ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика
заочной формы обучения, группы 02041556
Лысогор Ирины Владимировны

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Сокольский А.Г.

Белгород 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие модуль числа встречается в различных разделах математики. Иногда можно встретить такие названия, как абсолютное значение, абсолютная величина - это синонимы к слову модуль. Модуль числа применяется в технических науках. Решение уравнений и неравенств с модулем требует от учащихся внимания, знания основных свойств модуля, методов решения. При решении примеров, содержащих знак модуля ученик должен провести анализ, рассмотреть все случаи при которых возможно решение, уметь решать систему уравнений и в конечном счете найти верное решение.

Актуальность исследования: в школьном курсе математики в большом объеме рассматриваются уравнения и неравенства. Однако, уравнениям и неравенствам, содержащим знак модуля уделяется недостаточно внимания при изучении. Даже хорошо успевающие ученики в классе испытывают трудности и чувство растерянности при решении уравнений и неравенств с модулем. Поэтому эта тема требует дополнительного изучения вне урока. Для этого необходимо проводить факультативные занятия, элективные курсы по данной теме. Элективный курс не только повысит уровень учащихся при решении уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а также поспособствует развитию логического и альтернативного мышления. Важность углубленного изучения этой темы также обусловлена тем, что в заданиях ЕГЭ встречаются примеры, содержащие переменную под знаком модуля. Иногда в примерах модуль виден не сразу, а в процессе решения возникает необходимость применения его свойств.

Цель исследования: разработка методических рекомендаций по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля».

Объект исследования: процесс обучения решению уравнений и неравенств с модулем.

Предмет исследования: методы решения уравнений и неравенств, содержащие знак модуля, в школьном курсе математики.

Задачи исследования:

1. Собрать теоретический материал по теме;

2. Собрать практический материал по теме;

3. Подвергнуть материал обобщению и систематизации;

4. Изучить основные теоремы и определения;

5.Описать основные методы решения уравнений и неравенств с модулем.

6. Разработать методику формирования умений и навыков решать уравнения и неравенства с модулем.

Методы исследования:

1.Теоретический анализ научной литературы;

2.Опыт учителей общеобразовательных организаций;

3.Анализ учебно-методических пособий, учебников, дидактических материалов.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы. Библиографический список содержит 30 наименований источников. В первой главе рассматривается понятие модуль и его свойства, основные методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Во второй главе представлена программа элективного курса, которая поможет учащимся повысить свой уровень знаний при решении уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а также поспособствует развитию логического и альтернативного мышления.

ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

1.1 Модуль и его свойства

Понятие модуля в школьном курсе математики вводится в 6 классе. В учебнике 6 класса А.Г. Мордковича модуль определяется как расстояние: «Расстояние от точки А(а) до начала отсчета, т.е. до точки О(0), называется модулем числа а, и обозначают |a|». В данном учебнике вывести некоторые свойства модуля предлагается ученикам самостоятельно [13].

В учебнике Н.Я. Виленкина модуль также определяется как расстояние: «модулем числа а называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки А(а)». Но в данном учебнике свойства модуля выведены все [7].

Модуль числа а обозначается $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

- модуль числа всегда неотрицателен: $|a| \geq 0$.
- для положительного числа и нуля он равен самому числу, а для отрицательного –противоположному числу.
- противоположные числа имеют равные модули
- модуль числа 0 равен 0, так как точка с координатой 0 совпадает с началом отсчета 0, т.е. удалена от нее на 0 единичных отрезков:$|0| = 0$

Теорема 1: Абсолютная величина действительного числа $a \neq 0$ равна большему из двух чисел а или -а .

1. Если число а положительно, то –а отрицательно, т. е. $-a < 0 < a$. Отсюда следует, что $-a < a$. В этом случае $|a| = |a|$, т. е. совпадает с большим из двух чисел а и -а.

2. Если а отрицательно, тогда –а положительно и $a < -a$, т. е. большим числом является -а. По определению, в этом случае, $|a| = - |a|$ снова, равно большему из двух чисел –а и а.

Следствие 1. Из теоремы следует, что $|- a| = |a|$.

В самом деле, как |- a|, так и |a| равны большему из чисел –a и a, а значит, равны между собой.

Следствие 2. Для любого действительного числа a справедливы неравенства $a \le |a|$,$-a \le |a|$.

Умножая второе равенство $-a \le |a|$ на -1 (при этом знак неравенства изменится на противоположный), мы получим следующие неравенства:

$a \le |a|$, $a \ge -a$ справедливые для любого действительного числа a. Объединяя последние два неравенства в одно, получаем: $-|a| \le a \le |a|$ [19].

Теорема 2: Абсолютная величина любого действительного числа a равна арифметическому квадратному корню из a^2: $|a| = \sqrt{a^2}$.

В самом деле, если $a \ge 0$, то по определению модуля числа, будем иметь $|a| = a$. С другой стороны, $a \ge 0$ при $\sqrt{a^2}$ =a, значит$|a| = \sqrt{a^2}$.

Если a< 0, тогда |- a| = - |a| и $\sqrt{a^2} = -a$ и в этом случае $|a| = \sqrt{a^2}$. При решении некоторых задач эта теорема дает возможность заменять $|a|$ на $\sqrt{a^2}$.

Основные свойства модуля для всех a,b ∈ R:

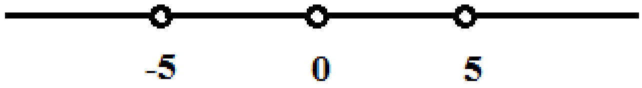
1. $|a| \ge 0$, $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$;
2. $|-a|=|a|$;
3. $|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$;
4. $||ab||=|a||b|$
5. $|a+b| \le |a|+|b|$
6. $|ca|=c \cdot |a|$, при $c > 0$
7. $|a|^2=a^2$ [19].

Модуль числа $|a|$ можно рассматривать и с геометрической точки зрения. Так $|a|$ можно представить как расстояние от точки, изображающей число a до начала отчета на координатной прямой.

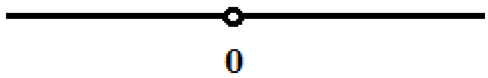
Если a$\neq 0$, то существуют две точки a и –a, которые равноудалены от нуля и модули которых равны.

Если $a = 0$, то на координатной прямой $|a|$ изображается точкой 0.

Пример: Изобразить на координатной прямой $|x| = 5$



Пример: Изобразить на координатной прямой $|x| = 0$



Рассмотрим простейшие примеры, которые предлагаются для решения ученикам 6 класса. Данные примеры приведены в учебнике Н.Я. Виленкина:

- Найдите модуль каждого из чисел: 81;1,3; -5; -2,5; -52.
- Найдите значение выражения $|x|$, если x = -12,3; 12,3; -66; -75; $-\frac{1}{2}$;
- Найдите значение выражения: |-8|-|5|; |-2,3|+|3,7|; $|-\frac{4}{5}|-|-\frac{2}{3}|$ [7].

На этих примерах школьники отрабатывают навыки, полученные на уроке, производят самые простые операции с модулем. Приходит понимание, что модуль может принимать, как положительные, так и отрицательные значения.

В задачнике Мордковича для 8 класса приведены задания, в которых необходимо применить свойства модуля для нахождения решения, а также графический способ решения.

- Решить графически уравнение: $-|x+2|+4=0$; $|x-3|=2$; $|x+2| = -\frac{1}{3}x + 2$
- Решить уравнение: $|x| = 1$; $|2x-1| = 5$; $\left|x-\sqrt{2}\right| = 1-\sqrt{2}$; $\left|x-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}$
- Решить уравнение: $|x^2-4x+3| = x-1$
- Решить уравнение: $|x^2-6x+10| = |x+10|$ [18].

В учебнике Мордковича для 9 класса рассматривается решение неравенств, содержащих знак модуля. Решение находится с помощью геометрического смысла модуля.

– Решить неравенство: $|x-2| < 3$

– Решить неравенство: $|x+3{,}2| \leq 2$

– Решить неравенство: $|10x| > 27$ [19].

1.2 Методика обучения решению уравнений, содержащих знак модуля

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, для школьников являются сложным материалом для усвоения. Задания ЕГЭ, в которых встречаются примеры с модулем, вызывают трудность у выпускников и ученики допускают частые ошибки. Возможно, это связано с тем, что для решения необходимо проводить иногда громоздкие вычисления, особенно если это задача повышенной сложности, содержащая параметр. При решении необходимо рассматривать все возможные случаи, логически мыслить, решать несколько систем. Для лучшего усвоения и понимания темы учитель должен систематизировать и обобщить материал, чтобы у учеников сложилась определенная схема при решении уравнений определенных типов. Для достижения этой цели учитель использует различные методы и подходы в обучении [3].

1.Решение уравнений, используя определение модуля.

В 6 классе ученики знакомятся с понятием модуль. После нескольких уроков ученикам предлагаются к решению простые задания, решения которых необходимо искать, применяя свойства модуля, которые были пройдены на уроке.

Пример: $|5x-2| = 3$

По определению модуля, раскрываем модуль сначала с плюсом, а затем с минусом. Полученные значения x_1 и x_2 подставляем в исходное уравнение, чтобы убедиться в правильности решения.

$5x-2=3$, $x=1$ $\qquad\qquad$ $-5x+2=3$, $x=-\frac{1}{5}$

Делаем подстановку:

При $x = 1$: $|5 - 2| = 3| \to |3| = 3| \to 3 = 3$, получили верное равенство.

При $x = -\frac{1}{5}$:$|5 \times (-\frac{1}{5})$-2$| = 3 \to |-1 - 2| = 3 \to |-3| = 3 \to 3 = 3$, получили верное равенство.

Таким образом, оба полученных нами корня являются решением уравнения.

При решении такого вида уравнений, ученикам необходимо быть внимательными и обязательно делать подстановку и проверку, полученных решений. Иначе, возможно записать в ответ корни, которые не являются решением данного уравнения.

В 8-9 классах задания с модулем усложняются, принцип решения также остается на использовании свойства модуля, но подмодульное выражение имеет уже более сложный вид [17].

Пример: $|x^2 - 7x + 6| = 6$

Раскрываем с плюсом: $x^2 - 7x + 6 = 6$

$x^2 - 7x$ =0

$x(x - 7) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 7$

Раскрываем с минусом: $-x^2 + 7x - 6 = 6$

$-x^2 + 7x - 12 = 0$, умножаем все на (-1)

$x^2 - 7x + 12 = 0$

D= 49-4$\times$ 12=1

$x_3 = \frac{7+1}{2} = 4$ $x_4 = \frac{7-1}{2} = 3$

Полученные решения подставляем в исходное уравнение:

При $x = 0$: $|6| = 6 \to 6 = 6$, получили верное равенство

При $x = 7$: $|49 - 49 - 6| = 6 \to |6| = 6 \to 6 = 6$, получили верное равенство

При $x = 4$: $|16 - 28 + 6| = 6 \to |-6| = 6 \to 6 = 6$, верное равенство

При $x = 3$: $|9 - 21 + 6| = 6 \to |-6| = 6 \to 6 = 6$,получили верное равенство

Таким образом все 4 ответа являются решениями.

Ответ: 0;3;4;7.

2. Решение уравнений вида $|f(x)| = a$

Рассмотрим возможные варианты: если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

Если $a = 0$, то уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$

Если $a > 0$, то уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$ [28].

Пример: $|x - 8| = 3$

Так как у нас $3 > 0$, то уравнение равносильно совокупности

$\left[\begin{array}{l} x - 8 = 3 \\ x - 8 = -3 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = 5 \end{array}\right.$, проверим полученные решения подстановкой в исходное уравнение

При $x = 11$: $|11 - 8| = 3 \rightarrow |3| = 3 \rightarrow 3 = 3$

При $x = 5$: $|5 - 8| = 3 \rightarrow |-3| = 3 \rightarrow 3 = 3$

Оба полученных решения является корнями исходного уравнения.

Ответ: 5;11.

3.Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$

а) Решение такого типа уравнений сводится к решению совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

Так же необходимо к этой совокупности добавить условие $g(x) \geq 0$, так как по свойствам модуля, модуль числа не может быть отрицательным.

б) Уравнения с модулем вида $|f(x)| = g(x)$, можно решать используя систему $\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

Либо можно решить уравнение вида $f^2(x) - g^2(x) = 0$, проверив потом полученные корни подстановкой в исходное уравнение.

Сведение исходного уравнения к виду $f^2(x) - g^2(x) = 0$ целесообразно применять, если хотя бы одна из функций $f(x)$ и $g(x)$ является иррациональной [28].

Пример: $|2x - 6| = x^2 - 7x + 12$

Данное уравнение соответствует виду $|f(x)| = g(x)$, значит решение ищем в виде

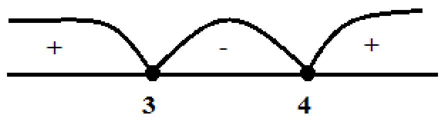
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-6=x^2-7x+12 \\ 2x-6=-x^2+7x-12 \end{array}\right. \\ x^2-7x+12 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-9x+18=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right. \\ x^2-7x+12 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=6 \quad x_2=3 \\ x_3=3 \quad x_4=2 \end{array}\right. \\ x^2-7x+12 \geq 0 \end{cases}$$

Решаем неравенство и смотрим удовлетворяют ли полученные нами корни этому неравенству.

$x^2-7x+12 \geq 0$

Решением являются корни $x_1=4 \quad x_2=3$.

Нанесем корни неравенства на числовую прямую и отметим необходимый промежуток принимающий значение ≥ 0.



Нашему неравенству удовлетворяют $x \in (-\infty, 3]\ [4, +\infty)$. Проверяем полученные корни, они должны входить в этот промежуток. Все корни, удовлетворяют промежутку, значит все они являются решением данного уравнения.

Ответ: 2;3;6

Пример: $\left|\sqrt{x^2+4x+1}\right| = \sqrt{2x+9}$

Так как у нас в обеих частях уравнения функция находится под знаком корня, то целесообразно свести исходное уравнение к виду:

$f^2(x)-g^2(x)=0$, добавив условие $g(x) \geq 0$.

В нашем случае $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}$, $g(x)=\sqrt{2x+9}$

$(\sqrt{x^2+4x+1})^2 = (\sqrt{2x+9})^2$

$x^2+4x+1=2x+9$

$x^2+4x+1-2x-9=0$

$x^2+2x-8=0$

D= 4+4× 8=36

$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$

Проверим полученные корни, подставив в исходное уравнение:

При $x_1 = 2$: $\left|\sqrt{4+8+1}\right| = \sqrt{4+9} \rightarrow \left|\sqrt{13}\right| = \sqrt{13} \rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{13}$

При $x_2 = -4$: $\left|\sqrt{16-16+1}\right| = \sqrt{-8+9} \rightarrow |1| = 1 \rightarrow 1 = 1$

Ответ: -4; 2

4.Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$

По свойству модуля $|a| = |b|$, если $a = \pm b$, то

$|f(x)| = |g(x)| \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$. Так же как и в предыдущем случае можно воспользоваться способом возведения в квадрат.

$|f(x)| = |g(x)| \rightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \rightarrow \big(f(x) + g(x)\big)\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ [28]

Пример: Решить уравнение $|8x - 3| = |9 - x|$

$$|8x - 3| = |9 - x| \rightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 3 = 9 - x \\ 8x - 3 = -9 + x \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 9x = 12 \\ 7x = -6 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = -\dfrac{6}{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{6}{7}$; $\frac{4}{3}$

5. Графический способ решения

Графический способ решения применяется для приближенного решения уравнений, содержащих знак модуля. Этим методом можно графически определить количество корней. Чтобы использовать этот метод при решении уравнений с модулем ученики должны хорошо владеть знаниями построения графиков различных функций. Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ необходимо проделать следующие шаги:

1.Необходимо сначала построить график функции $y = f(x)$

2.Так как модуль может принимать только положительные значения, то необходимо ту часть графика, которая находится ниже оси OX отобразить симметрично выше оси OX [14].

В заданиях обычно даны две различных функции y. Для решения строим обе эти функции на одной координатной плоскости. Точки пересечения этих графиков являются корнями этого уравнения.

Пример: Найдите количество корней уравнения $y = |x^2 - 7x + 12|$ и $y = x + 1$. Для начала строим график функции $y = |x^2 - 7x + 12|$. Для этого построим график функции $y = x^2 - 7x + 12$. Часть параболы, которая находится под осью OX отображаем симметрично выше оси OX. Затем строим вторую функцию $y = x + 1$, графиком которой является прямая (рис.1).

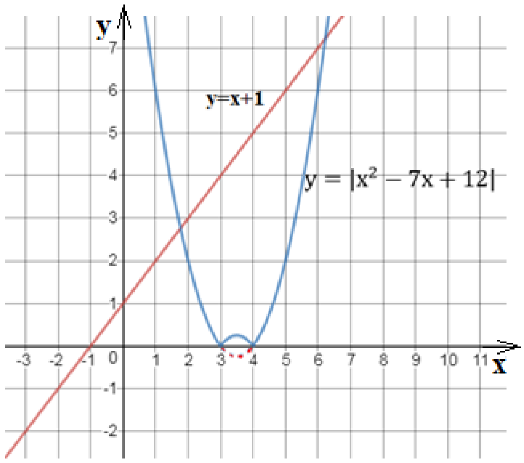


Рис.1 Графическое представление решения $|x^2 - 7x + 12| = x + 1$

На графике видно, что обе функции пересекаются в двух точках. Таким образом корней в нашем уравнении два.

Пример: Решить графически уравнение $-2 + |x| = 1$

Преобразуем исходное уравнение, получим: $|x| = 3$, тогда в нашем случае y=|x| и y=3. Строим графики этих функций (рис.2).

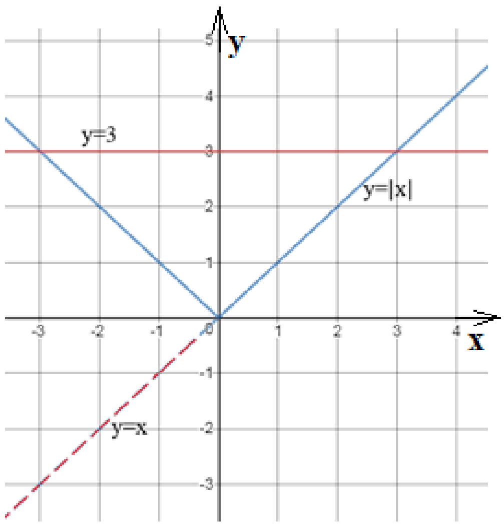


Рис.2 Графическое представление решения $-2 + |x| = 1$

Из графика видно, что решением уравнения являются два корня с координатами (3,3) и (-3,3) [27].

6. Метод интервалов

Данный метод используется для уравнений имеющих вид: $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| = g(x)$.

Первое что нужно сделать, это найти нули функции, т.е. те точки в которых функция обращается в ноль. Далее разбить прямую этими точками на промежутки. В полученных промежутках функция сохраняет свой знак, необходимо определить знак функции для каждого промежутка. После чего следует раскрыть знак модуля и решить полученные уравнения. Объединение найденных решений составляет множество решений заданного уравнения [11].

Пример: $|5 - \mathrm{x}| + |\mathrm{x} - 2| = 5$

Находим нули функции: $5 - \mathrm{x} = 0$, $\mathrm{x}_1 = 5$

$\mathrm{x} - 2 = 0,\ \mathrm{x}_2 = 2$

Теперь мы видим что область допустимых значений разбивается точками $\mathrm{x}_1 = 5$ и $\mathrm{x}_2 = 2$ на 3 интервала: $\mathrm{x} < 2,\ 2 \leq \mathrm{x} \leq 5,\ \mathrm{x} > 5$

Составим таблицу, в которой выпишем знаки функции на этих промежутках.

5-x	+	+	—
x-2	—	+	+

2 *5*

Теперь раскрываем модули согласно подученной таблице для 3-х интервалов. Знак плюс в таблице означает, что раскрываем модуль со знаком плюс, соответственно знак минус означает, что меняем все знаки в подмодульном выражении меняем на противоположные и убираем модуль. Получаем три системы:

1. $\begin{cases} \mathrm{x} < 2 \\ 5 - \mathrm{x} - \mathrm{x} + 2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} < 2 \\ \mathrm{x} = 1, \quad \in (-\infty, 2) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2 \leq \mathrm{x} \leq 5 \\ 5 - x + x - 2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \leq \mathrm{x} \leq 5 \\ 3 = 5, \quad \emptyset \end{cases}$

3. $\begin{cases} x > 5 \\ -5 + x + x - 2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x = 6\,, \in (5, +\infty) \end{cases}$

Ответом являются 2 корня x=1 и x= 6 [27].

7. Решение уравнений заменой переменной

Решение уравнений с модулем методом замены переменной может существенно упростить задачу, главное сделать правильную замену. Метод основан на тождестве $t^2 = (|t|)^2$ [8].

Пример: $5(3\text{x} - 1)^2 - 4|3\text{x} - 1| - 1 = 0$

В данном случае можно сделать замену $t = |3\text{x} - 1|$. По свойству модуля $(|t|)^2 = t^2$. Тогда исходное уравнение примет вид: $5t^2 - 4t - 1 = 0$

Далее решаем полученное уравнение как обычное квадратной уравнение.

$\text{D} = 16 + 4 \times 5 \times 1 = 36$

$$t_1 = \frac{4 + 6}{10} = 1$$

$t_2 = \frac{4-6}{10} = -\frac{2}{10}$, не является решением

После получения корней, не спешим записывать их в ответ, т.к. мы нашли t, то необходимо сделать обратную замену, чтобы найти корни x.

$t = |3\text{x} - 1| \rightarrow 1 = |3\text{x} - 1|$

Теперь решаем обычное уравнение вида $|f(x)| = a.$ Уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3\text{x} - 1 = 1 \\ 3\text{x} - 1 = -1 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 3\text{x} = 2 \\ 3\text{x} = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{x} = \dfrac{2}{3} \\ \text{x} = 0 \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $\frac{2}{3}$

8. Решение уравнений с параметрами

Простейшие задачи с параметром встречаются в 8 классе. Данный вид уравнений является достаточно сложным. Задания такого типа часто встречаются в ЕГЭ. Поэтому необходимо иметь навыки по решению данных видов уравнений.

Пример: Решите уравнение для каждого параметра p $|\text{x}| = p$

Решение: Раскроем знак модуля по определению: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = p \\ x = -p \end{array}\right. \\ p > 0 \end{cases}$

При $p < 0$, уравнение решения не имеет, так как модуль числа не может принимать отрицательных значений.

При $p = 0$, $\mathrm{x} = 0$

Ответ: при $p > 0$, $\mathrm{x} = \pm p$; при $p = 0$, $\mathrm{x} = 0$; при $p < 0$, корней нет.

1.3 Методика обучения решению неравенств, содержащих знак модуля

Методы решения неравенств такие же как и методы решения уравнений с модулем. При решении неравенств, содержащих знак модуля применяются также графический способ решения и метод интервалов.

Рассмотрим каждый способ в отдельности.

1. Решение неравенств $|\mathrm{f(x)}| < \mathrm{a}$ и $|\mathrm{f(x)}| \geq \mathrm{a}$

Неравенства вида $|\mathrm{f(x)}| < \mathrm{a}$:

- если $\mathrm{a} \leq 0$, то решений нет
- если $\mathrm{a} > 0$, то $-a < \mathrm{f(x)} < a$

Неравенства вида $|\mathrm{f(x)}| \geq \mathrm{a}$:

- если $\mathrm{a} \leq 0$, то $x \in R$
- если $\mathrm{a} > 0$, то $\left[\begin{array}{l} \mathrm{f(x)} \geq \mathrm{a} \\ \mathrm{f(x)} \leq -a \end{array}\right.$

2. Решение неравенств вида $|\mathrm{f(x)}| < \mathrm{g(x)}$ и $|\mathrm{f(x)}| > \mathrm{g(x)}$.

- Неравенства вида $|\mathrm{f(x)}| < \mathrm{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

Также его можно решить, заменив двойным неравенством

$-\mathrm{g(x)} \leq \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{g(x)}$

Неравенство $|\mathrm{f(x)}| \leq \mathrm{g(x)}$ можно решить возведением в квадрат обеих частей, при условии, что $\mathrm{g(x)} \geq 0$.

$|f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$

- Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно объединению $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$ [25].

Пример: $|x^3 - 2x - 4| \leq 2x - 4$

Данное неравенство заменим на равносильное неравенство.

$-2x + 4 \leq x^3 - 2x - 4 \leq 2x - 4$

$-2x + 4 + 2x + 4 \leq x^3 \leq 2x - 4 + 2x + 4$

$-2x + 4 + 2x + 4 \leq x^3 \leq 2x - 4 + 2x + 4$

$8 \leq x^3 \leq 4x$

Решим эти неравенства в отдельности.

$x^3 - 4x \leq 0$

$x\,(x^2 - 4) \leq 0$

$x\,(x - 2)(x + 2) \leq 0$

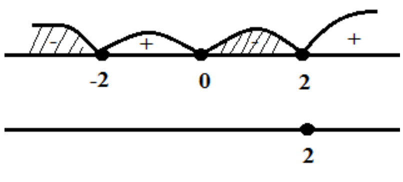
$x_1 = 0, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = -2$

$x^3 - 8 \geq 0$

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \geq 0$

$x_4 = 2$

Полученные корни нанесем на числовую прямую. Так как у нас в первом уравнении знак неравенства $\leq$ нуля, значит выбираем интервал, где наши значения принимают отрицательные значения. Решением второго уравнения является только корень $x_4 = 2$, так как неравенство $x^2 + 2x + 4 \geq 0$ действительных корней не имеет.



На рисунке видно, что данная система имеет единственный корень x=2.

Ответ: 2

Неравенства вида $|f(x)| < |g(x)|$ и $|f(x)| > |g(x)|$ можно решить возведением в квадрат обеих частей $f^2(x) - g^2(x) < 0,\ f^2(x) - g^2(x) > 0$.

Пример: $3|x + 1| \geq |x + 5|$

Обе части неравенства неотрицательны при любых значениях х, поэтому возводим обе части неравенства в квадрат.

$(3(x + 1))^2 \geq (x + 5)^2$

$9x^2 + 18x + 9 \geq x^2 + 10x + 25$

$8x^2 + 8x - 16 \geq 0$

Сократим уравнение на восемь, получим

$x^2 + x - 2 \geq 0$

D=1+4$\times 1 \times 2 = 9$

$x_1 = 1,\ x_2 = -2$

Берем промежутки, где значения принимают положительные значения, так как у нас в неравенстве стоит знак ≥ 0.

Ответ: $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

3. Решение неравенств, содержащих знак модуля методом интервалов

Метод интервалов используется при решении неравенств, содержащих алгебраическую сумму двух и более модулей. Далее необходимо найти нули функции, т.е. те точки в которых функция обращается в ноль. Далее разбить прямую этими точками на промежутки. В полученных промежутках функция непрерывна и не обращается в нуль, сохраняет свой знак. На каждом из найденных промежутков раскрываем знак модуля и решаем неравенства. Объединяя полученные множества решений, находим решение исходного неравенства [29].

Пример: $|x - 1| + |x - 2| \leq x + 3$

Найдем нули функции, в данном случае $x_1 = 1, x_2 = 2$

Решаем данное неравенство на каждом интервале:

1) $\begin{cases} x < 1 \\ -x + 1 - x + 2 \leq x + 3 \end{cases}$, $0 \leq x < 1$

2) $\begin{cases} 1 \leq \mathrm{x} < 2 \\ x - 1 - x + 2 \leq x + 3 \end{cases}$, $1 \leq x < 2$

3) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x - 1 + x - 2 \leq x + 3 \end{cases}$, $2 \leq x \leq 6$

Объединяя полученные множества решений, находим решение исходного неравенства: $0 \leq x \leq 6$

Ответ: $[0; 6]$

4.Графический способ решения

Для решения неравенства графическим методом необходимо построить графики функций на одной координатной прямой. Графики будут пересекаться в каких-либо точках, если таких точек не найдется, значит неравенство решений не имеет. В зависимости от знака неравенства необходимо определять область, которая подходит именно для нашего неравенства [14].

Пример: $|\mathrm{x} - 3| > |\mathrm{x} + 2| - 5$

Решением данного неравенства будут является множества значений x, для которых ординаты графика функции $y = |\mathrm{x} - 3|$ больше ординат графика $y = |\mathrm{x} + 2| - 5$ (рис.3).

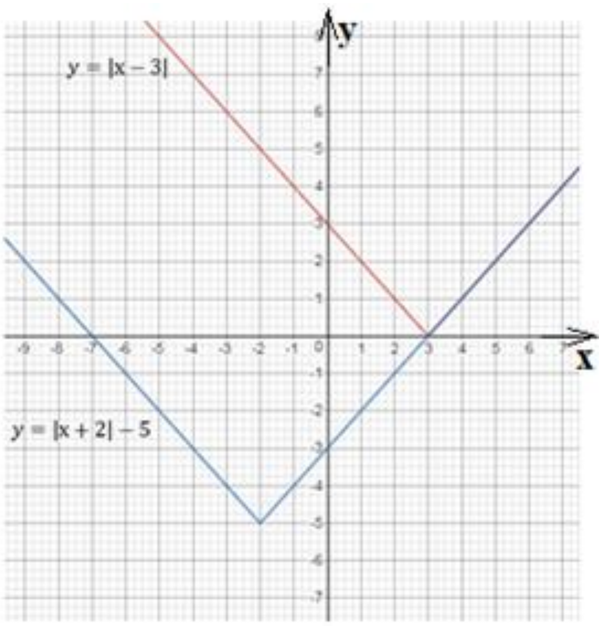


Рис.3 Графическое представление решения $|\mathrm{x} - 3| > |\mathrm{x} + 2| - 5$

Для решения сначала необходимо построить график функции $y = \mathrm{x} - 3$. Графиком является прямая. Часть прямой, которая находится под осью ОХ отображаем симметрично выше оси ОХ. Далее также строим график функции $y = (\mathrm{x} + 2) - 5$ и также отображаем часть прямой, которая находится под осью ОХ симметрично выше оси ОХ. Графики строим на одной координатной плоскости. На графике видно, что множества значений x, для которых ординаты графика функции $y = |\mathrm{x} - 3|$ больше ординат графика $y = |\mathrm{x} + 2| - 5$ соответствуют промежутку $(-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 3)$

Пример: $\frac{1}{|\mathrm{x}-1|} \geq 1 - \mathrm{x}^3$

Находим область допустимых значений для функции $y = \frac{1}{|\mathrm{x}-1|}$. Точкой разрыва будет являться $\mathrm{x} \neq 1$, так как знаменатель не может быть равным нулю. Строим графики функций $y = \frac{1}{|\mathrm{x}-1|}$ и $y = 1 - \mathrm{x}^3$ на одной координатной плоскости (рис.4).

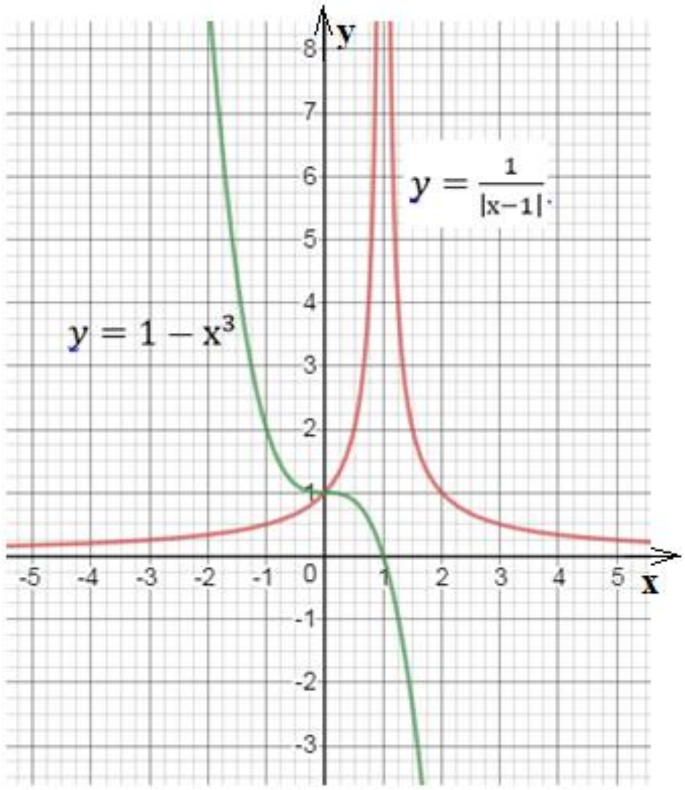


Рис.4 Графическое представление решения $\frac{1}{|\mathrm{x}-1|} \geq 1 - \mathrm{x}^3$

На графике видно, что в точке с координатами (1,0) имеется разрыв. Множества значений x, для которых ординаты графика функции

$y = \frac{1}{|x-1|}$ больше ординат графика $y = 1 - x^3$ соответствуют промежутку $[0; 1) \cup (1; +\infty)$ [27]

5. Решение неравенств с параметром

Задачи с параметром начинаются встречаться в 8 классе. Данный вид неравенств часто встречается в ЕГЭ и считается заданием повышенной сложности. В следствии этого необходимо иметь навыки по решению данных видов неравенств [23].

Пример: Решить неравенство $|2x - 4| \le 3x + 2a$

Раскроем знак модуля: $|2x - 4| \le 3x + 2a \to \begin{cases} 2x - 4 \le 3x + 2a \\ 2x - 4 \ge -3x - 2a \end{cases} \to$

$\begin{cases} x \ge -4 - 2a \\ x \ge 0{,}8 - 0{,}4a \end{cases}$

Возможны два случая:

1) $0{,}8 - 0{,}4a \le -4 - 2a$

   $a \le -3$, тогда решением системы является промежуток $[-4 - 2a;\ +\infty)$

2) $0{,}8 - 0{,}4a > -4 - 2a$

   $a > -3$, тогда решением является промежуток $[0{,}8 - 0{,}4a;\ +\infty)$

Ответ: если $a \in (-\infty; -3]$, то $x \in [-4 - 2a;\ +\infty)$; если $a \in (-3; +\infty)$, то $x \in [0{,}8 - 0{,}4a;\ +\infty)$

ГЛАВА 2. ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

2.1 Программа элективного курса «Решение уравнений и неравенств с модулем»

Пояснительная записка

Данный курс рассчитан на учащихся 10-11 классов, которым необходима хорошая подготовка к сдаче ЕГЭ. В ходе занятий будут рассмотрены различные методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Актуальность данного курса обусловлена тем, что в школьном курсе данная тема проходится быстро, времени на разбор сложных примеров очень мало, поэтому чтобы ученики не делали ошибок в заданиях с модулем при решении ОГЭ и ЕГЭ необходимо углубленное изучение этой темы. В курсе выделено несколько часов на изучение графического решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Данная тема очень необходима, при ее изучении учащиеся повторяют графики всех часто встречающихся функций. Элективный курс не только повысит уровень учащихся при решении уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а также поспособствует развитию логического и альтернативного мышления. Элективный курс направлен на систематизацию и обобщение наиболее часто используемых методов решения уравнений и неравенств с модулем, от самых простых задач до логарифмических, тригонометрических и показательных уравнений и неравенств с модулем [6].

Методы, рассмотренные в элективном курсе, позволяют наиболее коротким способом приходить к ответу, что экономит время отведенное на экзамене. Большое количество рассматриваемых примеров дано на метод интервалов, так как это самый универсальный метод для решения неравенств. После каждой темы есть урок контроля знаний в виде самостоятельной работы. По результатам самостоятельной работы учитель может судить о степени освоения данной темы. Элективный курс рассчитан на 30 часов [3].

Цели курса:

1. Систематизировать и обобщить теоретический и практический материал по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля».
2. Выявить пробелы в знаниях учащихся по решению уравнений и неравенств с модулем и устранить их.
3. Повысить уровень знания обучающихся по данной теме.
4. Способствовать формированию учебно-познавательных и практических умений в решении уравнений

Задачи курса:

1. Научить раскрывать модуль в уравнениях, используя определение модуля
2. Научить строить графики всех часто встречающихся функций (тригонометрической, показательной, логарифмической)
3. Научить решать уравнения и неравенства используя графический метод решения
4. Научить решать уравнения и неравенства используя метод интервалов
5. Научить решать уравнения и неравенства с параметром

В результате ученики должны знать и уметь:

1. Строить графики всех часто встречающихся функций
2. Решать уравнения и неравенства с модулем графическим способом
3. Решать уравнения и неравенства с модулем методом интервалов
4. Решать уравнения и неравенства с параметрами.

Тематическое планирование данного элективного курса приведено в таблице 1.

Таблица 1.Тематическое планирование

№	Тема занятия	Кол-во часов
1	Модуль числа и его свойства. Решение уравнений с модулем, используя определение модуля. Используя метод равносильных переходов.	2 часа
2	Самостоятельная работа	1 час
3	Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля методом интервалов	4 часа
4	Самостоятельная работа	1 час
5	Построение графиков функций, содержащих знак модуля	2 часа
6	Самостоятельная работа	1 час
7	Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.	3 часа
8	Самостоятельная работа	1 час
9	Решение уравнений, содержащих несколько модулей	2 часа
10	Самостоятельная работа	1 час
11	Решение тригонометрических уравнений с модулем	2 часа
12	Самостоятельная работа	1 час
13	Решение показательных уравнений и неравенств с модулем	2 часа
14	Самостоятельная работа	1 час
15	Решение логарифмических уравнений и неравенств с модулем	2 часа
16	Самостоятельная работа	1 час
17	Решение уравнений и неравенств с параметром	2 часа
18	Самостоятельная работа	1 час

2.2 Содержание элективного курса

Тема 1. Модуль числа. Свойства модуля. Геометрическая интерпретация модуля. Решение уравнений с модулем, используя определение модуля.

Формы занятий: усвоения новых знаний, в конце занятия практикум по пройденной теме. На следующем часе практическое занятие по решению уравнений. На практических занятиях ученики выходят к доске и коллективно решают примеры. Раздаются также карточки для решения заданий индивидуально. Самостоятельная работа по пройденной теме дает оценку понимания учениками материала.

Занятие 1.

Первое занятие является вводным и посвящено тому, что ученики вспоминают понятие и определение модуля, его свойства, а также геометрический смысл. Все эти понятия были пройдены в курсе основной школы и на данном занятии учащиеся просто повторяют уже знакомый им материал. До того как учитель даст определение модуля числа, учащиеся должны вспомнить, что бывают числа как положительные так и отрицательные, после этого дается определение модуля [26].

Модуль числа а обозначается $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a \leq 0 \end{cases}$$

Для решение простейших уравнений и неравенств с модулем обучающиеся должны вспомнить свойства модуля.

1. $|a| \geq 0$, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4. $||ab|| = |a||b|$
5. $|a+b| \leq |a|+|b|$
6. $|ca| = c \cdot |a|$, при $c > 0$

7. $|a|^2=a^2$ [19]

С помощью геометрической интерпретации модуля можно тоже решать уравнения. Так $|a|$ можно представить как расстояние от точки, изображающей число а до начала отчета на координатной прямой.

Если $a \neq 0$, то существуют две точки а и –а, которые равноудалены от нуля и модули которых равны.

Если $a = 0$, то на координатной прямой $|a|$изображается точкой 0.

После того как введено понятие модуля и описаны его свойства можно начинать решать уравнения и раскрывать модуль по определению.

Пример: Записать выражение $|7x - 1|$ без знака модуля.

Решение: $\begin{cases} 7x - 1, \text{если } 7x - 1 \geq 0, x \geq \frac{1}{7} \\ -7x + 1, \text{если } 7x - 1 < 0, x < \frac{1}{7} \end{cases}$

Пример: Решить неравенство$|x^2 — 6x + 9| < 0$.

Решение: Поскольку $|a| > 0$, то $|x^2 — 5x + 9| > 0$ при всех $x \in R$, а поэтому данное неравенство выполняется только при тех значениях x, при которых $x^2 — 6x +9 = 0$, откуда $x = 3$.

Ответ: 3.

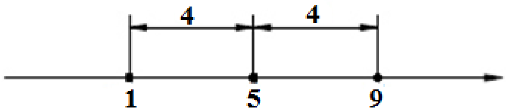
Пример: Решить неравенство $|x - 8| < 1$

Решение: В нашем случае числа, удаленные от 8 на 1 равны 7 и 9. Ясно, что по условию задачи требуется найти точки, удаленные от восьми на расстояние меньше единицы. Такие точки расположены между 7 и 9.

Ответ: (7; 9)

Пример: Решить уравнение $|x — 5| = 4$.

Решение: Это уравнение можно прочитать так: расстояние от точки x до точки 5 равно 4. С помощью графического метода можно определить, что уравнение имеет два решения: 1 и 9.



Ответ (1;9)

Пример: Используя определение модуля решить уравнение

$$\left|\frac{1}{2}x+1\right|=7x$$

Раскрываем модуль по определению модуля

$$\frac{1}{2}x+1=7x \qquad \frac{1}{2}x+1=-7x$$

$$\frac{1}{2}x-7x=-1 \qquad \frac{1}{2}x+7x=-1$$

$$-\frac{13}{2}x=-1 \qquad \frac{15}{2}x=-1$$

$$x=\frac{2}{13} \qquad x=-\frac{2}{15}$$

Проверяем полученные значения подстановкой в данное уравнение

$$\left|\frac{1}{2}\times\frac{2}{13}+1\right|=7\times\frac{2}{13} \qquad \left|\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{15}\right)+1\right|=7\times\left(-\frac{2}{15}\right)$$

$$\left|\frac{1}{13}+1\right|=7\times\frac{2}{13} \qquad \left|-\frac{1}{15}+1\right|=7\times\left(-\frac{2}{15}\right)$$

$$\left|\frac{14}{13}\right|=\frac{14}{13} \qquad \left|\frac{14}{15}\right|=-\frac{14}{15}$$

Проверяя корень $x=-\frac{2}{15}$, мы получили, что значение модуля меньше 0, а такого по определению модуля быть не может. Следовательно $x=-\frac{2}{15}$ не является решением данного уравнения.

Ответ: $x=\frac{2}{13}$

Решение уравнений и неравенств, используя метод равносильных переходов. Метод прост и понятен в использовании и позволяет сократить время на решение примера.

Решение уравнений вида $|f(x)|=a$

Рассмотрим возможные варианты: если $a<0$, то уравнение корней не имеет.

Если a = 0, то уравнение равносильно уравнению $f(x)=0$

Если $a>0$, то уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$ [28].

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$

Решение такого типа уравнений сводится к решению совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

Так же необходимо к этой совокупности добавить условие $g(x) \geq 0$, так как по свойствам модуля, модуль числа не может быть отрицательным.

Уравнения с модулем вида $|f(x)| = g(x)$, можно решать используя систему $\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$. Либо можно решить уравнение вида $f^2(x) - g^2(x) = 0$, проверив потом полученные корни подстановкой в исходное уравнение. Сведение исходного уравнения к виду $f^2(x) - g^2(x) = 0$ целесообразно применять, если хотя бы одна из функций $f\,(x)$ и $g\,(x)$ является иррациональной.

Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$

По свойству модуля $|a| = |b|$, если $a = \pm b$, то

$|f(x)| = |g(x)| \to \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$. Так же как и в предыдущем случае можно воспользоваться способом возведения в квадрат.

$$|f(x)| = |g(x)| \to f^2(x) - g^2(x) = 0 \to \big(f(x) + g(x)\big)\big(f(x) - g(x)\big) = 0$$

Решение неравенств $|f(x)| < a$ и $|f(x)| \geq a$

Неравенства вида $|f(x)| < a$:

- если $a \leq 0$, то решений нет
- если $a > 0$, то $-a < f(x) < a$

Неравенства вида $|f(x)| \geq a$:

- если $a \leq 0$, то $x \in R$
- если $a > 0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{array}\right.$

Решение неравенств вида $|f(x)| < g(x)$ и $|f(x)| > g(x)$.

- Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

Также его можно решить, заменив двойным неравенством

$-g(x) \le f(x) \le g(x)$ [28].

Неравенство $|f(x)| \le g(x)$ можно решить возведением в квадрат обеих частей, при условии, что $g(x) \ge 0$.

$$|f(x)| \le g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \le 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}.$$

– Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно объединению $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$

Пример: $\left|\frac{5x+1}{x+3}\right| = 4$

Воспользуемся формулой перехода,

если $a > 0$, то уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$

тогда, получаем: $\left|\frac{5x+1}{x+3}\right| = 4 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5x+1}{x+3} = 4 \\ \frac{5x+1}{x+3} = -4 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 1 = 4x + 12 \\ 5x + 1 = -4x - 12 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = -\frac{13}{9} \end{array}\right.$.

В нашем уравнении есть ограничение, $x \ne -3$. Полученные нами корни отличаются, значит являются решением [18].

Ответ: $-\frac{13}{9}; 11$

- неравенства вида $|f(x)| < |g(x)|$ можно свести возведением в квадрат обеих частей $f^2(x) - g^2(x) < 0$.

Пример: $|13x - 2x| \ge |4x - 9|$

Обе стороны неравенства заведомо неотрицательны, следовательно, можем возвести обе части неравенства в квадрат, чтобы избавиться от модуля.

$(|13x - 2x|)^2 - (|4x - 9|)^2 \ge 0$

$(13x - 2x)^2 - (4x - 9)^2 \ge 0$

$169 - 52x + 4x^2 - 16x^2 + 72x - 81 \ge 0$

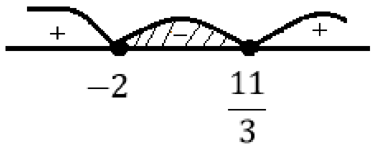
$-12x^2 + 20x + 88 \ge 0$

$6x^2 - 10x - 44 \le 0$

D$=100 + 4 \times 6 \times 44 = 1156$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 34}{12} = \left[\begin{array}{l} \frac{11}{3} \\ -2 \end{array}\right.$$

Теперь изобразим эти точки на числовой прямой



Ответ: [-2;$\frac{11}{3}$]

Самостоятельная работа

1. Точка А лежит от начала отсчета влево на 5,8 единицы, а точка В- вправо на 9,8 единицы. Чему равна координата каждой точки? Чему равен модуль каждой координаты.
2. Найдите расстояние от начала отсчета до каждой из точек: А(5,6), В(2,3), С(210,100).
3. Найдите значение выражения:
   $|240|:|-80|;\ |-2{,}3| + |3{,}7|; |-710| + |-290|$ [7]
4. Решить уравнение $|2x - 1| = 5$
5. Решить уравнение $|3x - 2| = 2x$
6. Решить уравнение $|27 - x| = \sqrt{6} - 3$
7. Решить уравнение $x^2 - 6|x| - 7 = 0$ [6]
8. Решить неравенство $|3 - 6x| \leq 4 - 2x$
9. Решить неравенство $|x + 2| \leq 7 + 0{,}5x$
10. Решить уравнение $|2x + 4| = |x - 1|$
11. Решить уравнение$|x^2 - x - 1| = x^2 + 2x + 1$
12. Решить неравенство $|2x - 3| < 7$ [22].

На основании результатов самостоятельной работы учитель может судить о том, как ученики усвоили материал.

Тема 2. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля методом интервалов. Этот метод достаточно широко используется при решении уравнений и неравенств с модулем, так как он является универсальным. Чаще всего уравнения и неравенства, которые содержат два и более модулей решают методом интервалов, так как это упрощает решение и экономит время. Учитель рассказывает ученикам определенный алгоритм действий для решения уравнений и неравенств методом интервалов.

1. Находим нули функции, т.е. те точки в которых функция обращается в ноль.
2. Разбиваем числовую прямую этими точками на промежутки.
3. Определяем знак функции для каждого промежутка, так как в полученных промежутках функция сохраняет свой знак.
4. Раскрываем знак модуля согласно полученной таблице и решаем системы [1].

Пример: Решить уравнение $|x+3|-|x-1|=x+2$ [4]

Находим нули функции: $x+3=0, x_1=-3$

$x-1=0,\ x_2=1$

Теперь мы видим, что область допустимых значений разбивается точками

$x_1=-3$ и $x_2=1$ на 3 интервала: $x<-3, -3\le x\le 1,\ x>1$

Составим таблицу, в которой выпишем знаки функции на этих промежутках.

x+3	—	+	+
x-1	—	—	+
		-3	**1**

Раскрываем знак модуля согласно полученной таблице для каждого промежутка в отдельности и решаем системы.

1. $\begin{cases} x<-3 \\ -x-3+x-1=x+2 \end{cases} \to \begin{cases} x<-3 \\ -4=x+2 \end{cases} \to \begin{cases} x<-3 \\ x=-6, \quad \in(-\infty,-3) \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3\le x\le 1 \\ x+3+x-1=x+2 \end{cases} \to \begin{cases} -3\le x\le 1 \\ x=0, \quad \in[-3,1] \end{cases}$

3. $\begin{cases} x>1 \\ x+3-x+1=x+2 \end{cases} \to \begin{cases} x>1 \\ x=2, \in(1,+\infty) \end{cases}$

Таким образом мы получили три корня, которые удовлетворяют нашим условиям.

Ответ: -6; 0; 2

Пример: Решить уравнение $0{,}5(|x+3|-|x-1|)=|x+4|-3$

Находим нули функции:

$x+3=0 \to x_1=-3$

$x-1=0 \to x_2=1$

$x+4=0 \to x_3=-4$

Теперь мы видим, что область допустимых значений разбивается точками $x_1=-3,\ x_2=1$ и $x_3=-4$ на 4 интервала:

$x<-4$

$-4\le x\le -3$

$-3< x\le -1$

$x>1$

Составим таблицу, в которой выпишем знаки функции на этих промежутках.

x+3	—	—	+	+
x-1	—	—	—	+
x+4	—	+	+	+
	-4	-3	1	

Раскрываем знак модуля согласно полученной таблице для каждого промежутка в отдельности и решаем системы.

1. $\begin{cases} x<-4 \\ 0{,}5\big(-x-3-(-x+1)\big)=-x-4-3 \end{cases} \to$

$\begin{cases} x<-4 \\ 0{,}5(-x-3+x-1)=-x-4-3 \end{cases} \to \begin{cases} x<-4 \\ 0{,}5(-4)=-x-7 \end{cases} \to \begin{cases} x<-4 \\ -2=-x-7 \end{cases} \to$

$\begin{cases} x<-4 \\ x=-5, \quad \in(-\infty,-4) \end{cases}$

$$2.\begin{cases} -4 \le x \le -3 \\ 0{,}5\big(-x-3-(-x+1)\big) = x+4-3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -4 \le x \le -3 \\ 0{,}5\big(-x-3-(-x+1)\big) = x+4-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \le x \le -3 \\ 0{,}5(-x-3+x-1) = x+4-3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -4 \le x \le -3 \\ 0{,}5(-4) = x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \le x \le -3 \\ -2 = x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \le x \le -3 \\ x = -3,\ \in [-4,-3] \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} -3 < x \le 1 \\ 0{,}5\big(x+3-(-x+1)\big) = x+4-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x \le 1 \\ 0{,}5(x+3+x-1) = x+1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -3 < x \le 1 \\ 0{,}5(2x+2) = x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x \le 1 \\ x+1 = x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x \le 1 \\ 0 = 0,\ x \in R \end{cases}$$

$$4.\begin{cases} x > 1 \\ 0{,}5\big(x+3-(x-1)\big) = x+4-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 0{,}5(x+3-x+1) = x+4-3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ 0{,}5(4) = x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2 = x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -1,\ \text{не подходит} \end{cases}$$

Ответ: $\{-5\} \cup [-3,1]$

Решение неравенств производится по такому же алгоритму как и решение уравнений. Единственным отличием будет то, что при решении уравнений ответом является конкретное число, а при решении неравенств ответом будет интервал.

Пример: $|x| + |x+2| < 2x + 6$

Находим нули функции: $x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$

Теперь мы видим, что область допустимых значений разбивается точками $x_1 = 0,\ x_2 = -2$ на 3 интервала:

$x \le -2$

$-2 \le x \le 0$

$x \ge 0$

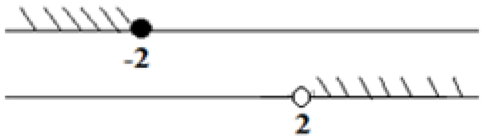
Составим таблицу, в которой выпишем знаки функции на этих промежутках.

x	—	—	+
x+2	—	+	+
	-2	0	

Раскрываем знак модуля согласно полученной таблице для каждого промежутка в отдельности и решаем системы.

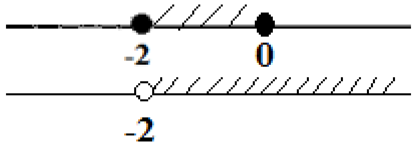
1. $\begin{cases} x \le -2 \\ -x - x - 2 < 2x + 6 \end{cases} \to \begin{cases} x \le -2 \\ -2x - 2 < 2x + 6 \end{cases} \to \begin{cases} x \le -2 \\ -4x < 8 \end{cases} \to \begin{cases} x \le -2 \\ x > 2 \end{cases}$

Построим эти неравенства на одной прямой.



Видим, что нет промежутка с пересечением, следовательно система решений не имеет.

2. $\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ -x + x + 2 < 2x + 6 \end{cases} \to \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 2 < 2x + 6 \end{cases} \to \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 2x > -4 \end{cases} \to \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ x > -2 \end{cases}$



Видим, что пересечение находится на интервале (-2,0], следовательно этот интервал и является решением для данной системы.

3. $\begin{cases} x \ge 0 \\ x + x + 2 < 2x + 6 \end{cases} \to \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x + 6 < 2x + 6 \end{cases} \to \begin{cases} x \ge 0 \\ 2 < 6, \quad x \in [0, +\infty) \end{cases}$

Объединяя решения получим ответ, $x \in (-2, +\infty)$

Самостоятельная работа

1.Решить уравнение: $|x + 3| - |1 - x| = 2x - 1$

2. Решить уравнение: $|x + 3| + |x - 1| = 2x + 7 + \frac{5x}{|x|}$

3.Решить неравенство методом интервалов: $|x - 1| + |x - 2| \le 3$

4. Решить неравенство методом интервалов: $|x - 2| + |x| \le 7 - |x + 4|$

5.Решить неравенство методом интервалов: $|x^2 - 3x + 2| - |2 - x| \ge 4$ [10].

Тема 3. Построение графиков функций (логарифмической, тригонометрической) с модулем. Виды графиков функций: y = |f(x)|, y = (f |x|), y = |(f |x|)|, |y| = f (x), их свойства.

Формы занятий: лекция и практические занятия. Рассматривается влияние модуля на функции, с которыми учащиеся уже знакомы. Рассмотрим принципы построения графиков:

а) График функций: y = |f (x)|

1.Строим график функции $y = f(x)$

2.Т.к. модуль может принимать только положительные значения, то необходимо ту часть графика, которая находится ниже оси ОХ отобразить симметрично выше оси ОХ [24].

Пример: $y = |x^2 + 4x + 1|$

Строим график функции $y = x^2 + 4x + 1$. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Точки пересечения с осью Ох, находим при y=0.

$x^2 + 4x + 1 = 0$

D=$16 - 4 \times 1 \times 1 = 12$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \left[\begin{array}{l} -2 + \sqrt{3} \\ -2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Часть параболы, которая находится ниже оси Ох, отображаем симметрично выше оси Ох. Строим график (рис.5).

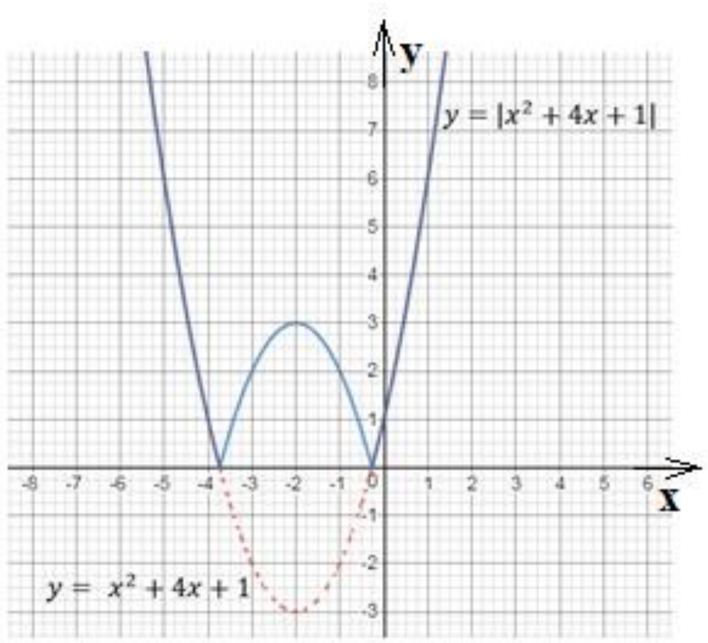


Рис.5 График функции $y = |x^2 + 4x + 1|$

б) График функций: y = $(f|x|)$

1.Строим график функции y $= f(x)$

2.Так как функция y = $(f|x|)$ четная, то необходимо ту часть графика, которая находится ниже оси Оу отобразить симметрично выше оси Оу.

Пример: $y = |x| + 2$

1.Строим график функции y $= x + 2$. Графиком является прямая.

2.Так как функция y = $|x| + 2$ четная, то необходимо ту часть прямой, которая находится ниже оси Оу отобразить симметрично выше оси Оу (рис.6).

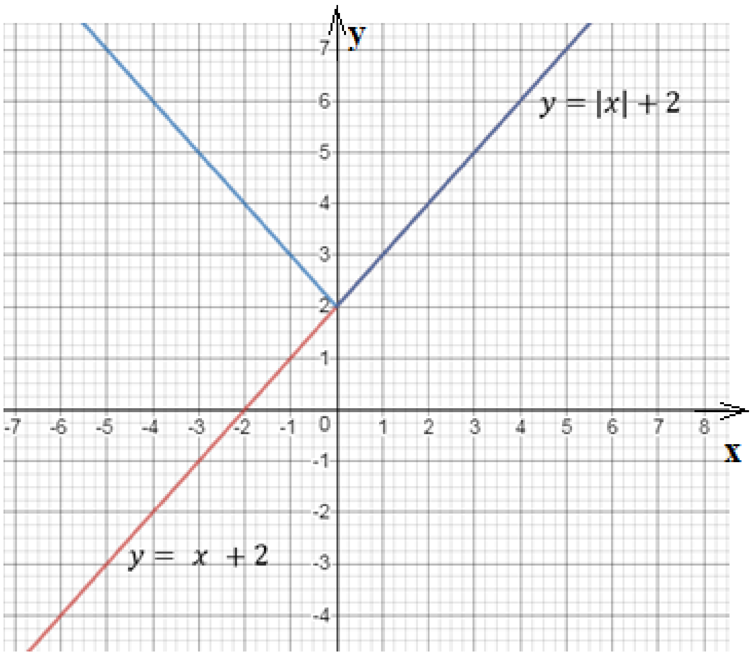


Рис.6 График функции $y = |x| + 2$

в)График функций: y = $\left|f|x|\right|$

Рассмотрим построение графика сразу на примере.

Пример: $y = \left|3 - |5 - x|\right|$

Чтобы построить график такой функции необходимо строить графики последовательно, разбив функцию на простые функции, графики которых мы умеем строить. Сначала необходимо построить график функции $y_1 = 5 - x$, графиком является прямая (рис.7).

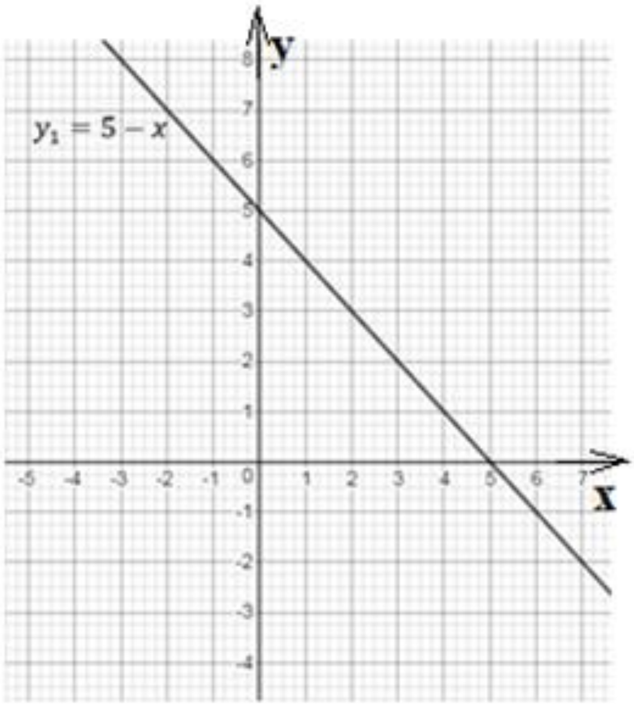


Рис.7 График функции $y_1 = 5 - x$

Далее усложняем функцию вводя модуль $y_2 = |5 - x|$. Для этого часть прямой, которая находится ниже оси Ох необходимо отобразить выше оси Ох (рис.8).

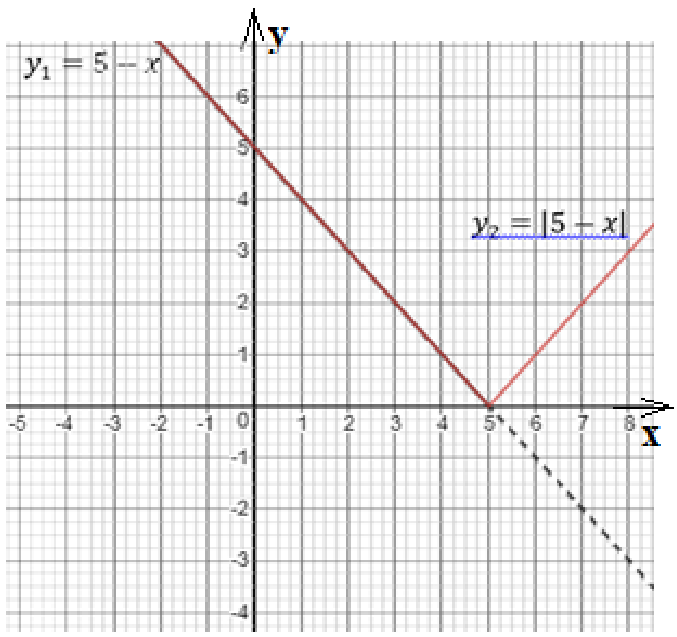


Рис.8 График функции $y_2 = |5 - x|$

Теперь строим график функции $y_3 = -|5 - x|$. Для этого все что выше оси Ох отображаем ниже оси Ох (рис.9).

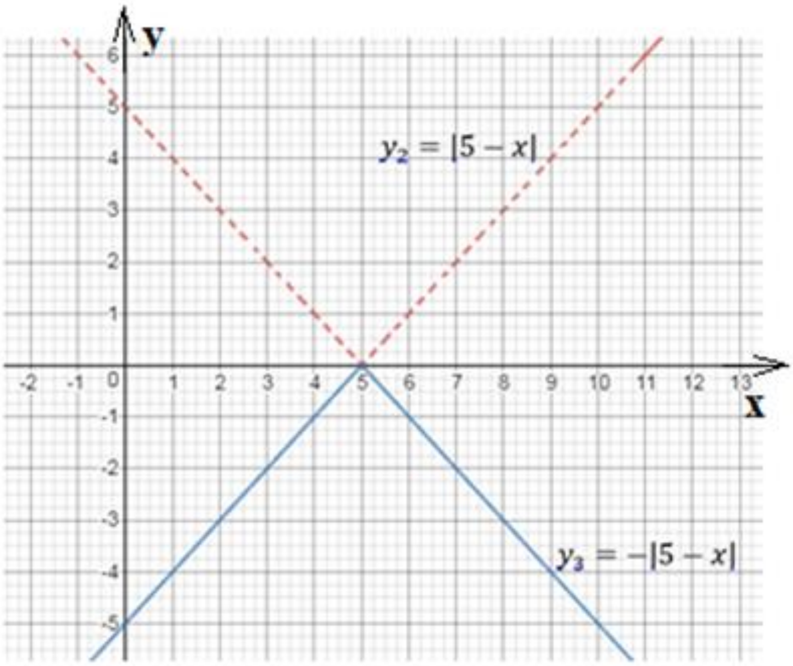


Рис.9 График функции $y_3 = -|5 - x|$

Далее необходимо построить график функции $y_4 = 3 - |5 - x|$. Для этого поднимаем график на 3 единицы вверх (рис.10).

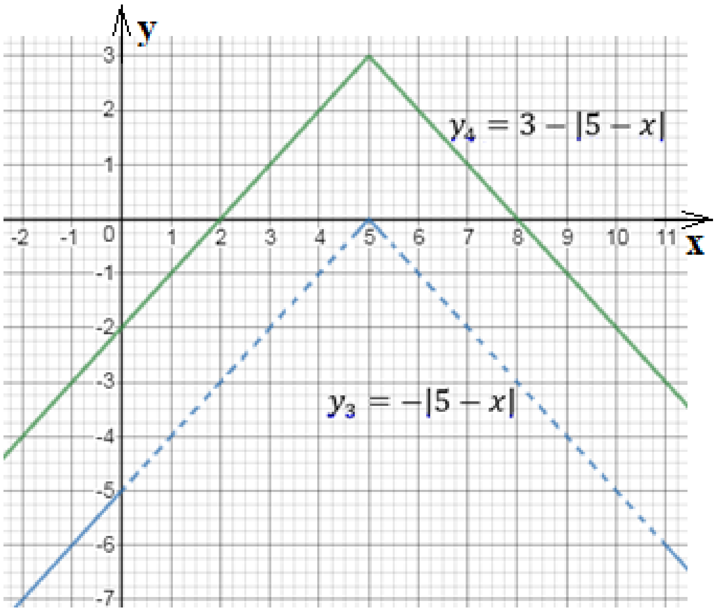


Рис.10 График функции $y_4 = 3 - |5 - x|$

После всех вспомогательных графиков можем построить функцию, которую требовалось построить в условии задачи, а именно $y_5 = \left|3 - |5 - \text{x}|\right|$. Для этого необходимо все части, которые находятся ниже оси Ох симметрично отразить выше оси Ох (рис.11).

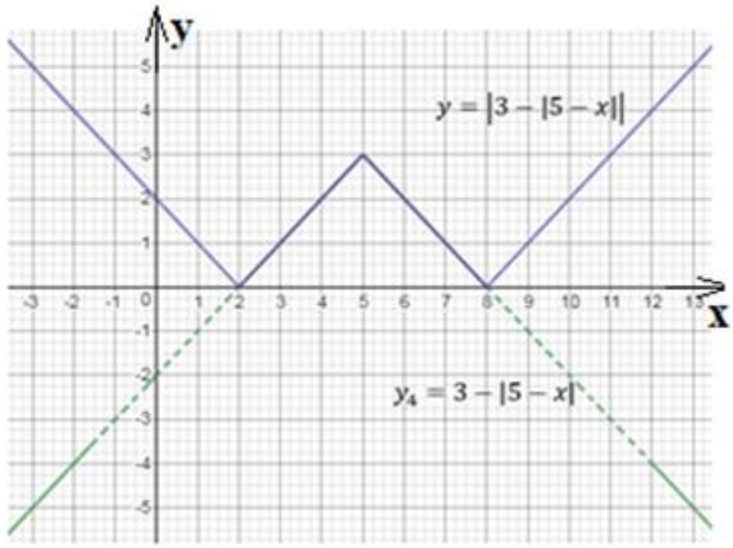


Рис.11 График функции $y_5 = |3 - |5 - x||$

Если функция логарифмическая, тригонометрическая стоит под знаком модуля то все правила по построению графиков функции с модулем остаются. Покажем на примере тригонометрической функции $y = |\sin 2x|$. Для построения графика функции мы отображаем симметрично все что было ниже оси Ox выше оси Ox (рис.12).

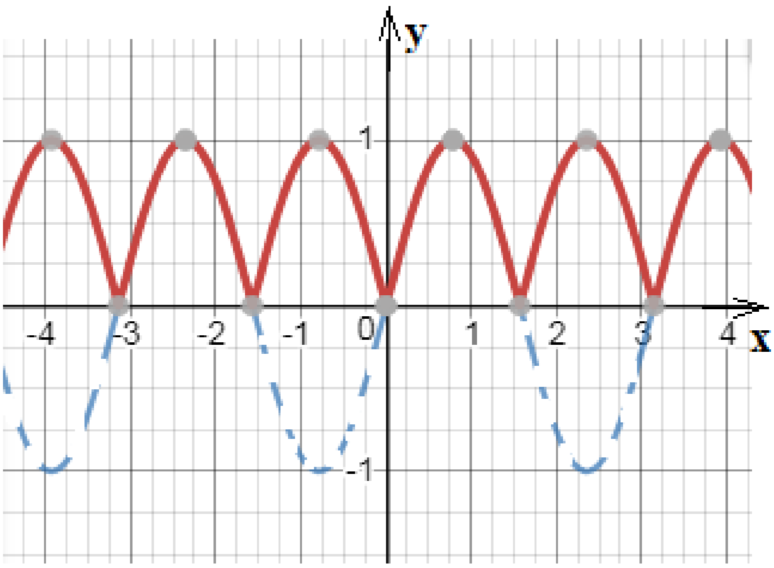


Рис.12 График функции $y = |\sin 2x|$

Рассмотрим график логарифмической функции: $y = ln|x|$. Строим сначала график функции $y = \ln(x)$ (рис.13).

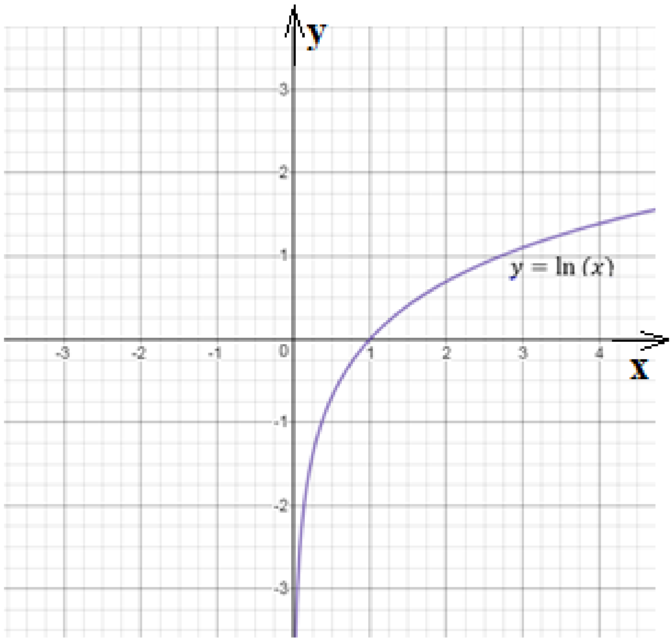


Рис.13 График функции $y = \ln(x)$.

Далее отображаем график симметрично оси Оу (рис.14).

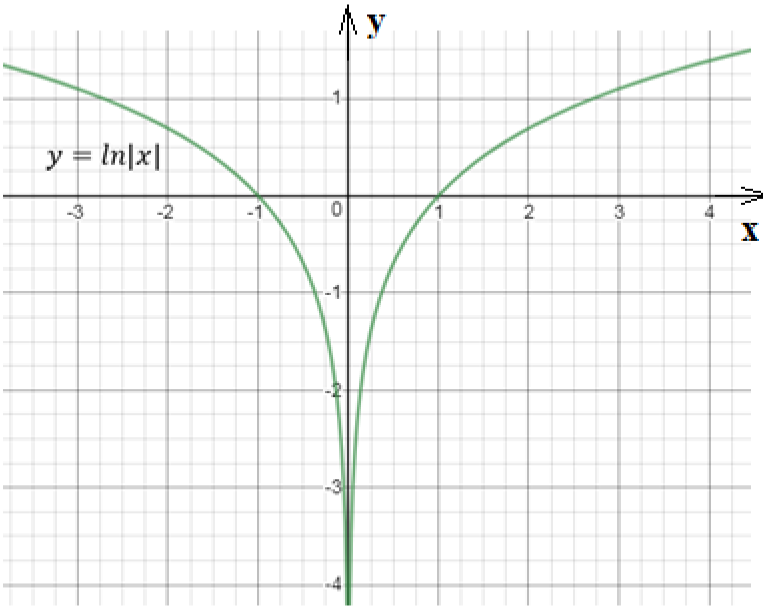


Рис.14 График функции $y = ln|x|$.

Таким образом используя правила построения графиков описанные выше, можно построить график любой функции с модулем.

Самостоятельная работа

1. Построить график функции $y = |x^2 + 1|$
2. Построить график функции $y = |e^x - 1|$

3. Построить график функции $y = |\ln(2x)|$
4. Построить график функции $y = ln|2x|$
5. Построить график функции $y = |7x + 2|$
6. Построить график функции$y = |\cos x|$ [5]

Тема 4. Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. На основании полученных знаний на предыдущем занятии рассматривается графический способ решения. В заданиях, где просят использовать этот метод решения в основном необходимо найти не точное решение, а количество корней, так как этот метод в основном используется для нахождения приближенных значений. Занятия проходят в виде практикума по решению конкретных уравнений графическим способом [16].

Пример: Определить графически число корней: $(x-2)^2 = 1 - |x|$
Сначала необходимо построить графики функций $y = (x-2)^2$и $y = 1 - |x|$ на одной координатной плоскости (рис.15).

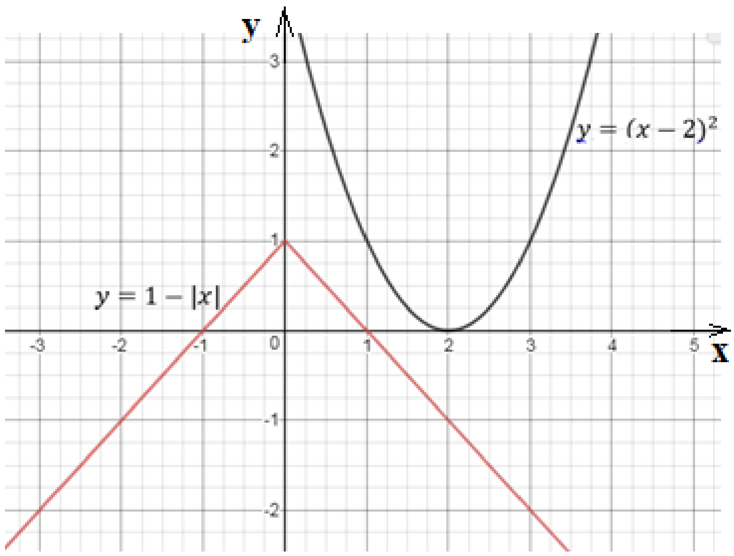


Рис.15 Графическое представление решения $(x-2)^2 = 1 - |x|$

На графике видно, что точек пересечения графики не имеют, следовательно уравнение решений не имеет.

Пример: Найти абсциссы точек пересечения графиков функций:
$y = |2x+6| + |2x-6|$ и $y = x + 12$

Строим графики этих функций на одной координатной плоскости. Графиком функции $y = x + 12$ является прямая. Графиком функции

$y = |2x + 6| + |2x - 6|$ является ломанная. Чтобы ее построить необходимо найти те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0 и указать значение ординат.

$2x + 6 = 0$

$x_1 = -3, y_1 = 12$

$2x - 6 = 0$

$x_2 = 3, y_2 = 12.$

Теперь необходимо узнать, как ведет себя функция на участках

$x > 3$ и $x < -3$. Возьмем точки x=5, тогда y = 20 и x = -5, y = 20. Теперь по точкам строим график прямой и ломанной на одной координатной плоскости (рис.16).

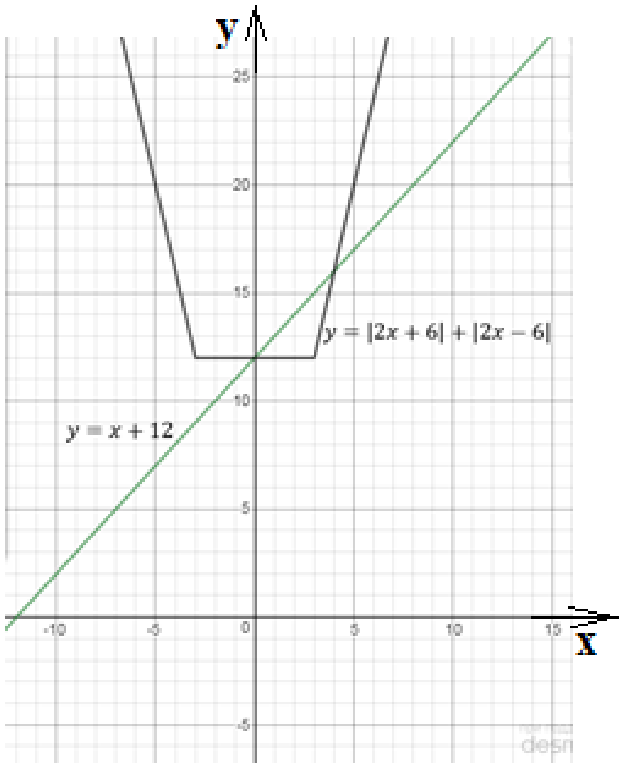


Рис.16 Графическое представление решения $|2x + 6| + |2x - 6| = x + 12$

На графике видно, что абсциссы пересечения графиков x = 0 и x = 4. Графическим способом решаются так же и неравенства.

Пример: $2|x-2| < x+1$

Строим график функций $y = 2|x-2|$ и $y = x+1$ (рис.17).

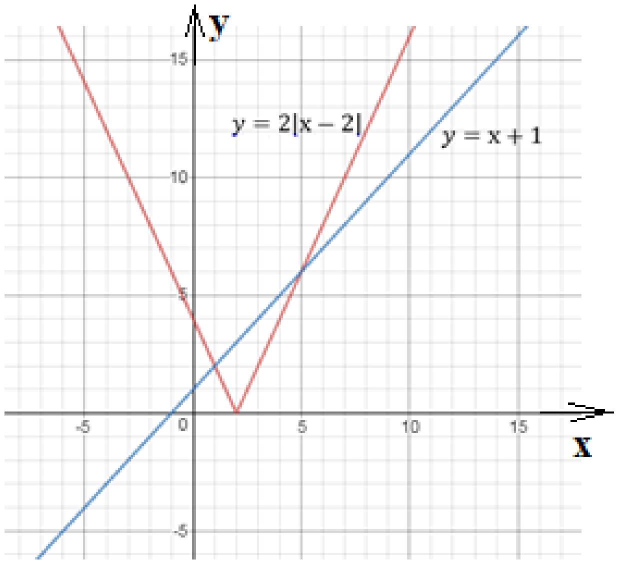


Рис.17 Графическое представление решения $2|x-2| < x+1$

Так в неравенстве стоит знак меньше, то мы смотрим по графику на каком промежутке значения функции $y = 2|x-2|$ меньше значений функции $y = x+1$. Этому условию соответствует промежуток (1,5).

Самостоятельная работа

1.Определить графически число корней: $x + 2|x+1| - 2 = 0$

2.Определить графически число корней: $|x+3| - |x+1| = 2$

3. Найти абсциссы точек пересечения графиков функций:

$y = |x-1| + |x+1|$ и $y = 2x^2$

4.Решите графически уравнение: $|x| = -x^2 + 2$

5. Решите графически уравнение:$|x-2| = x^2$

6. Решите графически уравнение: $|x^2 - 4x + 3| = 3 - x$

7. Решите графически уравнение:$|x^2 - 4| = 3|x|$

8. Решите графически уравнение: $|x^2 + 2x| = -|x+1| + 1$

9. Используя графический подход, решить неравенство: $|x-3| > |x+2| - 5$

10.Решить неравенство графическим способом: $|x+3| - |x-3| \geq 2x$ [29].

Тема 5. Решение уравнений, содержащих несколько модулей. Задания такого вида представлены в ЕГЭ профильного уровня, поэтому ученикам необходимо уметь решать такие уравнения и неравенства. Решение уравнений и неравенств данным методом основано на последовательном раскрывании всех имеющихся в задании модулей. Начинать необходимо всегда с внешнего модуля. Рассмотрим пример решения уравнений и неравенств имеющего несколько модулей [2].

Пример: $\left|3-|5-x|\right|=3$

$$\left|3-|5-x|\right|=3 \rightarrow \left[\begin{array}{l} 3-|5-x|=3 \\ 3-|5-x|=-3 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} |5-x|=0 \\ |5-x|=6 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} 5-x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} 5-x=6 \\ 5-x=-6 \end{array}\right. \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=11 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: -1;5;11.

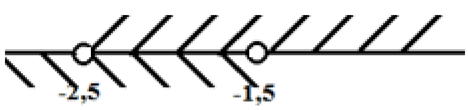
Пример: $\left||2x+4|-2\right|<3$

$$\left||2x+4|-2\right|<3 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} |2x+4|-2<3 \\ |2x+4|-2>-3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} |2x+4|<5 \\ |2x+4|>-1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x+4<5 \\ 2x+4>-5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x+4>-1 \\ 2x+4<1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x<1 \\ 2x>-9 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x>-5 \\ 2x<-3 \end{array}\right. \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0,5 \\ x>-4,5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>-2,5 \\ x<-1,5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отметим все полученные промежутки на числовой прямой.

Так у нас система то решением ее является пересечение прямых, это соответствует промежутку (-4,5;0,5). Изобразим объединение:



Так как у нас объединение, то нам подходит весь участок числовой прямой. Таким образом общее решение имеет вид: (-4,5;0,5).

Самостоятельная работа

1.Решите уравнение $\left||3x+2|-1\right|$=3

2.Решите неравенство $\left||2x+4|-2\right|>3$

3. Решите уравнение $|4x-|x-2|+3|=16$

4. Найдите все корни уравнения $\left||2x-8|-x\right|=7-x$ на промежутке [1;4]

5.Решите уравнение$\left||2x+5|-1\right|=2x+|x-5|$

6.Решить уравнение $\left|\left|\frac{x-3}{x+1}\right|-2\right|<1$

7.Решить уравнение $\left|\left|\frac{x+3}{2x-1}\right|-3\right|\geq 2$

8.Решить неравенство $\left|\left||x-3|+1\right|-2\right|<1$ [22].

Тема 6. Решение тригонометрических уравнений с модулем. Для раскрытия знака модуля в примерах содержащих тригонометрическую функцию необходимо использовать определение модуля. Повторить все формулы тригонометрии.

Вначале занятия необходимо повторить формулы тригонометрии, чтобы осуществлять преобразования и упрощать уравнения. Далее учитель показывает один пример у доски, после чего ученики у доски решают сами. Рассмотрим пример: $\sin 3x+|\sin x|=\sin 2x$ [30].

Рассматриваем сначала случай, когда $\sin x>0$, тогда:

$\sin 3x+\sin x=\sin 2x$

По формуле раскрываем $\sin 3x$ = $3\sin x-4\sin^3 x$

$3\sin x-4\sin^3 x+\sin x=\sin 2x$

Раскрываем $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$

$3\sin x-4\sin^3 x+\sin x=2\sin x\times\cos x$

$4\sin x-4\sin^3 x=2\sin x\times\cos x$

Умножим все на $\frac{1}{2}$ и вынесем $\sin x$ за скобки:

$\sin x\ (-2\sin^2 x-\cos x+2)=0$

Отсюда получаем, что $\sin x\ =0$, тогда $x_1=\pi n,\ n\in Z$, либо

$(-2\sin^2 x - \cos x + 2) = 0$

$2\sin^2 x + \cos x = 2$

$2(1\text{-}\cos^2 x) + \cos x = 2$

$2 - 2\cos^2 x + \cos x = 2$

$2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 0$

$x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Теперь рассматриваем второй случай, когда $\sin x < 0$.

$\sin 3x - \sin x = \sin 2x$

$2\cos 2x \times \sin x = \sin 2x$

$2(1 - \sin^2 x) \times \sin x = 2\sin x \cos x$

$1 - 2\sin^2 x = \cos x$

$1 - 2(1 - \cos^2 x) = \cos x$

$1 - 2 + 2\cos^2 x - \cos x = 0$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Сделаем замену: $\cos x = t$

Тогда уравнение примет вид: $2t^2 - t - 1 = 0$

D = 9, $t_{1,2} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Сделаем обратную замену:

$\cos x = 1$

$x = 2\pi n$, не удовлетворяет условию $\sin x < 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$

$x = \pi - arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, не удовлетворяет условию $\sin x < 0$

Ответ: πn; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Пример: $\sin 2\text{x} = |\text{tg}x|$

О.Д.З. $x\epsilon\ R, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n\ \epsilon\ Z$

Раскрываем модуль:

– если $\text{tg}x \geq 0$, то $\sin 2\text{x} = tg\ x$

$$2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Умножаем все на $\cos x$:

$$2\sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

1)$\sin x = 0,\ \ x_1 = \pi n, n\epsilon\ Z$

2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2nk, k\epsilon\ Z$$

$$x_{4,5} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2nm, m\epsilon\ Z$$

Проверяем полученные решения, необходимо чтобы они удовлетворяли условию $\text{tg}x \geq 0$. Данному условию удовлетворяют решения x_1, x_2, x_3

– если $\text{tg}x < 0$, то $\sin 2\text{x} = -tg\ x$

$2\sin x \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x}$

Умножаем все на $\cos x$:

$2\sin x \cos^2 x = -\sin x$

$\sin x(2\cos^2 x + 1) = 0$

1) $\sin x = 0,\ x_6 = \pi n, n \epsilon Z$, не удовлетворяет условию $\text{tg} x < 0$

2) $\cos^2 x = -\frac{1}{2}$, корней нет

Ответ: $x_1 = \pi n, x_2 = \frac{\pi}{4} + 2nk, x_3 = -\frac{3\pi}{4} + 2nm,$ где $n, m, k \epsilon Z$

Самостоятельная работа

1.Решить уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x$

2.Решить уравнение $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$

3.Решить уравнение $\sin 3x - 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x$

4.Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\,|\sin x| = 2$ [21].

Тема 7. Решение показательных уравнений и неравенств с модулем. При решении данного типа уравнений и неравенств необходимо смотреть на основание, если основания разные в уравнении, то вначале необходимо привести к одному основанию.

Пример: $2^{2|x|} - 3 \times 2^{|x|} - 4 = 0$ [12].

Произведем замену в уравнении, $2^{|x|} = t$

Тогда исходное уравнение примет вид: $t^2 - 3t - 4 = 0$

$D = 9 + 4 \times 1 \times 4 = 25$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} 4 \\ -1 \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

1) $2^{|x|} = 4$

$|x| = 2$

$x = \pm 2$

2) $2^{|x|} = -1$, нет решения

Ответ: ± 2

При решении неравенства необходимо учитывать его основание:

- если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) > g(x)$ (при $a > 1$)

- если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) < g(x)$ (при $0 < a < 1$), где а-основание показательного неравенства [20].

Пример: $\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x} \geq 0$

О.Д.З. $x \neq 0$

Дробь может быть больше нуля, когда числитель и знаменатель больше нуля, либо числитель и знаменатель меньше нуля.

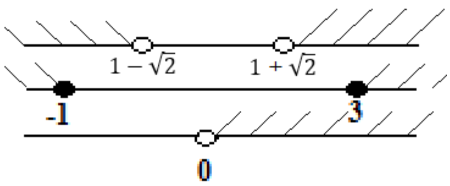
I: $\begin{cases} 3^{|x^2-2x-1|} - 9 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

II: $\begin{cases} 3^{|x^2-2x-1|} - 9 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

Рассмотрим каждую систему в отдельности:

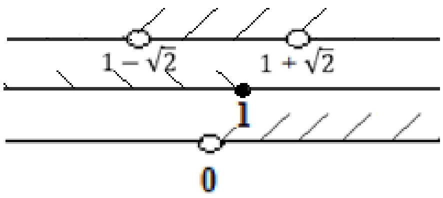
I: $\begin{cases} 3^{|x^2-2x-1|} - 9 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^{|x^2-2x-1|} \geq 3^2 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |x^2 - 2x - 1| \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 2 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$



$x \in [3; +\infty)$

б) $\begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0 \\ -x^2 + 2x + 1 \geq 2 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

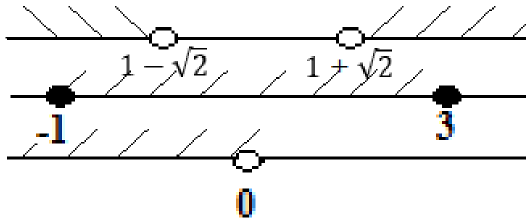


$x \in (0; 1]$

Рассмотрим теперь вторую систему:

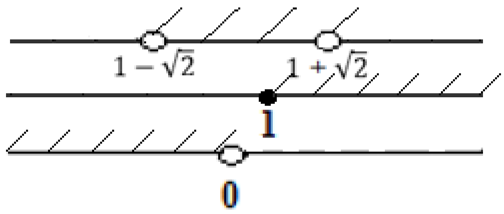
II: $\begin{cases} 3^{|x^2-2x-1|} - 9 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^{|x^2-2x-1|} \leq 3^2 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |x^2 - 2x - 1| \leq 2 \\ x < 0 \end{cases}$

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 1 \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$



$x \in [-1; 1 - \sqrt{2})$

б) $\begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0 \\ -x^2 + 2x + 1 \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$



$x \in \emptyset$

Объединяя полученные решения получаем: $x \in [-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$

Ответ: [-1;0)∪{1}∪[3;+∞)

Самостоятельная работа

1. $\dfrac{0{,}2^{|x^2-4x+2|} - 0{,}04}{3 - x} \leq 0$

2. $\dfrac{35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \times 7^{|x|} + 5}{2^{\sqrt{x+2}} + 1} \geq 0$

3. $2^{2|x|} - 3 \times 2^{|x|} - 4 = 0$

4. $5^{|3x-5|} = 25^x$

Тема 8. Решение логарифмических уравнений и неравенств с модулем. В начале занятия необходимо вспомнить свойства логарифма и логарифмической функции. После того, как вспомнили все свойства логарифма можно приступать к решению логарифмических уравнений и неравенств.

Пример: $\left|\log_{\sqrt{3}} x - 2\right| - |\log_3 x - 2| = 2$ [15].

О.Д.З. $x > 0$

Заметим, что основания у логарифмов разные, поэтому перейдем к одному основанию.

$\left|\log_{3^{\frac{1}{2}}} x - 2\right| - |\log_3 x - 2| = 2$

$|2\log_3 x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$

Найдем нули подмодульных выражений:

1) $2\log_3 x - 2 = 0$

   $2\log_3 x = 2$

   $\log_3 x = 1$

   $x = 3$

2) $\log_3 x - 2 = 0$

   $\log_3 x = 2$

   $x = 9$

Эти числа делят область допустимых значений на три интервала, поэтому уравнение равно совокупности 3-х систем:

1. $\begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ -2\log_3 x + 2 + \log_3 x - 2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3 < x \leq 9 \\ 2\log_3 x - 2 + \log_3 x - 2 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x > 9 \\ 2\log_3 x - 2 - \log_3 x + 2 = 2 \end{cases}$

Решаем каждую систему:

1. $-2\log_3 x + 2 + \log_3 x - 2 = 2$

$-\log_3 x = 2$

$\log_3 x^{-1} = 2$

$x^{-1} = 9$

$\frac{1}{x} = 9$

$x = \frac{1}{9}$, данный корень удовлетворяет промежутку $0 < x \le 3$

2. $2\log_3 x - 2 + \log_3 x - 2 = 2$

$3\log_3 x = 6$

$\log_3 x = 2$

$x = 9$, данный корень удовлетворяет промежутку $3 < x \le 9$

3. $2\log_3 x - 2 - \log_3 x + 2 = 2$

$\log_3 x = 2$

$x = 9$, данный корень не удовлетворяет промежутку $x > 9$

Ответ: $(\frac{1}{9}; 9)$

При решении логарифмических неравенств модуль может быть не явно выражен в условии задачи, но в процессе решения он может появиться. Важно увидеть это и не допустить ошибки.

Пример: Решите неравенство $\log_5(2 + x)(x - 5) > \log_{25}(x - 5)^2$

В данном примере в условии мы не видим знака модуля, но приводя правую часть неравенства к основанию пять, необходимо не потерять знак модуля, иначе можно в ответе указать корни, которые не удовлетворяют условию неравенства [4].

$\log_5(2 + x)(x - 5) > \log_5|x - 5|$

Так как основание логарифма больше нуля, то знак неравенства не меняется

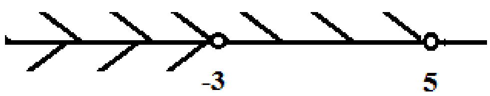
$(2 + x)(x - 5) > |x - 5|$

Раскрываем модуль и решаем неравенства в отдельности:

1) При $x < 5$, $(2 + x)(x - 5) > -(x - 5)$

$2 + x > -1$

$x < -3$

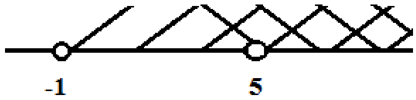


$x \in (-\infty; -3)$

2) При $x > 5$, $(2+x)(x-5) > x-5$

$2 + x > 1$

$x > -1$



$x \epsilon (5;\ +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (5;\ +\infty)$

Самостоятельная работа

1. $\lg|2x-3| - \lg|3x-2| = 1$

2. $|1 + \log_6 x| + 2 = |3 + \log_6 x|$

3. $|2 + \log_{0,2} x| + 3 = |1 + \log_5 x|$

4. $\log_{|x-1|-3} 5 \leq 1$

5. $\log_{|x|}(x-1)^2 \leq 2$

6. $\log_{10-x}(9{,}5 - x)^2 > 2\log_{x-8}(x-8)$ [10].

Тема 9. Решение уравнений и неравенств с параметром.

Для решения уравнения или неравенства с модулем в котором содержится параметр необходимо придерживаться следующей схемы:

1. Найти область допустимых значений
2. Найти нули всех подмодульных функций
3. Отметить нули функции на области допустимых значений и разбить ОДЗ на интервалы
4. Найти решение на каждом интервале
5. Сделать проверку полученных решений [9].

Пример: $|x| - |x-2| = a$

В данном случае О.Д.З. $x \epsilon R$. Находим нули подмодульных выражений: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

I. $\begin{cases} x < 0 \\ -x + x - 2 = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ a = -2 \end{cases}$

II. $\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x + x - 2 = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 2x - 2 = a \end{cases}$

III. $\begin{cases} x > 2 \\ x - x + 2 = a \end{cases} \to \begin{cases} x > 2 \\ a = 2 \end{cases}$

Для наглядности построим график исходной функции (рис.18):

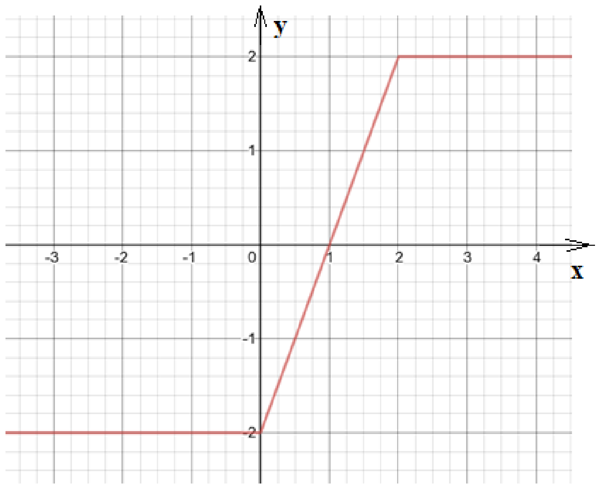


Рис.18 График функции $|x| - |x - 2| = a$

По графику видно, что при а $\epsilon(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, корней нет;

если $a = \pm 2$, то корней бесконечно много;

если $a\epsilon(-2; 2)$, то корень один.

Рассмотрим теперь решение неравенства с модулем, содержащее параметр.

Пример: $|x - a| \leq a + 1$

Решение зависит от выражения $a + 1$

Если $a + 1 < 0$, то $x \in \emptyset$

Если $a + 1 = 0$, то $|x + 1| \leq 0 \to x = -1$

Если $a + 1 > 0$, то $-a - 1 \leq x - a \leq a + 1$

$-1 \leq x \leq 2a + 1$

Ответ: если $a = -1$, $x = 1$; $a < -1$, $x \in \emptyset$, $a > -1, -1 \leq x \leq 2a + 1$

Самостоятельная работа

1.Решить неравенство $|x - a| - |x - 5| \geq 0$

2.Решить уравнение $|x| + |a| = 5$

3.Решить уравнение $|x - 3| = a$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализировав учебные материалы, можно сказать, что данной теме уделяется мало внимания при изучении. К тому же материал излагается разрозненно и не систематизировано. Таким образом данные факты свидетельствуют о необходимости проведения элективного курса по углубленному изучению данной темы. Поэтому в данной работе мы обобщили и систематизировали методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

Элективный курс представленный в работе направлен на повышение уровня учащихся при решении уравнений и неравенств с модулем. Способствует развитию их логического мышления. В элективном курсе обращено внимание на задания, в которых ученики часто допускают ошибки, такие как приобретение посторонних корней уравнения или потеря корней уравнения, которые являются ответом данной задачи.

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были достигнуты поставленные цели и решены следующие задачи:

1. Собран теоретический материал по теме;

2. Собран практический материал по теме;

3. Найденный материал подвергнут обобщению и систематизации;

4. Изучены основные теоремы и определения;

5.Описаны основные методы решения уравнений и неравенств с модулем.

6. Разработана методика формирования умений и навыков решать уравнения и неравенства с модулем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксанова И.И. Элективный курс: «Решение уравнений и неравенств с модулем» [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://nsportal.ru/shkola/ algebra/library/2015/04/20/ elektivnyy -kurs-reshenie- uravneniy-i-neravenstv-s-modulem (дата обращения: 12.04.2019).
2. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа:Учеб.для 10-11 кл.сред.шк./ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.-М.:Просвещение,2016.-464с.
3. Бабанский Ю.К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе. - М.: Просвещение, 1985.
4. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл.сред.шк./ М.И.Башмаков.-М.:Просвещение,1992.-351с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие / Г.Н.Берман.-СПб.: Изд-во «Профессия»,2001.-432с.
6. Блох А.Я.,Гусев В.А.,Дорофеев Г.В. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. - М.: Просвещение, 1987. - 416 с.
7. Виленкин Н.Я. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Н.Я. Виленкин, В.И.Жохов, А.С. Чесноков,С.И. Шварцбурд.- 30-е изд., стер.-М.:Мнемозина,2013.-288с.
8. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа.10 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) /Н.Я.Виленкин, О.С. Ивашев-мусатов, С.И. Шварцбурд.- 18-е изд.,стер.- М.:Мнемозина,2014.-352с.: ил.
9. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ: Астрель, 2006. - 509 с.
10. Ершова А.И., Голобородько В.В. Алгебра. Геометрия 9.Самостоятельные и контрольные работы.- Илекса Москва,2008.

11. Зеленский А.С., Панфилов И.И. Решение уравнений и неравенств с модулем: учебное пособие. - М.: Научно-технический центр «Университетский»: Универ - Пресс, 2013. - 112 с.
12. Зиноньева Л.А. Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля/ Л.А. Зиноньева, Н.Д. Щеглова, А.И. Зиноньев // Математика в школе, 1999. – № 5. - 79с.
13. Зубарева И.И. Математика. 6 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций/ И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович.- 14-е изд., стер.- М.:Мнемозина, 2014.-264 с.
14. Ильина С.Д. Графические решения уравнений содержащих знак модуля. Научно – методический Журнал Математика в школе № 8. – М.: издательство Школа- Пресс, 2001.
15. Кадыров Ф.К. Задачи повышенной сложности (с решениями) для подготовки учащихся 7-11 классов к олимпиадам по математике. – Казань: издательство ИПКРО РТ, 2006.
16. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики/ Ю.М.Колягин, Г.Л.Луканкин, Е.Л.Мокрушин, В.А. Оганесян. – М.: Просвещение 1997 г. - 332 с.
17. Левитас Г.Г. Методика преподавания математики в основной школе: учебное пособие / Г.Г. Левитас. - Астрахань.: Издательский дом «Астраханский университет», 2014. - 179 с.
18. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 344 с.
19. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.
20. Назаренко А.М., Назаренко Л.Д. Тысяча и один пример. Равенства и неравенства. Пособие для абитуриентов. – Сумы: издательство Слобожанщина, 2004.

21. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- 8-е изд.- М.:Просвещение, 2009.-430 с.
22. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://math100.ru/ (дата обращения: 23.03.2019)
23. Севрюков, П.Ф. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М.: Сервисшкола, 2005. – 112с.
24. Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля. Научно – методический Журнал Математика в школе № 9. – М.: издательство Школа- Пресс, 2003
25. Трефилова, Г.А. Рациональное решение уравнений и неравенств с модулем // Математика в школе, 2008. - № 10. – С. 29-30.
26. Цулина, И. В. Элективные курсы в системе школьного математического образования/И. В. Цулина // Молодой ученый [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://www.moluch.ru/archive/11/697 (дата обращения: 25.04.2019).
27. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов/ М.И.Шабунин, А.А.Прокофьев, Т.А.Олейник, Т.В.Соколова.-М.:БИНОМ.Лабаратория знаний, 2009.-477 с.
28. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 10 класса / М.И.Шабунин, А.А.Прокофьев, Т.А.Олейник, Т.В.Соколова.-М.:БИНОМ.Лабаратория знаний, 2008.-448 с.
29. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса / М.И.Шабунин, А.А.Прокофьев.-М.:БИНОМ.Лабаратория знаний, 2007.-424

30. Яковлев И.В. Материалы по математике. Тригонометрические уравнения с модулем [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://mathus.ru/math/trigurmod.pdf (дата обращения 02.04.2019)