ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ,

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05
Педагогическое образование, профиль математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041403
Капля Елены Сергеевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н.,
доцент Зинченко Н.А.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

В настоящее время многие страны мира все больше интересуются проблемами математического образования. Значение математики в жизни современного общества увеличивается. Люди в повседневной жизни постоянно решают задачи, полностью описанные математическим языком с помощью функций. Поэтому, изучение функций и построение графиков один из важных разделов школьной математики.

Курс алгебры и начал анализа является одним из ключевых для старшей школы. В 10-11 классах изучение дисциплины проходит на трех уровнях: базовом, углубленном и профильном. Изучение элементов математического анализа подразумевается на каждом из названных уровней. Задания из анализа введены в ЕГЭ, поэтому знание раздела, связанного с исследованием функций, необходимо для успешной сдачи экзамена по математике.

Низкие результаты выполнения заданий, связанных с исследованием функций средствами математического анализа, обусловлены недостатком графических и геометрических представлений у обучающихся и недостаточным владением свойствами производной. Только около 45% обучающихся по результатам статистических данных могут справиться с заданием №7 и №12 профильного уровня математики на ЕГЭ. Чтобы найти на графике функции значение аргумента, при котором на определенном отрезке функция имеет заданное значение производной, или на графике производной отметить точку экстремума, необходимо уметь переформулировать условие задания с формального языка на графический и наоборот. Для успешного решения различных задач, связанных с исследованием функций с помощью производной обучающимся недостаточно рассматривать только типовые задания. Важно владеть понятием производной, знать свойства касательной к графику и уметь исследовать функцию, оценивать скорость процесса, описываемого функцией и изменения ее величины.

Важность изучения раздела, связанного с производной, для успешной подготовки обучающихся к дальнейшему изучению математики определило тему исследования в рамках выпускной квалификационной работы – «Применение производной к исследованию функций в школьном курсе математики».

Цель исследования: подобрать систему задач по теме «Производные» для подготовки к единому государственному экзамену и разработать методические рекомендации по подготовке к экзамену.

Объект исследования: методика обучения производным в курсе средней общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методические особенности обучения решению задач по теме «Производные» при подготовке к ЕГЭ.

Задачи:

1. Провести литературно-критический обзор по теме исследования;
2. Провести анализ учебников для старшей школы по теме «Производная»;
3. Подготовить учебные материалы, которые обеспечивали бы усвоение и закрепление знаний, необходимых для подготовки к ЕГЭ по разделу «Производная»;
4. Обобщить методические рекомендации по подготовке к единому государственному экзамену по теме «Производная».

Структура работы. Дипломная работа включает в себя введение, две главы, заключение, список использованной литературы (30 наименований), приложение.

В первой главе «Теоретические основы введения понятия «производная» в школьный курс математики» рассмотрены определение и свойства математического понятия «Производная» в современной трактовке. Также в этой главе проведен обзор источников по истории включения элементов высшей математики, в частности, элементов дифференциального исчисления, в школьный курс математики.

Во второй главе «Методический подход к использованию производной для исследования функций» проведен анализ учебников для старшей школы в части, касающейся темы, связанной с производной и ее применением для исследования функций. Также проанализированы возможности пособий и Интернет-ресурсов для дополнительного обучения.

Особое внимание во второй главе уделено вопросам подготовки учащихся к выполнению заданий, связанных с производной, на ЕГЭ по математике. На основе изучения работ учителей практиков и методистов предлагаются рекомендации по подготовке к ЕГЭ по заданиям на использование определения или свойства производной, а также на исследование функций средствами дифференциального исчисления.

В заключении представлены итоги исследования.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ «ПРОИЗВОДНАЯ» В ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

1.1 Математическое понятие «Производная»

«Производная» – одно из основных математических понятий. Данное понятие широко применяется в ходе решений целого ряда математических и физических задач в процессе изучения скорости разных процессов [13].

Рассмотрим пример, приводящий к понятию производной. «Наблюдатель, цель которого изучить закон перемещения движущегося по небосклону искусственного спутника Земли, в распоряжении имеет прибор, измеряющий время и пройденное спутником расстояние. Но небосклон частично закрыт облаками и линией горизонта. Вследствие этого возможность наблюдения существует только на отдельных, ограниченных участках траектории движения спутника. Наблюдатель не может полностью определить функцию, которая представляет собой путь $s = f(t)$, пройденный спутником. Данную функцию будем рассматривать как функцию времени t. Чтобы распространить полученные сведения на участки траектории, которые являются недоступными наблюдателю, необходимо знать функцию пути $s(t)$ и функцию скорости перемещения $v(t)$» [18, с.130].

Средняя скорость перемещения – величина, изменяемая отношением пройденного расстояния к промежутку времени, в течение которого пройдено расстояние [18]:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}. \qquad (1.1)$$

Значение средней скорости зависит от значений времени t: если $\triangle t$ имеет меньшее значение, то значение средней скорости выражает скорость движения точки в данный момент времени t [13].

Скорость движения точки в данный момент времени (или мгновенная скорость) выражается следующей формулой:

$$v(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}, \tag{1.1}$$

т.е. значение скорости равно пределу отношения (1.1), при промежутке времени, стремящемся к нулю.

Наблюдатель выяснил, что при первом приближении средняя скорость движения спутника величина постоянная. Используя формулу (1.1), получаем:

$$s(t_1) = s(t_0) + v_{\text{ср}}(t - t_0),$$

непосредственные наблюдения t_0, $s(t_0), v_{\text{ср}}$ предоставляют возможность вычислений местоположения спутника в любой промежуток времени $t = t_1$.

Скорость $v(t)$ – функция времени t, она является функцией, производной от функции пути $s(t)$. Данная функция зависит от $s(t)$ и полностью определяется $s(t)$. В этом заключается физический смысл производной.

Определение: «пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in R$ и пусть x – произвольная точка этой окрестности. Если отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0 или при $x = x_0$ и обозначается $f'(x_0)$ » [7, с.270]:

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}.$$

Определение производной предполагает следующие утверждения»[7]:

1. Функция может иметь производную в точке x_0 в том случае, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку.

2. Необходимое условие существования производной функции в данной точке – непрерывность функции в этой точке.

3. Вычисление производной функции $f(x)$ называется дифференцированием данной функции.

4. Для производной функции $y = f(x)$ существуют определенные правила дифференцирования:

а) фиксируем значение аргумента x и находим $f(x)$;

б) даем аргументу x приращение $\triangle x$ и находим $f(x + \triangle x)$;

в) находим приращение функции $\triangle f = f(x + \triangle x) - f(x)$;

г) делим приращение функции $\triangle f$ на приращение аргумента $\triangle x$:

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x};$$

д) находим предел отношения при $\triangle x \to 0$:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x).$$

5. Производная постоянной функции равна нулю: с′ = 0, $c = const.$

6. Производная функции $y = x$ равна 1: $x' = 1$.

Раскроем понятие геометрического смысла производной функции в определенной точке. Для этого решим задачу построения касательной к кривой в данной точке [2]. Пусть $y = f(x)$ уравнение кривой (рис.1). Необходимо построить касательную к данной кривой в точке $M(x_1;\ y_1)$. Чтобы решить задачу, необходимо определить угол касания φ, который образует касательная и ось абсцисс.

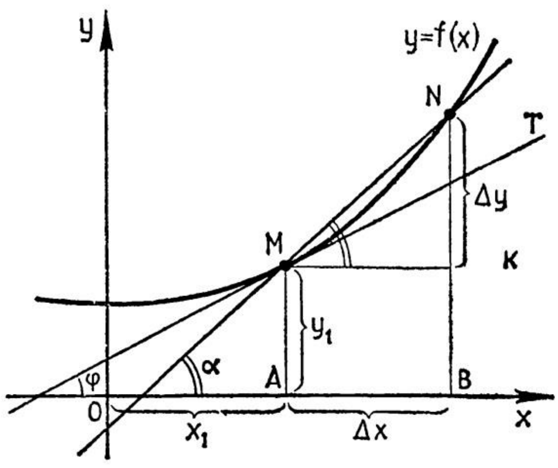


Рис. 1.1.1 – График касательной к кривой

Отметим на кривой точку $N(x_2; y_2)$, которая расположена рядом с точкой M. Секущая MN образует с осью абсцисс угол α. Проведем $MK \parallel OA$

и получим прямоугольный треугольник MKN. Угол NMK равен углу α. Получим равенство: $tg\ \alpha = \frac{KN}{MK} = \frac{BN-BK}{AB} = \frac{BN-BK}{OB-OA} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

По мере приближения по кривой точки N к точке M, секущая NM поворачивается вокруг точки M и приближается к некоторой прямой MT. Данная прямая является (по определению) касательной к кривой в точке M. Угол α при этом стремится к углу φ. Все условия выполняются при разности $x_2 - x_1 \to 0$, т. е. x_2 стремится к x_1.

$$tg\ \varphi = \lim tg\ \alpha = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Рассмотрим основные правила дифференцирования и выведем формулу суммы двух функций.

Теорема 1. «Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'»[13, \text{с.} 142].$$

Доказательство. Приращение $\triangle x$ является аргументом для x. Функции $u = u\ (x), v = v\ (x), y = y\ (x)$ имеют, соответственно, приращения $\triangle u$, $\triangle v$, $\triangle y$. Связь функций выражается в следующем равенстве:

$$\triangle y = \triangle u \pm \triangle v,$$

так как

$$\triangle y = y\ (x + \triangle x) - y\ (x) = [u\ (x + \triangle x) \pm v\ (x + \triangle x)] - [u\ (x) \pm \pm v\ (x)] = [u\ (x + \triangle x) - u\ (x)] \pm [v\ (x + \triangle x)\ - v\ (x)] = \triangle u \pm \triangle v.$$

Далее получается

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} \pm \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

при переходе к приделу воспользуемся теоремой о пределе суммы [18, с.107] и получим равенство

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} \pm \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x}.$$

Теорема 2. «Производная произведения двух функций равна: $(u \cdot v)' =$ $= u' \cdot v + u \cdot v'$»[13, с.142].

Доказательство[12]. Придадим переменной x приращение $\triangle x$. Тогда приращение u будет $\triangle u$, а v имеет приращение $\triangle v$. Получаем следующее равенство

$$(u \cdot v)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle (u \cdot v)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(u + \triangle u)(v + \triangle v) - u \cdot v}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} \triangle v = u \cdot v' + u' \cdot v.$$

Теорема 3. «Производная частного (дроби) $y = \frac{u}{v}$ равна дроби, у которой знаменатель есть v^2, а числитель равен разности между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя:[18, с.144]»

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Доказательство [14]. $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\frac{u(x + \triangle x)}{v(x + \triangle x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\frac{u(x) + \triangle u}{v(x) + \triangle v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \triangle u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \triangle v}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{v \cdot \triangle u - u \cdot \triangle v}{\triangle x \cdot (v^2 + v \cdot \triangle v)} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} - u \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}}{v^2 + v \cdot \triangle v}$$

$$= \frac{v \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} - u \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x}}{v^2 + v \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \triangle v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Вычисление производной сложной функции: рассмотрим y как функцию от $u : y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, получили сложную функцию $y = f(\varphi(x))$, u - промежуточный аргумент, x – независимый аргумент.

Производная сложной функции – произведение ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$[6].

Из условия $\lim\limits_{\triangle u \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle u} = y'_u$. Используя теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, получаем

$$\triangle y = y'_u \cdot \triangle u + \alpha \cdot \triangle u, \text{где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta u \to 0. \qquad (1.2)$$

Производная функции $u = \varphi(x)$в точке x выглядит следующим образом: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, а $\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x$, где $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Подставим $\Delta\, u$ в (1.2) и получим равенство:

$$\Delta y = y'_u\big(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x\big) + \alpha\big(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x\big),$$

т.е. $\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$

Разделим последнее равенство на Δx, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и получится необходимое равенство $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производные основных элементарных функций запишем в виде таблице (Рис. 1.1.2) [8].

$(C)' = 0$, где C — постоянная величина (число);

$(x)' = 1;$

$(kx + b)' = k;$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, где α — произвольное число;

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2};$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(e^x)' = e^x;$

$(a^x)' = a^x \ln a;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2};$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

Рис. 1.1.2 Таблица производных

1.2 История введения производных в курс математики в Российских школах

Еще в начале XX века насчитывалось большое количество сторонников ввода высшей математики в среднюю школу. Они приводили достаточно убедительные аргументы, в связи с чем, были введены элементы математического анализа в программы некоторых типов средних учебных заведений России. Обзор особенностей этих программ представлен в работах О. А. Саввиной [16].

Во многих учебных заведениях, например, в кадетском корпусе основное внимание было уделено идейной составляющей. Основная цель программ – ясное и отчетливое понимание обучающимися основных понятий анализа: предел, бесконечно малая величина, непрерывность и производная. В целом, такой подход к изучению высшей математики дал положительные результаты. Исключение составляли ситуации, когда преподаватели не прилагали особых усилий при изучении новых тем и, важно помнить, что это было нововведение. Учебники постоянно обновляли, пробовали добавлять одни темы, при этом исключая другие. Было убрано рассмотрение определения понятия «предел» и при этом выделили в отдельную тему «Производная сложной функции», хотя ранее ограничивались изучением простых функций.

Так как программа в кадетском корпусе была менее емкой, чем в реальном училище, то, составляя программы анализа бесконечно малых, вероятнее всего, во внимание был взят опыт реальных училищ. Успешно внедрялся анализ бесконечно малых в кадетских корпусах и к 1911 году уже были созданы учебники по высшей математике для средней школы. 1912 год ознаменован созданием первого методического руководства по математическому анализу для преподавателей.

Коммерческие училища обучение математике осуществляли по разным программам. Особенности учебной литературы для средних школ [5]:

1) Авторы излагают разделы анализа не с полной строгостью.

2) У многих составителей учебных пособий просматривается использование наглядных средств, которые широко применяются и сейчас.

3) Авторы доступно излагали материал. Поэтому, наверное, многие в своих учебниках вводя понятие предела, используют символ предела из латинских букв «lim», а затем большая часть учителей употребляет сокращение русского слова - «пред.».

4) Понятие функции используется как в курсе анализа бесконечно малых, так и в курсе аналитической геометрии. Кроме того, в отличие от современных учебников, понятие функции включает в себя как случай однозначной, так и многозначной функции. В учебниках рассматриваются различные функции: алгебраические и трансцендентные, явные и неявные, обратные.

5) В учебниках того времени прекрасно изложена тема «Производная». Можно подчеркнуть много полезных методических находок.

Во время формирования понятия производной на уроках возникает трудность, так как производную можно представить в одном случае как число, а в другом - как функцию (при нахождении производной функции вида у $= cos2x, y = x^2$ и других).

В XX веке экзаменационная программа включала в себя задачи из анализа. В восьмом классе пробно вводились дифференциальное и интегральное исчисление: о производной, пределе, включены были теорема Ролля, теорема Лагранжа, приложение производной, материал по разложению в ряд показательной функции, тригонометрических функций и многие другие.

Середина XX века это период споров и разногласий. Были сторонники, которые утверждали, что введение в школьную программу математического анализа принесет свои плоды, были и те, кто не поддерживал эту идею. В дальнейшем, во время проведения реформы в семидесятые годы решено было повысить теоретический уровень в математическом образовании, и начала математического анализа заняли ведущую роль в обучении старшеклассников. Были устранены некоторые излишества, которые не соответствовали возрастным особенностям учащихся средней школы.

Методисты убедительно доказали, что элементы высшей математики в современной средней школе необходимы, кроме того, очень серьезно обсудили проблему введения понятий и фактов высшей математики в школьные программы. Еще в начале XX века наметилось несколько тенденций в построении курса высшей математики для средней школы. Согласно одной точке зрения, элементы высшей математики (математического анализа, аналитической геометрии) должны войти в среднюю школу самостоятельным блоком, в виде некоторой надстройки к основному курсу (программы реальных училищ, кадетских корпусов, учебники для средних учебных заведений начала XX века, современный учебник авторского коллектива). Сторонники другого подхода элементы математического анализа рассматривают как базовую составляющую. Согласно этому суждению, элементы математического анализа должны раствориться в курсе «Алгебра и начала анализа».

Существовало более 6 различных подходов конструирования программы по введению высшей математики в среднюю школу: автономно-линейный; автономно-концентрический курс; линейный модуль в курсе «Алгебра и начала анализа»; концентрический модуль в курсе «Алгебра и начала анализа»; концентрический фузионизм с курсом «Алгебра и начала анализа»; линейный фузионизм и другие. Основные концепции используются до настоящего времени, а некоторые не вошли в программы, потому как были недостаточно разработаны.

В связи с внедрением профильной дифференциации и эти концепции могут обратить на себя внимание. В нынешнее время каждый подход зависит от различных факторов: профиля старшей ступени; количества времени, выделенного на данный курс; выбором автора учебника и т. д. Можно выделить 8 периодов в становлении и развитии обучения началам высшей математики средней школы в нашей стране. Во время шестого периода были опробованы начала математического анализа школьного курса, этому способствовали факультативы и математические кружки, в массовой средней школе постепенно вводились элементы дифференциального и интегрального исчислений, велись поиски более рациональных конструкций модели (объем, содержание, порядок изложения материала).

Во время седьмого периода (80-е годы.) стабилизированы вопросы объема изучаемого материала элементов математического анализа на уроках математики в средней школе; происходит массовое включение элементов дифференциальных и интегральных исчислений в средней школе, вводится стабильный учебник «Алгебра и начала анализа». Несмотря на противоречия и реформы в математическом образовании в начале 80-х гг., элементы высшей математики, уже изучаемые в средней школе, удается сохранить. Кроме того, в этот период созданы современные методики в изучении школьного курса математического анализа.

В восьмом периоде (90-е годы и по сегодняшний день) - ведется работа по оптимизации объемов и конструкций элементов высшей математики в программе средней школы в условиях построения учебных планов старших классов в целях учета индивидуальных склонностей на группы А и В. Наблюдается ослабление в изучении элементов математического анализа.

Рассматривая данную модель исторических фактов поэтапно, в исследованиях, кроме закономерности функционального назначения в математическом образовании разных социально-экономических условий, учитывались, в основном, значения, которые придавались началам высшей математики на этом этапе: реформация роли и места начал анализа в школьной программе дала возможность установить хронологию данного периода.

Находки преподавателей в XVIII - начале XX веков в методике по обучению элементам высшей математики в основном создали и обусловили дальнейшие поиски и реализацию, в т. ч. и реализованные авторами образовательных программ следующих поколений. Оптимизация учебного предмета, включающего начала анализа в средней школе, до сих пор продолжается.

Таким образом, классификация смысловых подходов позволяет отобрать не только действующие (дореволюционная школа, советское время, современные учебники), но и проблемные подходы. Фундаментом классификации являются следующие признаки: основные черты (самостоятельность или умение смотреть на задачу с разных сторон) и принципы построений (концентрические или линейные).

Положив в основу эмпирико-реалистический подход, смысл которого заключается в классификации результатов из реальной практики в различных учебных заведениях, особо рассматривался анализ разнообразных экспериментальных работ, результаты самостоятельных и контрольных работ, математические тесты; успехи учеников из классных журналов, оценки аттестатов и свидетельств; отчеты и доклады педагогов и контролирующих организаций.

1.3 Применение производной к исследованию функций в современных учебниках

В настоящее время школы делят по направлению подготовки: базовые, профильные. Для профильной школы можно выделить учебники А. Г. Мордковича [10] и С. М. Никольского [11].

В первом учебном пособии тема «Производная» рассматривается во II полугодии 10 класса. Она состоит из 10 разделов, включающих изучение числовой последовательности, предела функций, определения и вычисления производной, дифференцирования сложной и обратной функций, уравнения касательной, исследование на монотонность и экстремумы, построение графиков, нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Во втором учебнике данная тема изучается в I полугодии 11 класса как обобщение и систематизация свойств различных функций (тригонометрических, логарифмических, степенных и др.). Тема

«Производные» включает в себя 12 обязательных разделов, таких же, как и у первого автора и несколько дополнительных: теоремы о среднем, выпуклость графика функций, асимптоты, дробно-линейная функция, формула и ряд Тейлора, замена переменных, интегрирование по частям, приближенное вычисление определенного интеграла [11].

В учебнике А. Г. Мордковича подробно рассматриваются примеры исследования функции на монотонность с доказательством теорем, необходимые и достаточные условия экстремума, а так же предложен алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$, включающий следующие пункты:

1) найти производную функции $f'(x)$;
2) найти стационарные и критические точки;
3) начертить числовую прямую с отмеченными стационарными и критическими точками и определить знак производной на получившихся промежутках;
4) опираясь на ранее изученные теоремы, сделать вывод о монотонности функции и о точках экстремума.

В задачнике данный автор приводит большое количество упражнений для усвоения полученного материала, что дает возможности учителю, в зависимости от уровня знаний учащихся комбинировать задания и давать дополнительные индивидуальные номера отдельным обучающимся.

С. М. Никольский предлагает начинать исследование функций постепенно, начиная с точек максимума и минимума и заканчивая построением графиков, но для отработки каждой темы дается небольшое количество заданий, что не дает учащимся подробно разобраться в данной теме. При этом в конце раздела автор не приводит конкретного алгоритма для исследования функций.

Сравнительный анализ позволил сделать вывод, что учебник А. Г. Мордковича предлагает теоретический материал на доступном уровне, обучающиеся самостоятельно могут прочитать материал, разобрать примеры, предложенные в учебники и на основании полученных сведений решить необходимое им количество номеров из задачника. Задания расположены по возрастанию сложности, в связи с этим учитель может разграничивать домашнюю работу с учетом желаемой оценки и давать дополнительные задания наиболее успешным по математике школьникам.

Среди учебников для изучения математики на базовом уровне можно выделить учебники А. Н. Колмогорова [4] и А. Г. Мерзляка [9]. Оба автора вводят понятие производной во II полугодии 10 класса. А. Н. Колмогоров вводит понятие производной после изучения темы «Приращение функции», А. Г. Мерзляк считает необходимым вначале изучить понятие придела, потом приращения и мгновенной скорости.

В первом учебном пособии понятие производной рассматривается как разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при x стремящемся к нулю. Объем теоретического материала превышает количество заданий по данной теме. Приведен достаточно подробный план для проведения исследования функции, включающий семь пунктов, рассмотрены примеры с таблицей и методическими указаниями. Базовый курс предполагает для изучения темы меньшее количество часов, чем в профильном, в связи с этим в данных учебных пособиях приведено небольшое число упражнений, которых недостаточно для подробного изучения данного раздела.

Во втором учебнике автор рассматривает производную как предел приращения функции к соответствующему приращению аргумента. Для вычисления производной прописан определенный алгоритм поиска, состоящий из трех пунктов:

1) придав в точке x_0 аргументу приращение Δx, найти соответствующее приращение Δf функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

2) найти отношение $\frac{\Delta f}{\Delta \mathrm{x}}$;

3) выяснить, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Изложение теоретического материала в учебнике А. Г. Мерзляка [9] доступно для обучающихся, а практические задания представлены несколькими уровнями сложности.

Сравнивая учебники А. Н. Колмогорова и А. Г. Мерзляка, отметим, что они обеспечивают базовую подготовку по разделу «Производная». Работая по обоим учебникам, необходимо спланировать работу так, чтобы найти возможность для увеличения практических заданий и закрепления материала, для формирования прочных знаний, умений и навыков.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

2.1 Анализ методических ресурсов

Подготовка к Единому государственному экзамену требует знаний не только школьной программы, но и дополнительных тем с углубленным материалом. В связи с этим появилась необходимость для учителя и обучающихся в знании методических ресурсов, которые можно разделить на книжные и электронные.

Рассмотрим более подробно книжные ресурсы:

1. Рабочие тетради с 1 по 19 задания профильного уровня под редакцией И. В. Ященко, разработанные с другими известными математиками [19,20].

В данных тетрадях задания каждого типа разделяют на блоки с подробных разбором типовых заданий и заданиями для последующего решения. Каждая книга оканчивается диагностической работой, в которую включены все типовые упражнения из рабочей тетради.

2. Книга 3300 задач с ответами по математике. Задания 1-12 под редакцией И. В. Ященко [22]. В данном учебном пособии задания сгруппированы по разделам: задачи с прикладным содержанием, алгебра, начала анализа и геометрия. Каждый раздел предполагает для решения большое количество заданий, которые представлены с ответами без решений.

3. Книга А. В. Семенова из серии пособий «Готовимся к итоговой аттестации» [17]. Ресурс содержит типовые задания с 1 по 19 и 20 тренировочных вариантов, составленных из подобных упражнений. Приложение к учебному пособию состоит из подробного решения заданий с развернутым ответом 1, 12 и 16 вариантов.

4. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты 36 вариантов под редакцией И. В. Ященко [23]. Учебное пособие удобно тем, что автор расположил по два подобных

варианта, т.е. первый можно разобрать в классе с учителем, а второй подходит для домашнего задания. В конце книги разобраны несколько вариантов заданий с развернутым ответом.

5. Серия учебных пособий ВМК МГУ школе созданная авторским коллективом: Н. Д. Золотарева, Ю. А. Попов, В. В Сазонов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов [1,3]. Книги для углубленного изучения, рассматриваются сложные задания, которые под силу не каждому обучающемуся. Данные задания включают во вступительных экзаменах в МГУ.

Рассмотрим вторую группу ресурсов, которая называется электронные:

1. Открытый банк заданий ЕГЭ [26]. Ресурс включает в себя демонстрационные варианты прошлых лет, спецификаторы и кодификаторы, задания, из которых будут сформированы варианты на экзамене. Все задания сгруппированы по темам.

2. Сайт Дмитрия Гущина «Решу ЕГЭ» [28]. Ресурс включает в себя задания с подробным решением и ответами, позволяет обучающимся решать варианты в режиме online. Для учителя дает возможность создавать самостоятельно новые варианты из определенного банка заданий. На сайте существует функция создания группы для обучения, где необходимые задания заранее прикреплены и идет автоматическая проверка решений.

3. Сайт Александра Ларина [25]. Позволяет решать варианты, созданные преподавателем. Выделены некоторые документы с типовыми заданиями. Автор публикует более сложные задания по сравнению с другими сайтами, олимпиадные задания с решениями из московских вузов. Ресурс позволяет не только решать задания, но и обсуждать сложности с некоторыми задания на форуме.

4. Ресурс «Яндекс ЕГЭ» [30]. Данный сервис позволяет каждому пользователю пройти тестирование на знание математики, предоставляет различные демонстрационные варианты для решения. Все задания специально разработаны для Яндекса в Московском центре непрерывного

математического образования (МЦНМО) в соответствии с обновленными требованиями Министерства образования Российской Федерации.

5. Сайт Елены Михайловны Савченко [29]. Ресурс представляет собой копилку учебных материалов для обучающихся и педагогов. Здесь можно найти презентации по математике, компьютерные тесты, презентации для классных часов, занимательные задачи для школьников, подготовка к ЕГЭ.

Рассмотренные ресурсы наряду с изученным учебным материалом под руководством учителя помогут обучающимся успешно подготовиться к экзаменам.

2.2 Задания с производной в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ

Варианты ЕГЭ профильного уровня разделяют на две части. Первая часть включает задания базового уровня сложности (1-8) по темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9-12) и семь с развернутым ответом (13-19) [19].

С темой «Производная» связаны задания №7 и №12. Задания из первой части ориентированы на знание обучающимися физического и геометрического смысла производной, владение графиками. Рассмотрим в качестве примеров типовые задания по физическому смыслу производной, а именно движению материальной точки по определенному закону. Необходимо найти скорость движения данной точки в определенный период времени.

1.1 Закон прямолинейного движения описан уравнением вида: $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ вычислим скорость, если $t = 9$ с.

Решение: мгновенная скорость точки в момент времени t_0 при прямолинейном движении по закону $x(t)$ равна значению производной функции при $t = t_0$. Вычислим производную и подставим значение времени t = 9 с:

$$\mathcal{V}(x) = 2 \cdot 6 \cdot 9 - 48 = 108 - 48 = 60.$$

1.2 Закон прямолинейного движения описан уравнением вида: $x(t) = t^2 - 13t + 23$, необходимо рассчитать в какой момент времени скорость равна 3 м/с?

Решение: как и в предыдущей задаче, необходимо найти производную данной функции, далее приравнять полученное выражение к значению скорости, равной 3 м/с, решить уравнение и найди значение времени t_0.

$$\begin{cases} V(x) = x'(t) = 2 \cdot t - 13. \\ V(x) = 3. \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} V(x) = 3 \\ 2 \cdot t - 13 = 3 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} V(x) = 3 \\ t = 8. \end{cases}$$

Часть заданий №7 в КИМ посвящена геометрическому смыслу производной. Например, по графику функции и касательной необходимо найти значение производной в точке, абсцисса x_0 которой отмечена на графике.

Задание 2.1

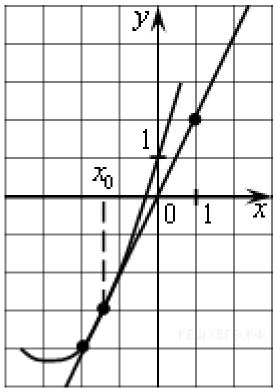


Рис. 2.2.1 к заданию 2.1

Решение: значение производной функции приравнивается значению tgα или угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в данной точке. Выберем удобные точки A и B, принадлежащие касательной, и достроим треугольник.

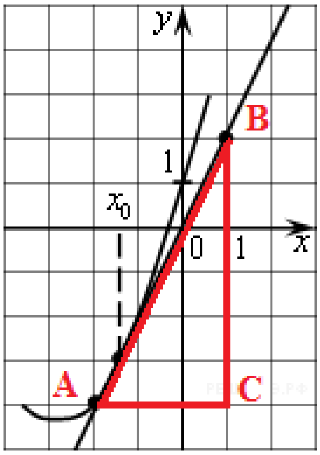


Рис. 2.2.2 решение задания 2.1

$$tg\ \alpha = tg\ \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{3} = 2.$$

Значение производной функции приравнивается значению $tg\alpha$ или угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику. Ответ: 2.

Задание 2.2.

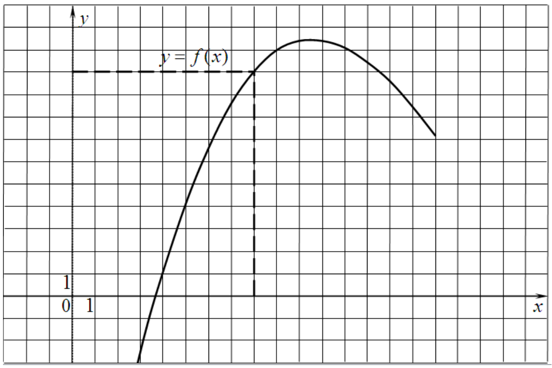


Рис. 2.2.3 к заданию 2.2

Решение: так как касательная проходит через начало координат, уравнение имеет вид $y = kx + b$. Вторая точка – А(8;10). Вычислим значение коэффициента k, $k = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25$. В связи с тем, что $f'(x) = tg\ \alpha = k = f(8)$, ответ 1,25.

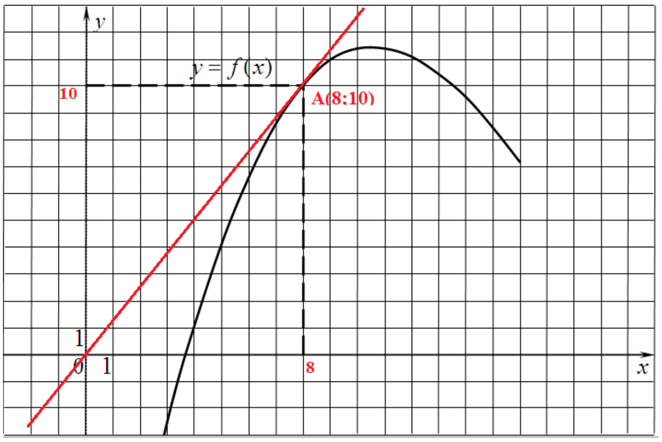


Рис. 2.2.4 решение задания 2.2

В других заданиях требуется по графику функции выбрать точки, в которых производная имеет определенный знак

Задание 3.1 $f'(x) > 0$

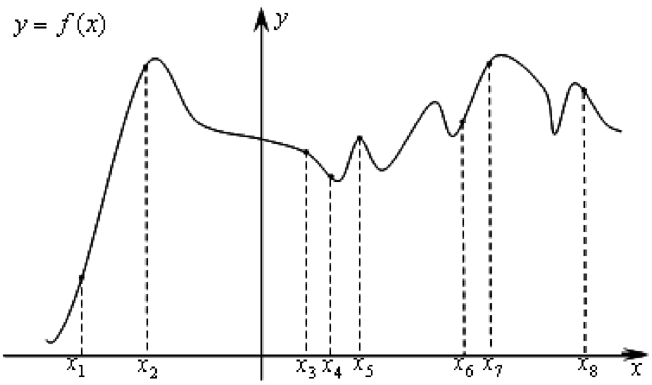


Рис. 2.2.5 к заданию 3.1

Решение: рассмотрим график функции, производная положительна на промежутках возрастания, отметим точки и посчитаем их количество. Запишем ответ: 4.

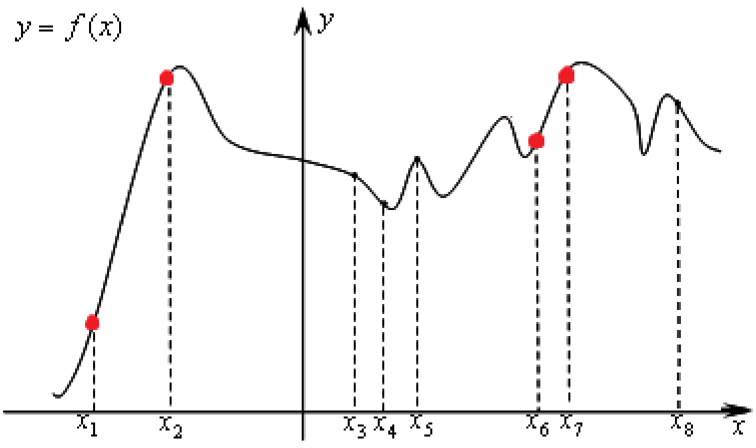


Рис. 2.2.6 к решению задания 3.1

Задание 3.2 $f'(x) < 0$

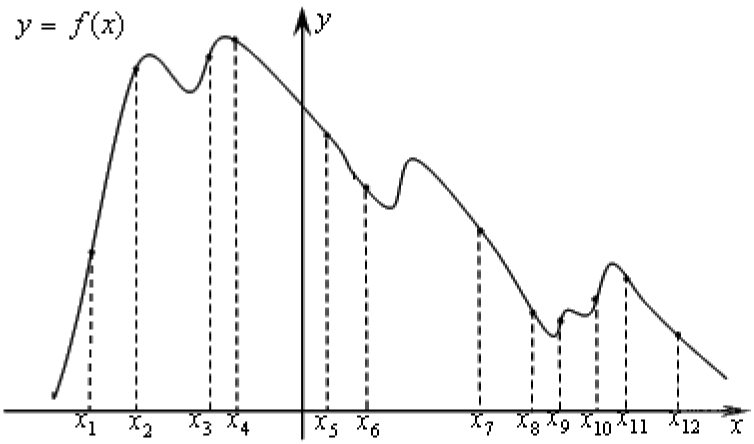


Рис. 2.2.7 к заданию 3.2

Решение: производная отрицательна на тех интервалах, где функция убывает. Отметим и посчитаем количество точек. Запишем ответ: 7

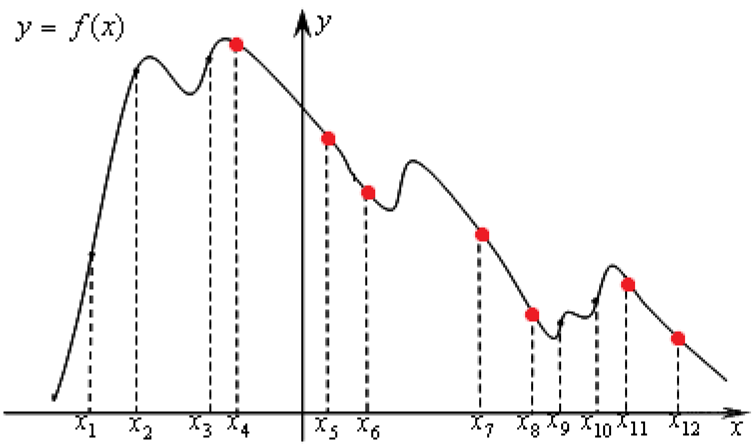


Рис. 2.2.8 к решению задания 3.2

Следующий тип заданий на нахождение абсциссы точки касания, если дано уравнение прямой параллельной касательной к определенному графику функции.

Задания 4.1 Дано уравнение прямой $y = 7x - 5$ и графика функции $y = x^2 + 6x - 8$.

Решение: прямая параллельна касательной к графику в том случае, если в какой-то точке x_0, угловой коэффициент (в данной задаче 7) равен значению производной функции в данной точке. Найдем производную $y = 2x + 6$. Получаем уравнение $2x + 6 = 7$. Следовательно, $x = 0{,}5$.

Задание 4.2 Уравнение прямой $y = -4x - 11$ и графика функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$.

Решение: если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент должен быть равен значению производной функции в точке касания, откуда имеем $3x^2 + 14x + 7 = -4$, то есть $3x^2 + 14x + 11 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $-3\frac{2}{3}$ и -1. Таким образом, есть две точки, в которых касательная к графику функции имеет угловой коэффициент, равный -4. Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y = -4x - 11$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной. Значение функции в точке $-3\frac{2}{3}$ равно $13\frac{4}{27}$, а значение в точке -1 равно -7. Заметим, что точка с координатами $(-3\frac{2}{3};\ 13\frac{4}{27})$ не удовлетворяет уравнению касательной. А вот точка $(-1; -7)$ уравнению касательной удовлетворяет. Значит, искомая абсцисса точки касания равна -1.

Задание 4.3 Уравнение прямой $y = 3x + 1$ и графика функции $ax^2 + 2x + 3$. Вычислите коэффициент a.

Решение: угловой коэффициент равен производной функции в точке касания, исходя из этих данных, составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 2ax + 2 = 3 \\ ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1 \end{cases} <=> \begin{cases} 2ax = 1 \\ ax^2 - x + 2 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 4 \\ a = 0{,}125 \end{cases}$$

Рассмотрим задания, в которых дан график производной на определенном интервале. Необходимо найти в какой точке заданного отрезка функция принимает наибольшее или наименьшее значение.

Задание 5.1 интервал (-6;5), отрезок [-1;3], $f(x)$ наибольшее

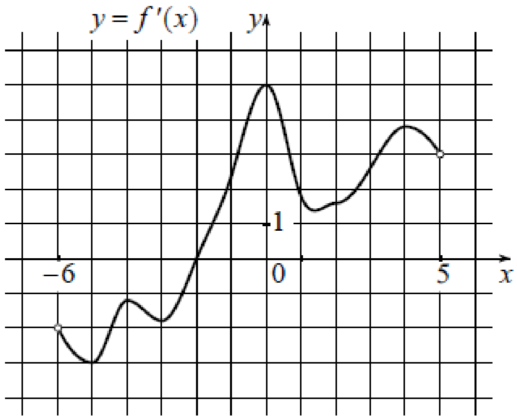


Рис. 2.2.9 к заданию 5.1

Решение: отметим на графике заданный отрезок. Если производная функции выше оси ox, то ее значения положительны. Функция на заданном отрезке возрастает, и, следовательно, наибольшее значение будет принимать в правой границе точке 3.

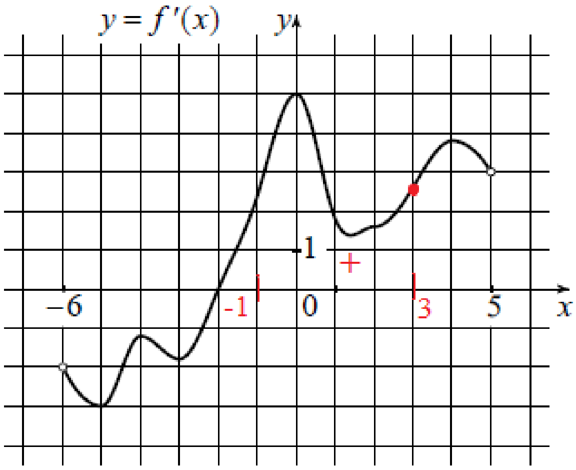


Рис. 2.2.10 к решению задания 5.1

Задание 5.2 интервал (-8;4), отрезок [-7;-3], $f(x)$ наименьшее

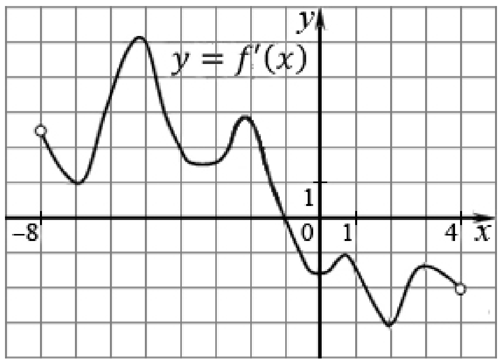


Рис. 2.2.11 к заданию 5.2

Решение: в заданном отрезке производная выше оси ox, следовательно, она принимает положительные значения. Поэтому функция на данном отрезке возрастает и наименьшее значение принимает в левой границе или в точке -7.

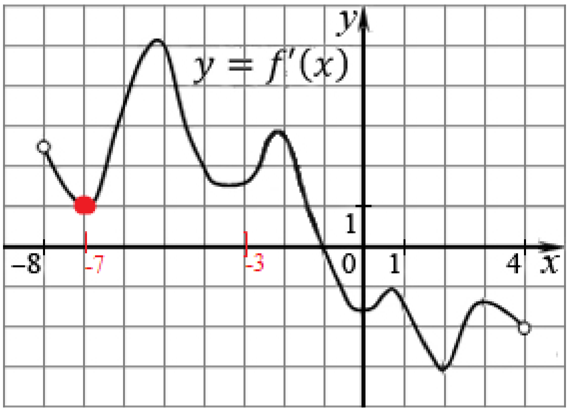


Рис. 2.2.12 к решению задания 5.2

Задание №12 из КИМов профильного уровня относится ко второй части. В этих заданиях требуется найти либо точки экстремума функций, заданных аналитически, либо наибольшее или наименьшее значение функций на отрезке или в области определения функции.

Найдите точку максимума функции:

Задание 6.1 $y = x^3 - 75x + 23$

Решение:

1) найдем производную функции: $y' = 3\,x^2 - 75$.

2) приравняем значение производной к нулю: $3\,x^2 - 75 = 0$ <=> $\left[\begin{matrix} x=-5 \\ x=5 \end{matrix}\right.$

3) определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

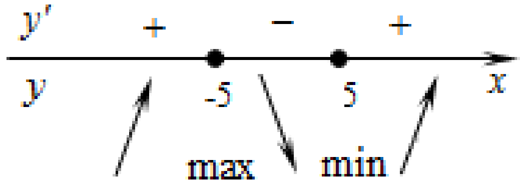


Рис. 2.2.13 к решению задания 6.1

Ответ: -5

Задание 6.2 $y = -\frac{x^2+36}{x}$

Решение:

1) найдем производную функции: $y' = -\frac{2x\cdot x-1\cdot(x^2+36)}{x^2} = -\frac{x^2-36}{x^2}$.

2) приравняем значение производной к нулю: $-\frac{x^2-36}{x^2} = 0 <=> \left[\begin{matrix} x=-6 \\ x=6 \end{matrix}\right.$

3) определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

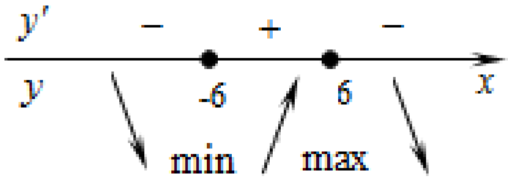


Рис. 2.2.14 к решению задания 6.2

Ответ: 6

Задание 6.3 $y = 6 + 15x - 4x\sqrt{x}$

Решение:

1) найдем производную функции: $y' = 15 - \left(4\,x^{\frac{3}{2}}\right)' = 15 - 4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 15 - 6\sqrt{x}$.

2) приравняем значение производной к нулю: $15 - 6\sqrt{x} = 0$ $<=>$ $6\sqrt{x} = 15$ $<=>$ $\sqrt{x} = \frac{5}{2}$ $<=> x = \frac{25}{4} <=> x = 6{,}25$

3) определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

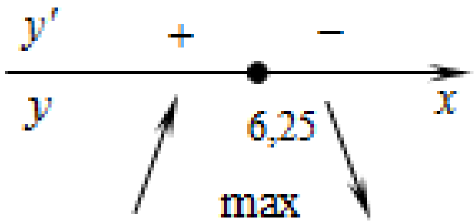


Рис. 2.2.15 к решению задания 6.3

Ответ: 6,25

Задание 6.4 $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + 19$

Решение:

1) найдем производную функции: $y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} + 8 = -\sqrt{x} + 8.$

2) приравняем значение производной к нулю: $-\sqrt{x} + 8 = 0 <=> \sqrt{x} = 8 <=> \ x = 64$

3) определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

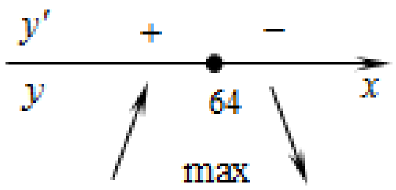


Рис. 2.2.16 к решению задания 6.4

Ответ: 64

Задание 6.5 $y = \sqrt{4 - 4x - x^2} = (4 - 4x - x^2)^{\frac{1}{2}}$

Решение:

1) найдем производную функции: $y' = \frac{1}{2}(4 - 4x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - 4x - x^2)' = \frac{1}{2}(4 - 4x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 - 2x) = -\frac{2+x}{\sqrt{4-4x-x^2}}$

2) приравняем значение производной к нулю: $-\frac{2+x}{\sqrt{4-4x-x^2}} = 0 <=>$ $2 + x = 0 \ <=> x = -2$

3) определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

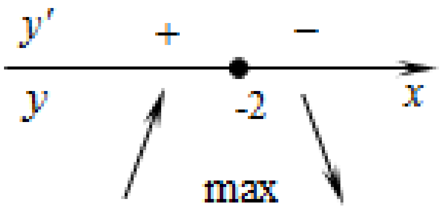


Рис. 2.2.17 к решению задания 6.5

Ответ: -2

Задание 6.6 $y = (24 - x)e^{x+24}$

Решение:

1) найдем производную функции: $y' = -1 \cdot e^{x+24} + (24 - x) \cdot e^{x+24} \cdot 1 = (24 - x)e^{x+24} - e^{x+24} = e^{x+24}(23 - x)$

2) приравняем значение производной к нулю: $e^{x+24}(23 - x) = 0 <=> \left[\begin{matrix} e^{x+24} \neq 0 \\ 23 - x = 0 \end{matrix}\right. <=> x = 23$

3) определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

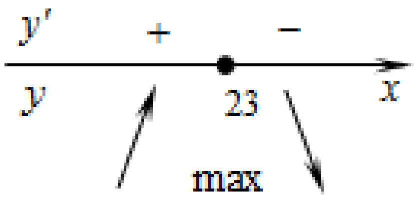


Рис. 2.2.18 к решению задания 6.6

Ответ: 23.

Найдите точку минимума:

Задание 7.1 $y = x^3 - 192x + 14$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 192$

2) Приравняем значение производной к нулю: $3x^2 - 192 = 0 <=> x^2 = 64 <=> \left[\begin{matrix} x = -8 \\ x = 8 \end{matrix}\right.$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

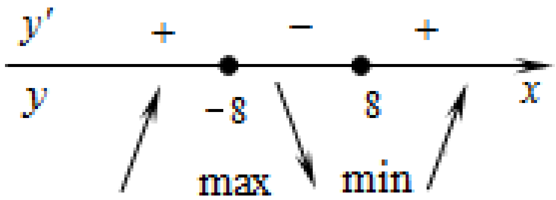


Рис. 2.2.19 к решению задания 7.1

Ответ: 8

Задание 7.2 $y = (x + 9)e^{x-9}$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 1 \cdot e^{x-9} + (x+9) \cdot e^{x-9} \cdot 1 = e^{x-9}(x+10)$

2) Приравняем значение производной к нулю: $\left[\begin{matrix} e^{x-9} \neq 0 \\ x+10=0 \end{matrix}\right. <=> \ x = -10$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

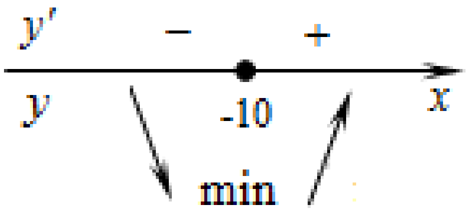


Рис. 2.2.20 к решению задания 7.2

Ответ: -10.

Задание 7.3 $y = (x-3)^2 \cdot e^{x-7}$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 2(x-3) \cdot e^{x-7} + (x-3)^2 \cdot e^{x-7} \cdot 1 = e^{x-7} \cdot (2x - 6 + x^2 - 6x + 9) = e^{x-7} \cdot (x^2 - 4x + 3)$

2) Приравняем значение производной к нулю: $\left[\begin{matrix} e^{x-7} \neq 0 \\ x^2-4x+3=0 \end{matrix}\right. <=> \ \left[\begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix}\right.$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

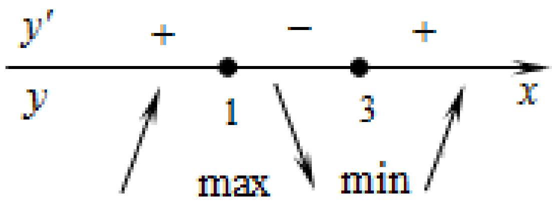


Рис. 2.2.21 к решению 7.3

Ответ: 3.

Задание 7.4 $y = 10x - \ln(x+11) + 3$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 10 - \frac{1}{x+11}$

2) Приравняем значение производной к нулю: $10 - \frac{1}{x+11} = 0 <=> 10(x + 11) = 1 <=> x = -10,9$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

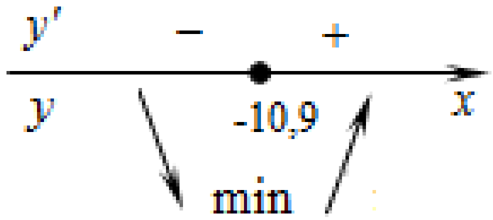


Рис. 2.2.22 к заданию 7.4

Ответ: -10,9.

Задание 7.5 $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = \frac{1}{(x^2-6x+12)\cdot ln5} \cdot (2x - 6)$

2) Приравняем значение производной к нулю: $\left[\begin{matrix}(x^2-6x+12)\cdot ln5 \neq 0 \\ 2x-6=0\end{matrix}\right. <=> x = 3$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

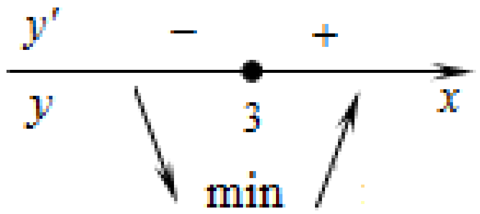


Рис. 2.2.23 к решению задания 7.5

Ответ: 3.

Задание 7.6 $y = (0,5 - x)cosx + sinx$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = -cosx + (0,5 - x)(-sinx) + cosx = sinx(x - 0,5)$

2) Приравняем значение производной к нулю: $\left[\begin{matrix} sinx=0 \\ x-0{,}5=0 \end{matrix}\right. <=> \left[\begin{matrix} x=\pi n, n\in Z \\ x=0{,}5. \end{matrix}\right.$

Заданному интервалу принадлежит только решение второго уравнение, то есть точка 0,5

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

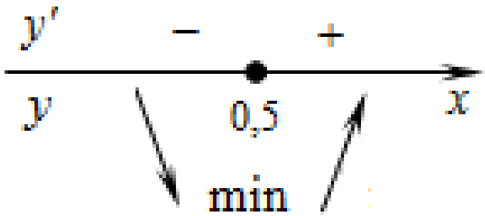


Рис. 2.2.24 к решению задания 7.6

Ответ: 0,5.

Найдите наибольшее значение функции:

Задание 8.1 $y = (x-8)^2(x-9)+1$ на отрезке $[-4;\ 8{,}5]$ [21].

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 2(x-8)(x-9)+(x-8)^2 = 2x^2-18x-16x+144 = 2x^2-34x+144$

2) Приравняем значение производной к нулю: $2x^2-34x+144 = 0 <=>\ x^2-17x+72 = 0\ <=> \left[\begin{matrix} x=8 \\ x=9 \end{matrix}\right.$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

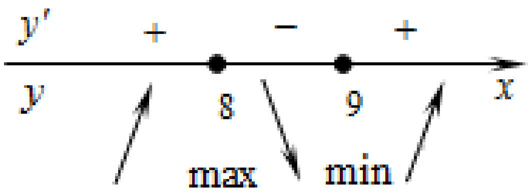


Рис. 2.2.25 к решению задания 8.1

4) Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума

$$y(8) = 1$$

Ответ: 1

Задание 8.2 $f(x) = -x^3+3x^2+9x-29$ на отрезке $[-1;4]$.

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = -3x^2 + 6x + 9$

2) Приравняем значение производной к нулю: $-3x^2 + 6x + 9 = 0 <=>$ $x^2 - 2x - 3 = 0 \ <=> \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

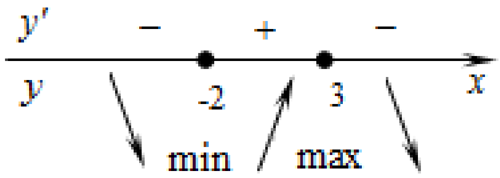


Рис. 2.2.26 к решению задания 8.2

4) Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума $y(3) = -27 + 27 + 27 - 29 = -2$

Ответ: -2

Задание 8.3 $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6x + 13$ на отрезке [4;16]   [23]

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} + 6 = -2\sqrt{x} + 6$

2) Приравняем значение производной к нулю: $-2\sqrt{x} + 6 = 0 <=>$ $\sqrt{x} = 3 \ <=> x = 9$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

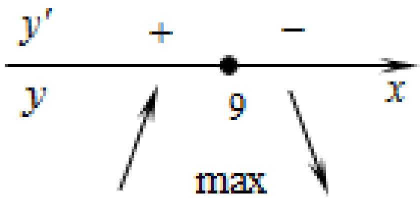


Рис. 2.2.27 к решению задания 8.3

4) Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума $y(9) = -\frac{4}{3} \cdot 9 \cdot 3 + 54 + 13 = -36 + 67 = 31$

Ответ: 31

Задание 8.4 $y = 28\sqrt{2}sinx - 28x + 7\pi + 15$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 28\sqrt{2}cosx - 28$

2) Приравняем значение производной к нулю: $28\sqrt{2}cosx - 28 = 0 <=> cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} <=> \left[\begin{matrix} x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z \\ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z \end{matrix}\right.$

3) Отрезку принадлежит точка $\frac{\pi}{4}$

4)Определим значения функции на границах отрезка и в найденной точке экстремума, в ответ запишем наибольшее значение

$$y(0) = 28\sqrt{2}sin0 + 7\pi + 15 = 7\pi + 15$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 28\sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} - 28\frac{\pi}{4} + 7\pi + 15 = 28 + 15 = 43$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 28\sqrt{2}sin\frac{\pi}{2} - 28\frac{\pi}{2} + 7\pi + 15 = 28\sqrt{2} - 14\pi + 7\pi + 15$$
$$= 28\sqrt{2} - 7\pi + 15$$

Ответ: 43

Задание 8.5 $y = x^2 - 13x + 11lnx + 12$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 2x - 13 + \frac{11}{x} = \frac{2x^2-13x+11}{x}$

2) Приравняем значение производной к нулю: $2x^2 - 13x + 11 = 0 <=> \left[\begin{matrix} x=1 \\ x=5,5 \end{matrix}\right.$

3) Определим знаки производной на полученных интервалах и изобразим на координатной прямой

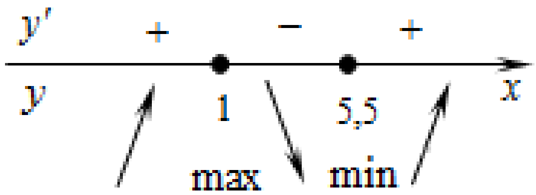


Рис. 2.2.28 к решению задания 8.5

4) Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума

$$y(1) = 1 - 13 + 12 = 0$$

Ответ: 0

Найдите наименьшее значение функции:

Задание 9.1 $y = 5x - \ln(5x) + 12$ на отрезке $\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$ [23]

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 5 - \frac{1}{5x}$

2) Приравняем значение производной к нулю: $5 - \frac{1}{5x} = 0 <=> 25x = 1 <=> x = \frac{1}{25}$

3) Точка экстремума $x = \frac{1}{25}$ не входит в заданный отрезок, проверим значение функции при $x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = \frac{1}{2}$

$$y\left(\frac{1}{10}\right) = 5 \cdot \frac{1}{10} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 12 = 12{,}5 - 2{,}3 = 10{,}2$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{5}{2}\right) + 12 = 14{,}5 - 0{,}92 = 13{,}58$$

Ответ: 10,2

Задание 9.2 $y = \frac{6}{3x - x^2 - 3}$ [15]

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = \frac{-3+2x}{(3x - x^2 - 3)^2}$

2) Приравняем значение производной к нулю: $-3 + 2x = 0 <=> x = 1{,}5$

3) Точка экстремума $x = \frac{1}{25}$ не входит в заданный отрезок, проверим значение функции при $x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = \frac{1}{2}$

$$y\left(\frac{1}{10}\right) = 5 \cdot \frac{1}{10} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 12 = 12{,}5 - 2{,}3 = 10{,}2$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{5}{2}\right) + 12 = 14{,}5 - 0{,}92 = 13{,}58$$

Ответ: 10,2

Задание 9.3 $y = e^{2x} - 9e^{x} - 2$ на отрезке $[1; 3]$

Решение:

1) Найдем производную функции: $y' = 2e^{2x} - 9e^{x}=e^{x}(2e^{x} - 9)$

2) Приравняем значение производной к нулю: $e^{x}(2e^{x} - 9) = 0 <=> 2e^{x} = 9 <=> e^{x} = 4,5 <=> x = ln4,5$

3) $y(1) = e^{2} - 9e^{1} - 2$

$$y(ln4,5) = 20,25 - 9 * 4,5 + 12 = -8,25$$

$$y(3) = e^{6} - 9e^{3} - 2$$

Ответ: -8,25

Решенные типовые задания являются примерами для последующего выполнения заданий на ЕГЭ. Были вычислены производные степенных, иррациональных, тригонометрических, логарифмических функций, а так же произведение и частное сложных функций. В приложении представлены задания для самостоятельного решения.

2.3 Методические рекомендации по подготовке к ЕГЭ

Методике обучения применения производной к исследованию функций посвящены как теоретические исследования, так и многочисленные работы учителей-практиков. Например, на сайте infourok, есть интересные работы преподавателей, в которых они делятся своим опытом решения заданий по теме «Производная» на уроках математики.

Обобщим эти рекомендации:

1. В работе Р.Н. Байслоновой [24] проводится сравнительный анализ раздела «Производная» в учебниках по математике Ш.А. Алимова, Н.Я. Виленкина, А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского и А.Г. Мордковича. Автор работы считает, что для практического использования полученных навыков обучающимся не хватает занятий по обобщению изученного материала. Большой объем заданий (например, в профильных учебниках) не дает полного понимания темы при рассмотрении заданий из ЕГЭ.

2. В докладе С.В. Пластуна [27] представлено несколько интерактивных уроков из раздела «Производная». Автор предлагает варианты того, на каком этапе урока можно сформировать определенные компетенции. Приводятся наглядные примеры, которые помогут при решении заданий на геометрический смысл производной с графиками.

В связи с включением заданий о производной в ЕГЭ многие работы посвящены и методике подготовки к выполнению этих заданий. В результате обобщения опыта учителей и теоретических исследований можно сформулировать некоторые рекомендации.

Подготовка к выполнению задания из первой части №7 предполагает выполнения ряда требований:

1) отработка понятия «Производная», её геометрического смысла;

2) понимание физического смысла производной, оценка скорости процесса, заданного формулой;

3) умение «читать» графики функций;

4) понимание понятия касательной к графику функции.

5) повторение определение $tg\alpha$ (из курса геометрии).

Решение заданий №12 профильного уровня ЕГЭ по математике предполагает рассмотрение следующих основных групп задач по темам, которые внесены в названия параграфов:

1) исследование функции на экстремумы;

2) исследование функции на возрастание (убывание);

3) исследование функции на наибольшие и наименьшие значения;

4) исследование функции с помощью графика ее производной.

Успешное решение задач по данным разделам требует уверенного владения навыками решения производных и неравенств. Рассмотрение задач группы 2 предполагает определение промежутков знакопостоянства их производной.

«Если $f'(x) > 0$ *в каждой точке интервала, то функция* $y = f(x)$ *возрастает на этом интервале (достаточный признак возрастания*

функции). Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале (достаточный признак убывания функции)» [19].

Для решения заданий на определение точек максимума или минимума (точек экстремума) функции предполагает знание следующих утверждений.

«Признак максимума. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале (a;x_0) и $f'(x) < 0$ на интервале (x_0; b), то x_0 −точка максимума функции f(упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 −точка максимума).

Признак минимума. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале (a;x_0) и $f'(x) > 0$ на интервале (x_0; b), то x_0 −точка минимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 −точка минимума)» [19].

Важным является условие непрерывности в точке x_0. Когда данное условие не выполняется, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже когда функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В качестве примера рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{при } x \neq 0, \\ 1, \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Данная функция определена в точке $x = 0$ и ее производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса на плюс, но она не является точкой минимума.

Необходимо обратить внимание на то, что точками максимума и минимума будут являться только точки области определения функции, поэтому «ординат» эти точки иметь не могут. Но бывают случаи, когда учащиеся называют ошибочно, вместо точки минимума точку графика функции (например, точку минимума функции $y = x^2 + 5$ не «точка 0», а «точка (0; 5)»).

Итак, значение функции в точке минимума будем называть *минимумом функции*, а значение в точке максимума — *максимумом функции*.

При условии возрастания (убывания) функции на каждом из двух промежутков, функция не всегда будет возрастать (убывать) на объединении этих промежутков. Так, рассматривая функцию $y = tgx$ часто ошибочно утверждают, что она возрастает на всей области определения, или, что данная функция $y = tgx$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$. ». Но если бы данные утверждения были верны, то тогда бы при условии 2 > 1 следовало бы, что $tg2 > tg1$, но это не так. Рассматривая функцию $y = \frac{1}{x}$ также нельзя утверждать, что она на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$убывает. Ведь, из того, что 4 > -5, ведь не следует, что $\frac{1}{4} < \frac{1}{-5}$ и, значит, функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Поэтому промежутки возрастания лучше перечислять, и для этого использовать точку, точку с запятой или союз «и», но не знак объединения множеств. Данный совет пригодится в том случае, если появится задача на исследование функций во второй части ЕГЭ по математике.

При выполнении заданий на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, необходимо найти ее значения не только в точках экстремума, принадлежащих данному отрезку, но и значения на концах этого отрезка. Из всех выбрать наибольшее (наименьшее) значение, оно и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на данном отрезке. При исследовании функции, непрерывной на интервале, подобное утверждение не всегда справедливо. Для примера рассмотрим функцию $y = tgx$ на интервале (0; 1). На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0) = x_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1 \in (x_0; 1)$значение функции окажется больше, чем x_0, поскольку функция $y = tgx$ является возрастающей.

Для обозначения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ обычно используют символы

$$\max_{[a;b]} f(x) \text{ и } \min_{[a;b]} f(x)$$

Используя теорему о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции, можем сделать вывод: если наибольшее значение функции на данном отрезке равно числу M, а наименьшее - m, то множеством значений функции на этом отрезке является отрезок [m; M]. Итак, при решении задач на нахождение множества значений функции, непрерывной на отрезке, можно также применять алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим еще один пример. Исследуя на монотонность непрерывную и дифференцируемую на R функцию $\mathbb{R}$ функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе необходимо записать только два промежутка монотонности: $(-\infty$;1]- промежуток убывания и [1; +∞) — промежуток, на котором функция возрастает. В точке 0, которая хоть и является критической, но так как производная в этой точке не меняет знак, поэтому она и не будет концом промежутка монотонности.

Исследуя же функцию $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, в результате получаем три промежутка монотонности: $(-\infty$;0) и [1;+∞)— промежутки возрастания, (0; 1] — промежуток убывания.

Не всегда значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, является наименьшим значением функции на этом отрезке. Так, для функции $y = x^5 - 5x$ наименьшим значением на отрезке [-3;2] является не $y(1) = -4$ (значение в точке минимума), а $y(-3) = -228$. Справедливо подобное замечание и для точек максимума.

Решая данную задачу можно использовать следующее свойство непрерывных функций: если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке. Подобное утверждение справедливо для точки минимума и наименьшего значения функции. Допустим, если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке (a;b) единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Встречаются задачи на исследование функций, при решении которых оказывается, что точки экстремума на данном промежутке отсутствуют. Это значит, что производная на данном промежутке принимает значения одного знака, а функция является монотонной на этом промежутке. Очевидно также, что если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом, а если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее— в левом.

Рассмотрим пример: найти наибольшее значение функции

$$y = 6\sqrt{2}sinx - \frac{40}{\pi}x + 49$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Производная этой функции есть $y' = 6\sqrt{2}cosx - \frac{40}{\pi}$. Поскольку $\pi < 4, \text{получим, что } \frac{40}{\pi} > 10.$ Но $6\sqrt{2}cosx = \sqrt{72}cosx < \sqrt{81}\cos x, \text{т. е.} 6\sqrt{2}\cos x < 9\cos x \leq 9.$

Поэтому $y' < 0$ при любом действительном значении аргумента. Значит, функция является убывающей на всей числовой прямой и своего наибольшего значения на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ достигает в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$\max_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{40}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + 49 = 45.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое образование играет огромную роль в жизни нашего государства. Президент Российской Федерации в своем указе акцентирует внимание на том факте, что обучение в нашей стране должно быть надлежащего качества.

Значимость математики, как предмета необходимого для каждого человека, отразилось и в обязательности экзамена на итоговой аттестации за курс полной средней школы. На основании результатов этого экзамена вузы отбирают выпускников, которые в будущем будут использовать математические знания в профессиональной деятельности.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Проведен литературно-критический обзор по теме исследования.
2. Проведен анализ учебников для старшей школы по теме «Производная».

В результате изучения вопроса о введении производной в курс средней школы, выяснилось, что в начале XX века насчитывалось большое количество сторонников ввода высшей математики в среднюю школу. Они приводили достаточно убедительные аргументы, в связи с чем, были введены элементы математического анализа в программы некоторых типов средних учебных заведений России. Обзор особенностей этих программ представлен в работах О. А. Саввиной.

В середине XX века велись споры по поводу введения в школьную программу математического анализа. Были сторонники, которые утверждали, что введение в школьную программу математического анализа принесет свои плоды, были и те, кто не поддерживал эту идею. В дальнейшем, во время проведения реформы в семидесятые годы решено было повысить теоретический уровень в математическом образовании, и начала математического анализа заняли ведущую роль в обучении старшеклассников. Были устранены некоторые излишества, которые не соответствовали возрастным особенностям учащихся средней школы.

Методисты убедительно доказали, что элементы высшей математики в современной средней школе необходимы, кроме того, очень серьезно обсудили проблему введения понятий и фактов высшей математики в школьные программы.

Существовало более 6 различных подходов конструирования программы по введению высшей математики в среднюю школу: автономно-линейный; автономно-концентрический курс; линейный модуль в курсе «Алгебра и начала анализа»; концентрический модуль в курсе «Алгебра и начала анализа»; концентрический фузионизм с курсом «Алгебра и начала анализа»; линейный фузионизм и другие. Основные концепции используются до настоящего времени, а некоторые не вошли в программы, потому как были недостаточно разработаны.

Несмотря на противоречия и реформы в математическом образовании в начале 80-х гг., элементы высшей математики, уже изучаемые в средней школе, удается сохранить. Кроме того, в этот период созданы современные методики в изучении школьного курса математического анализа.

По сегодняшний день ведется работа по оптимизации объемов и конструкций элементов высшей математики в программе средней школы в условиях построения учебных планов старших классах.

3. Подготовлены учебные материалы для обеспечения усвоения и закрепления знаний, необходимых для подготовки к ЕГЭ.

С темой «Производная» связаны задания №7 и №12 из единого государственного экзамена по математике (профильный уровень). Задания из первой части ориентированы на знание обучающимися физического и геометрического смысла производной, владение графиками.

Решение заданий №12 (часть 2) профильного уровня ЕГЭ по математике предполагает рассмотрение следующих основных групп задач по темам, которые внесены в названия параграфов:

1) исследование функции на экстремумы;

2) исследование функции на возрастание (убывание);

3) исследование функции на наибольшие и наименьшие значения;

4) исследование функции с помощью графика ее производной.

Решенные типовые задания являются примерами для последующего выполнения заданий на ЕГЭ. Были вычислены производные степенных, иррациональных, тригонометрических, логарифмических функций, а так же производные произведения и частного сложных функций. В приложении представлены задания для самостоятельного решения.

4. Обобщены методические рекомендации по подготовке к единому государственному экзамену по теме «Производная».

Подготовка к выполнению задания №7 из первой части предполагает выполнения ряда требований:

1) отработка понятия «Производная», её геометрического смысла;

2) понимание физического смысла производной, оценка скорости процесса, заданного формулой;

3) умение «читать» графики функций;

4) понимание понятия касательной к графику функции.

Успешное решение задания №12 требует уверенного владения навыками нахождения производных и решения неравенств. Рассмотрение задач на нахождение промежутков возрастания (убывания) предполагает определение промежутков знакопостоянства производной. При выполнении заданий на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, необходимо найти ее значения не только в точках экстремума, принадлежащих данному отрезку, но и значения на концах этого отрезка. Из всех выбрать наибольшее (наименьшее) значение, оно и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на данном отрезке.

Данная работа может быть использована как вспомогательное пособие для учителей школ при организации и проведении занятий, а также представляет интерес для школьников старших классов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурдак Б.А. Математика. Сборник задач по углубленному курсу: учебно-методическое пособие / Б. А. Бурдак, Н. Д. Золотарева, Ю. А. Попов. – М. : Лаборатория знаний, 2019. – 324 с.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

3. Золотарева Н. Д. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарева, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов. – М. : Лаборатория знаний, 2019. – 544 с.

4. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы: учеб. Пособие для общеобразовательных организаций / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын. — М.: Просвещение, 2018. – 384 с.

5. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль / Ю. М. Колягин. — М.: Просвещение, 2001. – 318 с.

6. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. — М.: Просвещение, 1990. – 416 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 3 томах. Том 1. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2003. – 703 с.

8. Лаврентьев А. А. Математика. Справочник. Алгебра и начала анализа. Геометрия. / А. А. Лаврентьев, Е. В. Неискашова. — М.:Айрис-пресс, 2011. — 144с.

9. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень: 10 класс / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский. — М.:Вентана-Граф, 2019. — 368с.

10. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных

учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.

11. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и проф. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2009. — 464 с.

12. Никольский С. М. Курс математического анализа: учебниик для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 592 с.

13. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч1 / Д. Т. Письменный — 10-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2009. – 288 с.

14. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч2 / Д. Т. Письменный — 7-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2009. – 256 с.

15. Пратусевич М. Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: проф. Уровнь / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. — М.: Просвещение, 2009. — 415 с.

16. Саввина О. А. История обучения высшей маетматике в отечественной средней школе // История и теория математического образования: сб.статей. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – С.71-94.

17. Семенов А. В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: учебное пособие / А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Ященко. – М.: Интелект-Центр, 2019. – 184 с.

18. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков — Киев.: Наука думка, 1973. — 743 с.

19. Шестаков С. А. ЕГЭ 2019. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / С. А. Шестаков, И. В. Ященко. — М.:МЦНМО, 2019. — 112 с.

20. Ященко И. В. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрический смысл производной. Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / И. В. Ященко, П. И. Захаров. — М.:МЦНМО, 2019. — 96 с.

21. Ященко И. В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 14 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий — М.: Издательство «Экзамен», 2019. — 79 с.

22. Ященко И. В. ЕГЭ: 3300 задач с ответами по математике. Все задания «Закрытый сегмент». Профильный уровень. / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, П. И. Захарова. — М.: Издательство «Экзамен», 2016. — 543 с.

23. Ященко И. В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий и др. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2019. – 239 с.

24. Байслонова Р.Н. «Производная» в общеобразовательных классах и в классах с углубленным изучением математики [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://infourok.ru/issledovatelskaya-deyatelnost-proizvodnaya-v-obscheobrazovatelnih-klassah-i-v-klassah-s-uglublennim-izucheniem-matematiki-731784.html (дата обращения: 17.04.2019).

25. Ларин А.А. подготовка к ОГЭ и ЕГЭ по математике [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://alexlarin.net/index.html (дата обращения: 10.03.2019).

26. Открытый банк заданий ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.fipi.ru/ (дата обращения: 21.01.2019).

27. Пластун С. В. «Формирование ключевых компетентностей обучающихся при изучении производной функции в школе» [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://infourok.ru/formirovanie-klyuchevih-kompetentnostey-obuchayuschihsya-pri-izuchenii-proizvodnoy-funkcii-v-shkole-3428634.html (дата обращения: 20.04.2019).

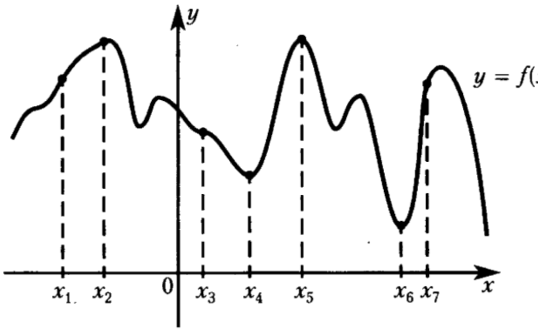
28. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://math-ege.sdamgia.ru (дата обращения: 26.02.2019).

29. Савченко Е.М. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://lesavchen.ucoz.ru/ (дата обращения: 16.04.2019).

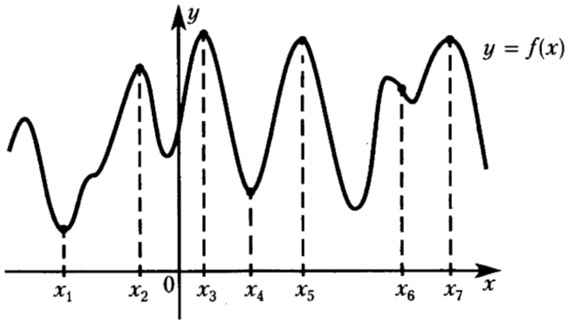
30. Яндекс ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ege.yandex.ru/ (дата обращения: 16.03.2019).

ПРИЛОЖЕНИЕ

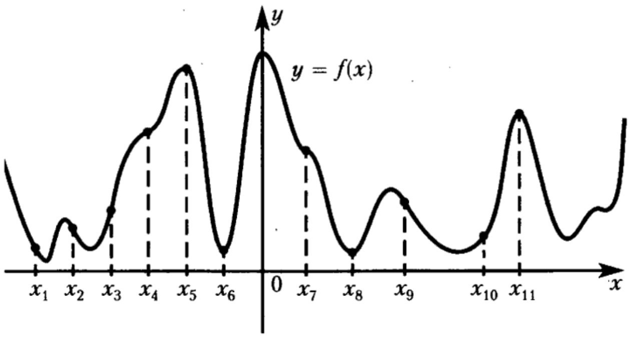
1. На рисунке изображён график функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



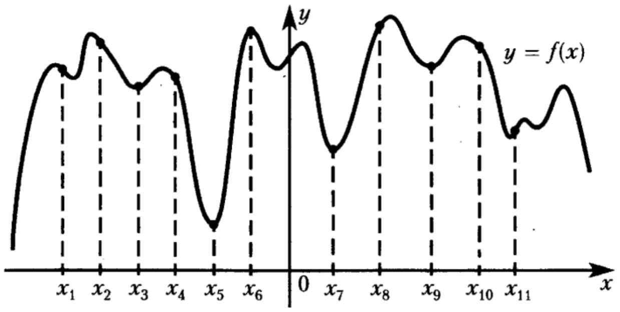
2. На рисунке изображён график функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



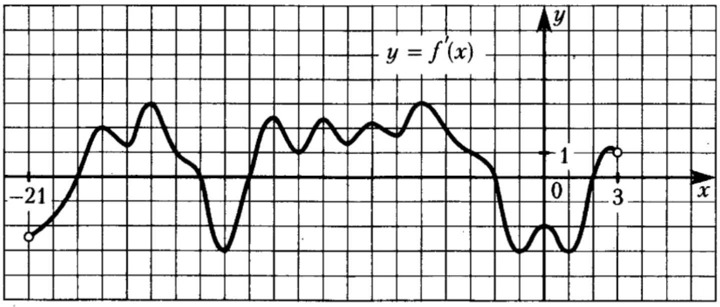
3. На рисунке изображён график функции $f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



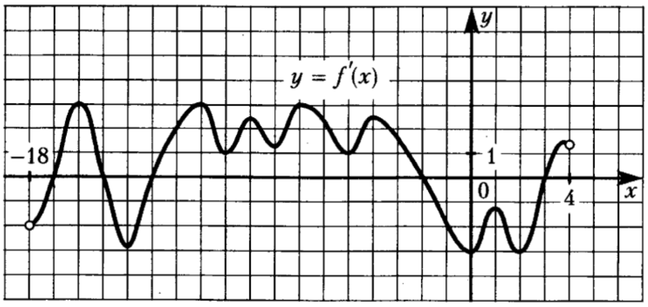
4. На рисунке изображён график функции $f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



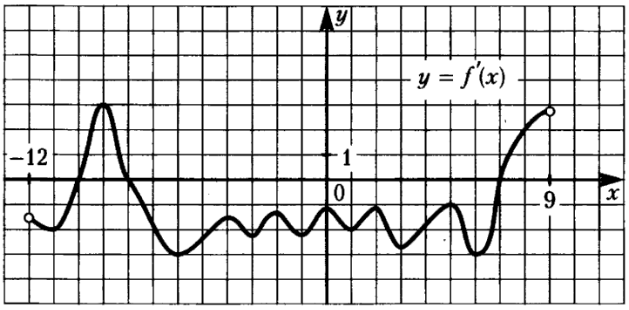
5. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-21; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-20; -1]$.



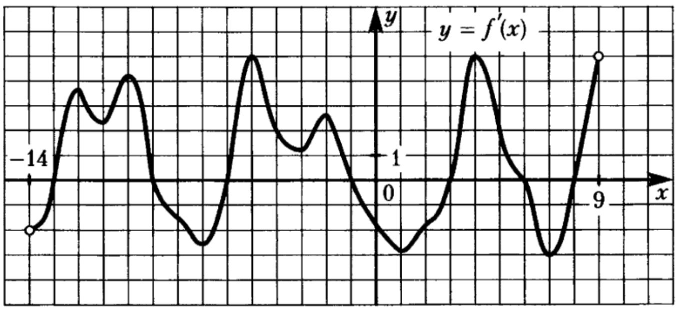
6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-18; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 2]$.



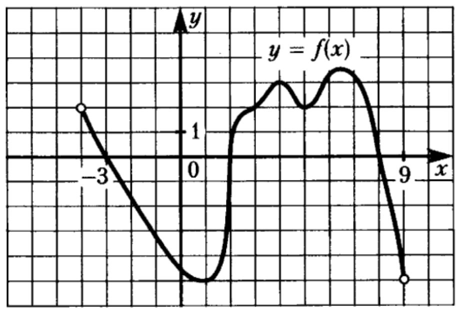
7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 8]$.



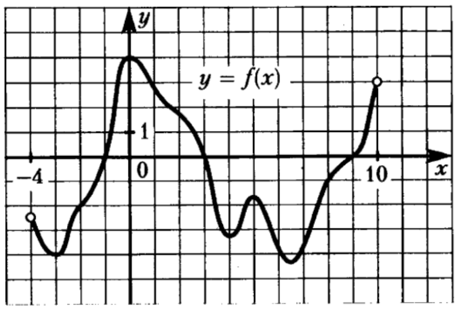
8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 7]$.



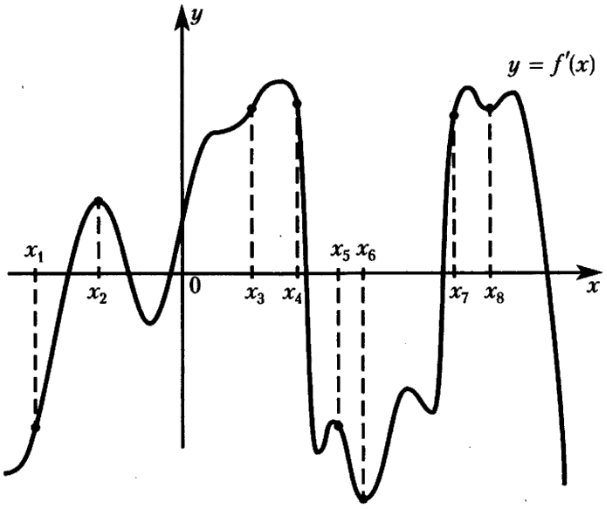
9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



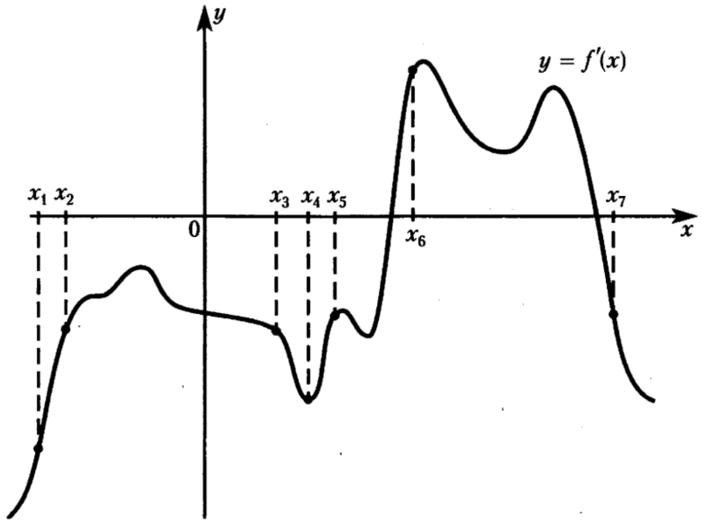
10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



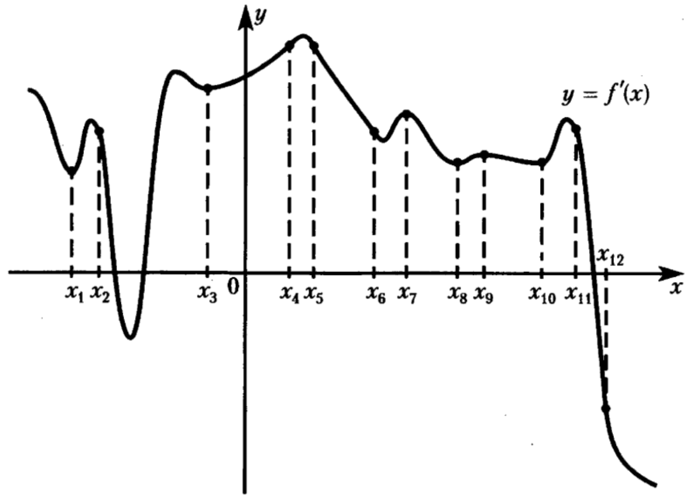
11. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



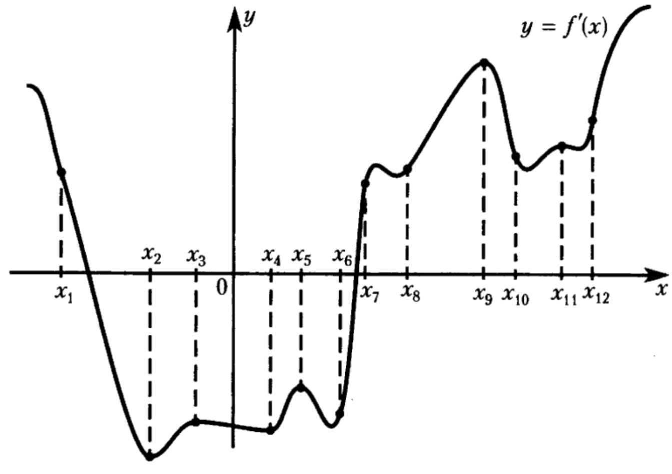
12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



13. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ... , x_{12}. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



14. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ... , x_{12}. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



1. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 23$.

2. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 192x + 14$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-7; -1]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 20x^3 - 13$ на отрезке $[-6; 1]$.

5. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 36}{x}$.

6. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 484}{x}$.

7. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 900}$.

8. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 225}$.

9. Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 4x\sqrt{x}$.

10. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 24x + 14$.

11. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[7; 10]$.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 12x + 3$ на отрезке $[0; 100]$.

13. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$.

14. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$.

15. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + 19$.

16. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x + 15$.