает функциональную линию школьного курса математики, начатую еще в 7-м классе, то вопросы дифференциального исчисления – это принципиально новый тип математической информации, хоть и связанный со всеми изученными алгебраическими линиями.

1.2. Понятие производной и ее приложения

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Придадим аргументу x_0 приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ попадает в область определения функции. Функция при этом получит приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента Δx, при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует и конечен), т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначают:

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ y'(x_0),\ \frac{dy(x_0)}{dx}.$$

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа (слева)* называется

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

(если этот предел существует и конечен).

Обозначают: $f'_+(x_0), y'_+(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 справа,

$f'_-(x_0), y'_-(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 слева.

Очевидно, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и равны между собой производные функции справа и слева. Причем

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Следующая теорема устанавливает связь между существованием производной функции в точке x_0 и непрерывностью функции в этой точке.

Теорема 2. (необходимое условие существования производной функции в точке).Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то функция $f(x)$ в этой точке непрерывна.

Доказательство

Пусть существует $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.Тогда

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

$$\Rightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x;$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \right] =$$

$$= \underbrace{f'(x_0)}_{число} \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = 0 + 0 = 0.$$

Но это означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (см. геометрическое определение непрерывности).

Замечание. Непрерывность функции в точке x_0 не является достаточным условием существования производной этой функции в точке x_0.Например, функция $y = |x|$ непрерывна, но не имеет производной в точке $x_0 = 0$.Действительно,

$$y'_-(0) =$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$y'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

и, следовательно, $y'(0)$ не существует.

Очевидно, что соответствие $x_0 \to f'(x_0)$ является функцией, определенной на некотором множестве $D_1 \subseteq D(f)$.Ее называют *производной функции* $y = f(x)$ и обозначают

$$f'(x), \frac{df}{dx}, y', \frac{dy}{dx}.$$

Операцию нахождения для функции $f(x)$ ее производной функции называют *дифференцированием функции* $y = f(x)$.

Физический смысл производной. Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то производная $f'(x_0)$ – скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0. Например, если $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t, то ее производная $S'(t_0)$ – скорость в момент времени t_0. Если $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t, то $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. сила тока в момент времени t_0.

Геометрический смысл производной.

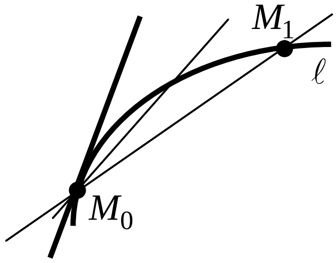


Рисунок 1. Геометрический смысл производной

Пусть ℓ – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой ℓ.

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее чем в двух точках называется *секущей.*

Касательной к кривой ℓ *в точке* M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1, если точка M_1 стремится к M_0, двигаясь по кривой.

Из определения очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0 существует, то она единственная

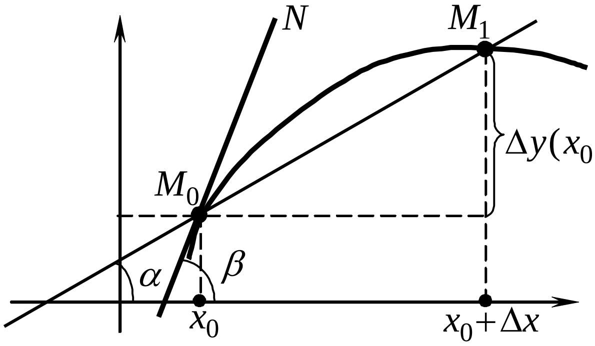


Рисунок 2. Геометрический смысл производной функции в точке

Рассмотрим кривую $y = f(x)$ (т.е. график функции $y = f(x)$).Пусть в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ он имеет невертикальную касательную M_0N .Ее уравнение: $y - f(x_0) = k(x - x_0)$ (уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ f(x_0))$ и имеющую угловой коэффициент k).

По определению углового коэффициента

$$k = tg\beta,$$

где β – угол наклона прямой M_0N к оси Ox.

Пусть α – угол наклона секущей M_0M_1 к оси Ox,где $M_1(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x))$.Так как M_0N – касательная, то при $\Delta x \to 0$

$$M_0M_1 \to M_0N,$$

$$\Rightarrow \alpha \to \beta,$$

$$\Rightarrow tg\alpha \to tg\beta.$$

Следовательно,

$$tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом, получили, что $f'(x_0)$ – *угловой коэффициент касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0;\ f(x_0))$ (геометрический смысл производной функции в точке).Поэтому уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Замечание. Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, проведенной к кривой в точке M_0, называется *нормалью к кривой в точке* M_0. Так как угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$

если $f'(x_0) \neq 0$.

Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ будет иметь вид $y = f(x_0)$, а нормаль $x = x_0$.

Примеры.

1) Пусть $S = S(t)$ - закон движения материальной точки. В момент времени t_0 точка прошла путь S_0. В момент времени $t_0 + \Delta t$ точка прошла путь S. За время Δt точка прошла путь $\Delta S = S - S_0$.

$\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость движения точки между моментами времени t_0 и $t_0 + \Delta t$,

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0)$ - называется скоростью движения материальной точки в момент времени t_0.

$$\Delta S = S'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t) \cdot \Delta t, \qquad dS = S'(t_0) \cdot \Delta t.$$

ΔS - путь, фактически пройденный материальной точкой за промежуток времени Δt (между t_0 и $t_0 + \Delta t$) с переменной скоростью.

dS - путь, который прошла бы точка за момент времени Δt, если бы она двигалась с постоянной скоростью (скоростью в момент времени t_0).

Если $\Delta t \to 0$, то $\Delta S \approx dS$.

2) $v = v(t)$ - закон изменения скорости. Рассуждаем аналогично как выше в примере 1:

$a_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ - среднее ускорение за время между t_0 и $t_0 + \Delta t$,

$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ - ускорение в момент времени t_0.

Пример 2.Пользуясь определением, найти производную $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Решение. Придадим значению аргумента x приращение Δx≠0. Функция *y=f(x)* получит при этом приращение *Δy=f(x+Δx)-f(x):*

$$\Delta y = 2\left(x+\Delta x\right)^3 + 5\left(x+\Delta x\right)^2 - 7\left(x+\Delta x\right) - 4 - \left(2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right) =$$

$$= 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7x - 7\Delta x - 4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4 =$$

$$= 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Найдем предел этого отношения при Δx→0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7\right) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Следовательно, по определению производной $y' = 6x^2 + 10x - 7$.

Пример 3.Пользуясь определением, найти производную $y = \sqrt{3x+5}$.

Решение. Придадим значению аргумента x приращение Δx≠0. Найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = \sqrt{3(x+\Delta x)+5} - \sqrt{3x+5}$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{3(x+\Delta x)+5} - \sqrt{3x+5}}{\Delta x}$.

Вычислим предел этого отношения при Δx→0:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)+5}-\sqrt{3x+5}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+5}-\sqrt{3x+5}\right)\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+5}+\sqrt{3x+5}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+5}+\sqrt{3x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x+5-(3x+5)}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+5}+\sqrt{3x+5}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+5}+\sqrt{3x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+5}+\sqrt{3x+5}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}.$$

Следовательно, $y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$.

Пример 4.Пользуясь определением, найти производную $y=-ctgx-x$.

Решение. Придадим значению аргумента x приращение $\Delta x\neq 0$. Найдем приращение функции:

$$\Delta y=-ctg\left(x+\Delta x\right)-\left(x+\Delta x\right)+ctgx+x=ctgx-ctg\left(x+\Delta x\right)-\Delta x.$$

Используя формулу $ctg\alpha-ctg\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, получим

$$\Delta y=\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-\Delta x=\frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-\Delta x.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1.$$

И, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Итак $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$.

1.3. Рассмотрение производной в школьных учебниках математики

В данном пункте нами будет проведен анализ учебников по теме «Производная». Мы проанализируем наиболее интересные варианты изложения согласно выбранной темы, так же выясним, как используются исторические сведения о производной в основных учебниках по алгебре общеобразовательных учебных учреждений и разработаем методические рекомендации по теме «Производная» для школьного курса математики 10-11 классов с использованием истории.

Анализ изложения темы «Производная» в учебниках необходимо проводить по наиболее важным для этой темы разделам, а непосредственно:

1. Понятие и определение производной.

2. Геометрический смысл производной.

3. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

4. Производные элементарных функций.

Рассмотрим разнообразные варианты изложения темы «Производная» по основным учебным пособиям, которые используются в общеобразовательных учебных учреждениях. Это учебники автора Алимова Ш.А., под редакцией Колмогорова А.Н., а также учебники базового уровней Башмакова М.И., Мордковича А.Г.,

Сначала проанализируем *учебник под редакцией Колмогорова А.Н.* согласно разделам выведенным нами. [14]

1. Понятие и определение производной.

В учебнике под редакцией Колмогорова А.Н.глава, которая посвящена изучению темы «Производная», начинается с параграфа, где дается определение приращения функции, и это отличает его подход к определению понятия производной от других авторов. На нескольких примерах рассматривается приращения. Один из примеров показывает нахождение углового коэффициента секущей через приращение. В следующем параграфе автор дает определение касательной графику функции и выводит определение мгновенной скорости. При этом определение предела не используется, вместо этого А.Н.Колмогоров работает с понятием «стремится к».

В своей системе ознакомления обучающихся с понятием производной учебник А.Н. Колмогорова имеет некоторую особенность: автор старается сначала привести достаточно много примеров и соответствий, которые опираются на более легкие по усвояемости понятия, а затем непосредственно приступить к вычислениям.

2. Геометрический смысл производной.

Автор вводится понятие касательной. Касательной к графику функции f в точке с координатами (x_0, $f(x_0)$)называют прямую, проходящую через точку с этими координатами (x_0, $f(x_0)$), с отрезком, которой сливается график функции f при значениях x близких к x_0,

Далее А.Н. Колмогоров ставит задачу определения точного положения касательной к графику данной функции fв заданной точке, что является геометрическим смыслом производной. Приходит к заключению, что для каждой кривой в данной точке возможно точно определить положение касательной.

3. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

Производную суммы, произведения, частного, а также вынесение множителя за знак производной – основные правила дифференцирования автор формулирует и доказывает.

Определяется понятие и выводится формула дифференцирования сложной функции. Тригонометрические функции не остаются без внимания, А.Н. Колмогоров также выводит и их формулы дифференцирования.

4. Производные элементарных функций.

С одной стороны, проблема заключается в том, что если главу «производная» рассматривать перед изучением каких-либо элементарных функций, нахождение производных от этих функций необходимо будет рассматривать позже, что может запутать. С другой стороны, если разместить данную тему в конце учебника, то это может отразиться на успехах учащихся в обучении, так как сложность учебного материала растет неравномерно.

Формулы, по которым находятся производные показательной и логарифмической функций у А.Н. Колмогорова применяются в решении задач и выводятся позже. В главе «производная» в качестве отдельного пункта рассматриваются производные функций, которые к этому моменту уже изучены. Можно отметить, что в процессе вывода формулы нахождения производной от синуса, проводится доказательство следующего утверждения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

Необходим переход к длине отрезка от длины дуги, так как доказательство усложняется тем, что переменная выступает в качестве угла длины. Нетрудно найти производные остальных функций, имея в распоряжении эту формулу производной синуса,

В заключение анализа можно сделать вывод, что данное учебное пособие соответствует стандарту общего образования. Производная изучается на двух уровнях: на формально-логическом, где определение производной вводится без использования понятия предела, а также на наглядно-интуитивном, так как производная рассмотрена как угловой коэффициент касательной и как мгновенная скорость движения,

1. Рассмотрим *учебное пособие автора Алимова Ш.А.*[3]

1. Понятие и определение производной.

В учебнике Ш.А.Алимова определение производной дается вначале через механический смысл: производная - это мгновенная скорость. Это соответствие, пожалуй, наиболее доступно для понимания школьника. Ш.А.Алимова, рассмотрев задачу на скорость, сразу же переходит к точному определению производной через пределы, кратко объяснив значение понятия «предел» в той же задаче применительно к мгновенной скорости.

Проанализировав систему ознакомления учащегося с понятием производной в этом учебнике, можно выявить следующие особенности: короткое вступление главы о производных в учебнике Ш.А.Алимова дает возможность учащимся, получив минимум информации о производной, как можно быстрее приступить к вычислению производных. Затем, понятие производной обогащается новыми приложениями и свойствами и все это немедленно подкрепляется задачами.

2. Геометрический смысл производной.

После ознакомления учащихся с производными элементарных функций изучается геометрический смысл производной, а также применение на интуитивном уровне правил дифференцирования к решению задач. К графику функции выводится уравнение касательной.

3. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

В учебнике автор приводит доказательства всего лишь двух первых формул, но каждая формула иллюстрируется одним или двумя примерами.

Что касается сложной функции:

$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

Ш.А.Алимов решил упростить данный раздел, заменив формулу сложной функции на ее частный случай - линейную замену аргумента:

$(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$

4. Производные элементарных функций

Используя определение производной выводятся формулы:

$$C' = 0,\ x' = 1,\ x^{2'} = 2x, x^{3'} = 3x$$

Перед выводом основных правил дифференцирования интуитивно определяется производная степенной функции: производной суммы, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной. В отдельном параграфе Ш.А.Алимов рассматривает формулы производных других элементарных функций, таких как показательная, логарифмическая, тригонометрическая. Однако доказывается формула нахождения производной только для синуса, зато для каждой функции есть решенная задача. Формулируется правило вычисления сложной функции. Необходимость возвращения к изученному материалу пропадает, так как материал изложен последовательно.

Данное учебное пособие дополняется надлежащим задачником, в котором содержание выстраивается по трехуровневой системе: задания делятся на обязательные, выделенные серым цветом, дополнительные более сложные, выделенные светло-розовым цветом и трудные выделенные темно-розовым цветом. Раздел «Проверь себя» присутствует в задачнике.

В заключение анализа можно сделать вывод: в учебнике введение понятия производной начинается со знакомства учащихся со средней и мгновенной скоростями движения. Производная определяется как предел разностного отношения. Понятие предела формулируется без подробного изучения после определения производной. При нахождении производных элементарных функций используют наглядные представления.

Перейдем к анализу *учебника под редакцией Башмакова М.И. базового уровня*.[5,6]

1. Понятие и определение производной.

В учебнике М.И.Башмакова, как и в учебнике Ш.А.Алимова, производная определяется через механический смысл, а именно производная – это мгновенная скорость движения. Но М.И.Башмаков последовательно и очень подробно рассматривает механический смысл и геометрический, рассматривая производную на разных случаях, прежде чем перейти к точному определению производной.

2. Геометрический смысл производной.

В учебнике М.И.Башмакова, как и в учебнике А.Н. Колмогорова, геометрический смысл производной определяется аналогично определению геометрического смысла, а именно через установление связи между абстрактным определением касательной и уже изученными геометрическими объектами, подсознательные фигуры которые уже закреплены в сознании. Затем, М.И.Башмаков заостряет внимание учащихся на то, что с увеличением масштаба графика функции, он все больше уподобляется прямой. Автор примечает, что можно проводя отрезки между его точками, чтобы получить приближенное изображение графика. В учебнике наглядно иллюстрируется «вырезание» графика из бумаги – в данной точке касательной выступает положение ножниц, в тот момент, когда до этой точки дойдет разрез.

3. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

В учебном пособии под редакцией М.И.Башмакова формулы выводятся очень подробно и понятно, каждый шаг разъясняется, которые были упомянуты нами, анализируя учебник А.Н. Колмогорова,

4. Производные элементарных функций.

М.И.Башмаков отводит целый параграф вычислению производной через приращения, в котором им выводятся 5 формул для дифференцирования линейной функции, квадрата, куба, гиперболической функции, обратной пропорциональности корня. С этого параграфа и начинается вычисление производных. Затем, автор выводит формулу для нахождения производной степенной функции, познакомив с правилами дифференцирования. Отдельная глава отводится производным показательной и логарифмической функций, а вычисление производных тригонометрических функций не включены в учебный курс по данной теме.

Завершаем исследование пособий для общеобразовательных школ *анализом учебников базового уровня под редакцией Мордковича А.Г.* [19,20]

Анализ учебника базового уровня.

Структура учебника включает:

- Определение производной.
- Вычисление производной.
- Уравнение касательной к графику функции.
- Применение производной для исследования функций.

1. Понятие и определение производной.

Задачи, с которых начинается содержание раздела, приводят к понятию производная. Определение сформулировано очень точно и понятно.

2. Геометрический смысл производной.

Изучение данной темы начинается именно со знакомства учащихся с геометрическим смыслом. Нашему вниманию представлен график с полным его описанием, сформулированным в форме задачи с решением.

3. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

А.Г. Мордковичем дается определение дифференцируемой функции. Формулы, именуемые так же формулами дифференцирования, для нахождения производных конкретных функций, даются как факты, не углубляясь в подробности, однако правила дифференцирования разделены на отдельные части, каждое из правил подкрепляется разобранным примером. Не дается дифференцирование сложной и обратной функций.

4. Производные элементарных функций.

Производные элементарных функций приводятся наряду с другими производными без доказательств. Теоремы о производной суммы, произведения и частного даются автором.

В учебнике А.Г. Мордковича теория излагается на доступном уровне, учащиеся без особых затруднений могут самостоятельно заниматься изучением материала, разбирать примеры, предложенные в теории.

В задачнике предложены задания разного уровня в довольно большом количестве. Он выдается в комплекте с учебником. Однако, на решение всех предложенных задач времени отведенного на данную тему может и не хватить.

Все эти рассмотренные учебные пособия все же отличаются в большей степени приложениями производной, но практически похожи между собой с точки зрения принципов изучения данной темы. Учебник под редакцией А.Н. Колмогорова отличается большим количеством материала по теме «Производная» и высокой степенью подробности. Учебник Ш.А. Алимова ориентирован в основном на практику, содержит отдельные пункты, которые состоят из примеров решения задач, но у учебника есть слабая сторона, – доказательства. М.И. Башмаков в своем учебнике излагает материал последовательно, но весьма кратко, а доказательства приводит элементарные и доступные. Учебник под редакцией А.Г. Мордовича подходит для дифференцированного обучения, в нем содержится много теоретической информации и примеров для самостоятельной работы.

Изложения темы «Производная» в рассмотренных учебниках А.Н. Колмогорова, Ш.А. Алимова, а также в учебниках базового уровня М.И. Башмакова и А.Г. Мордковича имеются схожие моменты. А именно: на наглядно-интуитивном уровне ведется изложение темы; после поверхностного знакомства с пределом дается определение производной; приводится вывод уравнения касательной; дифференцирование функций: сложных, логарифмических, показательных и тригонометрических.

Можно заметить, что ни в одном из представленных учебниках для общеобразовательных школ по теме «Производная»не уделяется внимание историческим сведениям по данной теме, которые могли бы сделать изучение данной темы более интересным, познавательным и простым.

Надо заметить, что, приступая к исследованию элементов математического анализа, не следует вводить одновременно много понятий «про запас». Надо определять новые понятия по мере введения их в действие, ибо, как установлено психологами, память легко удерживает лишь такие понятия, с которыми связано много ассоциаций. Появляется возможность изучения в тесной взаимосвязи алгебры и физики, так как начинается одновременно систематическое изучение. Математические знания находят закрепление при изучении физике и, наоборот, знания физических законов способствует пониманию смысла математических понятий. Введение понятий «сила», «скорость»,«работа» и т. д., с которыми учащиеся знакомятся в VI классе на уроках физики, являются исходными для формирования таких понятий, как «производная» (скорость изменения функции), интеграл и др.

Одно из фундаментальных понятий математики – это понятие производной. Мы часто встречаем понятие производной в физике, геометрии и даже в экономике. С производственными задачами, предельным анализом и эластичностью функций тесно связано само понятие «производная в экономике». Без анализа и решения уравнений не обходится исследование поведения различных систем, включающих как параметры системы, так и скорости их изменения, аналитическим выражением которых являются производные. Очень часто в экономике требуется найти значение таких показателей, как предельная производительность труда, максимальная прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки. Каждый показатель представляет собой функцию от одного или нескольких переменных, нахождение которых сводится к вычислению производной. Правильно потратить ресурсы и средства нам помогают экономические задачи. В высшей школе на экономических специальностях при изучении производной, например, рассматривается экономический смысл производной, проводится исследование различных производственных функций.

1.4. Роль межпредметных связей в реализации компетентностного подхода

Изменения в развитии общества, которые случились в начале XXI века, предъявляют новые требования к образованию, что обусловливают конкретные направления его развития и совершенствования. Процессы создания и распространения знаний, которые во многом обеспечиваются образованием, становятся в таком обществе главными [1, с.66-68].

Переход школы на компетентностный подход нацеливает учителей на рассмотрение вопроса о необходимости изменения показателей качества образования, не ограничивающихся знаниями, умениями и навыками, так как целью обучения должны стать сформированные компетентности, как общая способность, основанная на знаниях, опыте и ценностях личности.

Компетентностный подход стал результатом новых требований, которые предъявляются к качеству образования. Стандартная схема «знания — умения — навыки» (ЗУН) для определения соответствия выпускника общеобразовательной школы запросам общества уже недостаточно, традиционные ЗУНы уступают новой позиции компетенциям. Суть этого подхода в том, что цели изучения представляют собой триаду - «умение действовать», «умение быть» и «умение жить» [2, с.87-93].

Введения компетентностного подхода дает возможность устранить расхождения между существующим образованием и реальными образовательными потребностями общества. Таким образом, на сегодняшний день идея компетентностно-ориентированного образования необходимо расценивать как один из более адекватных решений системы образования на новый заказ общества.

Совершенствование образовательного процесса с учетом компетентностного подхода предполагает применение учащимися полученных знаний и умений в конкретных учебных и жизненных ситуациях [4].

Изучение нормативных документов, регламентирующих процесс обучения математике, позволило определить качественные характеристики целей и задач формирования у учащихся основной школы ключевых компетентностей средствами межпредметных связей (МПС) математики и физики. В их состав вошли:

• согласованность выделенных целей и задач учебного процесса, ориентированного на формирование компетентностного подхода, требованиям Государственного стандарта и образовательной программы, общим целям и задачам компетентностного образования;

• диагностика поставленных стратегических и тактических целей и задач формирования ключевых компетенций у учащихся основной школы;

• значимость целей и задач обучения математике, ориентированного на формирование у учащихся основной школы ключевых компетентностей при помощи связей с физикой, для всех участников учебного процесса.

В системе формирования ключевых компетентностей у учащихся основной школы средствами МПС математики и физики, цель и задачи, вытекающие из нее, играют ведущую роль.

Для формирования ключевых компетентностей учащихся основной школы посредством МПС математики и физики нами были определены главные критерии выбора методов обучения:

• самостоятельность во всех видах деятельности учащихся в ходе выполнения предложенных им заданий;

• соответствие возрастным особенностям развития когнитивной, волевой, эмоциональной сфер учащихся подросткового возраста;

• направление на развитие внутренней положительной мотивации обучения (формирование познавательных интересов, успешность в обучении, опора на жизненный опыт, стимулирование ответственного отношения к обучению);

• направленность на получение опыта при выполнении тех видов деятельности, которые связаны с ключевыми компетентностями.

Таким образом, к задачам, которые необходимо решить учителю при обучении учащихся математике, относятся не только вопросы формирования научных знаний и умений, а также способность применять их в ходе решения математических задач, по содержанию которые, в большинстве случаев, носят абстрактный характер, не связанный с жизнью, но и обучение учащихся переносу математических знаний и умений в другие предметные области, имеющие непосредственный выход в практику. К числу предметов, удовлетворяющих этим требованиям, принадлежит физика. Ее считают основой техники, для которой математика является языком выражения сущности законов.

Анализ опыта учителей математики с позиции их готовности к реализации МПС с физикой при изучении программного материала показал, что они не обладают необходимыми знаниями по этому предмету, не знакомы с особенностями применения элементов математики на уроках физики, не готовы применять информацию физического содержания на различных этапах усвоения математических понятий.

Межпредметный подход к обучению математике расширяет возможности для создания проблемных ситуаций на основе физического материала (анализа результатов физического эксперимента, поиска наиболее удачных решений физических задач и др.).

На сегодняшний день, необходимость установления межпредметных связей для реализации всестороннего исследования явлений и процессов природы, развития диалектического мышления, формирования научного мировоззрения учащихся признается всеми педагогами. Однако реализация межпредметных связей на практике связана с целым рядом трудностей объективного и субъективного характера.

Необходимо выполнение целого ряда педагогических условий для их устранения:

– создание учебных планов и программ, научно обоснованных, которые в полной мере обеспечивали бы осуществление межпредметных связей;

– необходимо создание учебников и учебных пособий, в которых отражались бы межпредметные связи;

– межпредметные связи должны отыскать отражение в методах обучения.

Итак, можно выделить основные направления в работе при реализации межпредметных связей:

1. При изучения тем курсов физики и математики определение рациональной последовательности.
2. Формирование вычислительных навыков.
3. Структурирование программ курсов.
4. Формирование графических умений.
5. Обучение решению межпредметных задач.

Необходимо производить структурирование программ так, чтобы изучение одной дисциплины готовило почву для изучения другой дисциплины. Система связей имеет односторонний характер между физикой и математикой. Математический язык, безусловно, необходим физике, без которого невозможно описание любых физических явлений, как один из методов физического изучения (наряду с экспериментом).

Закрепление знаний по математике происходит при изучении физике. В VII классе это — линейная функция, прямая и обратная пропорциональность, идеи симметрии, угол между прямыми, параллельность и перпендикулярность прямых. В VIII классе добавляется решение линейных уравнений и неравенств. В IX классе — квадратичная функция и решение квадратных уравнений, систематическое использование векторов и операций над ними, система координат на плоскости и в пространстве, радианная мера угла, тригонометрические функции острого угла.

С помощью производной в физике находится сила, мощность, скорость и ускорение, теплоёмкость, масса тонкого стержня, сила тока. В X классе – использование производной при рассмотрении некоторых вопросов электродинамики. И особенно широко математика используется в курсе физики XI класса. Здесь и систематическое применение производной при изучении колебаний, использование и закрепление свойств тригонометрических и показательной функций, использование интегрирования при решении ряда задач (радиоактивный распад, поглощение излучений и т.п.). ·В химии и естествознании – для нахождения дозы лекарства, при которой побочный эффект будет минимальным, а реакция максимальной. В экономике – для анализа производственных функций, широко используемых в современных экономических исследованиях.

При этом не простое использование математики - это становление и конкретизация ее мыслей и методов на широком естественнонаучном материале.

ГЛАВА 2.ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ»

2.1.Пояснительная записка

Разработка элективного курса – это наиболее эффективное решение для реализации внутрипредметных и межпредметных связей, так как он позволяет устранить проблемы редкого использования внутрипредметных и межпредметных связей, такие как:

– затрачивается большое количество времени при подготовке к занятиям межпредметного характера;

– изучение материала не совпадает по времени по разным предметам, а также в разных предметах одни и те же понятия по-разному трактуются;

– для подготовки и проведения занятий недостаточно методических пособий межпредметного характера.

Дифференциальное исчисление – один из важнейших разделов курса «Алгебра и начала анализа». Оно служит исходной базой при построении интегрального исчисления. Данное описание окружающего нас мира, которое выполнено на языке математике. Аппарат производной помогает успешно решать не только задачи, представленные в учебнике, но и задачи практического характера в разных областях науки и жизни. При изучении этой темы у учащихся часто возникают трудности. Нам хотелось заинтересовать школьников, чтобы изучение было более осознанным, а также показать многогранность применения рассмотренной темы.

Именно поэтому был разработан элективный курс «Производная и её применение», позволяющий реализовать межпредметную связь. Отличительной особенностью этого элективного курса от других похожих тематик является использование нетрадиционных форм организации занятий, таких как интегрированный урок, тренинг, интерактивная лекция и т. д.; а также то, что данный элективный курс направлен на расширение знаний учащихся в области применения производной в школьных предметах и в жизни, а не только для обобщение знаний учащихся по теме «Производная».

Одно из фундаментальных понятий математического анализа – это понятие производной. Однако учащиеся, зачастую сталкиваясь в первый раз с данным понятием, они не осознают для чего нужно это изучать, не видят практического применения. Данный элективный курс отвечает на такие вопросы как:

– зачем изучать производную;

– где можно использовать знания, которые связанны с производной в жизни, а также при изучении других предметов и при сдаче ЕГЭ.

Есть возможность выявить слабые места, устранить пробелы учащихся, оказать помощь при систематизации материала на занятиях курса.

Цель элективного курса – углубление и расширение знаний, навыков при решении задач, развитие интереса учащихся к математике, развитие их математических способностей, а также привитие интереса к самостоятельным занятиям математикой.

Задачи элективного курса:

Образовательные задачи:

– повторить и закрепить понятие производной, формулы дифференцирования и правила дифференцирования;

– познакомить учащихся с применением производной в различных школьных предметах;

Развивающие задачи:

– развитие логического мышления;

– развитие коммуникативных способностей учащихся;

Воспитательные задачи:

– воспитание интереса к математике;

– воспитание умения работать самостоятельно и в группах.

Данный элективный курс предназначен для учащихся 11 классов и является межпредметным с практической направленностью. Курс рассчитан на 17 часов, которые проводятся в течение учебного года 11 класса по 1 часу в неделю. Курс «Производная и ее применение» с такими дисциплинами, как алгебра, физика, химия, биология и география реализует внутрипредметные связи и межпредметные связи.

Материал, который используется на элективном курсе способствует формированию интереса к математике, развитию творческих способностей и навыков самостоятельной работы учащихся с литературой, а так же позволяет сделать учебный процесс более ярким и интересным; а также даёт дополнительную подготовку учащихся к ЕГЭ.

В курсе «Производная и ее применение» рассматриваются следующие вопросы:

– история возникновения и развития производной;

– применение производной в школьных предметах;

– решение прикладных задач при помощи производной;

– решение задач при помощи производной в ЕГЭ по математике.

Текущий контроль проводится на протяжении всего элективного курса в виде практических работ. Контроль осуществляется по результатам выполнения учащимися практических заданий. Итоговый контроль проводится в форме тестирования.

Изучение элективного курса позволяет учащимся:

– повторить и систематизировать школьный материал по теме «Производная»;

–в ходе решения задач расширить знания в области производной;

–при помощи производной научиться распознавать и решать задачи;

–при решении задач ясно, четко и грамотно излагать свои мысли;

– повысить познавательный интерес к математике.

На занятиях элективного курса используются такие формы организации обучения, как лекция, практикум, урок-экскурсия, урок-викторина и интегрированный урок.

2.2.Тематическое планирование элективного курса «Производная и её применение»

Предлагаемый элективный курс рассчитан под учащихся, стремящихся углубить свои знания по теме «Производная», а также желающих научиться решать различные задачи на применение производной.

№ п/п	Содержание курса	Количество часов	Форма контроля
1.	Введение	1	
2.	Тема 1. История возникновения производной.	1	Опрос
3.	Тема 2.Понятие производной и правила дифференцирования	1	Опрос
4.	Тема 3. Производная и алгебра.	3	Практическая работа
5.	Тема 4.Производная и физика.	2	Практическая работа
6.	Тема 5.Производная и биология, Производная и химия	2	Практическая работа
7.	Тема 6.Производная и география	1	Практическая работа
8.	Тема 7. Производная в прикладных задачах.	2	Практическая работа
9.	Тема 8. Производная в ЕГЭ.	2	Тестирование
10.	Итоговое тестирование.	1	Тестирование
	ВСЕГО:	17	

2.3. Методические рекомендации по организации элективного курса «Производная и её применение»

На сегодняшний день существует много различных элективных курсов по применению производной. Но, как правило, в них в основном отражаются теоретические аспекты и ряд заданий.

Определим методические рекомендации по изучению элективного курса «Производная и ее применение».

Вводное занятие.

Тема занятия: Введение в курс «Производная и ее применение».

Цель: знакомство учащихся с основными положениями курса.

Форма организации: лекция.

Методы: словесные (беседа, рассказ).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

На вводном занятии необходимо ознакомить учащихся с темами, целью, задачами элективного курса. Определить уровень готовности учащихся к изучению курса, а также уровень базовых знаний по теме «Производная».

Занятие 1.История возникновения производной.

Цель: знакомство учащихся с историей возникновения и развития производной.

Форма организации: урок-экскурсия.

Методы: словесные (рассказ, беседа), наглядные (демонстрация презентации).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

знать: историю возникновения и развития производной;

уметь: находить производные.

На занятии об истории возникновения производной, можно использовать следующий материал:

– предпосылки появления производной;

– вклад Евклида, Архимеда, Герона, Ферма, Лагранжа, Коши в открытие производной;

– открытие понятия «производная» Ньютоном и Лейбницем.

Занятие проводится в форме урока-экскурсии, что позволяет сделать процесс обучения более интересным, заставляет учащихся мыслить логически, а также способствует развитию наблюдательности.

Занятие 2. Понятие производной. Правила дифференцирования.

Цель: проверить уровень усвоения знаний, умений и навыков по теме «Производная».

Форма организации: урок-викторина.

Методы: словесные (устный опрос, беседа), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные.

Данное занятие направлено на проверку знаний учащихся по теме «Производная». Особое внимание необходимо уделить повторению таблицы производных элементарных функций, физический и геометрический смысл производной, а также правилам нахождения производной, так как этот теоретический материал будет очень важен в дальнейшем на занятиях при решении задач.

Занятие проходит в форме урока-викторины, что способствует развитию познавательной активности учащихся и интересу к математике за счет игровых технологий.

Занятие 3. Производная и ее применение в алгебре.

Цель: научиться применять производную при решении задач по алгебре.

Форма организации: интегрированный урок.

Методы: словесные (беседа), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать задачи по алгебре при помощи производной.

Занятие необходимо начать с актуализации опорных знаний, так как это поможет учащимся лучше усвоить материал. Также можно повторить с учащимися применения производной изученные в школьном курсе алгебры (применение производной для исследования функции на монотонность, для доказательства неравенств и тождеств, для построения графиков функции).

После этого необходимо ознакомить учащихся со списком задач, решаемых ***при помощи производной*** в алгебре:

– исследование функций, к которому относится: поиск промежутков убывания и возрастания функции, поиск максимума и минимума функции, поиск промежутков выпуклости и вогнутости функции, поиск точек экстремума функции, поиск точек перегиба функции;

– сравнение чисел;

– разложение на множители и упрощение выражений;

– поиск углового коэффициента касательной;

– решение уравнений и систем уравнений;

– доказательство тождеств и неравенств.

Занятие 4.Производная и ее применение в физике.

Цель: научиться применять производную при решении задач по физике.

Форма организации: интегрированный урок.

Методы: словесные (рассказ, беседа), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать задачи по физике при помощи производной.

Занятие так же как предыдущее необходимо начать с актуализации опорных знаний, так как это поможет учащимся лучше усвоить материал.

Также можно повторить с учащимися физический смысл производной, так как многие физический задачи решаются с помощью него.

После этого необходимо ознакомить учащихся со списком задач, решаемых ***при помощи производной***:

– задачи на нахождение скорости и ускорения;

– задачи на нахождение силы тока;

– задачи на нахождение частоты и амплитуды колебания.

Занятие 5.Производная и ее применение в биологии и химии

Цель: научиться применять производную при решении задач по биологии и химии.

Форма организации: интегрированный урок.

Методы: словесные (рассказ, беседа), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать задачи по биологии и химии при помощи производной.

Занятие так же как предыдущее необходимо начать с актуализации опорных знаний, так как это поможет учащимся лучше усвоить материал.

Далее учителем объясняется применение производной в задачах по химии (используется для нахождения скорости химической реакции), а затем по биологии (используется для нахождения скорости размножения колонии микроорганизмов).

Занятие 6.Производная и ее применение в географии.

Цель: научиться применять производную при решении задач по географии.

Форма организации: интегрированный урок.

Методы: словесные (рассказ, беседа), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать задачи по географии при помощи производной.

Занятие так же как предыдущее необходимо начать с актуализации опорных знаний, так как это поможет учащимся лучше усвоить материал. Далее можно рассмотреть виды задач по географии, решаемые при помощи производной и отработать навык их решения. Используется формула для вычисления численности населения, которая находиться на ограниченной территории в некоторый момент времени.

Занятие 7.Производная в прикладных задачах

Цель: научиться решать прикладные задачи при помощи производной: нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, мгновенной скорости тела в момент времени, ускорение тела, уравнение касательной к графику.

Форма организации: практикум по решению задач.

Методы: словесные (беседа), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать прикладные задачи при помощи производной.

Занятие так же как предыдущее необходимо начать с актуализации опорных знаний, так как это поможет учащимся лучше усвоить материал.

Сначала необходимо вспомнить основные этапы решения задач прикладного характера, затем можно приступить к отработке навыка решения задач, встречаемых в жизни, при помощи производной.

Занятие 8.Производная высших порядков.

Цель: формирование умения вычислять производные высших порядков.

Форма организации: лекция.

Методы: словесные (беседа, рассказ), наглядные (демонстрация презентации), практические (решение задач).

Средства: компьютер, проектор, интерактивная доска.

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной высшего порядка, физический и геометрический смысл производной второго порядка;

– уметь: находить производные высших порядков.

Занятие так же как предыдущее необходимо начать с актуализации опорных знаний, так как это поможет учащимся лучше усвоить материал.

Далее можно сформулировать определение производной высшего порядка, свойства производной высшего порядка, геометрический и физический смысл производной второго порядка. После изучения теоретического материала необходимо отработать навык отыскания производной высших порядков.

Занятие 9.Производная в ЕГЭ.

Цель: формирование умения решать задачи при помощи производной из ЕГЭ по математике.

Форма организации: практикум по решению задач.

Методы: словесные (беседа), практические (решение задач).

Средства: раздаточный материал (демонстрационный вариант ЕГЭ по математике, задачи).

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать задачи ЕГЭ при помощи производной.

На занятии необходимо ознакомить учащихся с контрольно-измерительными материалами ЕГЭ по математике, выявить задания, в которых встречается производная, это задание под номером 14 в базовом уровне и под номером 7 в профильном уровне. Рассмотреть задачи различных видов, такие как:

–по графику функции определить характеристики производной;

–по графику производной определить характеристики функций;

– на геометрический смысл производной;

– на физический смысл производной.

Затем уже совершенствовать умение применять ранее полученные знания при решении каждого типа задач.

Итоговое занятие.

Цель: проверить степень усвоения знаний учащихся по теме «Производная».

Форма организации: практикум по решению задач.

Методы: практические (решение задач).

По окончанию изучения темы учащиеся должны:

– знать: определение производной, физический и геометрический смысл производной, правила нахождения производной, таблицу производных;

– уметь: находить производные, решать различные задачи при помощи производной.

После изучения всех тем элективного курса проводится тестирование. Задания могут содержать как теоретический материал, так и практический. Так как в ЕГЭ представлены задания только с кратким ответом (записи числа или слова), то можно сказать, что данное тестирование поможет формированию у учащихся способности, правильно записывать ответ. Закончив выполнение теста, ученик получит информацию о количестве правильно и неправильно выполненных заданий, что позволит учащемуся реально оценить свои возможности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа была направлена на рассмотрение методики реализации внутрипредметных и межпредметных связей при обучении математике в 10-11 классах и разработку элективного курса, как практического подтверждения целесообразности использования внутрипредметных и межпредметных связей.

Данная работа спланирована таким образом, чтобы предложенный материал был интересным и освобожден от лишних трудностей для учащихся, так как отмечалось выше, производная представляет собой одно из мощнейших орудий исследования.

Умения математически исследовать различные явления формирует изучение производной. Выпускник общеобразовательной школы должен иметь представления о производной, а также ее применении для исследования функций. В единый государственный экзамен включены задания, которые связанные с применением производной. Вследствие этого, нами были выявили основные направления углубления и расширения знаний, умений и навыков обучающихся по теме «Производная», разработали элективный курс по теме «Производная и её применение», который позволяет решить следующие проблемы:

– повысить уровень теоретической подготовки учащихся за счет углубления и расширения знаний и умений при решении нестандартных задач,

– увеличить творческий потенциал учащихся путем развития их математических способностей и формирования устойчивого интереса к математике

Так же были получены следующие результаты в итоге проведенного исследования:

– по проблеме реализации межпредметных связей в средней школе проведен анализ научно-методической литературы. Анализ продемонстрировал необходимость и возможность реализации межпредметных связей математики с другими дисциплинами на уровне учебных предметов, на основе общих определений этих дисциплин.

– для создания целостного представления об окружающем мире на основе единых понятий из школьных дисциплин выражены особенности межпредметных элективных занятий в старших классах, которые состоят в обобщении и систематизации знаний учащихся, полученных при изучении различных предметов

– разработана методика проведения элективного курса «Производная и её применение», направленная на реализацию межпредметных связей для расширения и углубления знаний учащихся о производной по данным предметам.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что все поставленные задачи были выполнены.

Практическая часть может быть использована в качестве методического пособия для учителей при работе с учащимися на уроках и факультативах на учебной практике в школе, лицее или гимназии с углубленным изучением математики, а также в средних общеобразовательных учреждениях. Также обучающиеся могут применять его как справочный материал.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаева, Г. Д. Межпредметные связи в современной школе / Г. Д. Абдуллаева, И. И. Атажанов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2016. – №3. – С. 66-68.

2. Аксёнов А. А. Теоретические основы реализации внутрипредметных связей посредством решения задач в классах с углублённым изучением математики: дис. канд. пед. наук / А. А. Аксёнов. – Орёл, 2000. – 160 с.

3. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др. – 18–е изд. – Москва: Просвещение. – 2012. – 464 с.: ил.

4. Арзяева, Н. А. Межпредметные связи в процессе обучения математики / Н. А. Арзяева, К. Н. Горячева // Новые информационные технологии в науке. – 2016. – С. 61-63.

5. Башмаков, М. И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ.учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. – 5-е изд., стер. –Москва: Издательский центр «Академия», 2014. – 416 с.

6. Башмаков М. И. Математика: Учебник для 10 класса. Базовый уровень / М. И. Башмаков. - М.: Изд. центр «Академия», 2007. - 304 с.

7. Бесчетвертева, Е. П. Интегрированные уроки как средство реализации межпредметных связей / Е. П. Бесчетвертева // Поволжский педагогический поиск. – 2015. – №2. – С. 40-42.

8. Блинова, Т. Л. Реализация межпредметных связей в процессе обучения математике в 10–11 классах физико–математического профиля /Т. Л. Блинова, Е. В. Безматерных // Математика в школе. – 2016. – №7. –С. 28-35.

9. Бублейников, Ф.Д. О движении (из истории механики) / Ф.Д. Бублейников – Детгиз – 1956. – 45 с.

10. Виленкин Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. [Текст]: учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 18-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2014. – 352 с.

11. Гайдукова, Н. Н. Формирование межпредметных связей на курсах по подготовке к ЕГЭ по математике / Н. Н. Гайдукова // Наука XXI века: новый подход. – 2015. – С. 72-76.

12. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX – X классы. М.: Просвещение, 1983.

13. Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика. М.: Наука, 1991.

14. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 класса общеобразовательных учреждений / А. Н. Колмогоров,А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; под ред. А. Н. Колмогорова. – 17-еизд. – Москва : Просвещение. – 2008. – 384 с.: ил.

15. Коршунова, Н. И. К вопросу о реализации внутрипредметных связей в школьном курсе математики / Н. И. Коршунова // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика. – 2014. – С. 137-141.

16. Краснова, Г. Г. Внутрипредметные связи как основа успешного использования свойств элементарных функций при решении уравнений и неравенств / Г. Г. Краснова // Теория и практика общественного развития. – 2014. – №5. – С. 72-74.

17. Могильницкий, В.А. Производная и ее применение: учебное пособие / В.А. Могильницкий, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. - 107 с.

18. Молдоисаева, И. К. Алгоритмизация межпредметных и внутрипредметных связей математики как одно из направлений повышения качества образования / И. К. Молдоисаева // Известия вузов Кыргызстана. – 2016. – №5. – С. 42-45.

19. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа 10-11класс. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – 14–е изд., стер. – Москва: Мнемозина. – 2013. – 400 с.: ил.

20. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа.10-11 кл.: В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; Под ред. А.Г. Мордковича. - 5-е изд. - М.: Мнемозина, 2014. - 432 с.

21. Мухамедов, Т. Т. Межпредметные связи физики и математики /Т. Т. Мухамедов, Л. Р. Мухамедова // Научный журнал. – 2016. – №5. –С. 56-57.

22. Подласый, И. П. Педагогика начальной школы : учеб. для студентов высш. учеб. заведений / И. П. Подласый.Москва : ВЛАДОС,2008. – 464 с.

23. Смирнова, М. А. Теоретические основы межпредметных связей /М. А. Смирнова. – Москва, 2006. – 204 с.

24. Смирнова, О. Г. Интегрированный урок в школе / О. Г. Смирнова// Образование в Кировской области. – 2012. – №4. – С. 62-65.

25. Терехова, Л. А. Психолого–педагогический аспект проблемы реализации внутрипредметных связей в современном образовании /Л. А. Терехова // Профессионально–личностное развитие преподавателя и студента: традиции, проблемы, перспективы. – 2015. – С. 124-128.

26. Тюнин, А. И. Межпредметные связи экономики и математики /А. И. Тюнин // Актуальные проблемы образования: позиция молодых. – 2016.– С. 209-211.

27. Ускова, О. Ф. О межпредметных связях математики и информатики в заданиях ЕГЭ по информатике / О. Ф. Ускова,Н. А. Каплиева, Ю. Д. Щеглова, Н. Б. Ускова // Современные методы теории функций и смежные проблемы. – 2015. – 142 с.

28. Чеботарева, Н. А. Межпредметные связи географии и математики / Н. А. Чеботарева // География и геоэкология на службе науки и инновационного образования. – 2016. – С. 203-205.

29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966.

30. Харламов, И. Ф. Педагогика [Текст]: учебник/ И. Ф. Харламов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.

31. Шарипов, В. А. К истории вопроса о межпредметных связях / В. А. Шарипов // Ученые записки худжанского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия гуманитарно–общественных наук. – 2012. – №4. – С. 51-58.

32. Шевелева, Т. В. Актуальность математических методов вмежпредметных связях / Т. В. Шевелева // Актуальные проблемы гуманитарных и социально–экономических наук. – 2015. – №9. – С. 79-83.

33. Щедрина, Н. Г. Пути реализации межпредметных связей в различных по формам учебных занятиях / Н. Г. Щедрина // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2007. – №45. – С. 455-457.

34. Яковлев И.В. Материалы по математике: Теоретическое пособие / И.В. Яковлев. - М.: Мнемозина, 2013. - 30 с.

Приложение

Система задач упражнений к элективному курсу

Тема 2. Понятие производной. Правила дифференцирования.

Задание №1. Соотнесите функцию с ее производной.

1. $y = a^x$	a. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $y = \ln x$	b. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $y = \log_a x$	c. $y' = -\sin x$
4. $y = \sqrt{x}$	d. $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $y = \sin x$	e. $y' = a^x \cdot \ln a$
6. $y = \cos x$	f. $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $y = tgx$	g. $y' = \frac{1}{x}$
8. $y = ctgx$	h. $y' = \cos x$

Ответ: 1-e, 2-g, 3-d, 4-b, 5-h, 6-c, 7-a, 8-f.

Задание №2. Вставьте в предложения пропущенные слова:

1. Если производная в точке меняет знак с «+» на «-», то эта точка называется _____________ функции.

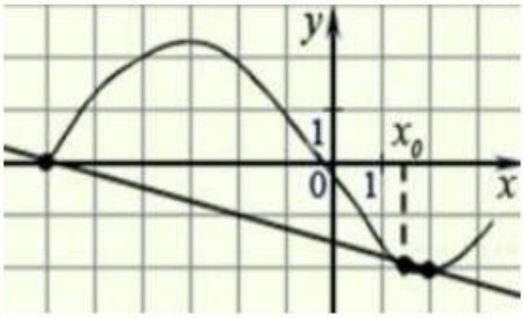
2. Если производная в точке меняет знак с «-» на «+», то эта точка называется _______________ функции.

3. Если производная функции положительна на заданном интервале, то функция ______________.

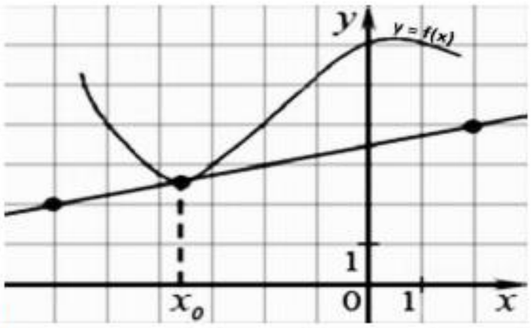
4. Если производная функции отрицательна на заданном интервале, то функция _____________.

Ответ: 1-максимум, 2-минимум, 3-возрастатет, 4-убывает.

Задание №3. По графику функции $y = f(x)$ найдите производную в точкеx_0:



а)



б)

Ответ: а) -0,25; б) 0,25.

Задание №4. Решите кроссворд:

									1	п	р	е	д	е	л				
								2	к	р	и	т	и	ч	е	с	к	а	я
						3	у	с	к	о	р	е	н	и	е				
4	д	и	ф	ф	е	р	е	н	ц	и	р	о	в	а	н	и	е		
							5	ф	и	з	и	ч	е	с	к	и	й		
									6	в	о	г	н	у	т	о	с	т	ь
					7	н	ь	ю	т	о	н								
						8	о	р	у	д	и	е							
					9	л	е	й	б	н	и	ц							
						10	к	а	с	а	т	е	л	ь	н	а	я		
					11	в	р	е	м	я									

1. Если он существует, то говорят, то функция дифференцируема.

2. Как называется точка, в которой производная равна 0 или не существует?

3. Величина, определяемая как производная скорости по времени.

4. Как называется операция отыскания производной?

5. … смысл производной выражает скорость изменения процесса в момент времени t.

6. Положительная вторая производная характеризует … функции

7. Ученый, пришедший к понятию производной, исходя из вопросов механики.

8. При помощи какого предмета итальянский математик Тарталья изучал угол наклона касательной?

9. Немецкий математик, один из основателей дифференциального исчисления.

10. «Прямая наиболее тесно примыкающая к кривой в малой окрестности заданной точки». О чем писал Ферма?

11. Производная координаты по …, есть скорость.

Тема 3. Производная и ее применение в алгебре.

Задача №1. Доказать тождество $arcsinx = \frac{\pi}{2} - arccosx$

Решение:

Рассмотрим функцию$f(x) = arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$

Затем вычислим производную этой функции:

$$f'(x) = (arcsinx)' + (arccosx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$$

Далее, подставляем найденное значение в исходную функцию:

$$f(0) = \arcsin 0 + arccos0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Тождество доказано.

Задача №2. К графику функции $y = \sqrt{2 - sinx}$проведена касательная вточке с абсциссой$x = \frac{\pi}{2}$. Найдите угловой коэффициент касательной.

Решение:

Воспользуемся геометрическим смыслом производной для нахождения углового коэффициента касательной, так как угловой коэффициент касательной проведенной к графику функции в этой точке равен производной от этой функции в данной точке. Тогда

$$f'(x) = (\sqrt{2 - sinx})' = (2 - sinx)' * \frac{1}{2\sqrt{2 - sinx}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{2 - sinx}}$$

$$k = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2 - \sin(\frac{\pi}{2})}} = \frac{0}{2\sqrt{2-1}} = 0$$

Ответ: 0.

Задача №3. Найдите экстремумы функции

$$y = x^2 \cdot e^{-x}.$$

Решение:

Во-первых, находим область определение функции:

$D(y) = \mathbb{R}$.

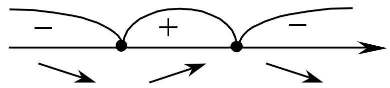
Во-вторых, находим производную функции и ее критические точки:

$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$;

$y' = 0$: $2x - x^2 = 0$, $\Rightarrow x = 0$, $x = 2$;

$y' \nexists$: таких точек нет.

Затем, определяем знак y':



Таким образом,

$x = 0$ – это точка минимума функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$,

$x = 2$ – это точка максимума функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$,

$y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0{,}54$.

Задача №4. Найдите экстремумы функции $y = \cos^2 x$.

Решение:

Сначала, находим область определение функции:

$D(y) = \mathbb{R}$.

Затем, находим производную функции и ее критические точки:

$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$;

$y' = 0$: $-\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y' \nexists$: таких точек нет.

Далее, находим вторую производную функции и, конечно же, вычисляем ее в критических точках:

$y'' = -2\cos 2x$,

$$y''\left(\frac{\pi k}{2}\right) = -2\cos(\pi k) = \begin{cases} -2, & k = 2n; \\ 2, & k = 2n-1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = \cos^2 x$ имеет максимумы в точках

$x = \frac{\pi}{2} \cdot 2n = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y_{\max} = y(\pi n) = 1$;

и имеет минимумы в точках

$x = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) = \pi n + \frac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y_{\min} = y\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Задача №5. Решите уравнение$4cos3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15 = 4 - x^3$

Решение:

Рассмотрим первую функцию

$$y = 4 - x^3$$

$$y' = (4 - x^3)' = 3x^2 \leq 0$$

– функция убывает. Рассмотрим вторую функцию

$$y = 4cos3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15$$

$y' = (4cos3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15)' = -12\sin(3x) + 2{,}5\cos\frac{x}{2} + 15 > 0$ –функция возрастает.

Таким образом, можно сделать вывод, что уравнение имеет один корень при $x = 0$.

Тема 4. Производная и ее применение в физике.

Задача №1. Найдите скорость и ускорение материальной точки в момент времени t = 2, если материальная точка движется прямолинейно по следующему закону$S(t) = t^3 + 7t$.

Решение:

Вычисляем первую производную пути по времени для нахождения скорости:

$$V(t) = S'(t) = (t^3 + 7t)' = 3t^2 + 7$$

Найдем$V(2) = 3 * 2^2 + 7 = 19$

Вычисляем вторую производную пути по времени для нахождения ускорения:

$$a = S''(t) = (3t^2 + 7)' = 6t.$$

Найдем $a(3) = 6 * 2 = 12$

Ответ: V =19, a = 12 .

Задача №2. Основание параллелограмма изменяется по формуле a=3-7t, высота по формуле b= 3-8t . Найдите скорость изменения площади параллелограмма в момент времени t =10с.

Решение:

Найдем площадь параллелограмма, который вычисляется по формуле

$$S(t) = a * b, S(t) = (3 - 7t)(3 - 8t) = 9 - 24t - 21t + 56t^2$$
$$= 56t^2 - 45t + 9$$

Подставим в полученное выражение $t=10$:

$$56 * 10^2 - 45 * 10 + 9 = 5600 - 459 = 5141$$

Задача №3. Маховик поворачивается за t секунд на угол, вычисляемый по формуле: $\alpha(t) = 27t - 0.8t^2$ рад. Найдите угловую скорость вращения маховика в момент t =10с, и в какой момент времени маховик остановится.

Решение:

Сначала найдем угловую скорость вращения маховика, для этого вычислим производную $\alpha'(t)$ и подставим в нее t = 10:

$$\omega(t) = \alpha'(t) = (27t - 0{,}8t^2)' = 27 - 1{,}6t$$

$$\omega(10) = 27 - 1{,}6 * 10 = 27 - 16 = 11 \text{ Рад /с}$$

Далее необходимо найти время, когда маховик остановится, для этого должно выполняться условие

$$\omega(t) = 0, \text{т. е.}\, 27 - 1{,}6t = 0$$

$$t = \frac{27}{1.6} = 16\frac{7}{8} = 16.875\ c$$

Ответ: угловая скорость равна 11 рад/с, маховик остановится при t=16,875с.

Задача №4. Найдите силу, действующую на материальную точку в момент времени t = 3с, если она движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 + 5t^2 - 11$ и ее масса равна 2 кг.

Решение:

Уравнение силы имеет вид:$F = m * a$, где m - масса, a - ускорение. Для того чтобы найти ускорение необходимо вычислить вторую производную:

$$a(t) = S''(t) = (3t^2 + 10t)' = 6t + 10$$

Подставим в данное выражение t = 3:

$$a(3) = 6 * 3 + 10 = 28$$

Подставим найденные значения в уравнение силы:

$$F = 2 * 28 = 56.$$

Ответ: 56.

Задача №5. Найдите скорость изменения силы тока в момент времени t = 7, если изменение силы тока задано уравнением:$I = 5t^2 + 6$.

Решение:

Найдем производную:

$$I' = (5t^2 + 6)' = 10t$$

Подставим t = 7 в полученное выражение:

$$V = I'(7) = 10 * 7 = 70$$

Ответ: 70.

Задача №6. Найдите кинетическую энергию тела через 2с после начала движения, если тело массой m = 5кг движется прямолинейно по закону$S(t) = t^3 + 1$.

Решение:

Запишем уравнение кинетической энергии:

$$E(t) = \frac{mV^2}{2} \qquad (1)$$

Вычисляем первую производную пути по времени для нахождения скорости:

$$V(t) = S'(t) = (t^3 + 1)' = 3t^2$$

Подставим полученное выражение в (1):

$$E(t) = \frac{53t^2}{2} = \frac{15t^2}{2}$$

Подставим $t = 2$ в данное выражение:

$$E(t) = \frac{15*2^2}{2} = 30\text{Дж}.$$

Ответ: $E = 30$.

Тема 5. Производная и ее применение в биологии и химии.

Задача №1. Найдите скорость роста популяции в момент времени t = 3с, если популяция бактерий задается формулой

$$x(t) = \ln(t+1) + \frac{t^3}{2t}.$$

Решение:

Вычисляем производную от заданной функции для того чтобы найти скорость роста популяции:

$$P = x'(t) = \left(\ln(t+1) + \frac{t^3}{2t}\right)' = \frac{1}{t+1} + \frac{3t^2}{2}$$

в полученное выражение подставляем значение t = 3с:

$$P(3) = \frac{1}{3+1} + \frac{3*3^2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{27}{2} = \frac{1+2*27}{4} = \frac{55}{4} = 13.75$$

Ответ: 13,75.

Задача №2. Популяция бактерий задается формулой

$$x(t) = t^3 + 5t + 10.$$

Найдите время, за которое скорость роста популяции достигает 152.

Решение:

Вычислим производную функции:

$$P = x'(t) = (t^3 + 5t + 10)' = 3t^2 + 5$$

Так как в условии задачи известно, что скорость роста популяции равна 152, то получим равенство:

$$3t^2 + 5 = 152; 3t^2 = 147; t^2 = 49; t = \pm 7,$$

т.к. время не может быть отрицательным, то t = 7 с.

Ответ: 7.

Задача №3. Найдите скорость химической реакции через 4с, если количество вещества вступившего в химическую реакцию задается формулой$p(t) = 3 + 8t^4 - 29t^3$.

Решение:

Вычисляем производную от заданной функции для нахождения скорости химической реакции нужно:

$$V(t) = p'(t) = (3 + 8t^4 - 29t^3)' = 32t^3 - 87t^2$$

и подставляем в полученное выражение t = 4с:

$$V(4) = 32 * 4^3 - 87 * 4^2 = 2048 - 1392 = 656$$

Ответ: 656.

Задача №4. Найдите время, за которое скорость химической реакции достигает 151, если количество вещества вступившего в реакцию задается формулой

$$p(t) = t^2 - t + 3t^3$$

Решение:

Вычислим производную функции:

$$V(t) = p'(t) = (t^2 - t + 3t^3)' = 2t - 1 + 9t^2$$

Так как в условии задачи известно, что скорость химической реакции достигает 151, то получим равенство:

$$2t - 1 + 9t^2 = 151; 9t^2 + 2t - 152 = 0; D = 5476;\ t_1 = 8;\ t_2 = -4$$

Но т.к. время не может быть отрицательным, то t = 8с.

Ответ: 8.

Тема 6. Производная и ее применение в географии.

Задача №1. Необходимо написать общую формулу для вычисления численности населения в некотором городе в момент времени t .

Решение:

Пусть численность населения определяется зависимостью y =$y(t)$, тогда прирост населения – $\Delta t = t - t_0$. Численность населения выражается формулой:$\Delta y = k * y * \Delta y$, где$k = k_p - k_c$ (k_c-коэффициент смертности, k_p-коэффициент рождаемости).

Задача №2. Напишите формулу прироста населения y =$y(t)$ в некотором городе, если начальное население города составляет y_0=50000человек, а через год население возросло на 6%.

Решение:

Пусть скорость прироста населения пропорциональна количеству населения. Производная функции $y(t)$ по времени t называется скоростью роста численности населения, т. е.$\frac{dy}{dt}$.

Используя условие задачи, составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

где k - это коэффициент пропорциональности.

После разделения переменных и интегрирования получим:

$$\frac{dy}{dt} = ky => lny = kt + lnC => y(t) = Ce^{kt}$$

Подставив известные данные, получим постоянную интегрирования:

$$y_0 = Ce^{k*0} => C = y_0 = 5000$$

Таким образом, формула

$$y(t) = y_0 e^{kt} (2)$$

отражает зависимость прироста населения от времени. По условию задачи известно, что через год (t =1) численность населения возросло на 6%, тогда:

$$y_0 + 0{,}06y_0 = 1{,}06y_0 = 5000 * 1{,}06 = 53000$$

Подставив полученное значение в формулу (2), получим:

$$53000 = 50000e^{k*1} => e^k = \frac{23000}{50000} = 1{,}06$$

Подставив значение$e^k = 1{,}06$в (2) получим функцию, отражающую прирост населения в городе:

$$y' = 50000 * (1{,}06)'$$

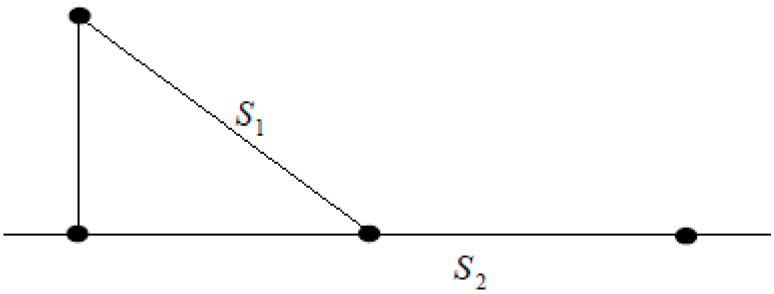
Ответ: $y' = 50000 * (1{,}06)'$

Тема 7. Производная в прикладных задачах.

Задача №1. Лыжная база расположена в 9 км от ближайшей точки дороги. Мише необходимо добраться от базы до города, расположенного от упомянутой точки в 15 км. Скорость Миши по заснеженной тропе 8 км/ч, а по дороге 10 км/ч. К какой точке дороги ему надо идти, чтобы в кратчайшее время добраться до города, если считать, что дорога до города прямая?

Решение:

Выполним схематический рисунок условия задачи:



Введем условные обозначения: B – лыжная база, C – город, l – дорога, V_1- скорость по заснеженной тропе, V_2- скорость по дороге.

Обозначим постоянные и переменные величины: постоянные – BA, AC, V_1, V_2; переменные – AD, DC, BD.

Пусть x – AD, где $0 \le x \le 15$. По теореме Пифагора можем найти BD.

$$S_1 = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{81 + x^2}\ .$$

Тогда

$$S_2 = DC = 15 - x\ .$$

Вспомним из курса физики формулу нахождения расстояния: $S = V \cdot t$

и выразим время: $t = \dfrac{S}{V}$. Значит, Миша проходит по полю путь

$$S_1 \text{ за } t_1 = \frac{\sqrt{81+x^2}}{8}$$

а по дороге путь S_2за $t_2 = \dfrac{15-x}{10}$.

Тогда время, затраченное на путь S_1и S_2равно

$$t(x) = \frac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \frac{15-x}{10}.$$

Так как в задаче надо найти точку дороги, чтобы в кратчайшее время добраться до города, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции на отрезке [0, 15].

$$t'(x) = \frac{\left(\sqrt{81+x^2}\right)'\cdot 8 - 8'\cdot\left(\sqrt{81+x^2}\right)}{8^2}\cdot\left(81+x^2\right)' + \frac{(15-x)'\cdot 10 - 10'\cdot(15-x)}{10^2} = \frac{8\cdot 2x}{64\cdot 2\sqrt{81+x^2}} + \frac{-10}{100} =$$

$$= \frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10}$$

Найдем критические точки, т. е. где $t'(x) = 0$: $\dfrac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \dfrac{1}{10} = 0$.

$$5x - 4\sqrt{81+x^2} = 0$$

$$5x = 4\sqrt{81+x^2}$$

$$25x^2 = 16(81+x^2)$$

$$9x^2 = 1296$$

$$x^2 = 144$$

$$x_1 = 12$$

$x_2 = -12$ **- не удовлетворяет условию задачи, т. к.** $x_2 \notin [0{,}15]$

Найдем значение функции в точках $x = 0$, $x = 12$ и $x = 15$.

$$t(0)=\frac{\sqrt{0^2+81}}{8}+\frac{15-0}{10}\approx 2{,}625$$

$$t(12)=\frac{\sqrt{12^2+81}}{8}+\frac{15-12}{10}\approx 2{,}175$$

$$t(15)=\frac{\sqrt{15^2+81}}{8}+\frac{15-15}{10}\approx 2{,}187$$

Функция достигает наименьшего значения в точке x =12.

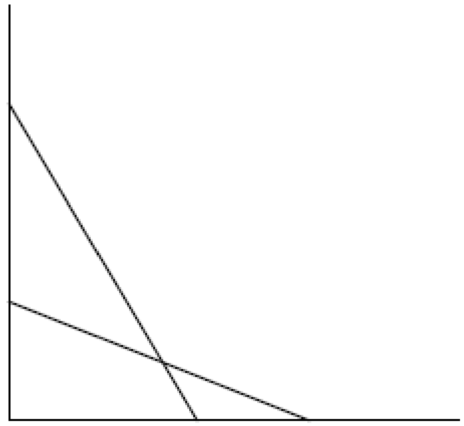
15-12 = 3км.

Ответ: Мише надо идти в точку, удаленную на 3 км от лыжной базы и на 12 км от дороги, чтобы в кратчайшее время добраться до города.

Задача №2. Пусть лестница длиной 7 м поставлена к стене так, чтобы ее верх находится на высоте 6 м. В некоторый момент времени она начинает падать и её верх притягивается к земле с ускорением равным 3 м/с². Необходимо найти скорость удаления низа лестницы от стены, если верх находится на высоте 4м.

Решение:

Выполним схематический рисунок условия задачи:



Пусть h(t) – высота верха лестницы в какой-то момент времени t и h(0)=12, x(t) –расстояние от низа лестницы до стены. Тогда используем формулу для нахождения высоты:

$$h(t)=h(0)-\frac{gt^2}{2}\ \textbf{ получим, }\ h(t)=12-\frac{gt^2}{2}.$$

Из условия известно, что g=4 м/с², тогда формула примет вид:

$$h(t)=12-\frac{4t^2}{2};\quad h(t)=12-2t^2.$$

Составим уравнение, чтобы найти время t, когда h(t)=4:

$$12-2t^2=4;\quad -2t^2=-8;\quad t^2=4;\quad t_1=2,\quad t_2=-2,$$

t = 2с, т. к. не может быть время отрицательным. Затем, находим расстояние x(t) по теореме Пифагора:

$$25=h^2(t)+x^2(t);\quad x(t)=\sqrt{25-h^2(t)}=\sqrt{25-(12-2t^2)^2}=\sqrt{-119+48t^2-4t^4}.$$

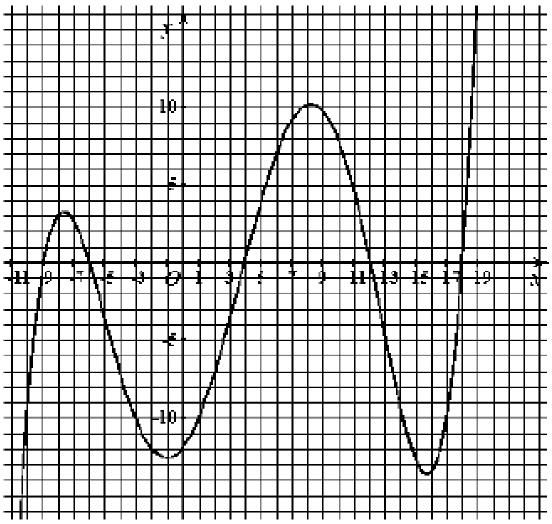
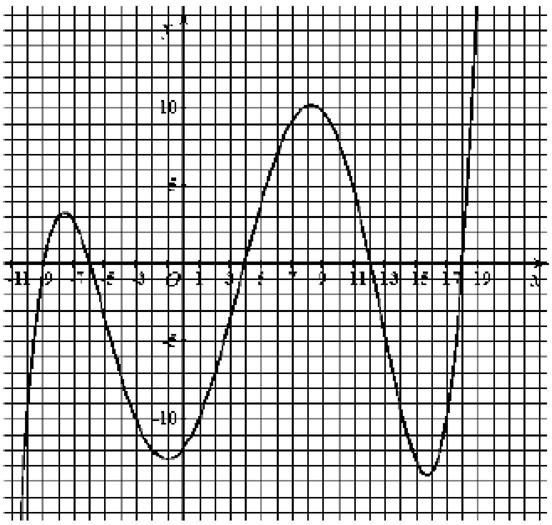
Далее, находим скорость, с которой изменяется расстояние:

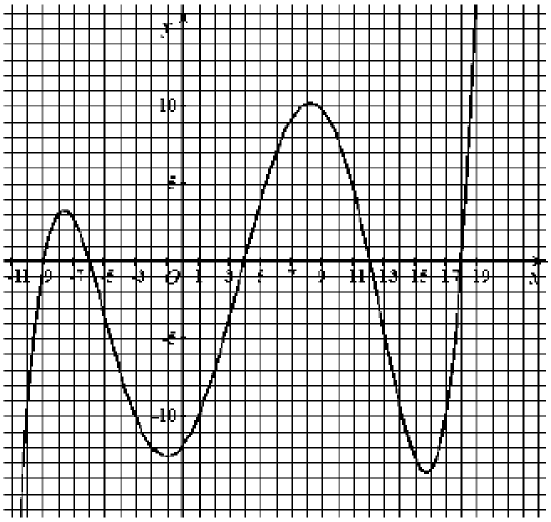
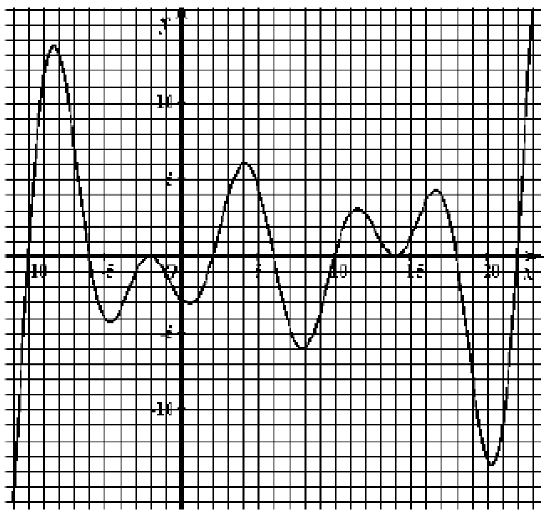
$$V(t)=x'(t)=(\sqrt{-119+48t^2-4t^4})'=\frac{96t-16t^3}{2\sqrt{-119+48t^2-4t^4}}=\frac{48t-8t^3}{\sqrt{-119+48t^2-4t^4}}.$$

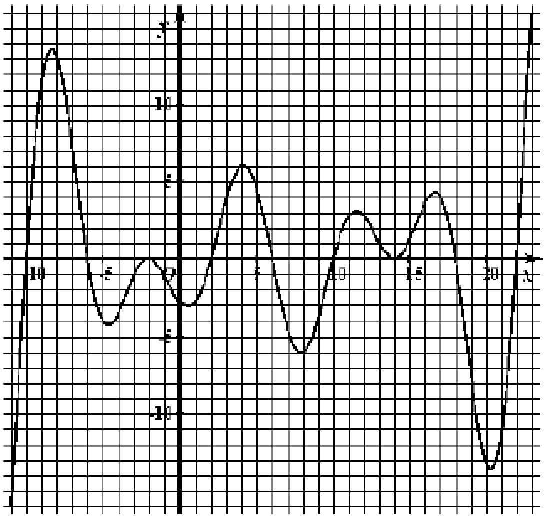
$$V(2)=\frac{48\cdot 2-8\cdot 2^3}{\sqrt{-119+48\cdot 2^2-4\cdot 2^4}}=\frac{96-64}{\sqrt{-119+192-64}}=\frac{32}{\sqrt{9}}=\frac{32}{3}\approx 10{,}7\ \text{м/с}$$

Ответ: 10,7 м/с – это скорость удаления низа лестницы от стены равна.

Тема 9. Производная в ЕГЭ

№	Задание	Решение
	Задачи на определение характеристик производной по графику функции	
1	Дан график функции $f(x)$, определенной на интервале (-10,5;19). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна. 	Согласно теореме 1 (о возрастании функции): «Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X». Тогда, проанализировав график, можем определить эти промежутки: (-10,5;-7,6), (-1;8,2), (15,7;19). Выделим целые точки, принадлежащие этим интервалам: -10, -9, -8, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 18. Всего их 15. Ответ: 15.
2	Дан график функции $f(x)$, определенной на интервале (-10,5;19). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна. 	Согласно теореме 2 (об убывании функции): «Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X». Тогда, проанализировав график, можем определить эти промежутки: (-7,6;-1), (8,2;15,7). Выделим целые точки, принадлежащие этим интервалам: -7, -6, -5, -4, -3, -2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Всего их 13. Ответ: 13

3	Дан график функции $f(x)$, определенной на интервале (-10,5;19). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=4$ или совпадает с ней. 	Уравнение прямой имеет вид: $y=kx+b$, где k - это коэффициент наклона прямой к Ох. В заданном уравнении $y=4$, $k=0$, т. е. прямая параллельна Ох. Значит, искомые касательные должны быть параллельны Ох и $k=0$. Таким свойством касательные обладают в точках экстремумов функции. Для заданной функции их четыре: две точки max и две точки min. Всего точек экстремумов 4. Ответ: 4.
Задачи на определение характеристик функции по графику ее производной		
1	Дан график производной $y=f'(x)$ функции $y=f(x)$, определенной на интервале (-11;23). Найдите точку на отрезке [-6;2], в которой функция принимает наибольшее значение. 	На отрезке [-6;2] функция отрицательна, значит, функция не возрастала (она либо убывала, либо проходила через стационарные точки). Значит, наибольшее значение функция принимает в точке $x=-6$. Ответ: -6.

2	Дан график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-11;23). Найдите точку на отрезке [3;5], в которой функция принимает наименьшее значение. 	На отрезке [3;5] производная функции положительна, значит, функция только возрастала. Тогда наименьшее значение функция принимает в точке $x = 3$. Ответ: 3.
3	Дан график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-11;23). Найдите количество точек экстремума функции, принадлежащих отрезку [0;20].	Согласно теореме 4 (об экстремуме функции): «Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции рана нулю». Таких точек, в которых производная равна нулю 5, это: $x = 2$, $x = 6$, $x = 10$, $x = 14$, $x = 18$. Но так как в точке $x = 14$ производная не сменила знак, то ее надо исключить. Ответ: 4.

	Задачи на геометрический смысл производной	
1	Прямая $y=10x-9$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+2x-3$. Найдите абсциссу точки касания.  	Так как прямая $y=10x-9$ параллельна касательной, то они будут иметь одинаковый угол наклона к оси абсцисс, т. е. угловой коэффициент касательной как и у прямой равен 10. Но согласно геометрическому смыслу производной: угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке касания. Найдем производную: $y'=(x^2+2x-3)'=2x+2$. Подставим в выражение для производной неизвестную абсциссу точки касания x_0 и составим уравнение: $2x_0+2=10$ $2x_0=8$ $x_0=4$ Ответ: 4.
	Задачи на физический смысл производной	
1	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=4t^2-15t+10$, где x - расстояние в метрах, t - время в секундах. Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t=3$ с.	Найдем зависимость скорости от времени, для этого вычислим производную: $x'(t)=8t-15$. Для того чтобы найти скорость в момент времени t, необходимо подставить значение $t=3$ с. в $x'(t)$. Получим: $x'(3)=8\cdot3-15=9$. Ответ: 9.

2	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2-2t+5$, где x - расстояние в метрах, t - время в секундах. В какой момент времени (в секундах) ее скорость будет равна 3 м/с?	Найдем зависимость скорости от времени, для этого вычислим производную: $x'(t)=t^2-4t-2$. По условию задачи известно, что скорость равна 3, т. е. $x'(t)=3$. Составим уравнение: $t^2-4t-2=3$. $t^2-4t-5=0$ $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36$ $t_1=\frac{4+6}{2}=5$ $t_2=\frac{4-6}{2}=-1$ t_2 - не удовлетворяет условию задачи, т. к. время не может быть отрицательным. Ответ: 5.