ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ,

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Методика решения логарифмических уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Выпускная квалификационная работа

обучающегося

по направлению подготовки

44.03.01 Педагогическое образование, Математика,

заочной формы обучения, группы 02041556

Кондратовой Татьяны Владимировны

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВЕДЕНИЕ

В настоящее время при овладении любой современной профессией необходимы определённые математические знания.

Математические знания, представление о значимости математики как науки в современном мире, стали особо значимым компонентом общей культуры. Требуется основательная математическая подготовка для успешной жизненной самореализации, для возможности продуктивной деятельности в современном мире информационных технологий. Место и роль математики в современной науке и жизни общества, а так же ценность математических знаний, обуславливают цели математического образования.

Математика как наука, всегда задается целью облегчить и улучшить жизнь человека, узнать больше об окружающем его мире, познать и понять его закономерности и тайны. Теоретики и практики, занимающиеся математикой, создают математическую модель явлений, выделяя в ней, самые важные черты наблюдаемых в природе явлений, связывая их между собой эмпирически, с помощью введения математических зависимостей, а так же вводя различные числовые характеристики.

Наиболее содержательная тема школьного курса алгебры – логарифмические уравнения и неравенства. Они содержат множество необычных, интересных методов решения, развивающих рациональное мышление, память и познавательный интерес.

Методический материал, по которому изучается тема «Логарифмические уравнения, неравенства и их системы», доступен, достаточно интересен, богат по содержанию, по способам и приёмам решения, а так же по возможности его практического применения. Вопросы по данной тематике, предлагаемые для изучения, присутствует в обычных учебниках общеобразовательных школ как основной материал.

Научные открытия в механике и естествознании, исследование движения планет, совершенствование технологий и другие задачи потребовали колоссальных, иногда вычисления длились десятилетиями.

Соответственно, быстро росла потребность в сложных, долгих расчётах. Дж. Непер, (шотландский математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц) считал, что в математике больше всего уходит времени, притом, что это скучно и утомительно, на деление, умножение, извлечение квадратных и кубических корней. При том еще, что операции эти являются большим источником неуловимых ошибок и большой тратой времени, и поэтому им решено было найти надёжное и простое средство, для избавления от длительных вычислений [9, 29].

Логарифмы были придуманы Дж. Непером для ускорения вычислений. Использование логарифмов приводит к значительному упрощению множества сложных вычислительных операций.

История создания логарифмов, методы их решения, а так же логарифмические уравнения и неравенства, их систем связаны с именами ряда математиков: Михаиль Штифель, Генри Бригс, Джон Непер, Йост Бюрги, Эдмунд Уингейт, Джон Спейдел, Уильям Отред, [17].

В школьном курсе математики важное место занимает решение логарифмических уравнений и неравенств. В зависимости от программы, по которой происходит обучение математике, эта тема изучается в 10 или 11 классе. Из вышеуказанного следует актуальность выбранной темы, необходимость рассмотрения этой темы для будущего учителя математики.

Вышесказанное позволяет говорить об *актуальности* темы дипломной работы, так как в материалах ЕГЭ для базового и профильного уровней задачи с логарифмическими уравнениями и неравенствами встречаются, но вызывают затруднения у обучающихся, что требует дополнительной проработки.

Дипломная работа представляет собой материалы для разработки элективного образовательного курса «Логарифмические уравнения и неравенства». Данный образовательный курс предназначен для обучающихся 10-11-х классов среднего общего образования и содержит элементы, которые относятся к обучению математики на базовом уровне подготовки.

Объект исследования: логарифмические уравнения и неравенства.

Предмет исследования: методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Цель исследования: разработка элективного курса по математике по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Из цели исследования, определены следующие **задачи исследования**:

1) рассмотреть основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

2) обобщить и изложить основной теоретический материал по данной теме;

3) разработать элективный образовательный курс по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы**: анализ литературы, наблюдение за работой учителей математики в период практики.

Практическая значимость: результаты работы могут быть использованы в практической деятельности учителей.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

Список использованной литературы включает в себя 29 наименований.

ГЛАВА 1. Общие методы решения логарифмических уравнений

1.1. Понятие логарифмического уравнения и его свойства

В школьном курсе математики, как известно, уравнение - это равенство, содержащее неизвестную переменную, значение которой и есть корень уравнения.

Корнем уравнения называют значение переменной, при подстановке которой, уравнение становится верным равенством.

Логарифмическое уравнение - уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма. Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{1}$$

содержащее множество допустимых значений $x > 0$ имеет решение $x = a^b$.

Логарифмическое уравнение, в котором стоит функция $f(x)$ под знаком логарифма,

$$\log_a f(x) = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \tag{2}$$

имеет множество допустимых значений x, задаваемых неравенством $f(x) > 0$, и эквивалентно уравнению $f(x) = a^b$, $a>0$, $a\neq 1$.

Простейшие логарифмические уравнения:

$$\log_x A = B, \quad A > 0, \tag{3}$$

которые

а) при $A \neq 1$ и $B \neq 0$ имеют единственный корень $x = A^{1/B}$;

б) при $A = 1$ и $B = 0$ имеют решением любое положительное, отличное от 1, число;

в) при $A = 1$ и $B \neq 0$ корней нет;

г) при $A \neq 1$ и $B = 0$ корней нет.

Решить логарифмическое уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Решая логарифмические уравнения применяются преобразования, не приводящие к потере корней, но они могут привести к приобретению дополнительных, посторонних корней. Проверка всех полученных корней необходима, особенно если отсутствует уверенность в равносильности сделанных преобразований при решении уравнений.

При решении логарифмических уравнений обязательно нужно учитывать область допустимых значений (ОДЗ): то есть под знаком логарифма находятся лишь положительные величины, а в основании логарифмов – положительные величины, которые в свою очередь отличны от единицы. Но нахождения ОДЗ зачастую очень громоздки, лучше выполнить проверку подстановкой корней в уравнение.

Логарифмирование, как математическая операция, является обратной к операции возведения в степень, следственно свойства логарифмов тесно связаны со свойствами степени.

Пусть $a, b, c > 0, a \neq 1.$ Тогда:

1) Логарифм единицы при любом основании равен нулю

$$\log_a 1 = 0;$$

2) Логарифм по любому основанию *a* от самого этого основания равен единице

$$\log_a a = 1;$$

3) Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c;$$

4) Логарифм частного равен разности логарифмов

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$$

5) Логарифм степени равен логарифму модуля основания, умноженному на показатель степени

$$\log_a b^k = k\log_a b,\ k \in \mathbf{R};$$

6) Зависимость между логарифмами с различными основаниями определяется формулой

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b\,, m\epsilon R, m \neq 0$$

7) Если основания логарифмов разные, то для того чтобы дальше работать с логарифмами нужно перейти к логарифмам с одним основанием

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1;$$

8) Можно менять местами основание и аргумент логарифма, но при этом все выражение «переворачивается», т.е. логарифм оказывается в знаменателе

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \ b \neq 1;$$

Свойства сравнения логарифмов

9)$c^{log_a b} = b^{log_a c}$

10) $\log_a b = \log_a c$ Тогда и только тогда, когда $b = c;$

1.2. Виды логарифмических уравнений и подходы к их решению

Покажем простейшие логарифмические уравнения и подходы к их решению.

1. Простейшие уравнения

$log_a \mathrm{x} = b$; $log_a f(x) = b$; $log_x a = b$

Возьмем простейшее логарифмическое $log_\mathrm{a} \mathrm{x} = \mathrm{в}, \mathrm{a} > 0,$ уравнение, а $\neq$ 1, его решение будет основано на его важном свойстве: а именно, что логарифмы двух положительных чисел, по одному и тому же положительному и отличному от единицы основанию равны тогда, когда равны эти числа.

Для уравнения $log_\mathrm{a} \mathrm{x} = \mathrm{в}, \mathrm{a} > 0,$ а $\neq$ 1, из этого свойства получаем $\mathrm{x} = \mathrm{a}^b$– единственный корень.

Для уравнения вида $log_\mathrm{a} f(x) = b,$ $\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1$ получаем равносильное уравнение *f(x)*= a^b.

Пример 1. Решите уравнение: $\log_{x-1} 3 = 2$.

Решение

$\log_{x-1} 3 = 2$ $\Rightarrow$ по определению логарифма

$$(x-1)^2 = 3 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3},$$

но *x*–1 не может быть отрицательным $\Rightarrow x = 1+\sqrt{3}$.

Ответ: $1+\sqrt{3}$

Пример 2. Решите уравнение : $\log_3(2x + 1) = 2$

Решение

ОДЗ: $x > -\frac{1}{2}$

$\log_3(2x + 1) = 2 \Rightarrow$ по определению логарифма

$2x + 1 = 3^2$

$2x + 1 = 9$

$2x = 8$

$x = 4$ принадлежит ОДЗ

Ответ: 4.

2. Сведение логарифмических уравнений к простейшим

$$log_{a} f(x) = log_{a} g(x), log_{f(x)} a = log_{g(x)} a$$

Уравнение вида $log_{a} f(x) = log_{a} g(x)$,*a>0, a≠1* заменим равносильной системой двумя способами:

$$log_{a} f(x) = log_{a} g(x), \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$log_{a} f(x) = log_{a} g(x), \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Получаем равносильное уравнение вида

$$log_{f(x)} a = log_{g(x)} a , a > 0$$

которое можно заменить равносильной ему системой двумя способами:

$$log_{f(x)} a = log_{g(x)} a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$log_{f(x)} a = log_{g(x)} a \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример 3. Решите уравнение: $\lg(x^2 - 2) = \lg x$ **.**

Решение

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0; \\ x > 0; \\ x^2 - 2 = x. \end{cases}$$

Одно из условий области определения можно опустить, так как оно будет автоматически учитываться в силу равенства логарифмируемых выражений. Тогда получаем:

$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0; \\ x > 0; \\ x^2 - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x^2 - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = 2; \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Следующий вариант решения уравнения $\lg(x^2 - 2) = \lg x$ без нахождения его ОДЗ. При этом варианте решения логарифмического уравнения необходимо проводить в конце проверку, чтобы убедиться, что найденные корни соответствуют исходному уравнению. Допустим, что выполняя проверку полученных в ходе решения уравнения $\lg(x^2 - 2) = \lg x$ корней $x_1 = -1, x_2 = 2$, получаем, что при подстановке в исходное уравнение $x = -1$ в обеих частях появляется выражение $\lg(-1)$, которое бессмысленно, т.е. $x = -1$ не является корнем исходного уравнения; при подстановке $x = 2$ получаем тождественно числовому равенству $\lg 2 = \lg 2$, следовательно $x = 2$ корень исходного уравнения.

Пример 4. Решите уравнение $\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(3x + 21)$.

Решение

Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 3x + 21 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 3x + 21 \end{cases}$

Решим первое неравенство системы: $x > -7$.

Решим второе уравнение системы: $x^2 - 4x + 3 = 3x + 21 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = -2, \;\; x_2 = 9$.

Оба корня уравнения удовлетворяют неравенству системы.

Ответ: $x_1 = -2, \;\; x_2 = 9$.

3. Уравнение вида $\boldsymbol{log_{g(x)} f(x) = b}$

Уравнение вида $log_{g(x)} f(x) =$ в равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = (g(x))^{\text{в}}. \end{cases}$$

Пример 5. Решите уравнение: $\log_x 4x = 2$.

Решение

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4x > 0; \\ x > 0; \\ x \neq 1; \\ x^2 = 4x. \end{cases}$$

Такое условие, как $4x > 0$ из области определения можно опустить, так как оно будет учитываться автоматически в силу присутствия других условий системы. Тогда получаем:

$$\begin{cases} 4x > 0; \\ x > 0; \\ x \neq 1; \\ x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1; \\ x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 4; \end{array}\right. \\ x > 0; \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Пример 6. Решите уравнение $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$

Решение

$\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$	ОДЗ: $2x^2 + 1 > 0$
$2x^2 + 1 = (x + 1)^2$	$x > -1$
$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$	$x \neq 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x_1 = 0$ не принадлежит ОДЗ

$x_2 = 2$ принадлежит ОДЗ

Ответ: 2.

4. Уравнения вида

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x),$$
$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$$

Уравнение вида $log_{f(x)}\, g(x) = log_{f(x)}\, h(x)$можно заменить равносильной системой двумя способами:

$$log_{f(x)}\, g(x) = log_{f(x)}\, h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

$$log_{f(x)}\, g(x) = log_{f(x)}\, h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x.) \end{cases}$$

Уравнение вида $log_{g(x)}\, f(x) = log_{p(x)}\, f(x)$ можно заменить равносильной системой двумя способами:

$$log_{g(x)}\, f(x) = log_{p(x)}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

$$log_{g(x)}\, f(x) = log_{p(x)}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

Пример 7. Решите уравнение: $\log_{x^2-1}(3x-1) = \log_{x^2-1} x^2$.

Решение

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-1 > 0; \\ x^2 > 0; \\ x^2 - 1 > 0; \\ x^2 - 1 \neq 1; \\ 3x - 1 = x^2. \end{cases}$$

Одно из условий $3x-1>0$ или $x^2>0$ области определения можно опустить, т.к. оно будет автоматически учитываться в силу равенства $3x-1=x^2$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} x^2 > 0; \\ x^2 - 1 > 0; \\ x^2 - 1 \neq 1; \\ 3x - 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0; \\ x^2 > 1 \\ x^2 \neq 2; \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1; \\ x < -1; \end{array}\right. \\ x \neq \pm\sqrt{2}; \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 8. Решите уравнение $\log_8(2x-4) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$

Решение:

$\log_8(2x-4) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$

$$x \in \varnothing$$

Ответ: нет корней.

1.3.Общие методы при решении логарифмических уравнений

1. Разложение на множители. Метод интервалов

Пример 9.Решите уравнение: $\log_4(2x-1)\cdot\log_{0,3}x=\log_4(2x-1)$.

Решение

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_4(2x-1)=0;\\ x>0;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}\log_{0,3}x-1=0;\\ 2x-1>0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Условия $2x-1>0$ и $x>0$ в соответствующих системах появились, как условия существования соответствующих логарифмов. Первая система имеет решение $x=1$, вторая – не имеет решений.

Ответ: $x=1$.

2.Введение нового неизвестного

В случае однородных уравнений приходится вводить новые переменные.

Пример 10. Решите уравнение: $\lg^3 x-\lg x=0$.

Решение

Введём новое неизвестное $t=\lg x$. Тогда данное уравнение примет вид $t^3-t=0$. Получаем корни $t=0$ и $t=\pm1$. Теперь остаётся решить три простейших уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=0,\\ \lg x=1,\\ \lg x=-1\end{array}\right. .$$

В итоге получаем: $x=1, x=10, x=0{,}1$.

Ответ: $x=1, x=10, x=0{,}1$.

3. Ограниченность множества значений

Пример 11. Решите уравнение: $\lg(x-3)-\lg(x+9)=\lg(x-2)$.

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+9>0, \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x>-9, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

На указанной области определения в силу возрастания функции $y=\lg t$ (основание логарифма 10>1) $\lg(x-3)<\lg(x+9)$, так как $x-3<x+9$. Тогда левая часть данного уравнения всегда отрицательна. Правая же часть: $\lg(x-2)>0$, так как при $x>3$ получаем, что $x-2>1$. Значит, данное уравнение не может иметь корней.

Ответ: корней нет.

4. Уравнения, решаемые с помощью замены неизвестной.

Этот способ широко используется при решении любых типов уравнений.

Пример 12. Решить уравнение $\log_x^3 10-\log_x^2 10-6\log_x 10=0$.

Решение

Обозначим $y=\log_x 10$ и произведем замену неизвестного в уравнении. Тогда

$$y^3-y^2-6y=0 \Leftrightarrow y\left(y^2-y-6\right)=0 \Leftrightarrow y(y-3)(y+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=3, \\ y=-2 \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к прежней переменной, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \log_x 10=0, \\ \log_x 10=-2, \\ \log_x 10=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10^{-1/2}, \\ x=10^{1/3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\sqrt{10}/10; \quad x_2=\sqrt[3]{10}$.

ГЛАВА 2. Общие методы решения логарифмических неравенств

2.1. Понятие логарифмического неравенства и его свойства

Алгебраическим выражением называется неравенство, в котором функции между собой связаны знаками сравнения.

Логарифмическое неравенство - неравенство, содержащее под знаком логарифма или (и) в его основании – неизвестное.

Простейшие логарифмические неравенства – это неравенства $\log_a f(x) > b$, или $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$. Первое неравенство легко привести ко второму, если воспользоваться формулой $b = \log_a a^b$.

Найти множество всех решений - это значит решить неравенство.

Логарифмические неравенства относятся к трансцендентным. В логарифмических уравнениях (неравенствах) выражения, содержащие неизвестное, находятся под знаком логарифма. Напомним, что логарифмом положительного числа b по основанию *a*, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число *a*, чтобы получилось b: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Исходя из определения значения логарифма, можно сделать вывод, что при решении логарифмических уравнений (неравенств) необходимо учитывать условия существования входящих в них логарифмических выражений и отражать их при нахождении области определения неравенства, когда это необходимо.

Решение логарифмических неравенств основано на свойствах логарифмической функции $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$:

1^0. Область определения – множество всех положительных чисел $(0;+\infty)$

2^0. Множество значений – множество всех действительных чисел R.

3^0. При $a > 1$ функция возрастает на $(0;+\infty)$, т.е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

При $0 < a < 1$ функция убывает на $(0;+\infty)$, т.е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Верно и обратное: если $\log_a x_1 < \log_a x_2$, то при $a > 1$ переходим к неравенству $0 < x_1 < x_2$, а при $0 < a < 1$ - к неравенству $x_1 > x_2 > 0$.

4^0. $\log_a x_1 = \log_a x_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, где $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Также при решении неравенства нужно соблюдать следующие правила преобразования [20]:

1. Каждый член из неравенства возможно переставлять из одной части неравенства в другую, но при этом необходимо изменить знак на противоположный.

2. Если обе части неравенства умножить/разделить на одно и то же положительное число, получится неравенство, равносильное данному.

3. Если обе части неравенства умножить/разделить на одно и то же отрицательное число, необходимо изменить знак неравенства на противоположный.

2.2. Виды логарифмических неравенств и подходы к их решению

Выделим простейшие логарифмические неравенства и подходы к их решению.

1. Неравенства вида

$\log_a f(x) < b$, $\log_a f(x) \le b$, $\log_a f(x) > b$, $\log_a f(x) \ge b$, где $a > 0, a \ne 1$.

Неравенство $\log_a f(x) < b$ (по свойству 3^0 логарифмической функции) равносильно: системе неравенств $\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0 \end{cases}$ при $a > 1$; неравенству $f(x) > a^b$ при $0 < a < 1$. Аналогично рассматриваются и другие соответствующие неравенства.

Пример 13. Решите неравенство: $\log_5(x+2) \le 3$.

Решение

Учитывая, что $3 = \log_5 5^3$, переходим к равносильному неравенству $\log_5(x+2) \le \log_5 5^3$. Так как основание логарифмической функции $y = \log_5 t$ равно 5>1, то она возрастает на своей области определения (при t>0). Тогда получаем:

$$\log_5(x+2) \le \log_5 5^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0; \\ x+2 \le 125; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2; \\ x \le 123; \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \le 123.$$

Ответ: $-2 < x \le 123$.

Пример 14. Решите неравенство: $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$.

Решение

Учитывая, что $-2 = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, переходим к равносильному неравенству $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Так как основание логарифмической функции $y = \log_{\frac{2}{3}} t$ равно $\frac{2}{3}$ и $0 < \frac{2}{3} < 1$, то она убывает на своей области определения (при t>0). Тогда получаем:

$$\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2-5x>\frac{9}{4} \Leftrightarrow -5x>0{,}25 \Leftrightarrow x<-0{,}05.$$

Ответ: $x<-0{,}05$.

2. Неравенства вида

$$\log_a f(x)<\log_a g(x),\ \log_a f(x)\le\log_a g(x),\ \log_a f(x)>\log_a g(x),$$

$$\log_a f(x)\ge\log_a g(x),\text{ где } a>0, a\ne 1.$$

Неравенство $\log_a f(x)<\log_a g(x)$(по свойству 3^0 логарифмической функции) равносильно: системе неравенств $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ при $a>1$; системе неравенств

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x) \end{cases} \text{ при } 0<a<1.$$

Аналогично рассматриваются и другие соответствующие неравенства.

Пример 15. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(x+1)\le\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)$.

Решение

Так как основание логарифмической функции $y=\log_{\frac{1}{5}} t$ равно $\frac{1}{5}$ и $0<\frac{1}{5}<1$, то она убывает на своей области определения (при t>0). Тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x-5>0; \\ x+1\ge 3x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{3}; \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3}<x\le 3.$$

Ответ: $\frac{5}{3}<x\le 3$.

3. Неравенства вида

$$\log_{g(x)} f(x)<b,\ \log_{g(x)} f(x)\le b,\ \log_{g(x)} f(x)>b,\ \log_{g(x)} f(x)\ge b.$$

Неравенство $\log_{g(x)} f(x)<b$ или $\log_{g(x)} f(x)\le b$ (по свойству 3^0 логарифмической функции) равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1;\\ f(x)>0;\\ f(x)<g^{b}(x);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<1;\\ g(x)>0;\\ f(x)>g^{b}(x)\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1;\\ f(x)>0;\\ f(x)\le g^{b}(x);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<1;\\ g(x)>0;\\ f(x)\ge g^{b}(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Неравенство $\log_{g(x)} f(x)>b$ или $\log_{g(x)} f(x)\ge b$ (по свойству 3^0 логарифмической функции) равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1;\\ f(x)>g^{b}(x);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<1;\\ g(x)>0;\\ f(x)>0;\\ f(x)<g^{b}(x)\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1;\\ f(x)\ge g^{b}(x);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<1;\\ g(x)>0;\\ f(x)>0;\\ f(x)\le g^{b}(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример 16. Решите неравенство: $\log_{x^2+4}(4x+7)\ge 1$.

Решение: Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+4>1;\\ 4x+7\ge (x^2+4)^1;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+4>0;\\ x^2+4<1;\\ 4x+7>0;\\ 4x+7\le (x^2+4)^1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>-3;\\ x^2-4x-3\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>-4;\\ x^2<-3;\\ 4x>-7;\\ x^2-4x-3\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система совокупности не имеет решений, т.к. не имеет решений неравенство $x^2<-3$. Первая система равносильна неравенству $x^2-4x-3\le 0$, решением которого является отрезок $2-\sqrt{7}\le x\le 2+\sqrt{7}$.

Ответ: $2-\sqrt{7}\le x\le 2+\sqrt{7}$.

Пример 17. Решите неравенство: $\log_{x^2-3}(4x+7)<0$.

Решение: Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3>1;\\4x+7>0;\\4x+7<\left(x^2-3\right)^0;\end{cases}\\\begin{cases}x^2-3>0;\\x^2-3<1;\\4x+7>\left(x^2-3\right)^0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>4;\\x>-\dfrac{7}{4};\\x<-\dfrac{3}{2};\end{cases}\\\begin{cases}x^2>3;\\x^2<4;\\x>-\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2;\\x<-2;\end{array}\right.\\-\dfrac{7}{4}<x<-\dfrac{3}{2};\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3};\\x<-\sqrt{3};\end{array}\right.\\-2<x<2;\\x>-\dfrac{3}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Решение второй системы: $\sqrt{3}<x<2$.

Ответ: $\sqrt{3}<x<2$.

4. Неравенства вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x)<\log_{\varphi(x)} g(x),\ \log_{\varphi(x)} f(x)\le\log_{\varphi(x)} g(x),\ \log_{\varphi(x)} f(x)>\log_{\varphi(x)} g(x),$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x)\ge\log_{\varphi(x)} g(x).$$

Неравенство $\log_{\varphi(x)} f(x)<\log_{\varphi(x)} g(x)$ (по свойству 3^0 логарифмической функции) равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(x)>1;\\f(x)>0;\\f(x)<g(x);\end{cases}\\\begin{cases}\varphi(x)<1;\\\varphi(x)>0;\\g(x)>0;\\f(x)>g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Аналогично рассматриваются и другие соответствующие неравенства.

Пример 18. Решите неравенство: $\log_{x^2-1}(3x-1)<\log_{x^2-1}x^2$.

Решение: Исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2-1>1;\\ 3x-1>0;\\ 3x-1<x^2;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x^2-1>0;\\ x^2-1<1;\\ x^2>0;\\ 3x-1>x^2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2>2;\\ x>\dfrac{1}{3};\\ x^2-3x+1>0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x^2>1;\\ x^2<2;\\ x^2\neq 0;\\ x^2-3x+1<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{2};\\ x<-\sqrt{2};\end{array}\right.\\ x>\dfrac{1}{3};\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\\ x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<-1;\end{array}\right.\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2};\\ x\neq 0;\\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Решение первой системы: $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Решение второй системы: $1<x<\sqrt{2}$.

Ответ: $1<x<\sqrt{2}$, $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

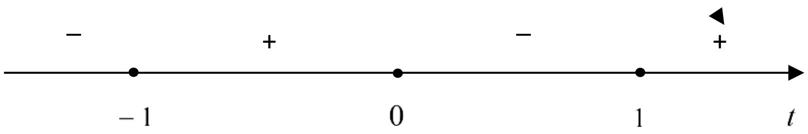
2.3. Общие методы при решении логарифмических неравенств

1. Разложение на множители. Метод интервалов

Пример 20. Решите неравенство: $\lg^3 x - \lg x \geq 0$.

Решение

Введём новое неизвестное $t = \lg x$. Тогда данное неравенство примет вид $t^3 - t \geq 0$. Решим его методом интервалов, учитывая, что корнями многочлена $t^3 - t$ являются числа $t = 0$ и $t = \pm 1$.



Получаем: $-1 \leq t \leq 0, t \geq 1$. Теперь остаётся решить три простейших неравенства, два из которых входят в систему:

$$\begin{cases} \lg x \geq -1, \\ \lg x \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0{,}1, \\ 0 < x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}1 \leq x \leq 1, .$$

$$\lg x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 10.$$

Ответ: $0{,}1 \leq x \leq 1, x \geq 10$.

2.4.Сведение логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида

$$\log_{a(x)} f(x) \ge \log_{a(x)} g(x), \quad (1)$$

где $a(x), f(x), g(x)$ - некоторые функции (об их природе будем говорить ниже).

Стандартный метод решения такого неравенства предполагает разбор двух случаев на области допустимых значений неравенства.

В первом случае, когда основания логарифмов удовлетворяют условию $0 < a(x) < 1$, знак неравенства обращается: $f(x) \le g(x)$.

Во втором случае, когда основание удовлетворяет условию $a(x) > 1$, знак неравенства сохраняется: $f(x) \ge g(x)$.

На первый взгляд – все логично, рассмотрим два случая и потом объединим ответы. Правда, при рассмотрении второго случая возникает определенный дискомфорт – приходится на 90 процентов повторять выкладки из первого случая (преобразовывать, находить корни вспомогательных уравнений, определять промежутки монотонности знака).

Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 1.*Логарифмическое неравенство*

$$\log_{a(x)} f(x) \ge \log_{a(x)} g(x)$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \ne 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \ge 0. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство

Начнем с того, что первые четыре неравенства системы (2) задают множество допустимых значений исходного логарифмического неравенства.

Обратим теперь внимание на пятое неравенство. Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель этого неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство $f(x) \leq g(x)$. Если же $a(x) > 1$, то первый множитель пятого неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство $f(x) \geq g(x)$. Таким образом, пятое неравенство системы включает в себя оба случая предыдущего метода. Терема доказана.

Пример 21. *Решить неравенство*

$$\log_{x-2}(x^2-1) > \log_{x-2}(2x^2+x-3).$$

Решение

Воспользуемся теоремой 1. получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 2x^2+x-3>0, \\ ((x-2)-1)((x^2-1)-(2x^2+x-3))>0. \end{cases}$$

Решая первые четыре неравенства, практически находим ОДЗ исходного неравенства:

$$\begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ x<-1 \text{ } \textit{или} \text{ } x>1, \\ x<-\dfrac{3}{2} \text{ } \textit{или} \text{ } x>1. \end{cases}$$

Откуда: $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Решим теперь пятое неравенство системы. После элементарных преобразований получим неравенство

$$(x-3)(-x^2-x+2)>0.$$

Умножим второй сомножитель на -1 и поменяем знак неравенства:

$$(x-3)(x^2+x-2)<0.$$

Нетрудно заметить, что корнями второго множителя в этом неравенстве являются числа 1 и -2. Поэтому, раскладывая второй множитель на одночлены первого порядка, получаем:

$$(x-3)(x-1)(x+2)<0.$$

Это неравенство легко решить методом интервалов: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 3)$.

С учетом найденного ранее ОДЗ, получаем окончательный ответ.

Ответ: $x \in (2, 3)$.

ГЛАВА 3. Разработка элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»

3.1. Анализ учебников по алгебре и началам анализа по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»

В данном параграфе мы проведем анализ школьных учебников «Алгебра и начала анализа», для того, чтобы узнать в каком классе изучают логарифмические уравнения и неравенства, а так же, как преподносится эта тема в каждых из учебников. Для сравнения возьмем 3 учебника алгебры для старших классов, имеющихся в МОУ «Краснооктябрьская СОШ»:

С. М. Никольский, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин, М. К. Потапов, «Алгебра и начала анализа» 10 класс.[25]

В данном учебнике изучение логарифмов начинается с параграфа 5.

Понятие логарифма вводится через показательную функцию $y=a^x$ ($a>0, a\neq1$). График данной функции дает возможность решить обратную задачу: для данных положительных чисел b и a ($a\neq1$) найти число α, такое, что $b=a^{\alpha}$ (α – единственное).

В пункте 5.1. «Понятие логарифма» вводится определение, а так же определение натурального и десятичного логарифма числа.

В пункте 5.2. «Свойства логарифмов» дается теорема, в которой отражены свойства логарифмов. А так же приводится ее доказательство. Далее дается формула перехода логарифмов от одного основания к другому и рассматриваются примеры.

В пункте 5.3. «Логарифмическая функция» дается определение понятия «логарифмическая функция», строится ее график, и рассматриваются свойства для функции, когда $a>1$ и когда $0<a<1$.

Пункт 5.4. «Десятичные логарифмы», который отмечен звездочкой, т. е. как дополнительный материал повышенной сложности. В этом пункте рассказывается, как вычислять десятичный логарифм положительного числа А, что называется характеристикой и мантиссой логарифма числа А.

В 6 параграфе «Простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства» имеются два пункта, в которых обучающиеся тренируются в нахождении простейших показательных и логарифмических уравнений.

В пункте 6.2. «Логарифмические уравнения» рассказывается о том, что называется простейшим логарифмическим уравнением, и даются примеры с подробным решением данных уравнений.

В пункте 6.4. «Логарифмические неравенства» говорится о том, что называется простейшим логарифмическим неравенством, и приводятся примеры с решением данных неравенств.

Таким образом, в учебнике Никольского С.М. материал содержится и для базового и для профильного уровня. Выделяются задачи устной работы, повышенной трудности, задания для повторения. После главы имеются сведения из истории и происхождения изученных понятий, терминов, символов.

В конце учебника есть упражнения для повторения логарифмических и уравнений и неравенств.

Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс. [2]

В данном учебнике изучение темы «Логарифмы» начинается с 4 главы учебника - «Логарифмическая функция».

Пропедевтика проводится при изучении показательной функции. Рассматривая уравнения типа $a^x=b$, где $a>0, a\neq 1, b>0$ говорится, что данные уравнения имеют только один корень.

В параграфе 15 «Логарифмы» дается определение понятия «Логарифм числа» и говорится, что такое логарифмирование. Следующим шагом приводятся несколько примеров на вычисление логарифма числа по его определению: один пример на решение неравенства и один пример на решение уравнения.

В параграфе 16 «Свойства логарифмов» приводится и доказывается три основных свойства логарифмов и пример на их вычисление.

В 17 параграфе «Десятичные и натуральные логарифмы» вводятся следующие понятия: десятичный и натуральный логарифм, формула перехода логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию с доказательством.

18 параграф «Логарифмическая функция, ее график и свойства» - в нем доказываются свойства логарифмической функции, а так же строятся несколько графиков этой функции. Далее доказывается теорема, которую используют при решении уравнений и говорится, что логарифмическая и показательная функции взаимно обратны.

В 19 параграфе «Логарифмические уравнения» дается подробное решение шести уравнений и одной системы уравнений.

В 20 параграфе «Логарифмические неравенства» предлагаются 3 задачи с подробным описанием решения логарифмических неравенств.

После каждого параграфа дается ряд упражнений, ранжированные по уровню сложности: «обязательные задачи», «дополнительные более сложные задачи» и «трудные задачи».

Также в конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе IV».

Таким образом, у Ш. А. Алимова тему «Логарифмы» тоже изучают в десятом классе. Представленный по этой теме материал доступно изложен. В отличие от других авторов Ш. А. Алимов уделил внимание вычислению числа *e* на микрокалькуляторе. Практические задания на закрепление темы ранжированные по уровню сложности: «обязательные задачи», «дополнительные более сложные задачи» и «трудные задачи».

Для максимального усвоения данного материала в конце главы включены упражнения для самопроверки.

Мордкович А. Г., Семенов «Алгебра и начала анализа» П. В. - 11 класс (профильный уровень). [23]

Изучение логарифмов начинается с 3 главы «Показательная и логарифмическая функция».

Пропедевтика проводится при изучении показательных уравнений. Понятие логарифма вводится через показательные уравнения. Решение уравнения $2^x=6$ потребовало вводить новый символ, с помощью которого корень уравнения записали так: $x=log_2 6$.

В параграфе 14 «Понятие логарифма» дается определение логарифма числа и формула $\log_a a^c=c$. Далее приводятся примеры на вычисление логарифма числа, и определяется десятичный логарифм.

В параграфе 15 «Логарифмическая функция, ее свойства и график» говорится о том, что для показательной функции существует обратная, которой является логарифмическая функция.

В 16 параграфе «Свойства логарифмов» доказываются свойства (4), (5), (6). Говорится что такое логарифмирование и потенцирование, что называется характеристикой и мантиссой десятичного логарифма числа. Доказывается формула перехода к новому основанию логарифма и как следствия данной теоремы формулы (8) и $\log_a b=\log_{a^r} b^r$.

В параграфе 17 «Логарифмические уравнения» объясняется через теорему как решать логарифмические уравнения, затем рассматриваются примеры решения логарифмических уравнений и один пример решения системы логарифмических уравнений.

В 18 параграфе «Логарифмические неравенства» даются объяснения, как найти метод решения логарифмических неравенств, а затем рассматриваются примеры решения логарифмических неравенств.

В 19 параграфе «Дифференцирование показательной и логарифмической функций» в пункте 2 «Натуральные логарифмы. Функция $y = \ln x$, ее свойства, график, дифференцирование» определяется понятие натурального логарифма, приводятся свойства натуральной логарифмической функции, выводится формула производной натуральной логарифмической функции, а в конце параграфа для любой логарифмической функции.

В отличие от остальных учебников А. Г. Мордкович начинает изучение логарифмов в 11 классе. В данном учебнике представлено огромное разнообразие решенных примеров, многие из которых встречаются в экзамене в форме ЕГЭ. Кроме обязательных упражнений имеются задания следующего типа: найдите значение логарифмической функции в указанных точках, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, найдите область значений функции, сколько целочисленных решений имеет неравенство. В связи с тем, что ученики знакомятся у данного автора с логарифмами только в 11 классе, отдельным пунктом выделено «Дифференцирование показательной и логарифмической функций». У Никольского и Алимова нет этого пункта, т. к. учащиеся еще не изучали производную.

Таким образом, проанализировав учебники, делаем вывод – во всех рассмотренных учебниках, одинаковый порядок изучения темы «Логарифмические уравнения и неравенства», но методы решения, логарифмических уравнений и неравенств, представлены по-разному.

3.2. Программа элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»

Элективные занятия – форма учебной работы, состоящая в развитии способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой; зарождение интереса к математике на первичном уровне.

При помощи элективных занятий в школе решаются следующие задачи:

– удовлетворяется интерес обучающихся в запросах на более глубокое изучение отдельных предметов;

– развитие учебно-познавательных интересов, творческих способности и дарований обучающихся. В этом и состоит их важное педагогическое значение [11, с. 192].

Элективные занятия проходят параллельно с изучением предметов федерального и регионального компонентов школы, с целью углубить знания обучающихся и развить их творческих способности. Это оказывает влияние на их содержание. Элективные занятия – школьный компонент, т.е. обучающиеся сами выбирают, что будут изучать, этот компонент может включать в себя более глубокое изучение отдельных тем или разделов учебной программы по какому-либо предмету, а также содержать новые проблемы и темы, выходящие за пределы обязательной программы. Для этого составляются специальные программы, в помощь учителю, и создаются учебные пособия по элективным предметам.

Касаемо организации элективных занятий в школе, форма их проведения может варьироваться от обычных уроков до экскурсий, семинаров, дискуссий и т.д. [11, с. 197].

Тема «Логарифмы» является традиционной в курсе алгебры и начала анализа средней школы, но довольно трудно дается учащимся из-за не большого количества выделенных часов на эту тему. В настоящее время в школьных учебниках изучение данной темы планируется в 10, а по некоторым учебникам в 11 классах. Анализ школьных учебников по изложению темы «Логарифмы» и анализ тестов ЕГЭ показал, что в учебниках содержится недостаточное количество заданий для подготовки учащихся к сдаче экзамена по данной теме. Поэтому для успешной сдачи экзамена в форме ЕГЭ по математике необходимо увеличить количество часов за счет проведения элективного курса по теме «Логарифмы».

Данная программа элективного курса по теме «Логарифмы» предназначена для учащихся 10-11 классов. Курс рассчитан на два года обучения, 1 час в неделю, всего в объеме 28 часов – 14 часов в 10-м классе и 14 часов в 11-м классе. Он ведётся в рамках предмета «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов общеобразовательной школы. Программа направлена на расширение знания учебного материала, представленным в обязательном минимуме учебной программы курса математики, а также непосредственной подготовки к выполнению заданий данной темы в ЕГЭ обучающимися.

Материал, рассматриваемый в элективном курсе, не входит в базовый уровень, но он довольно часто встречается на ЕГЭ по математике. Решение логарифмических уравнений и неравенств можно считать деятельностью, которая близка к исследовательской. Это обуславливается выбором метода решения, процессом решения, записью получившегося ответа и уже предполагают определенный уровень сформированности умений - наблюдение, сравнение, анализ, выдвижение и проверка гипотез, обобщение полученных результатов. При решении уравнений используются как типовые алгоритмы, так и нестандартные методы, упрощающие решение. Следуя этому, вначале, при работе с этой темой обучающемуся предлагают простые по алгоритму решению задачи, с последующим усложнением уравнений.

Курс построен на углубленном изучении логарифмических уравнений и неравенств и является развитием ранее приобретенной системы знаний. Углубленное изучение основано на обучения приемам и методам решения математических задач, требующих применения высокой операционной и логической культуры, развивающей алгоритмическое мышление, направленное на развитие самостоятельной исследовательской деятельности.

Тематика заданий входит в рамки основного курса обучения математики (раздел «Логарифмы»), но уровень трудности их повышен.

Цель курса: систематизация, расширение и углубление знаний учащихся по теме «Логарифмы», подготовка к ЕГЭ по данной теме.

Задачи курса:

1) Рассмотреть и обобщить теоретический материал по теме «Логарифмы»;

2) Сформировать умения применять свойства логарифма числа и логарифмической функции при решении практических заданий;

3) Сформировать навыки решения логарифмических уравнений, неравенств и их систем.

В ходе обучения значительное место отводится практическим и самостоятельным работам учащихся.

Текущий контроль осуществляется в разных формах: устная, письменная, фронтальная.

Итоговый контроль – контрольная работа.

Тематический план программы элективного курса

<table>
<tr><th>№п/п</th><th>Наименование темы занятия</th><th>Количество часов</th></tr>
<tr><td colspan="3">10 класс</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Понятие и свойства логарифмов.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Логарифмическая функция, свойства и ее график</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td>Решение уравнений методом, построенным на определении логарифма</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Решение уравнений вида log a f(x) =log a g(x) и уравнений, сводящихся к ним</td></tr>
<tr><td>Решение уравнений вида log j(x)f(x) = log j(x)g(x), а также сводящихся к ним, уравнений</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Метод введения новой переменной</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Уравнения, которые содержат неизвестное под знаком логарифмической функции</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Итоговое занятие по теме: «Логарифмические уравнения»</td><td>2</td></tr>
</table>

7.	Контрольная работа	**1**
Всего:		**14**
11 класс		
1	Понятие и свойства логарифмических неравенств	**2**
2	Неравенства, содержащие логарифмические выражения	**3**
3	Системы логарифмических уравнений, содержащие неизвестное под знаком логарифмической функции	**3**
4	Логарифмические уравнения, неравенства. Смешанные системы	**3**
5	Итоговое занятие по теме: «Логарифмические неравенства»	**2**
6	Контрольная работа	**1**
Всего:		**14**

В результате изучения элективного курса:

обучающийся должен знать:

– свойства логарифмических чисел и функции;

– алгоритм решения логарифмических уравнений и неравенств, а так же их систем.

обучающийся должен уметь:

– применять определение логарифма числа, использовать свойства логарифма числа и логарифмической функции на практике, т.е. решать задачи.

Данный курс поддерживает изучение основного курса математики, способствует лучшему усвоению базового курса математики и направлен на расширение знаний учащихся, повышение уровня математической подготовки через решение большого количества логарифмических уравнений и неравенств.

3.3.Содержание элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»

Содержание программы элективного курса

10 класс.

1. Понятие и свойства логарифмов (1 час).

Определение понятия логарифма числа, его основных свойств и формул. Преобразования логарифмических выражений.

Практическая работа.

2. Логарифмическая функция, свойства и ее график (1 час)

Понятие функции, ее свойства и построение графика функции при $a>1$, свойства и график функции при $0<a<1$, функция, обратная логарифмической.

Практическая работа.

3. Решение уравнений методом, построенным на определении логарифма. Решение уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и уравнений, сводящихся к ним.

Решение уравнений вида $\log_{j(x)} f(x) = \log_{j(x)} g(x)$, а также сводящихся к ним, уравнений (5 часов).

Определение логарифмического уравнения, решение логарифмического уравнения методом, основанным на определении логарифма.

Практическая работа.

4. Метод введения новой переменной (2 часа).

Определение логарифмического уравнения, решение таких уравнений методом введения новой переменной.

Практическая работа.

5. Уравнения, которые содержат неизвестное под знаком логарифмической функции (2 часа)

Определение логарифмического уравнения, содержащих неизвестное под знаком логарифмической функции, их решение. Неравносильные и равносильные преобразования логарифмических уравнений.

Практическая работа.

6. Итоговое занятие по теме: «Логарифмические уравнения» (2 часа)

7. Контрольная работа (1 час)

11 класс.

1. Понятие и свойства логарифмических неравенств (2 часа)

Определение логарифмического неравенства, методы решения логарифмического неравенства.

Практическая работа.

2. Неравенства, содержание логарифмические выражения (3 часа)

Практическая работа.

3. Системы логарифмических уравнений, содержащие неизвестное под знаком логарифмической функции (3 часа)

Определение системы уравнений, содержащие неизвестное под знаком логарифмической функции.

Практическая работа.

4. Логарифмические уравнения, неравенства. Смешанные системы (3 часа)

Решение задач, в которых встречаются как логарифмические уравнения, так и неравенства.

Практическая работа.

5. Итоговое занятие по теме: «Логарифмические неравенства» (2 часа)

6. Контрольная работа (1 час)

Разработанный элективный курс развивает ранее приобретенную систему знаний. Курс направлен на самостоятельный поиск решений логарифмических уравнений и неравенств, разбирается и учителем, и учащимися множество сложных задач.

Учитель, в процессе освоения материала, показывает своим ученикам красоту, совершенство, сложность и изощренность математических методов решения логарифмических уравнений и неравенств.

Итоговый контроль по изучению курса в 10 классе - контрольная работа, состоящая из заданий, рассматриваемых в процессе освоения курса, в 11 классе итоговая контрольная работа – содержит задания, рассматриваемые в 10 и 11 классе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение логарифмических уравнений и неравенств очень важно в школьном курсе математики, так как примеры, содержащие показательные уравнение и неравенства, встречаются в заданиях единого государственного экзамена, не только в составе логарифмических и показательных уравнений и неравенств, но и в системах и смешанных уравнений, в решениях комбинированных уравнений и неравенств.

В нашей работе мы разработали элективный курс, который будет полезен обучающимся, чтобы наиболее полно объяснить им методы решения логарифмических уравнений и неравенств. Также обучающимся будет полезно и интересно узнать, что одна и та же задача имеет несколько различных способов решения и нахождения ответа. Элективный курс, разработанный нами, направлен на то, чтобы помочь обучающемуся и выпускнику при подготовке и успешной сдаче единого государственного экзамена, а так же при обучении в вузе.

Разработанный нами элективный курс «Логарифмические уравнения и неравенства» позволил реализовать следующие задачи:

– изучить и проанализировать теоретический материал по заданной теме, новизну и значимость данного материала при подготовке к текущему контролю и экзаменам;

– определить особенности данной темы, методику её преподавания, которую учитель вправе подбирать для себя самостоятельно, но учитывая при этом способности обучающихся и имеющиеся условия в школе;

– разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;

– расширить кругозор учащихся, в области логарифмов.

Задачи и цели, поставленные в ходе выполнения дипломной работы, достигнуты. Подводя итоги, можно отметить, что созданный элективный курс, в данной дипломной работе, можно использовать в курсе средней школы для подготовки 10-11-х классов к ЕГЭ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алтынов, П.И. Учебный справочник школьника [Текст] / П.И. Алтынов, С.Г. Антоненко и др. – 4-е изд. – М.: Дрофа, 2004. – 164 с.

2. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. В. Сидоров, Ю. М. Колягин, и др. – М.: Просвещение, 2015. – 384 с.

3. Алгебра: учеб. для 8 кл. сред. шк./ Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров, Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 2014.

4. Алгебра: учеб. для 9 кл. сред. шк./ Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 2014.

5. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобраз. учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров, Ю.М. Колягин, и др. – М.: Просвещение, 2015.

6. Байдак, В.А. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография/ В. А. Байдак. — 3-е изд.,, стереотип. — М.: ФЛИНТА, 2016. – 264 с.

7. Бочкарева, В.Д. Сборник задач по математике для поступающих в вузы [Текст] / В.Д. Бочкарева. – М.: ОНИКС-ЛИТ, 2013. – 141 с.

8. Бочкарева, В.Д. Сборник задач по математике для поступающих в вузы [Текст] / В.Д. Бочкарева. – М.: ОНИКС-ЛИТ, 2013. – 141 с.

9. Блох, А. Методика преподавания математики в средней школе [Текст] / А. Блох, Е.С. Канин, Е.С. Черкасов и др. – М.: Просвещение, 2015. – 336 с.

10. Галицкий, М.Л. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Методические рекомендации для учителя (углублённый уровень) [Текст] / М.Л. Галицкий и др. – М.: Изд-во «Мнемозина», 2015.

11. Глухов, М.М. Задачник-практикум по алгебре [Текст] / М.М. Глухов, А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 2009. – 276 с.

12. Егерев, В.К. Сборник задач по математике для поступающих в вузы [Текст] / Б.А. Зайцев, В.К. Егерев, и др. – 6-е изд. – М.: ОНИКС–ЛИТ, 2013. – 608 с.

13. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / И.В, Ященко (и др.); под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247с.

14. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / И.В. Ященко (и др.); под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2016. – 256с. – (ЕГЭ. ФИПИ - школе).

15. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / И.В. Ященко (и др.); под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2017. – 256с. – (ЕГЭ. ФИПИ - школе).

16. Кокурина, Ю.К. Арифметика, алгебра, анализ [Текст] / Ю.К. Кокурина – Владимир: ВлГУ, 2016. – 143с.

17. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Ивлев Б. М., Дудницын Ю. П., Шварцбурд С. И., Алгебра и начала анализа.: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2002. – 384 с. : ил.

18. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. – М.: «ABF», 2013.

19. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 кл. Учебник. – М.: Мнемозина, 2014.

20. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 кл. Учебник. – М.: Мнемозина, 2014.

21. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник. – М.: Мнемозина, 2014.

22. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2013. – 287 с.

23. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) /под ред. А. Г. Мордковича. 3-е изд., стер.– М. : Мнемозина, 2013. – 264 с.

24. Никольский, С. М. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, Н.Н. Решетников, М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2009. – 383 с.

25. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. – М.: Дрофа, 2015.

26. Пособие по элементарной математике: методы решения задач/Т.П. Григорьева, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, А.Н. Пыжьянова, Ч. I. – Н. Новгород: НГПУ, 2016.

27. Сканави, М.И. Логарифмические уравнения и неравенства. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы [Текст] / М.И. Сканави. – М.: Мир и Образование, 2015. – 912 с.

28. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе. – М.: Просвещение, 2015.

29. Элементарная математика: Общие методы решения уравнений и неравенств. Ч. 1: Учеб.-метод. пособие. – Н. Новгород: НГПУ, 2017.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задания элективного курса

10 класс.

1. Понятие и свойства логарифмов.

1.1. Вычислить: $7^{\frac{1}{\log_5 7}}$

Решение:

Способ 1:

$$\frac{1}{\log_5 7} = \frac{1}{\frac{\log_7 7}{\log_7 5}} = \frac{\log_7 5}{\log_7 7} = \log_7 5$$

$$7^{\log_7 5} = 5$$

1.2. Упростите выражение:

$$\frac{\log_2^2 10 + \log_2 10 * \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_4 75 - \log_2 \sqrt{3}}$$

Решение:

$$\log_2^2 10 + \log_2 10 * \log_2 5 - 2\log_2^2 5$$

$$= \log_2^2 10 - \log_2^2 5 + \log_2 10 * \log_2 5 - \log_2^2 5$$

$$= (\log_2 10 - \log_2 5) * (\log_2 10 + \log_2 5) + \log_2 5 (\log_2 10 - \log_2 5) =$$

$$= \log_2 \frac{10}{5} (\log_2 10 + \log_2 5) + \log_2 5 * \log_2 \frac{10}{5} =$$

$$= \log_2 10 + \log_2 5 + \log_2 5 = \log_2 10 + 2\log_2 5$$

$$= \log_2 (2 * 5) + 2\log_2 5 = 1 + 3\log_2 5$$

Окончательно имеем

$$\frac{\log_2^2 10 + \log_2 10 * \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_4 75 - \log_2 \sqrt{3}} = \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_4 75 - \log_2 \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1 + 3\log_2 5}{0{,}5\log_2 75 - \log_2 \sqrt{3}} = \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_2 \sqrt{75} - \log_2 \sqrt{3}} = \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_2 \sqrt{25}} =$$

$$= \frac{1 + 3\log_2 5}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2 5} + \frac{3\log_2 5}{\log_2 5} = \log_5 2 + 3 = \log_2 250$$

1.3. Вычислить значение выражения

$$(2 - \log_3 45)\,(1 - \log_5 45)$$

Решение:

Преобразуем заданное выражение:

$$(2-\log_3 45)(1-\log_5 45) = [2-\log_3 9*5][1-\log_5 9*5] =$$

$= [2 - logx_3 9 - \ logx_3 5][1-(\log_5 9+\log_5 5)] = \ (2-2-\log_3 5)(1-1-\log_5 9) = (-\log_3 5)*(-\log_5 9) = \log_3 5 * \frac{1}{\log_9 5} = \log_3 5 * \frac{1}{\log_{3^2} 5} =$

$$= \log_3 5 * \frac{1}{\frac{1}{2}\log_3 5} = 2\frac{\log_3 5}{\log_3 5} = 2$$

1.4. Вычислить

$$15\log_x(x-1), \text{если } x^3-4x^2+3x=1$$

Решение:

Из равенства $x^3-4x^2+3x=1$ следует $x^3-3x^2+3x-1=x^2$, откуда $(x-1)^3=x^2$

Имеем $x-1=x^{\frac{2}{3}}$

Теперь $15\log_x(x-1) = 15\log_x x^{\frac{2}{3}} = 15*\frac{2}{3} = 10$

1.5. Вычислить

$$\log_4 10 * \lg 0.5$$

Решение:

Используя формулу перехода к новому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}:$$

$$\log_4 10 * \lg 0.5 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 4} * \lg 0.5 = \frac{1}{\lg 4} * \lg\frac{1}{2} = \frac{1}{\lg 2^2} * \lg 2^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\lg 2}(-1)\lg 2 = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

1.6. Выразить $\log_3^2 4 - \log_2 25$ через a и b, если известно, что $\log_3 2 = a$ и $\log_3 5 = b$

Решение:

$$\log_3^2 4 - \log_2 25 = (2\log_3 2)^2 - 2\log_2 5 = 4\log_3^2 2 - 2\frac{\log_3 5}{\log_3 2} =$$

$$= 4a^2 - 2\frac{b}{a} = \frac{4a^3 - 2b}{a}$$

1.7. Какое из чисел больше:

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} \text{ или } 3^{\sqrt{\log_3 2}}$$

Решение:

Прологарифмируем оба выражения по основанию 3:

$$\log_3 2^{\sqrt{\log_2 3}} = \sqrt{\log_2 3} * \log_3 2 = \frac{\sqrt{\log_2 3}}{\log_2 3} = \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$$

$$\log_3 3^{\sqrt{\log_3 2}} = \sqrt{\log_3 2} * \log_3 3 = \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$$

Получили равные выражения, а значит, исходные числа равны

2. Логарифмическая функция, свойства и ее график.

2.1. Найти наименьшее значение функции

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(9 - x^2)$$

Решение:

$$D\left(\log_{\frac{1}{3}} t\right) = (0; +\infty), \text{поэтому } 9 - x^2 > 0, \text{откуда} -3 < x < 3.$$

Функция $t = 9 - x^2$ при $-\infty < x < 0$ возрастает, при $0 < x < +\infty$, в точке $x = 0$ принимает наибольшее значение. Так как $\frac{1}{3} < 1$, то при $-3 < x < 0$ функция $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ убывает, при $0 < x < 3$ функция $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ возрастает и принимает наименьшее значение в точке $x = 0$:

$$y(0) = \log_{\frac{1}{3}}(9 - 0^2) = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

2.2. Найти сумму целых значений функции

$$y = \log_2(128 - 124 * 2^{-|x|})$$

Решение:

Для $x \geq 0$ (этого условия достаточно для рассмотрения) имеем

$$y = \log_2(128 - 124 * 2^{-x}) = \log_2(128 - \frac{124}{2^x})$$

Имеем $y(0) = \log_2(128 - 124) = \log_2 4 = 2$

При $x \to +\infty$ выражение $128 - \frac{124}{2^x}$ стремится к 128, а $\log_2 128 = 7$

Тогда $2 \le y < 7$. Целыми значениями функции являются числа 2,3,4,5,6, а их сумма равна 20.

2.3. При каком значении а функция $y = a\ln x + x^2 - x$ имеет экстремум в точке $x = 1$?

Решение:

Функция $y = a\ln x + x^2 - x$ – определена и дифференцируема при всех $x > 0$.

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции в некоторой точке есть равенство нулю ее производной в этой точке.

Имеем $y' = \frac{a}{x} + 2x - 1 = 0$. При $x = 1$ находим а+2–1=0, откуда а = –1

Ответ: а = –1.

2.4. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ выполнено

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

Решение:

Очевидно, что $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

Поэтому, используя свойство логарифмической функции, имеем (при $n > 1$)

$$\log_n\left(\frac{n+1}{n}\right) > \log_{n+1}\frac{n+1}{n} > \log_{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$

Преобразуя левую и правую части, сразу получаем, что

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

Отсюда, например, следует, что

$$\log_2 3 > \log_3 4 > .. > \log_{k+1}(k+2)$$

3. Решение уравнений методом, построенным на определении логарифма

3.1. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0$$

Решение

По определению логарифма имеем: $\log_5 \sqrt{5x} = \left(\frac{1}{5}\right)^0$, т.е. $\log_5 \sqrt{5x} = 1$, откуда $\sqrt{5x} = 5^1$. Следовательно, 5x=25, x=5.

Проверка: при x=5 имеем

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5 * 5} = \log_{\frac{1}{5}} \log_5 5 = \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$$

0=0 – верное числовое равенство. Следовательно, x=5 – корень исходного уравнения.

Ответ: 5.

3.2. Решите уравнение

$$\log_2 \left(1 + \frac{1}{\mathrm{x}}\right) = 3$$

Решение

По определению логарифма имеем $1 + \frac{1}{\mathrm{x}} = 2^3$

Отсюда $1 + \frac{1}{\mathrm{x}} = 8, \frac{1}{\mathrm{x}} = 7, \mathrm{x} = \frac{1}{7}$

Проверка убеждает нас в том, что число $\mathrm{x} = \frac{1}{7}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{7}$

3.3. Решите уравнение

$$\log_{x^2-1} 27 = 3$$

Решение

Найдем область определения заданного уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 1 \end{cases}$$

По определению логарифма имеем $(x^2 - 1)^3 = 27$

Отсюда $x^2 - 1 = \sqrt[3]{27}, x^2 - 1 = 3, x^2 = 4, \mathrm{x}_1 = -2, \mathrm{x}_2 = 2$

Оба найденных значения удовлетворяют неравенствам системы.

Ответ: –2;2.

3.4. Решите уравнение

$$\log_{\mathrm{x}}(\mathrm{x} + 6) = 2$$

Решение

Найдем область определения заданного уравнения, для чего решим систему неравенств

$$\begin{cases} \mathrm{x} + 6 > 0 \\ \mathrm{x} > 0 \\ \mathrm{x} \neq 1 \end{cases}$$

откуда $\mathrm{x} \epsilon (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

По определению логарифма имеем $x^2 = x + 6$, откуда $x^2 - x - 6 = 0$,

$$\mathrm{x}_1 = 3, \mathrm{x}_2 = -2$$

Число $\mathrm{x} = 3$ входит в область определения уравнения. Подстановка его в исходное уравнение дает нам верное числовое равенство $\log_3 9 = 2\,, 2 = 2$. Следовательно, x=3 – корень заданного уравнения

Число $\mathrm{x} = -2$ не входит в область определения исходного уравнения, а значит, его корнем быть не может.

Ответ: 3.

3.5. Решите уравнение:

$$\log_3(3^{\mathrm{x}} - 8) = 2 - \mathrm{x}$$

Решение

По определению логарифма имеем $3^{\mathrm{x}} - 8 = 3^{2-x}$, т.е. $3^{\mathrm{x}} - 8 = \frac{9}{3^{\mathrm{x}}}$

Введем новую переменную $t = 3^x$

Будем иметь $t^2 - 8t - 9 = 0$, откуда $t_1 = -1, t_2 = 9$

Вернемся к прежней переменной x: имеем $3^x = -1$, $3^x = 9$

Первое уравнение не имеет решений, ибо степень 3^x не может иметь отрицательных значений. Из второго уравнения имеем x=2.

Ответ: 2.

4. Метод введения новой переменной

4.1. Решите уравнение

$$\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$$

Решение

Так как область определения задается неравенством $x > 0$, то $\lg^2 x = 2\lg x = \lg\, x^2$. Уравнение примет вид $\lg^2 x - 5\lg x + 4 = 0$

Введя новую неизвестную $t = \lg x$, будем иметь $t^2 - 5t + 4 = 0$, откуда $t_1 = 1, t_2 = 4$

Имеем $\lg x = 1$, т.е. x=10, или $\lg x = 4$, т.е. x=10000

Проверка показывает, что оба числа удовлетворяют исходному уравнению, а значит, являются его корнями.

Ответ: 10; 10 000.

4.2. Решите уравнение

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg\frac{x}{10}}$$

Решение

Заданное уравнение можно записать в виде $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$

Введя новую неизвестную $t = \lg x$, будем иметь $t^2 + t + 1 = \frac{7}{t-1}$

Отсюда, требуя, чтобы выполнилось условие $t - 1 \neq 0$, получаем

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 7, t^3 = 8, t = 2$$

Из уравнения $\lg x = 2$ находим x=100.

По результатам проверки, x=100 и следовательно является корнем исходного уравнения.

Ответ: 100.

4.3. Решите уравнение

$$\lg^2 x^3 - \lg(0{,}1\, x^{10}) = 0$$

Решение

Используя свойства логарифмов, исходное уравнение можно записать в виде

$$\lg^2 x^3 - \lg x^{10} - \lg 0.1 = 0$$

откуда $9\lg^2 x - 10\lg|x| + 1 = 0$

Учитывая, что область определения исходного уравнения задается неравенством $x > 0$, мы можем последнее уравнение записать в виде

$$9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0$$

Введя переменную $t = \lg x$, получим $9t^2 - 10t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{9}$. Из уравнения $\lg x = 1$ находим x=10, а из второго уравнения $\lg x = \frac{1}{9}$ находим $x = \sqrt[9]{10}$

Оба найденных числа обращают исходное уравнение в верное числовое равенство, а значит, являются его решениями.

Ответ: 10; $\sqrt[9]{10}$

5. Уравнения, которые содержат неизвестное под знаком логарифмической функции

5.1. Решите уравнение

$$\log_2(9 - 2^{x-4}) = 7 - x$$

Решение

По определению логарифма имеем $9 - 2^{x-4} = 2^{7-x}$, откуда, положив $t = 2^x$, получим $9 - \frac{t}{16} = \frac{2^7}{t}$. Это уравнение равносильно квадратному уравнению $t^2 - 2^4 * 3^2 * t + 2^{11} = 0$. Его корнями являются $t_1 = 2^4, t_2 = 2^7$

Из уравнения $2^x = 2^4$ получим x=4, а из уравнения $2^x = 2^7, x = 7$

Проверка показывает, что оба числа x=4 и x=7 являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 4;7.

5.2. Решите уравнение

$$x^{1-\lg x} = 1$$

Решение

Область определения исходного уравнения задается неравенством $x > 0$. В этой области выражения, содержащиеся в обеих частях заданного уравнения, принимают только положительные значения, а тогда логарифмы этих выражений существуют. Прологарифмировав исходное уравнение по основанию 10, получим $(1-\lg x)\lg x = \lg 1$, откуда $1-\lg x = 0$ или $\lg x = 0$

Итак, имеем x=10 или x=1. Проверка показывает, что оба числа являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1;10.

5.3. Решите уравнение

$$\log_3 x * \log_9 x * \log_{27} x = 6^{\log_{0.2} 5}$$

Решение

Используя формулу $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, перейдем к логарифмам с одним и тем же основанием: $\frac{1}{\log_x 3} * \frac{1}{\log_x 3^2} * \frac{1}{\log_x 3^3} = 6^{-1}$

$\frac{1}{6*log_x^3\ 3} = \frac{1}{6}$

$log_x^3 3 = 1$ (x>0)

$\log_x 3 = 1$

$x^1 = 3$

X = 3/

Ответ: 3.

5.4. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_7 x + 3} = \log_7 x + 1$$

Решение

ОДЗ: x>0

Полагая в данном уравнении $\log_7 x = t$, получим уравнение

$$\sqrt{t+3} = t+1;$$

$$\begin{cases} t+3 = t^2+2t+1 \\ t+1 \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} t^2+t-2 = 0 \\ t \geq -1 \end{cases}; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2, \end{array} \right. \\ t \geq -1 \end{cases}$$

откуда t=1, $\log_7 x = 1$, x=7 (x>0).

Ответ:7.

5.5. Решите уравнение

$$\log_2(x-3) = \log_3 9 - \log_2 x$$

Решение

Данное уравнение можно решить следующим образом:

$$\log_2(x-3) = 2 - \log_2 x$$

$$\log_2(x-3) = \log_2 4 - \log_2 x$$

$$\log_x(x-3) = \log_2 \frac{4}{x}$$

$$\begin{cases} x-3=\frac{4}{x} \\ x-3>0 \\ x\neq 0 \\ x>0 \end{cases}, \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x>3 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \\ x>3 \end{cases}$$

Предложим несколько измененное решение предложенного уравнения.

$$\log_2(x-3)+\log_2 x=2$$

$$\begin{cases} \log_2 x(x-3)=2 \\ x-3>0 \\ x>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \log_2(x^2-3x)=\log_2 4 \\ x>3 \end{cases}; \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right. \\ x>3 \end{cases}$$

Ответ: 4.

6. Итоговое занятие по теме: «Логарифмические уравнения»

7. Контрольная работа

1) Решите: $\log_x(x+6)=2$;
2) Решите: $\lg^2 x+\lg x+1=\frac{7}{\lg\frac{x}{10}}$;
3) Решите: $\lg^2 x^3-\lg(0{,}1\,x^{10})=0$;
4) Решите: $x^{1-\lg x}=1$
5) Решите: $\sqrt{\log_7 x+3}=\log_7 x+1$.