ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ,

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа

обучающегося по направлению подготовки

44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика,

заочной формы обучения, группы 02041451

Щербаченко Алины Витальевны

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема внедрения новых федеральных образовательных стандартов в школьную практику ставит перед учителем задачу проектирования и реализации образовательного процесса, результатом которого должно стать полноценное формирование и развитие способностей обучающихся работать самостоятельно: ставить учебную проблему, находить пути её решения, прослеживать процесс и оценивать полученный результат, т. е. научить учиться. Это должно стать основой саморазвития выпускников школ в стремительно изменяющемся обществе.

Математика всегда была и остается ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, что составляет основную ценность математических умений, получаемых в школе ребенком, как для общества, так и для отдельной личности. Система взглядов на базовые принципы, цели, задачи и основные направления развития обучения математике обозначены в Концепции развития математического образования в Российской Федерации [43].

Особая роль математического образования отводится для решения задач, стоящих перед нашей страной в области развития инновационной экономики, науки и технологий, определяемых «Стратегией научно-технологического развития Российской Федерации», утвержденной Указом Президента РФ от 01.12.2019г №642, а также другими государственными документами [48].

Сегодня социальный заказ общества заключается в том, чтобы из школы выходили всесторонне развитые и культурные личности, способные хорошо ориентироваться в общем потоке информации и самостоятельно эту информацию перерабатывать. Поэтому главным принципом концепции математического образования является реальное осуществление в методической системе обучения математике двух генеральных функций школьного математического образования:

1) образование с помощью математики;

2) собственно математическое образование.

Математическое образование призвано воспитывать у школьника стремление овладеть навыками математического исследования явлений окружающего мира путем составления математических моделей реальных ситуаций, а также овладеть математическим языком для описания этих моделей.

Для реализации этой цели особенно важны понятия основных элементов дифференциального исчисления: предела и производной, так как это – основные понятия того языка, на котором «говорит природа» [19]. То есть, очевидно, что выпускник средней школы должен иметь представления об элементах дифференциального исчисления и о применении этих знаний для исследования реальных процессов.

Изучение приложений производной в школе важно еще и потому, что в задания конкурсных экзаменов, в первую и вторую части единого государственного экзамена (ЕГЭ) обязательно включаются задачи на применение геометрического или физического смысла производной и нахождение экстремумов функции.

Обучение математике строится на формализме, что вызывает трудности у многих школьников. Поэтому учителю нужно обеспечивать такую организацию учебного процесса, которая позволила бы учитывать усвоение материала учащимися с разными способностями. Необходимо создавать оптимальные условия для эффективной учебной деятельности всех школьников, донести до каждого понимание формальных понятий, развивать логическое и абстрактное мышление, то есть возникает необходимость перестройки содержания, методов и форм обучения, что и предусматривает ФГОС нового поколения.

В настоящее время, пожалуй, нет необходимости доказывать важность метапредметных связей в процессе обучения. Метапредметные связи на уроках математики - это своеобразный синтез знаний, умений и навыков для формирования естественно-научной картины мира, понимание места и роли человека в нём. Современный этап развития науки характеризуется взаимопроникновением наук друг в друга, и особенно проникновением фундаментальных наук (математики, физики, химии, биологии) в производство, экономику и информационные технологии.

В современном обществе все больше и больше востребованы профессии с высоким научным потенциалом. Математические знания являются опорой для любой научной и прикладной отрасли знаний.

Многие ученики и их родители жалуются, что школьники перегружены информацией, представленной в школьных учебниках. И это действительно так. Но нужно ли запоминать эту информацию? Современные технологии обеспечили нас огромным количеством информации и быстрым ее поиском. Поэтому современная школа должна учить отбирать полезную информацию, перерабатывать и анализировать ее, строить логические цепочки и делать правильные выводы. А школьный учитель должен владеть навыками обучения исследовательской деятельности, способами проблемного представления учебного материала, методами приобщения учащихся к самостоятельному поиску ответов на любые научные, технические, социальные, экономические и др. вопросы.

Математика учит самостоятельности в принятии решений больше других учебных предметов. Но сначала необходимо научить ребенка методам и способам математического выражения процессов и закономерностей, умению применять математический инструментарий к решению простейших задач.

Самостоятельное применение любого инструмента требует умения анализировать поставленное задание, тем более что развитие научно-технического прогресса и информационных технологий эти задания усложняют огромными темпами.

В современном мире без глубокого знания алгебры, аналитической геометрии и математического анализа качественно освоить разделы, связанные с дифференциальными уравнениями, теорией вероятностей и их приложениями, можно только на так называемом алгоритмическом уровне, то есть на уровне решения типовых задач. Но в реальном мире каждая задача уникальна, жизнь требует постоянного расширения кругозора, постоянного анализа, поиска все более нестандартных решений.

В средней школе преподаётся только малая толика элементарной математики, что, к слову, не мешает людям успешно заканчивать математические факультеты и заниматься исследовательской деятельностью. Однако результаты ЕГЭ по математике и уровень знаний студентов технических ВУЗов заставляют задуматься о пробелах в математических знаниях школьников.

Учитывая, что не все школьники связывают свою будущую профессию с техническими специальностями, но все нуждаются в повышении уровня экономических знаний и финансовой грамотности, мы делаем вывод о необходимости введения дополнительных занятий для помощи школьникам в освоении начал математического анализа.

Таким дополнением к основной программе может стать внеурочная деятельность по изучению элементов математического анализа для учащихся, которые желают более глубоко освоить этот раздел математики.

Согласно требованиям ФГОС внеурочная деятельность является частью основной образовательной программы образовательного учреждения. На внеурочную деятельность отведено 10 часов в неделю, посещение занятий внеурочной деятельности обязательно при условии добровольного выбора учащимися направления занятий [44].

На основании всего вышесказанного нами была выбрана тема дипломной работы: «Методические особенности изучения элементов дифференциального исчисления в средней общеобразовательной школе».

Актуальность темы дипломной работы обусловлена тем, что:

1. Навыки использования элементов дифференциального исчисления для решения большого объема прикладных задач в разных областях наук

позволяют сформировать ряд поликультурных и информационных компетентностей обучающихся для применения их в своей будущей профессиональной деятельности, что является ядром требований ФГОС с ориентацией на результат обучения.

2. При переходе из среднего звена обучения в старшее, когда начинается изучение «алгебры и начал математического анализа» в 10-м классе, учащиеся испытывают достаточно большие трудности понимания различных понятий, что требует дополнительных внеурочных часов с применением различных форм и методов исследовательской работы, применения технических средств визуализации, отработки практических навыков при моделировании реальных ситуаций. Это в условиях внедрения ФГОС возможно реализовать на занятиях внеурочной деятельности.

3. Существует необходимость совершенствования подготовки к ЕГЭ по математике для успешного продолжения обучения в высших учебных заведениях.

Целью исследования является:

разработка рабочей программы курса внеурочной деятельности по математике для обучающихся 10-11 классов по теме «Секреты дифференциального исчисления» для реализации требований федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования РФ (ФГОС СОО РФ).

Объектом исследования является процесс обучения началам математического анализа учащихся 10-11 классов.

Предмет исследования – содержание и методика изучения элементов дифференциального исчисления учащимися старшей школы на занятиях по предмету «Алгебра и начала математического анализа».

Для достижения цели в работе ставились следующие **задачи**:

1. Определить методические особенности преподавания элементов дифференциального исчисления в курсе алгебры для 10-11 классов в учебной, учебно-методической, педагогической литературе, связанные с

реализацией ФГОС;

2. Провести сравнительный анализ изложения материала по данной теме в разных учебниках алгебры для 10-11 классов с методической и педагогической точек зрения;
3. Провести анализ результатов ЕГЭ по математике профильного уровня за 2018 год, используя официальные данные, а также анкетирование старшеклассников с целью выявления их мнения об уровне сложности заданий профильного ЕГЭ по математике на тему «Производная и первообразная»;
4. Разработать рабочую программу курса внеурочной деятельности по математике для обучающихся 10-11-х классов на тему «Секреты дифференциального исчисления»;
5. Выполнить методическую разработку урока в соответствии с требованиями ФГОС по теме «Применение производной к исследованию и построению графиков функций» для 11-го класса.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования:**

1) изучение и анализ отечественной и зарубежной психолого-педагогической, учебно-методической и специальной литературы по вопросам, относящимся к проблеме исследования;

2) изучение и обобщение передового опыта школьных учителей;

3) беседы с учителями математики и учащимися;

4) педагогическое наблюдение;

5) анкетирование;

7) изучение школьной документации, в частности рабочих программ внеурочной деятельности;

8) проведение анализа исследования.

Дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

Во введении обоснована актуальность выбора темы, определены цель, объект и предмет исследования, и поставлены задачи с учетом цели и предмета исследования.

Глава 1 - теоретическая. В ней приведен анализ научно-методической литературы и анализ содержания темы «Элементы дифференциального исчисления» в учебниках «Алгебра и начала анализа для 10-11 классов» в старших классах средней школы. Определены методические особенности обучения элементам дифференциального исчисления, связанные с реализацией ФГОС. Описаны проблемы, возникающие у выпускников школ при решении заданий ЕГЭ по математике профильного уровня по данной теме.

Во **2 главе** приведено описание рабочей программы внеурочной деятельности для старшеклассников по теме «Секреты дифференциального исчисления» и представлена методическая разработка занятия на тему «Применение производной к исследованию и построению графиков функций».

В **заключении** подведены общие итоги исследования.

Список использованной литературы состоит из 52 источников психолого-педагогической, нормативной и методической литературы, учебников, учебных пособий, статей и интернет-ресурсов.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1.1.Теоретические основы дифференциального исчисления в старшей школе

Дифференциальное исчисление - раздел математического анализа, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций.

Исторические сведения о дифференциальном исчислении доходят до нас с древних времен, но свое развитие, как научное, этот раздел математики получил в конце XVI века, когда огромный интерес ученые стали проявлять к законам движения и ускорения, и появились первые научные публикации об исследованиях в этой области физики. Решение этих вопросов привело к установлению связи между задачей о вычислении скорости движения тела и задачей проведения касательной к кривой, описывающей зависимость пройденного расстояния от времени [26].

Основные положения дифференциального исчисления были сформулированы Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем, они же указали на взаимную связь дифференцирования и интегрирования. Методы математического анализа нашли применение во всех разделах математики, получили распространение области применения математики в естественных науках и технике [24].

Дифференциальное исчисление базируется на важнейших понятиях математики, таких как: действительные числа, числовая прямая, функция, граница, непрерывность. Определение и исследование этих понятий и составляют предмет введения в математический анализ. Основная идея дифференциального исчисления состоит в исследовании поведения функции в достаточно малой окрестности каждой точки, где оно приближается к поведению линейной функции или многочлена [5].

Центральными понятиями дифференциального исчисления являются производная и дифференциал. В математике производная активно используется при исследовании функции, а дифференциал в приближенных вычислениях. Но, во-первых, чтобы рассматривать приложения производной к исследованию свойств функций, у учащихся должен быть накоплен некоторый запас знаний и умений о способах исследования функций элементарными методами, причем опыт анализа должен подвести обучающихся к пониманию необходимости обобщения. А, во-вторых, учащиеся должны в основном овладеть самим инструментом исследования, т.е. достаточно отчетливо представлять, что такое производная.

Перечислим основные понятия и определения дифференциального исчисления, которые предусмотрены образовательными стандартами для введения в школьный курс начал математического анализа. Формулы и определения взяты из справочника по математике для школьников авторов Гусева В.А и Мордкович А.Г. [8].

Определение производной

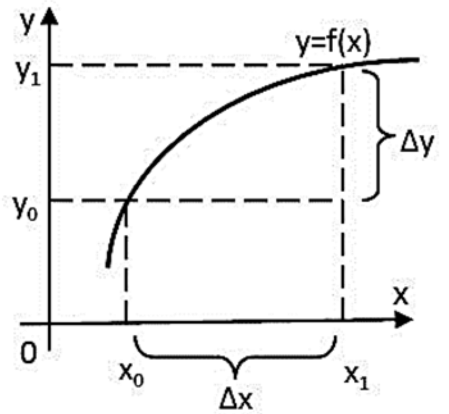


Рис. 1.1.1. Определение производной

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю и если этот предел существует, называется *производной функции в точке.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции называется *дифференцированием*.

Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется *дифференцируемой на этом интервале*.

Числа

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

и

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой и правой производными функции* $y = f(x)$ в точке x_0.

Вторая производная функции $f(x)$ есть первая производная от $f'(x)$: $f''(x) = (f'(x))'$.

Производной n-го порядка (или *n-ой производной*) функции $f(x)$ называется производная от производной порядка n-1: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Теорема. Всякая функция, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке. Обратное утверждение неверно.

Действительно, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Вычисление производной

Таблица 1.1.1. Производные некоторых функций:

Константа: $(a)' = 0$	Тригонометрические функции:
Линейная функция: $(ax + b)' = a$	$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,
Степенная функция: $(x^a)' = ax^{a-1}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$	Обратные тригонометрические функции:
Экспонента: $(e^x)' = e^x$	
Логарифм: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
Натуральный логарифм: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования позволяют находить производные многих функций, которые являются комбинацией нескольких основных функций:

$(c \cdot u)' = c \cdot u'$ - постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ - производная суммы функций равна сумме производных этих функций.

Производная произведения двух функций вычисляется по формуле $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

Производная отношения двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

Если функция $f(x)$ четна (нечетна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Теорема (о производной сложной функции): Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем $h'(x_0) = g_y'(y_0) \cdot f'(x_0)$, или кратко $g_x' = g_f' \cdot f_x'$.

Из этой теоремы, в частности, следует:

а) если u- функция от x, то $(u^2)' = 2uu'$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $u(v(w(x)))' = u'(v) \cdot v'(w) \cdot w'(x)$, и т.д.

б) если u, v – функции от x, то

$$\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}},\ \left(\cos(u^2 + v)\right)' = -\sin(u^2 + v) \cdot (2uu' + v'), \text{ и т.д.}$$

Теорема (о производной обратной функции): Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть в точке x_0 существует производная, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$.

Следовательно, производная обратной функции равна величине, обратной величине производной данной функции.

Геометрический и механический смыслы производной функции

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке А с абсциссой x_0.

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

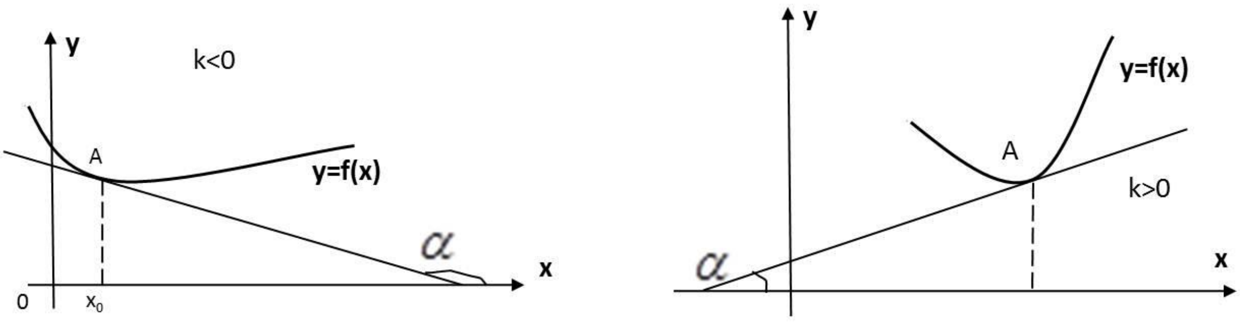


Рис.1.1.2. Геометрический смысл производной

В уравнении прямой $y = kx + b$ число k - угловой коэффициент, то есть

$$f'(x_0) = tg\alpha = k.$$

Параллельные прямые имеют одинаковые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент прямой линии, параллельной оси абсцисс, равен нулю, т.е., если $y = kx + b$ параллельна оси абсцисс, то $k = 0$.

Производная функции часто используется в решении задач по механике. Пусть $S = S(t)$ - уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ - скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ - ускорение движущегося тела в момент времени t.

Касательная к графику функции

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ – это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент

$k = f'(x_0)$. (Рис.1.1.3)

Уравнение этой прямой называется общим уравнением касательной и имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Полагая, что $y_0 = f(x_0)$, получим $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

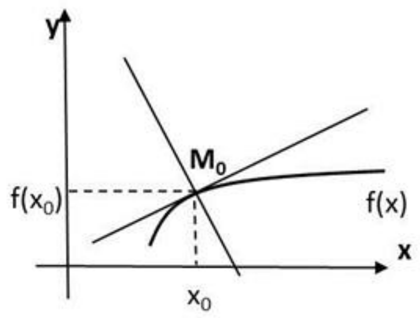


Рис.1.1.3. Касательная в точке М к графику функции *f(x)*

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к графику функции* $y = f(x)$ в этой точке. Произведение угловых коэффициентов касательной и нормали в силу их перпендикулярности равно -1, поэтому уравнение нормали имеет вид $(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$.

Под углом между кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ принято понимать угол между касательными к этим кривым в точке пересечения кривых $M = (x_0; y_0)$.

Тангенс этого угла может быть вычислен по формуле

$$tg\alpha = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) g'(x_0)} \right|.$$

Если знаменатель этого выражения равен нулю, то кривые пересекаются под прямым углом.

Условие касания кривых, заданных уравнениями $y = f(x)$ и $y = g(x)$, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Монотонность функции. Экстремумы функции

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими*.

Если функция дифференцируема и возрастает на некотором промежутке, то на этом промежутке $f'(x) > 0$, за исключением отдельных точек, где $f'(x) = 0$.

Справедливо и обратное утверждение: если функция дифференцируема и убывает на некотором промежутке, то на этом промежутке $f'(x)<0$, за исключением отдельных точек, где $f'(x)=0$.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на данном интервале (или на открытом луче, или на всей числовой прямой), достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительной (отрицательной) в каждой точке этого интервала (открытого луча, прямой). Если при этом функция $f(x)$ непрерывна на одном или обоих концах промежутка возрастания (убывания) (достаточно даже соответствующей односторонней непрерывности), то этот конец можно присоединить к указанному промежутку (т.е. утверждать монотонность на $(a;b]$, $[a;b)$ или $[a;b]$).

Теорема. Если производная $f'(x)$ неотрицательна (неположительна) в любой точке некоторого промежутка и равна нулю лишь в конечном числе точек, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом промежутке.

Теорема. Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке, если производная $f'(x)$ этой функции положительна (отрицательна) всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, и в этих точках функция непрерывна.

Точка x_0 из области определения функции $y=f(x)$ называется *точкой максимума (max),* если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ (Рис.1.1.4.).

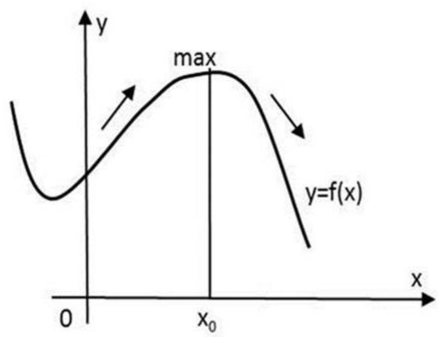


Рис. 1.1.4. Точка максимума (max) функции

Тогда $f_{max} = f(x_0)$.

Условиями существования максимума функции в точке x_0 являются:

1) $f'(x_0)=0$;

2) при переходе через критическую точку x_0 функции $y=f(x)$ ее

производная меняет знак с «+» на «-».

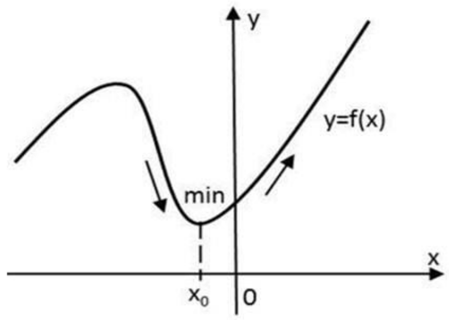


Рис.1.1.5. Точка минимума (min) функции

Точка x_0 называется *точкой минимума (min)* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Условиями существования минимума функции в точке x_0 являются:

1) $f'(x_0) = 0$;

2) при переходе через стационарную точку x_0 функции $y = f(x)$ ее производная меняет знак с «-» на «+». x_0 – точка минимума (рис.1.1.5.), $f(x_0)$ - минимум функции, то есть $f(x_0) = f_{min}$.

Если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точках $(x_0; f(x_0))$, где x_0 - точка экстремума (min или max), параллельна оси абсцисс, ее угловой коэффициент равен нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$ (Рис.1.1.6.).

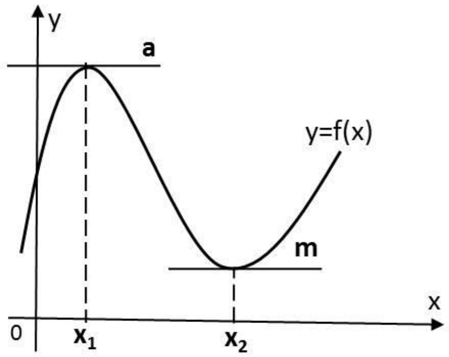


Рис. 1.1.6. Точки экстремумов функции

$f'(x_1) = 0$, a||Ox, $f'(x_2) = 0$, m||Ox.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема (т.е. имеет вторую производную) в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Если $f''(x_0) = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Одной из наиболее сложных задач на исследование функции является задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на ее области определения или на каком-либо промежутке, входящем в область определения. Для решения таких задач рекомендуется использование следующего алгоритма нахождения наибольшего или наименьшего значений функции, непрерывной на промежутке и имеющей на нем единственный экстремум:

1. Убедиться в том, что функция на данном промежутке определена и непрерывна.

2. Найти производную функции и определить ее промежутки знакопостоянства на данном промежутке.

3. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы и убедиться в том, что на данном промежутке она имеет единственный экстремум (находим только точку, в которой функция принимает свое наибольшее или наименьшее значение на промежутке, а не само наибольшее или наименьшее значение).

4. Если найденный экстремум – максимум, то он является наибольшим значением функции на промежутке (если минимум - наименьшим).

Непрерывная на отрезке функция принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения, причем либо на концах отрезка, либо в критических точках. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, рекомендуется следующий алгоритм действий:

1. Убедиться в том, что функция на данном промежутке определена и непрерывна.

2. Найти критические точки функции.

3. Отобрать те критические функции, которые принадлежат данному отрезку.

4. Найти значения функции в критических точках отрезка и на его концах.

5. Записать в ответ наибольшее и наименьшее из найденных в п.4 значений – это и будут наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

Данные алгоритмы применимы лишь к указанным частным случаям и не могут быть распространены на другие случаи (в первом алгоритме нельзя рассматривать промежуток, на котором функция имеет более одной точки экстремума, а во втором – нельзя заменять отрезок промежутком другого вида).

Теорема. Дифференцируемая на $(a;b)$ и непрерывная на $[a;b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a;b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a;b)$. В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая достигается точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Теорема. Область значений функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, представляет собой отрезок $[y_{наим}; y_{наиб}]$.

Выпуклость и вогнутость функции

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вниз (выпуклым вверх, или вогнутым) на интервале $(a;b)$, если в любой точке интервала $(a;b)$ он расположен выше (ниже) касательной, проведенной к нему.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$, тогда если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при любом $x \in (a;b)$, то ее график является выпуклым вниз (вверх) на интервале $(a;b)$.

В простейших случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ либо $f''(x)$ не существует. Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба*.

Достаточное условие точки перегиба: Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, в которой $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не существует. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta; x_0)$ и $(x_0; x_0+\delta)$ производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 – точка перегиба.

План исследования функции с помощью производной

Следует найти:

1. Область определения функции $f(x)$ и поведение ее на границе области определения.

2. Особенности функции $f(x)$, а именно, четность, нечетность и периодичность.

3. Нули функции $f(x)$ (т.е. точки x, в которых $f(x)=0$) и интервалы знакопостоянства ($f(x)>0$, $f(x)<0$).

4. Асимптоты графика функции. Вертикальные асимптоты $x=a$ находят из условия $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (или предел при $x\to a+0$ и $x\to a-0$). Наклонные асимптоты $y=kx+b$ находят с помощью формул:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

(или отдельно при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$), $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\infty$ (или отдельно при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$).

5. Экстремумы функции и интервалы монотонности.

6. Точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости. Выпуклость вверх определяется из условия $f''(x)<0$, выпуклость вниз – из условия $f''(x)>0$, точка перегиба – из условия $f''(x)=0$ или не существует (однако это лишь необходимое условие перегиба)

Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема при $x \in (a;b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема при $x \in (a;b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (формула конечных приращений Лагранжа).

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы при $x \in (a;b)$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a;b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(формула Коши).

Вывод: приведенный обзор теоретического материала по дифференциальному исчислению, который включен в курс алгебры и начал математического анализа для 10-11-х классов, определяет методические особенности обучения старшеклассников элементам дифференциального исчисления.

1.2. Методика обучения дифференциальному исчислению в старшей школе

В методике преподавания математики есть три ключевых вопроса: что преподавать? зачем преподавать? как преподавать? Во введении мы определились, что элементы дифференциального исчисления необходимы для создания математических моделей реальных ситуаций и описания этих моделей математическим языком.

На вопрос «как преподавать?» ответ даёт Концепция математического образования [43]. На сегодняшний день в парадигме математического образования прочно утвердился тезис о том, что школьная математика не наука, а учебный предмет, в котором более важным являются понятия, а не строгие научные математические определения [10]. Поэтому учитель должен быть вооружен четкой стратегией и продуманной тактикой введения формального определения сложного математического понятия, каким и является понятие производной.

Дифференциальное исчисление основано на исчислении бесконечно малых величин. Основная идея дифференциального исчисления – представление о функции как линейной в достаточно малой окрестности точки [7].

Пропедевтика математического анализа начинается в средней школе и ее основными направлениями являются:

1) изучение линейной функции, анализ способов задания функции, нули функции и аргумента, анализ значений коэффициентов аргумента, нахождение угла между прямой и положительным направлением оси Ox;

2) понятие приращения аргумента и приращения функции, представления о бесконечно малых и больших величинах, асимптоте и пределе функции;

3) понятие касательной к окружности и к любой кривой, примеры выпуклых функций и касательных к ним. Например, для квадратичной функции $y= x^2$ касательной является ось абсцисс, а не ординат, хотя та и другая имеют с параболой только одну точку пересечения [7].

По мнению академика РАН Арнольда В.И. стратегия отвечает на вопрос, когда и где следует давать учащимся формальное определение нового понятия, то есть она указывает время и место введения определения понятия. Тактика отвечает на вопрос: как постепенно подвести учащихся к осознанию формального определения сложного математического понятия? [33].

Уровни знакомства с понятием, по мнению Мордковича А.Г. [19] бывают разными, из них три основных:

1) наглядно - интуитивный (новое понятие вводится, например, по картинке);

2) рабочий (описательный) уровень (когда ученика спрашивают «как ты понимаешь, что такое…»;

3) формальный уровень.

Автор учебно-методического комплекта по алгебре для 7-11 классов, профессор А.Г. Мордкович считает, что сложные математические понятия, такие, как функция, свойства функции, производная, предел, следует выводить на формальный уровень при выполнении двух условий. Во-первых, если у учащихся накопился достаточный опыт для адекватного восприятия вводимого понятия, и, во-вторых, если у учащихся появилась потребность в формировании определенного понятия [18].

Такой метод обучения называется генетическим подходом к процессу формирования математических понятий. Генетический подход в математике используется на практике достаточно давно – его приверженцами были такие крупные математики и педагоги, как Ф. Клейн, А. Пуанкаре и Д. Пойая [26].

Генетический подход открывает проблему разработки системы развивающего обучения математике в старшей школе, то есть материал, посвященный началам анализа, следует рассматривать не только с точки зрения содержательной ценности, но и с точки зрения дидактических средств. И в этом плане он является важным, незаменимым и естественным средством развивающего обучения математике [35].

Главная цель введения элементов математического анализа в курс математики средней школы – создание возможности для расширения области приложений школьной математики. Это является полезным как для дисциплин, применяющих математику, так и для самого курса математики. Таким образом, в ходе изучения курса алгебры и начал анализа разрабатывается аналитический аппарат, применяемый во всех предметах естественно-математического цикла: в геометрии, физике, экономике и информатике [2].

Дифференциальное исчисление широко используется также при исследовании функций. Благодаря производной можно найти промежутки монотонности функции, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения функции.

В настоящее время в школьных программах по алгебре при начальном изучении производной функции обычно применяют исторический подход, то есть изначально формируются понятия производной, и только потом, понятие предела функции. Именно при таком подходе большое внимание будет уделяться практическим аспектам изучения производной.

При изучении применения производной важнейшая роль отводится наглядным представлениям о производной. Опираясь на геометрический и физический смыслы производной, учащимся сразу становятся видны критерии возрастания и убывания функций, признаки максимума и минимума.

Решение различных тестовых задач геометрического, физического и практического содержания с использованием производной позволяет ученикам ознакомиться со многими этапами решения прикладных задач: составление математической модели (перевод задачи на язык функций), решение полученной задачи средствами математического анализа, и наконец, интерпретация полученного решения в терминах исходной задачи.

При вычислении производной у учащихся возникают большие трудности при выборе, какими правилами следует воспользоваться. Лучше на этапе знакомства с темой дать алгоритм вычисления производной в виде последовательных ответов на вопросы:

1. Является ли функция элементарной? Если да, то находим производную по таблице.

2. Какие функции «входят» в данную функцию?

3. Какое действие «связывает» функции (сложение, умножение, деление) или функция является сложной?

4. Если функции «связаны» арифметическими действиями, то используется соответствующее правило дифференцирования.

5. Если функция является сложной, то находим производную от каждой функции и перемножаем их. При этом аргумент функции не меняется [25].

Основная трудность в работе учителя математики при изложении начал анализа состоит в адекватном и концептуальном выборе уровня строгости подачи материала школьникам.

В учебном предмете возможны четыре уровня обоснования тех или иных свойств, утверждений, фактов:

1) принятие на веру, то есть без доказательств;
2) наглядно-интуитивный уровень, то есть замена доказательств геометрическими иллюстрациями;
3) правдоподобные рассуждения (например, использование вместо доказательств наглядного примера, в котором фактически раскрывается идея формального доказательства);
4) формально строгое доказательство [23].

Рассмотрим для примера исследование функции с помощью производной. Эта тема – самая важная в методике преподавания производной. Здесь речь идет о теоремах, необходимость знания которых и является причиной введения элементов математического анализа в школьный курс математики. В то же время строгое доказательство этих теорем требует знания многих фактов математического анализа, которые в школьном курсе не рассматриваются. Какой путь выбрать учителю?

В разных школьных учебниках встречаются различные варианты. В учебнике Никольского С.М. для 10-11 класса [21] приводятся доказательства многих теорем, но готовы ли учащиеся понять эти доказательства, достаточно ли у них знаний и математического опыта?

Например, доказательство теоремы Лагранжа о формуле конечных приращений, которая утверждает, что на графике функции найдется точка, касательная к которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами, является очень сложным, хотя эту теорему называют основной теоремой дифференциального исчисления.

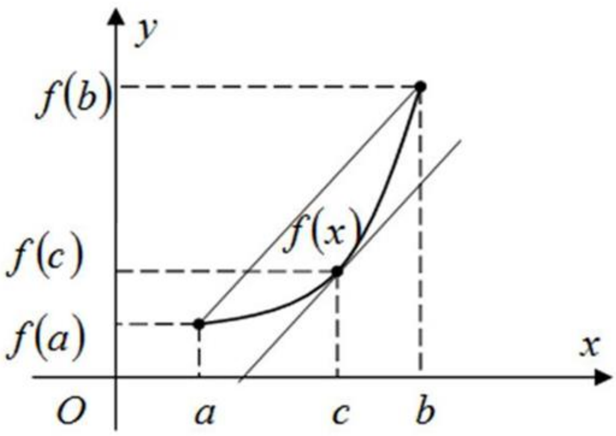


Рисунок 1.2.1. Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Поэтому Мордкович А. не видит смысла приводить ее графическую иллюстрацию без доказательства самой теоремы, если школьникам непонятен смысл понятий в самой теореме. Достаточно сразу показать школьникам связь между знаком производной и характером монотонности функции на графике [19].

В другом случае иногда правдоподобные рассуждения выдают за строгое доказательство, такая подмена наносит ущерб формированию математической культуры школьников.

Однако если использовать этот метод при изучении применения производной для исследования функций на монотонность и экстремумы, предварительно уточнив, что такой метод является не доказательством, а простым логическим выводом, то для школьников он становится вполне понятным и логически обоснованным.

Мордкович А.Г. определяет концепцию выбора уровня строгости, связанного с элементами математического анализа, совокупностью следующих положений [18]:

1) если некоторое утверждение, используемое в предмете, в принципе недоказуемо в школьном курсе, то оно честно принимается без доказательства;

2) если некое утверждение в принципе доказуемо, но оно технически сложно и не имеет существенного значения для развития математического мышления, то оно не приводится;

3) если некоторое утверждение в школьном курсе в принципе доказуемо и это доказательство имеет развивающее значение, то оно приводится (примером может служить вывод уравнения касательной, вывод правил дифференцирования суммы и произведения функций).

В курсе математического анализа предлагается общая схема исследования свойств функции для построения ее графиков, описанная в параграфе 1.1. данной работы. Внутренняя логика этой схемы отвечает на вопрос «как строить требуемый график?».

В школьных учебниках старшей школы накоплено достаточное количество задач на нахождение наименьшего и наибольшего значений функций. Иногда решить эти задачи возможно и без графика. В сложных случаях на помощь приходит производная.

Наибольшую трудность у учащихся вызывают задачи на оптимизацию. Одним из самых удачных является метод решения таких задач по схеме в виде трех этапов моделирования: составление математической модели, работа с моделью, нахождение ответа на вопрос.

Учитывая главную цель введения элементов математического анализа в школьный курс математики (расширить область приложений школьной математики), большинство ученых считают, что математическому анализу в школе следует придать отчетливую прикладную направленность, как по отбору материала, так и по характеру его изложения [32].

В настоящее в 10-11 классах для изучения предмета «Алгебра и начала математического анализа» отводится на базовом уровне – 2 (3) часа в неделю; на профильном уровне – 4 часа в неделю [42].

Федеральный перечень учебников на 2018-2019 учебный год утвержден Приказом Министерства просвещения РФ №345 от 28.12.2018г. [50].

В учебниках разных авторов существуют различные подходы к введению основных понятий дифференциального исчисления и разный уровень строгости определений. Мы проанализировали варианты изложения данной темы в некоторых учебниках из Федерального перечня для классов с углубленным изучением математики и учебниках для общеобразовательных школ.

Для анализа были выбраны следующие учебники: для базового уровня подготовки – учебники Алимова Ш.А. и др.[1], Башмакова М.И.[3], Колмогорова А.Н. и др.[13] (таблица 1.2.1), а также для профильного уровня обучения – учебники Мордковича А.Г. и др.[19], Никольского С.М. [21] (таблица 1.2.2).

Анализ учебников проводился сравнением методических особенностей введения авторами основных понятий, а также методов формирования умений учащихся для решения практических задач по таким темам, как:

1. Понятие производной. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Вычисление производной. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.

2. Непрерывность функции и предельный переход. Схема исследования функций. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций. Наименьшее и наибольшее значения функции.

3. Приложения производной. Применение производной в физике и других областях знаний.

Таблица 1.2.1. Представление элементов дифференциального исчисления в школьных учебниках математики базового уровня

Темы	Учебники «Алгебра и начала математического анализа» для 10-11 классов		
	Авторы Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., и др./ – М.: Просвещение, 2012. – 464 с.	Автор Башмаков М.И.- . – М.: Просвещение, 1992. – 351 с.	Автор Колмогоров А.Н. – М., Просвещение, 2006. – 384с.
Понятие и определение производной. Геометрический и физический смысл производной	Введение понятия начинается с рассмотрения задачи о мгновенной и средней скорости, что приводит к понятию разностного отношения. Определение производной дается как предел разностного отношения. Понятие предела формулируется после определения производной без подробного изучения, а определение предела разностного отношения дается на интуитивной основе и разъясняется на конкретных примерах.	Так же, как и в учебнике Алимова Ш.А. автор детально рассматривает механический и геометрический смысл производной на разных задачах, и только потом переходит к точному определению: производная – это мгновенная скорость движения. Геометрический смысл объясняется, как у Колмогорова А.Н. приближением точки, где нужно построить касательную.	Глава, посвященная производной, начинается с определения приращения функции. Определение производной дается без использования понятия предела, вместо этого автор пользуется понятием «стремится к…». Понятие касательной вводится способом аналогии: увеличивая масштаб графика функции, автор обращает внимание школьников на то, что график все больше становится похож на прямую.

Непрерывность функции и предельный переход	Объясняется на примерах, без доказательств.	Объясняется на примерах, без доказательств.	Автор разбирает свойство непрерывности и предельный переход, углубляясь в математический анализ.
Вычисление производной. Правила дифференцирования	Учебник содержит доказательства только двух первых формул правил дифференцирования. Автор заменил формулу сложной функции: $f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$, на ее частный случай – линейную замену аргумента: $(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$, доказательство которой короче и менее абстрактно.	Формулы вычисления производных и правила дифференцирования объясняются очень подробно и доступно, разъясняется каждый шаг.	Все формулы правил дифференцирования выводятся, каждый шаг объясняется. Также рассматривается формула производной сложной функции: $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$.
Производные элементарных функций.	Формулы вводятся наглядно-интуитивными способом с акцентом на их практическое применение и вводятся в соответствующих темах учебника .	Предлагается вывод формул производных: для линейной функции, квадрата, куба, гиперболической функции, корня, степени, а производные тригонометрических функций вовсе исключены из курса.	Формулы производных показательной и логарифмической функций также выводятся и применяются в решении задач позже в соответствующих темах.

Исследование функций. Возрастание и убывание функции	Формулировка признаков возрастания и убывания функции представлена в начале раздела.	Приводятся две теоремы: о постоянстве функции на промежутке, где она имеет производную, равную нулю, и теорема о признаке монотонности функции.	Признаки возрастания и убывания доказываются на основе формулы Лагранжа.
Экстремумы функций. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции	В разделе определения экстремумов функций автор делает упор на рассмотрение задач.	Изложены положения о необходимом условии экстремума - производная в точке экстремума должна быть равна нулю и признаки максимума (минимума) функции.	Методично доказываются теоремы о признаках максимума и минимума функций.
Схема исследования функций	Приводит схему исследования функции только на монотонность. Схема исследования не отличается от схем в других учебниках.	Исследует функцию только на монотонность. Автор применяет минимум формул, предпочитая рассказ о свойствах производной.	Так же, как в других учебниках.
Приложения производной. Применение производной в физике	В учебнике больше формализованных задач, чем прикладных.	В учебнике приводятся задачи, которые иллюстрируют использование производной при нахождении физических характеристик таких, как сила, импульс, кинетическая энергия. Разъясняется суть понятия дифференциала.	Приводятся примеры использования производной в физике: нахождение мощности, линейной плотности, а также принцип действия параболических телескопов.

Представление элементов дифференциального исчисления в учебниках для профильных классов с углубленным изучением математики намного шире. Наиболее популярными являются учебники «Алгебра и начала анализа» авторских коллективом под руководством Никольского С.М. [21] и Мордковича А.Г. [20], анализ подачи материала по указанной теме в этих учебниках приводится в таблице 1.2.2.

В учебнике Никольского С.М. [21] изучение темы «Производная» вводится в первом полугодии 11 класса, поэтому производная обобщает и систематизирует свойства различных функций – тригонометрических, логарифмических, степенных и других. Мордкович А.Г. вводит тему «Производная» во втором полугодии 10 класса.

Все учебники соответствуют требованиям ФГОС СОО. Основные принципы изучения темы «Производная» в этих учебниках практически схожи, но различия все равно существуют и по большей степени в изучении приложения производной.

В учебниках Ш.А. Алимова [1], А.Н. Колмогорова [13] и М.И. Башмакова [3] для общеобразовательных учреждений понятие производной дается либо без понятия предела, либо с этим понятием, но без его строгого определения. В общеобразовательных учебниках не изучаются производные обратных тригонометрических функций, а также многие приложения. То есть на базовом уровне обучающиеся только знакомятся с понятием производной. Этого совсем недостаточно для успешной сдачи ЕГЭ по математике профильного уровня и успешного обучения в вузах технической направленности.

В учебниках А.Г. Мордковича [20] и С.М. Никольского [21] для классов с углубленным изучением математики понятие производной дается через понятие предела с предварительным и подробным его изучением. Подробно рассматриваются различные приложения производной, что дает больше возможностей для формирования профессиональных компетенций.

Таблица 1.2.2. Представление элементов дифференциального исчисления в школьных учебниках математики профильного уровня

Темы	Учебник «Алгебра и начала математического анализа» для 10-11 классов профильного уровня	
	Авторский коллектив под руководством Мордковича А.Г./ – М.: Мнемозина, 2015г.	Авторский коллектив под руководством Никольского С.М./ – М.: Просвещение, 2009г.
Понятие и определение производной. Геометрический и физический смысл производной	Авторы подводят ученика к возникновению новой математической модели – производная через геометрическую и физическую задачу. После этого вводится понятие дифференцируемой функции в точке и дифференцирования как названия операции нахождения производной.	Изучение темы начинается с введения понятия приращения. При помощи предела дается определение дифференцируемой функции в точке. Все доказательства приводятся с использованием аналогий – на примерах. Вводится понятие касательной прямой к кривой в точке. Для уравнения касательной представлен вывод.
Вычисление производной. Правила дифференцирования Производные элементарных функций	Даются формулы дифференцирования, найденные по определению производной, после этого вводятся правила дифференцирования. Дается понятие второй, третьей производной и производной n-ого порядка. Делается вывод, что ускорение есть вторая производная, что является механическим смыслом второй производной.	Определяется вторая производная $f''=(f')'$, что означает ускорение изменения данной функции. Дается определение производной высшего порядка. Все определения, теоремы, следствия имеют доказательства.

Исследование функций. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции. Схема исследования функций	В учебнике четко описан алгоритм исследования функций для построения графиков и даны схемы исследований по каждому пункту. Доступно для понимания рассматриваются задачи на оптимизацию.	Для исследований приведен ряд теорем, все теоремы представлены доказательствами. Формулируется теорема Лагранжа и следствия из нее. Применение производной рассматривается для исследования графиков функций на выпуклость и отыскания точек перегиба; для доказательства неравенств. Однако четкого алгоритма исследования функции не приводится.
Приложения производной. Применение производной в физике	Представлен большой массив задач разного уровня в Задачнике, который является составной частью учебно-методического комплекса.	Предложено огромное количество прикладных задач.

Изложение темы «Производная» в учебниках для профильного обучения представлено на наглядно-интуитивном, рабочем и формально-логическом уровне, предложены разноуровневые задания.

На мой взгляд, Мордкович А.Г [20] наиболее мягко подводит учащегося к понятию производной, как инструмента исследования реальных процессов. Большинство проводимых рассуждений не претендует на формальную строгость, а являются лишь правдоподобными рассуждениями, что позволяет обучающимся легче усваивать элементы дифференциального исчисления. Приоритет отдается функционально-графической интерпретации

В учебнике Никольского С.М. [21] терминология имеет строгую формулировку, строгую доказательную структуру. Этот учебник больше других приближен к первым разделам вузовского курса математического анализа. В учебнике А.Г. Мордковича [20] вторая производная не используется для нахождения промежутков выпуклости функции, не формулируется теорема Лагранжа, зато производная применяется для доказательства тождеств и неравенств с помощью исследования на монотонность. В учебнике С.М. Никольского [21] формулируются теоремы Ролля и Лагранжа для нахождения промежутков выпуклости функции, рассматриваются особенности экстремума функции с единственной критической точкой, а также вывод формулы и ряда Тейлора, что позволяет использовать этот учебник для углубленной подготовки обучающихся к изучению математического анализа.

Обратим внимание на то, что обе системы построения учебных курсов обладают рядом определенных недостатков. По моему мнению, в анализируемых учебниках теоретический материал по введению понятий математического анализа предложен на сложном научном языке, который подростки не всегда понимают. Предложенные задания даже с практическим уклоном далеки от тех явлений, с которыми учащиеся сталкиваются ежедневно, они не помогают формировать целостную картину мира, не являются системообразующим компонентом для формирования всесторонне развитой личности. Например, ни в одном учебнике не представлены задачи по финансовой математике, которые есть в ЕГЭ по математике профильного уровня и актуальны в реальной жизни. Стоит отметить, что экономические задачи на оптимизацию прибыли, ценообразование, эластичность спроса и предложения решаются в экономической теории с помощью производной. И уже давно такие задачи предлагаются на олимпиадах школьников по экономике.

Кроме этого, учебники по математике для 10-11 классов, как правило, не продолжают учебно-методические линии общего образования, поэтому отсутствует преемственность в изложении материала при переходе от элементарной математики к элементам математического анализа.

Современные учебники для старшей школы не соответствуют принципу наглядности. Иллюстративный материал дается только в виде графиков, отсутствуют диаграммы, рисунки, иллюстрации. В учебниках не хватает фактологического материала, примеров из жизни, статистики, таких, чтобы ученик мог, опираясь на эти материалы и собственный опыт, делать самостоятельный и осмысленный выбор при решении задач.

Обобщая вышесказанное, мы можем выделить следующие методологические особенности изучения элементов дифференциального исчисления в средней общеобразовательной школе:

1) Знакомство с таким серьезнейшим разделом высшей математики, как «элементы дифференциального исчисления» должно опираться на понимании довольно важных моментов, например, как ведет себя функция. Обучение анализу поведения функций начинается уже в 7 классе средней школы и должно быть связано с введением такого понятия как асимптоты и предел. Однако в 10 классе многие школьники не понимают формального понятия зависимости функции от аргумента, а также не могут анализировать влияние коэффициентов k и b при анализе линейной функции $y=kx+b$, коэффициентов в уравнении параболы $y=ax^2 +bx +c$, окружности, обратной функции. Необходимо к 10 классу ликвидировать и пробелы в понимании области определения и области значений функции. Только опираясь на эти знания, ученики смогут приступить к изучению производной – важнейшей математической модели анализа.

2) Очень важно при изучении начал математического анализа для каждой конкретной аудитории обучающихся определить уровень строгости при введении новых понятий высокой степени абстрактности, какими являются элементы дифференциального исчисления. Большое значение в этом плане имеет дифференцированный подход в обучении, учитель должен создать на уроке атмосферу сотрудничества, реализовывать согласно требованиям ФГОС деятельностный подход, включая каждого ученика в творческий процесс самостоятельной и групповой работы, как для определения проблемы, а затем целей конкретного занятия, так и для поиска пути решения задачи. Необходимо постоянно уделять внимание содержательной стороне рассматриваемых понятий и фактов. Формально-

логическое совершенство определений и доказательств не должно быть самоцелью [44].

3) Учитывая социальный заказ современного общества на повышение профессионализма инженерно-технических работников, обучение в школе должно быть направлено на формирование прежде всего личностных компетенций, таких как умение создавать математические модели реальных ситуаций в физике, химии, технике, информационных технологиях, экономике и с их помощью решать задачи практической направленности. Дифференциальное исчисление является для этого незаменимым инструментом. Школьные учебники алгебры и начал математического анализа хотя и предлагают огромное количество задач, но они, как правило, представляют собой формализованные ситуации фундаментальных наук, а задачи по финансовой математике в учебниках и вовсе отсутствуют.

4) Изучение элементов математического анализа в старшей школе должно иметь максимально наглядный характер. Быстро меняющийся современный мир требует лаконичности в подаче материала, краткого обоснования связей тех или иных явлений, что возможно реализовать, например, с помощью информационно-коммуникационных технологий, а также опорных схем и конспектов, которые предлагал вводить в школьную математику советский педагог-новатор Шаталов В.Ф.

Исходя из вышесказанного, я поддерживаю два «лозунга», которые сформулировал Мордкович А.Г., относящиеся в первую очередь к преподаванию математического анализа.

Первый лозунг: «Меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей!»

Второй лозунг: «Больше иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений!» [19]

1.3. Элементы дифференциального исчисления в ЕГЭ по математике

ЕГЭ по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального государственного стандарта среднего образования. С 2015 г. ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях: базовом и профильном. Варианты КИМ составляются на основе спецификации и кодификаторов элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения ЕГЭ по математике и представлены на сайте Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) [39].

В 2018 г. ЕГЭ по математике проводился на двух уровнях в четвертый раз. Участники экзамена могли самостоятельно выбрать один из двух уровней экзамена в зависимости от своих образовательных запросов и перспектив продолжения образования.

С 2018 года структура экзамена профильного уровня не изменилась, то есть экзамен не стал легче. Это значит, что участники ЕГЭ 2019 года по математике должны были серьёзнее подходить к подготовке к экзамену, так как результаты этого экзамена влияли на получение аттестата за среднее общее образование.

Анализ демоверсии, спецификации и кодификаторов дает представление о структуре и уровне сложности заданий ЕГЭ по математике профильного уровня. Каждый вариант данного экзамена содержит 12 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развернутым ответом. Задания предназначены для проверки предметных знаний и умений по основным разделам курса математики: числа и вычисления, алгебра и начала математического анализа, геометрия, теория вероятностей. Проверка логических навыков включена в большинство заданий, особенно проявляется в требованиях к решению заданий с развернутым ответом [40].

Основные вопросы элементов дифференциального исчисления, вынесенные в кодификатор элементов содержания по математике для составления КИМ при проведении ЕГЭ по математике профильного уровня, включены в две темы (таблица 1.3.1):

Таблица 1.3.1. Элементы содержания темы «Элементы дифференциального исчисления» в ЕГЭ по математике профильного уровня.

Тема	**Содержание темы**
Производная	1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной 2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком 3. Уравнение касательной к графику функции 4. Производные суммы, разности, произведения, частного 5. Производные основных элементарных функций 6. Вторая производная и её физический смысл
Исследование функций	7.Применение производной к исследованию функций и построению графиков 8. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах

Вопросы по началам математического анализа формулируются в заданиях с кратким ответом 7 и 12. В этих заданиях проверяются, прежде всего, усвоение понятий производной и первообразной, знания формул производных элементарных функций и правил дифференцирования, а также умение их применять. В задании 7 представлены вопросы о геометрическом и физическом смысле производной, предлагается решение прикладных задач. В задании 12 – вопросы о нахождении точек экстремума и наименьших или наибольших значений функций на промежутке.

Задание 7 предусматривает задачи трех типов:

1тип - задачи на нахождение скорости материальной точки в определенный момент времени.

Например:

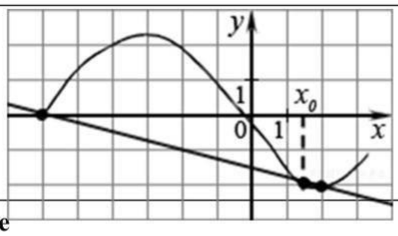
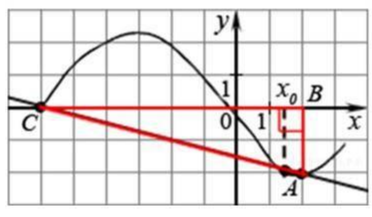
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)= t^2 -13t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Метод решения подобных задач основан на физическом смысле производной, как скорости движения в заданный момент времени.

2 тип - задачи, основанные на геометрическом смысле производной и на умении находить точки экстремумов.

Здесь учащимся предлагается рассмотреть график функции и касательной к нему на клетчатой бумаге. Иногда предлагается описание касательной, а на рисунке бывает изображен только график функции. Для решения задачи необходимо вычислить угловой коэффициент касательной, который является тангенсом угла, образованного этой касательной и положительным направлением оси абсцисс. В этой задаче может быть «ловушка»: необходимо помнить, что тангенс тупого угла имеет отрицательное значение, и не пропустить этот минус при внесении ответа в экзаменационный бланк.

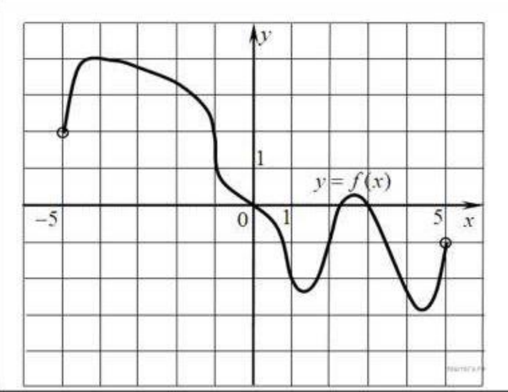
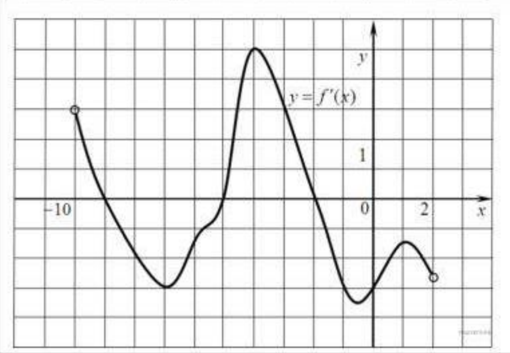
Таблица 1.3.2. Образец задания 7 ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задание	
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.	
Решение	
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; −2), B (2; 0), C (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:	
$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180° - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0{,}25.$$	
Ответ: − 0,25.	

3 тип - задания, в которых нужно рассмотреть на клетчатой бумаге график функции или график производной функции.

Примеры таких заданий:

Таблица 1.3.3. Образец задания 7 ЕГЭ по математике профильного уровня

	На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.
	На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

4 тип – это задания, где необходимо провести исследование графика функции на характер монотонности функции, нахождение промежутков возрастания или убывания, сосчитать количество точек экстремумов.

Отмечено, что экзаменуемые испытывают точно такие же трудности при выполнении, казалось бы, формальной операции исследования функции на нахождение точек максимума или минимума, выполняемой по алгоритму, в задании 12 ЕГЭ по математике профильного уровня например:

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 9)^5 - 5x$ на отрезке [- 8,5; 0].

На сайте ФИПИ [40] ежегодно публикуются «Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ» [39], в которых отмечается, что слабое овладение базовыми представлениями о геометрическом смысле производной (задание

7) и базовыми умениями исследования функции с помощью производной (задание 12) остается заметной проблемой для участников ЕГЭ по математике профильного уровня.

Так по итогам ЕГЭ по математике профильного уровня за 2017-2018 г. задания базового уровня сложности (1-8) выполнены участниками ЕГЭ с превышением 50% успешности. Однако с чтением графика производной (задание 7) справились менее половины участников экзамена [39].

Во второй части экзамена, в заданиях, требующих развернутого ответа, участникам предлагается экономическая задача (задание 17), которую можно решать с помощью производной. Однако, в школьном курсе математики такие задачи не рассматриваются, что является одной из причин снижения процента участников, набравших максимальный балл за это задание.

Чаще всего при подготовке к экзамену выпускники школ используют решения типовых заданий вместо систематического изучения курса и грамотного итогового повторения. Многие участники допускают существенные ошибки, следуя «типовому алгоритму» при исследовании функций в задании 7 и при нахождении точек максимума и минимума и наименьших и наибольших значений функции в задании 12. [39]

Статистические данные сайта ФИПИ показывают, что среди участников экзамена по математике профильного уровня, которые выполняют только базовую часть ЕГЭ (1-12 задания) и имеют по итогам до 60 баллов, с заданиями базового уровня (1-8) справляются 76-99%. Это как раз та группа выпускников школ, которые становятся абитуриентами технических ВУЗов. С заданием 7 справляются около одной трети участников этой группы.

Из заданий части 2 (9-12 задания) наименьший результат участниками этой группы был получен при выполнении задания 12. Его решают не больше 30%. Поэтому над заданиями 7 и 12 необходимо работать учителям и учащимся для улучшения математической подготовки абитуриентов инженерных вузов.

Группа участников ЕГЭ по математике профильного уровня, которые набирают больше 70 баллов, которые справляются с первой частью экзамена составляют 85% всех участников, исключение составляют два геометрических задания (планиметрия и стереометрия) и задание на чтение графика функции и ее производной. Именно задание 7 вот уже 4 года оказывается на удивление наиболее сложным даже для хорошо подготовленных выпускников [39].

Проблема заключается в том, что графические представления в данном случае тесно связаны с понятийной стороной вопроса о поведении функции и ее производной. Поэтому важно формировать у обучающихся понимание смысла производной функции, и, переходя к алгоритмической форме исследований, не забывать о содержательной стороне, тем более что задачи на понимание смысла и применение производной функции к решению ряда задач ежегодно присутствуют в заданиях ЕГЭ по математике. Надо понимать, что представление о производной и ее применении к исследованию функций можно получить, основываясь преимущественно на наглядных представлениях о скорости, об изменении величины и о касательной к гладкой линии.

С исключением из школьной программы черчения стал ощущаться недостаток графических, геометрических представлений, что также отражается и на результатах выполнения заданий ЕГЭ по математике профильного уровня другого типа задач, связанных с темой математического анализа. Не более половины участников экзамена могут по графику производной найти точку экстремума и по графику функции дать характеристику ее производной. Для решения таких задач требуется умение переформулировать условие с формального языка на графический и наоборот. Справиться с проблемой поможет усиленная работа с графиками, в том числе использование интерактивных технологий обучения при изучении данной темы.

После анализа результатов ЕГЭ профильного уровня по математике 2018 года мы решили проверить, как учащиеся 11 класса в Белгороде оценивают свои силы перед сдачей ЕГЭ по математике, какие задания для них кажутся самыми сложными, а какие - самыми простыми, как они оценивают эффективность своего обучения в овладении методами математического анализа.

Для этого мы провели анкетирование в трёх 11-х классах Белгородского инженерного юношеского лицея-интерната с углубленным изучением отдельных предметов. В 11 «А» на профильном уровне изучаются математика, информатика и физика; в 11 «Б» классе – математика, обществознание и география; в 11 «Г» классе – математика, биология и химия. [Приложение 1. Таблица 1].

Всего было опрошено 55 обучающихся, при этом в 11 «Б» классе не выбрали экзамен по профильной математике 6 человек, в 11 «Г» - 8 человек, а в 11 «А» ЕГЭ по профильной математике выбрали все учащиеся. Выпускники 11 «Б» и «Г» классов планировали поступать на медицинские и юридические специальности, где не требуется сдача ЕГЭ по математике профильного уровня.

В ходе проведения анкетирования обучающиеся должны были распределить все задания экзамена по степени сложности - от большего к меньшему. При этом задание 17 разделялось на 2 типа заданий: задача на проценты и на нахождение наибольшей прибыли и наименьших затрат.

Анкетирование показало, что 7 задание ставят на 1-5 места по сложности 2 человека; на 6-10 места – 12 человек; на 11-15 места – 26 обучающихся; 16-20 места -15 обучающихся. Из этого можно сделать вывод, что 7 задание для 25% обучающихся, скорее сложное, чем простое, но и не является самым сложным. [Приложение 1. Таблица 2].

12 задание ставят на 1-5 места по степени сложности 2 человека; на 6-10 места – 18 человек; на 11-15 места – 25 человек; на 16-20 места – 10 человек. Здесь можно заметить тенденцию к тому, что задание 12 считают сложным

уже 35% обучающихся, но всё же для выпускников лицея эти задания не является самыми сложными.

Что же касается задания 17, которое решается с помощью производной, здесь дела обстоят иначе. На 1-5 места данное задание ставят уже 39 человек – более 70% опрашиваемых; на 6-10 места – 10 человек; на 11-15 места – 4 человека; на 16-20 места – 2 человека.

Таким образом, можно сделать вывод, что для большинства старшеклассников задание 17 представляет наибольшую сложность. Только для двух обучающихся, одного из информационно-технологического класса (11 «А»), а другого из биолого-химического (11 «Г»), 17 задача на нахождение наибольшей прибыли или наименьших затрат представляет наименьшие трудности. Это обусловлено тем, что Белгородский инженерный юношеский лицей-интернат является образовательным учреждением для одарённых детей из Белгородской области, обладающих глубокими базовыми знаниями и способными решать задания повышенного уровня сложности.

К сожалению, обучающиеся социально-экономического класса (11 «Б») не показали свою готовность к решению задач по финансовой математике. Это объяснится более низким уровнем базовой подготовки учащихся этого класса по сравнению с двумя другими классами. Это обусловлено тем, что сейчас наблюдается снижение интереса к юридическим и экономическим специальностям, так как в белгородских вузах осталось очень мало бюджетных мест на эти специальности.

Также школьники отметили, что проблема в экономическом образовании существует из-за того, что задач такого типа нет в программах по математике. Экономики как учебного предмета нет в большинстве школ, а если есть, то занятия ведут специалисты обществоведческих дисциплин, у которых недостаточно математических знаний для решения задач методами математического анализа.

Кроме этого анкетирование показало, что у учащихся математических и гуманитарных классов разное восприятие математических понятий.

Обучающиеся гуманитарных классов лучше воспринимают математические понятия на наглядно-интуитивном уровне, обучающиеся же в классах с математическим уклоном в свою очередь воспринимают понятия на абстрактно-логическом уровне.

Наибольший интерес у выпускников-гуманитариев вызывают вопросы, связанные с историей математики, задачи прикладного характера, занимательный материал. Выпускники математики-логики предпочитают решение нестандартных задач, проведение исследовательских работ.

Выпускники с гуманитарным складом ума предпочитают сначала выслушать объяснение учителем нового материала, выполнять задания в два-три действия, работать с научно-популярной литературой, участвовать в деловых играх, работать в группах.

Обучающиеся в математических классах больше любят индивидуальные задания, предпочитают работать по карточкам, с удовольствием воспринимают задания повышенной трудности, которые требуют большего внимания, проницательности, проявления смекалки, умения составлять и пользоваться логическими схемами.

Математики более сдержанны, гуманитарии, наоборот, более эмоциональны.

Выпускники отметили, что изучение элементов математического анализа на базовом уровне имеет несомненную важность в развитии представлений учащихся о структуре математики и ее приложений. Именно приложения производной, первообразной и интеграла, такие как применение производной в исследовании функций, в прикладных задачах, использование первообразной и интеграла в нахождении площадей различных криволинейных фигур, являются основными темами при формировании содержания задач экзамена по математике профильного уровня.

По мнению большинства опрошенных обучающихся систему упражнений для подготовки к ЕГЭ по математике желательно строить так, чтобы она способствовала систематизации основополагающих понятий, давала новое видение изученного материала и его качественное усвоение. То есть задания по моделированию реальных ситуаций ребята хотели бы находить в учебниках из всех сфер окружающей действительности.

По форме подачи материала все опрошенные выбрали деятельностный подход, где они бы являлись исследователями и могли бы творчески подходить к решению заданий. Все выпускники подчеркнули важность обратной связи. Учитель должен получать сигналы от обучающихся: «Я понимаю, могу объяснить», «Я не уверен, правильно ли я понимаю», «Я не понимаю». Учитель на уроке может прервать свое объяснение вопросом к тем, кто еще не понял, предложением высказать свои сомнения тем, кто не уверен в понимании, предоставлением слова тем, кто все понял.

И в завершение необходимо отметить, что еще одним важным фактором является психологический климат в учебном коллективе. Дружеские отношения среди одноклассников, спокойная рабочая атмосфера на уроке, методичная, прозрачная и последовательная подготовка к экзамену, доверительные отношения учителя с учениками, вера в достижение более высоких результатов и эмоциональная поддержка, всё это должно стать основными аспектами работы на уроке.[16]

Учитывая разный уровень подготовки обучающихся средней школы и высокий уровень абстракции понятий дифференциального исчисления, мы пришли к выводу, что для решения проблемы повышения качества подготовки к сдаче ЕГЭ по математике выпускникам школы требуются дополнительные занятия для погружения в эту тему. Так как на уроке учителю зачастую некогда возвращаться к пройденному материалу и выделять время на дополнительные практические занятия, то удачным решением проблемы может быть использование для повторения, самореализации и развития творческих способностей - введение внеурочной деятельности по математике. Именно дополнительные систематические занятия помогут добиться положительного результата в освоении данной темы.

1.4. Обоснование введения внеурочной деятельности по математике в 10-11 классах по дифференциальному исчислению

Под внеурочной деятельностью в рамках реализации ФГОС следует понимать образовательную деятельность, осуществляемую в формах, отличных от классно-урочной деятельности. Внеурочная деятельность должна быть направлена на достижение личностных и метапредметных результатов освоения основной образовательной программы [46].

Согласно Письмам Министерства просвещения РФ (№ 03-ПГ-МП-42216 от 5 сентября 2018 г., а также № 09-1672 18 августа 2017 г.) до сведения участников образовательных отношений доведены Методические рекомендации по уточнению понятия и содержания внеурочной деятельности в рамках реализации основных общеобразовательных программ, в том числе в части проектной деятельности.

Указанными Методическими рекомендациями было подчеркнуто, что участие во внеурочной деятельности является для обучающихся обязательным. Это положение продиктовано требованием ФГОС, который определяет внеурочную деятельность, как обязательную составную часть учебного плана основной образовательной программы образовательной организации, выполнение которого является обязательным для всех участников образовательного процесса. При этом выбор направления и вида деятельности школьник выбирает самостоятельно на добровольной основе.

В ходе внеурочной деятельности обучающийся должен научиться действовать, чувствовать, принимать решения. При этом необходимо учитывать опыт организации образовательного процесса, сложившийся в системе дополнительного образования, по развитию высоконравственной, интеллектуальной, творческой личности, соблюдать современные требования действующих нормативно-правовых документов, регламентирующих деятельность образовательного учреждения [44,49].

На первых этапах внедрения ФГОС руководителям школ и учителям важно правильно выбрать модель для реализации идеи внеурочной деятельности, чтобы не дублировать учебные программы и, в то же время, помочь обучающимся сформировать способность планировать и активно осуществлять свою дальнейшую профессиональную деятельность самостоятельно, без постоянного руководства со стороны взрослых.

Необходимо подобрать такие методы и формы внеурочной деятельности, чтобы она действительно стала частью основной образовательной программы и обеспечивала достижение новых образовательных результатов.

Каждое образовательное учреждение выбирает свою модель внеурочной деятельности с учетом материально-технического обеспечения и кадрового состава учреждения. Основной идеей при этом должно быть создание педагогических условий для развития творческого потенциала, культурных, образовательных и нравственно-духовных потребностей каждого ребенка на основе свободного выбора. Учитывая высокий уровень материально-технического обеспечения школ Белгорода, мы считаем, что самой интересной моделью может быть инновационно-образовательная модель внеурочной деятельности, в основе которой должен быть эксперимент, творческий подход, широкое использование ИКТ и деятельностный подход в обучении.

Внеурочная деятельность может помочь старшеклассникам, особенно с гуманитарным складом ума, вникнуть, например, в экономику, не как в обществоведческую дисциплину, а как в множество математических моделей экономических ситуаций. Ведь экономика – это не только теория, но и практика. Это также показывают олимпиады по экономике, где нужны логика и знания математических моделей экономических ситуаций. Для учащихся с математическим складом ума внеурочная деятельность должна стать фундаментом для более глубокого понимания сути математического анализа и его прикладного применения в решении задач технической направленности.

Роль внеурочной деятельности по математике огромна. За пределами круга знаний, определенного школьными программами, остается немало интереснейших разделов математической науки. Знакомство с ними является источником умственного обогащения учащихся. В рамках учебной программы трудно рассмотреть все области знания, в которых применяется математика. И вот тогда на помощь приходит внеурочная деятельность. Благодаря внеурочной деятельности обучающиеся могут окунуться в мир математики через различные увлекательные формы обучения.

Занимательные задачи, совместные проекты (например, написание бизнес-плана) – это лишь малая часть примеров организации внеурочной деятельности по математике. Также внеурочная деятельность позволяет совершенствовать специальные знания и умения и лучше подготовиться к сдаче Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня.

Однако внеурочная деятельность не должна сводиться к насильственному принуждению посещения занятий, тем более речь идет о старшеклассниках, перегруженных учебными занятиями. Для этого ее содержание должно реализовываться наиболее эффективными образовательными технологиями. Мы предлагаем на наших занятиях использовать методику опорных сигналов и конспектов педагога-новатора Шаталова Виктора Федоровича.

В основе идеи методики опорных конспектов заложена педагогика сотрудничества учителя и ученика, которая предполагает живой диалог и развитие креативного аналитического мышления. Наиболее эффективный метод обучения для включения всех видов мозговой деятельности – это проблемное обучение, когда мысль вызывается проблемным вопросом учителя или другого ученика. Это помогает мотивировать учащихся к изучению конкретной темы.

К сожалению, у многих современных школьников слабо развито логическое мышление. Распространено клиповое мышление, дети привыкли воспринимать мир через короткие яркие образы мультфильмов, фильмов и компьютерных игр.

Опорный сигнал в методике Шаталова В.Ф. – «это не схема, а набор ключевых слов, знаков и других опор для мысли, особым образом расположенных на листе». «Мы постоянно пользуемся опорами, не задумываясь об их природе и значении. Они окружают нас повсюду. Основная масса опор скрыта в океане нашей памяти, которая вся работает на опорах и ассоциациях, сознательных или подсознательных», - утверждает автор методики [38].

В.Ф. Шаталов на своих уроках умел создавать игровую, непринуждённую обстановку при обучении. Созданные им схемы, многофункциональные образные опорные сигналы притягивают яркостью красок, лаконичной подачей идеи, побуждают учеников к активному участию в создании иллюстративного образа любого научного понятия, обеспечивают осмысленность представлений об основных закономерностях научного мира и взаимосвязях в этом мире.

Технология подачи материалов предполагает определенный алгоритм работы:

На первом этапе учитель или подготовленный ученик дает развернутое, образно-эмоциональное объяснение материала, которое в основном состоит из целого блока вопросов по объявленной теме занятия.

Затем учащимся предлагается сжатое изложение учебного материала по заранее заготовленному опорному плакату. Озвучиваются и расшифровываются закодированные с помощью разнообразных символов основные понятия и логические взаимосвязи между ними.

На следующем этапе учащимся дается время для изучения опорных сигналов, которые получает каждый ученик с помощью любых гаджетов, распечатывает их или хранит в электронном виде.

Четвертый этап - работа с учебником и листом опорных сигналов в домашних условиях.

На следующем уроке ученики самостоятельно письменно воспроизводят выданные им опорные сигналы, при этом приветствуется творческий подход. Главное условие: не нарушать логику понятий и договариваться с символами.

Шестой этап - ответы по опорным сигналам данной темы, решение задач с помощью разработанных схем и таблиц.

Собранные в одном месте схемы и конспекты позволяют многократно повторять описанные в них положения, понятия, формулы, закономерности, обобщения. Созданные самостоятельно опорные схемы передаются учениками друг другу, что создает атмосферу содружества, взаимопомощи между всеми участниками группы, объединенной общей целью.

То обстоятельство, что внеурочная деятельность не предполагает выставление оценок, позволяет оценивать работу учащегося рейтинговыми баллами. Ученик не должен бояться оценки, а тем более скрывать ее. Атмосфера сотрудничества предполагает поощрение за выявление и исправление ошибки - обнаружить ошибку может лишь думающий и знающий.

Важно приучить подростка к самооценке, поощряя любые его усилия к самостоятельности и творчеству. Самооценка должна рассчитываться на принципе: «Я добился сегодня, а завтра я смогу больше!»

В методике учета достижений и оценивания знаний должны присутствовать все психологические аспекты, характерные для игровых ситуаций. Каждый урок может проводиться с элементами игры в виде брейн-рингов, блиц-опросов, командных соревнований. Игра, соревнование развивают творческие способности учащихся, их находчивости, изобретательности, инициативности.

Методика Шаталова на основе большей самостоятельности и развития творческого потенциала учеников, большого количества повторений, хорошо проработанных проблемных вопросов помогает более глубокому пониманию теории, экономит время.

У школьников появляется желание использовать свои силы и знания на практике, увеличить количество решаемых задач, а также разобрать подробно и всесторонне типы и возможные пути решения.

Мы разработали примеры опорных конспектов по теме «Элементы дифференциального исчисления». [Приложение 1. Рисунки 1-8].

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА КУРСА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ТЕМЕ «СЕКРЕТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»

Нами предлагается разработка рабочей программы внеурочной деятельности по теме «Секреты дифференциального исчисления» в соответствии с требованиями ФГОС СОО, которые вступают в силу 1 сентября 2020 года. Ядром рабочей программы является компетентностно-ориентированный подход, как одно из новых концептуальных направлений, целью которого является получение конкретного результата обучения – способности человека самостоятельно действовать в различных проблемных ситуациях.

При проведении занятий мы учитываем, что в 10-11-м классах наряду с предметными имеют важнейшее значение личностные и метапредметные результаты.

Предлагаемый нами проект рабочей программы может помочь обучающимся расширить знания по теме «элементы дифференциального исчисления», отработать практические навыки решения задач с помощью производной, успешно сдать ЕГЭ по математике и осваивать программы высшей школы.

Учителю наш проект поможет в разработке целей изучения конкретных тем с учётом прогнозируемых результатов, активнее использовать проблемно-исследовательские формы и методы занятий, конструировать технологическую карту конкретного занятия.

2.1. Рабочая программа курса внеурочной деятельности для 10-11-х классов «Секреты дифференциального исчисления»

Программа: тематическая общеобразовательная.

Направление: общеинтеллектуальное.

Класс: 10, 11.

Срок реализации: 2 года.

Количество часов в год согласно учебному плану: 34.

Количество часов в неделю: 1.

ФГОС СОО

Составитель: Щербаченко Алина Витальевна

Этапы реализации программы привязаны к годам обучения, вследствие чего можно выделить 2 этапа: 10 класс — 1 этап, 11 класс — 2 этап. Это напрямую связано с диалектическим принципом «от простого - к сложному». Каждый этап рассчитан на 34 часа, а вся программа — на 68 часов.

Пояснительная записка

Рабочая программа по курсу внеурочной деятельности «Секреты дифференциального исчисления» для 10-11-х классов составлена на основе:

- авторской программы «Математика. Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов, авторы-составители И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович (М.: Мнемозина, 2011),

- учебника «Алгебра и начала анализа для 11 класса общеобразовательных учреждений» авторского коллектива: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин (М.: Просвещение, 2002. - 448 с.);

- учебника для 10-11 классов профильного уровня общеобразовательных учреждений «Экономика. Основы экономической теории» под редакцией С.И. Иванова (М.: ВИТА-ПРЕСС, 2012),

- методического пособия Шаталова В.Ф. «Эксперимент продолжается» (М.: Педагогика, 1989).

Программа обеспечивает введение в действие и реализацию требований Федерального государственного образовательного, среднего общего образования и определяет общий и максимальный объем нагрузки обучающихся в рамках внеурочной деятельности, состав и структуру направлений и форм внеурочной деятельности по классам.

Особенности возрастной группы

Программа построена с учетом возраста и психологических особенностей учащихся. Основной формой внеклассной работы по математике с учащимися 10–11-х классов является проблемно-исследовательская деятельность по составлению краткой информационной структуры - опорного конспекта, обобщающего и отражающего суть материала занятия или решения задачи. При составлении таких информационных структур мы опираемся на методику известного советского педагога-новатора Шаталова В.Ф. , описанную в параграфе 1.4 данной работы.

Предполагается, что обучающиеся на занятиях будут работать в группах, в парах и индивидуально. Необходимо учитывать запросы и уровень подготовки каждого школьника, по всем темам должны быть подготовлены разноуровневые задания, очень важно, чтобы более сильные ученики помогали усвоить тему более слабому.

На занятиях следует активно применять игровые, познавательные виды деятельности в виде конкурсов, блиц-опросов, КВН, конференций, деловых игр, математических боев, эвристических бесед, составлений опорных сигналов и схем, проведений научно-исследовательских конференций и выполнений мини-проектов.

Набор учащихся - свободный, на добровольной основе.

Занятия проводятся по одному часу в неделю (каждый учитель вправе планировать и менять режим занятий по своему усмотрению).

Общая характеристика программы

Актуальность программы заключается в необходимости решения проблемы повышения уровня сформированности умений и навыков при работе с заданиями, которые решаются с помощью дифференциального исчисления в физике, технике, химии, биологии, экономике и других науках.

Внеурочная деятельность, как дополнение к основной учебной деятельности, призвана сделать обучение более результативным за счет включения учащихся в исследовательскую, креативно-творческую деятельность, должна способствовать формированию компетенций будущей профессиональной деятельности.

Программа даёт возможность одним вернуться к любой теме для ликвидации пробелов в знаниях, другим - углубить знания по отдельным темам. На занятиях каждый сможет приобрести навыки проектно-исследовательской деятельности, выявить и реализовать свои потенциальные возможности, получить более прочные, дополнительные знания по предмету для будущей профессии и сдачи ЕГЭ не только по математике, но и по другим предметам.

Внедрение программы повышает эффективность образовательного процесса и увеличивает мотивацию к изучению предмета «Математика» в частности.

Результатом реализации нашей программы должно стать приобщение школьников к математической культуре, истории математических открытий, профориентационная направленность содержания поможет определиться в выборе будущей профессии.

Творческий характер и многообразие форм деятельности способствуют развитию самостоятельности и стремлению к самообразованию, социальной адаптации в повседневной жизни. Работа в команде направлена на формирование таких качеств, как уважительное отношение к другому мнению, терпимость, самокритичность при оценке своих действий, взаимопомощь и взаимосотрудничество, ответственность за свои слова и поступки.

Проблемно-исследовательский подход должен учить использованию информационных технологий и современных технических средств для поиска, анализа и отбора информации и совершенствованию информационной грамотности учащихся. Применение метода Шаталова В.Ф. должно научить работе с теоретическим материалом, научной информацией для выделения главной идеи в тексте, лаконичности и созданию логических цепочек рассуждений.

Такие формы и приемы обучения активизируют познавательную деятельность учащихся и формируют потребность в самопознании, саморазвитии. Современный человек должен все время учиться, знания сегодня быстро устаревают и способность к саморазвитию являются важнейшим качеством любого специалиста.

В связи с вышесказанным стратегической целью нашей программы является воспитание способности к саморазвитию путем осознанного и активного приобретения таких навыков учебной работы, которые обеспечивают самостоятельное получение новых знаний.

Цели обучения по программе внеурочной деятельности «Секреты дифференциального исчисления»

Таблица 2.1.1. Цели и задачи рабочей программы внеурочной деятельности «Секреты дифференциального исчисления»

Направления целей	Задачи для достижения цели
1.Повторение изученного ранее, получение и усвоение новой	- овладение математическими терминами и понятиями; - расширение и углубление знаний об элементах дифференциального исчисления: функции числового аргумента, приращения аргумента и функции, скорости

информации, формирование познавательных учебных действий	неравномерного движения, средней скорости, мгновенной скорости, таблицы производных элементарных функций и правила вычисления производных, алгоритмы и схемы исследования графиков функций и применения производной для исследования и построения графиков; - знакомство с основными теоремами дифференциального исчисления; - усвоение понятий элементов дифференциального исчисления как важнейшего инструментария и языка для изучения естественных наук и математики; - выполнение исследовательских работ для самостоятельного изучения тем.
2. Контроль усвоения теории в процессе изучения темы	- систематизация полученных ранее знаний, приведение их в соответствие с требованиями математической подготовки старшеклассников через создание проблемных ситуаций; - вовлечение обучающихся в активную исследовательскую деятельность по всем разделам темы.
3. Применение знаний и умений при решении заданий разного уровня сложности	- развивать навыки применения производной в прикладных задачах; -учить разрабатывать математические модели разных процессов и проводить самостоятельные исследования в рамках этих моделей; -устанавливать межпредметные связи; - расширять навыки решения задач для подготовки к сдаче ЕГЭ по математике.
4. Формирование, коммуникативных умений	- получить навыки работы в группе; - научиться осуществлять поиск информации для исследования и ответов на проблемные вопросы; - осуществлять совместную проектную деятельность; - научиться распределять обязанности и планировать свое время.
5. Формирование, организационных умений выпускника школы	- научиться самостоятельно определять уровни освоения темы и прогнозировать достижение своих результатов; - осуществлять самопроверку и самооценку своей деятельности; - корректировать планируемую деятельность с учетом достигнутых результатов.

Содержание программы

Тема I. «Предел функции и непрерывность» (15 часов).

Элементы содержания:

1.1 Понятие предела функции (2 часа)

1.2 Односторонние пределы (4 часа)

1.3 Свойства пределов функции (2 часа)

1.4 Понятие непрерывности функции (3 часа)

1.5 Непрерывность элементарных функций (2 часа)

1.6 Разрывные функции (2 часа)

Тема II. «Производная» (14 часов).

Элементы содержания:

2.1 Понятие производной (4 часа)

2.2 Производная суммы. Производная разности (2 часа)

2.3 Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференциал (2 часа)

2.4 Производная произведения. Производная частного (2 часа)

2.5 Производные элементарных функций (2 часа)

2.6 Производная сложной функции (2 часа)

Тема III. «Применение производной» (39 часов).

Элементы содержания:

3.1 Максимум и минимум функции (3 часа)

3.2 Уравнение касательной (2 часа)

3.3 Приближенные вычисления (2 часа)

3.4 Теоремы о среднем (2 часа)

3.5 Возрастание и убывание функции (3 часа)

3.6 Производные высших порядков (2 часа)

3.7 Выпуклость графика функции (2 часа)

3.8 Экстремум функции с единственной критической точкой (2 часа)

3.9 Задачи на максимум и минимум (4 часа)

3.10 Основы экономики (4 часа)

3.11 Решение задач по финансовой математике с применением производной (4 часа)

3.12 Асимптоты. Дробно-линейная функция (3 часа)

3.13 Построение графиков функций с применением производных (3 часа)

3.14 Формулы и ряд Тейлора (3 часа)

Для организации учебного процесса могут применяться следующие формы:

- занятия для защиты мини-проектов;
- конкурсы проектов и опорных схем;
- деловые игры, блиц-опросы, брейн-ринги, математические бои, КВН и др.;
- интерактивные уроки, эвристические беседы, обсуждения проблемных ситуаций, семинарские занятия;
- практикумы для моделирования какой-либо ситуации по предлагаемому графику или схеме, исследовательские работы в группах.

На занятиях активно могут использоваться все виды деятельности: познавательная, учебно-тренировочная, исследовательская, творческая, проблемно-ценностное общение.

Планируемые результаты

- расширение у учащихся представлений о методах математики в познании явлений действительности, и методах решения задач с помощью понятий дифференциального исчисления;
- приобретение учащимися знаний и навыков для решения заданий по вопросам, предусмотренным кодификатором содержания КИМ ЕГЭ по

математике профильного уровня, особое внимание уделить овладению навыками решения экономических задач по выбору оптимальных решений;

- развитие умений воспроизводить изученные понятия, алгоритмы решения задач с помощью нестандартных методов;
- анализировать и выбирать оптимальные способы решения нестандартных заданий на тему «Дифференциальное исчисление»;
- ориентироваться в информационном пространстве;
- точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, принимать решения;
- самостоятельно выдвигать гипотезы, логически обосновывать суждения.

Способы проверки результатов

Итогом внеурочной деятельности может стать участие школьников на школьных, районных, городских, областных, Всероссийских и Международных олимпиадах по математике, участие в конференциях с научно-исследовательскими и проектными работами, участие в турнирах, конкурсах, а также повышение уровня качества знаний для успешной сдачи Единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

Самым важным результатом должна стать первоначальная рефлексия, самооценка каждого участника и коллективная оценка итогов каждого занятия.

Таблица 2.1.2. Учебно-тематический план обучения

№ п/п	Наименование темы	Формы деятельности
10 класс (34 часа) Тема I. Предел функции и непрерывность		
1-2	Понятие предела функции	Урок-практикум
3-6	Односторонние пределы	Конкурс
7-8	Свойства пределов функции	Комбинированный урок
9-11	Понятие непрерывности функции	Интерактивный урок, моделирование
12-13	Непрерывность элементарных функций	Урок-презентация
14-15	Разрывные функции	Соревнование, брейн-ринг

Тема II. Производная		
16-19	Понятие производной	Урок-соревнование, семинар
20-21	Производная суммы. Производная разности	Проблемный урок
22-23	Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференциал	Конференция
24-25	Производная произведения. Производная частного	Урок-симпозиум
26-27	Производные элементарных функций	Лабораторная работа
28-29	Производная сложной функции	Смотр знаний
Тема III. Применение производной		
30-32	Максимум и минимум функции	Обобщающий урок-практикум решения задач
33-34	Уравнение касательной	Исследовательский проект
11 класс (34 часа). Тема III. Применение производной		
35-36	Приближенные вычисления	Урок-симпозиум
37-38	Теоремы о среднем	Урок-практикум
39-41	Возрастание и убывание функции	Конкурс
42-43	Производные высших порядков	Комбинированный урок
44-45	Выпуклость графика функции	Интерактивный урок, моделирование
46-47	Экстремум функции с единственной критической точкой	Урок-презентация
48-51	Задачи на максимум и минимум	Соревнование, брейн-ринг
52-55	Основы экономики	Урок-соревнование, семинар
56-59	Решение задач по финансовой математике с применением производной	Проблемный урок
60-62	Асимптоты. Дробно-линейная функция	Конференция
63-65	Построение графиков функций с применением производных	Мини-проекты учащихся, обобщающий урок-практикум, исследовательский проект
66-68	Формулы и ряд Тейлора	Математическая декада

Методическое обеспечение программы

Формы работы на занятиях: индивидуальная и групповая, практическая и теоретическая, исследовательская и познавательная. Основные методы организации учебно-воспитательной деятельности: личностно-ориентированный подход, дифференцированный подход, здоровьесберегающий подход, проблемно-исследовательский метод, активные методы получения знаний, диалогические методы взаимодействия. Кроме этого, нельзя забывать об информационных технологиях, благодаря которым возможности самореализации в современных условиях неограниченны.

Материально-техническое обеспечение

Для реализации программы отобрано большое количество методических и дидактических пособий для подбора задач, которые не дублируют учебную программу по математике, а помогают расширению математических знаний, формированию метапредметных связей, раскрывают содержание дифференциального исчисления, как набора способов для исследования многих явлений реального мира через исследование функций.

В частности, для проведения занятий в учебном процессе могут использоваться учебные и методические пособия УМК Мордковича А.Г. [8,18,19,20,45], и Никольского С.М. [21, 27], а также дидактические материалы к учебникам Колмогорова А.Н.[28], Колягина Ю.М.[14], Шаталова В.Ф. [11] и другие.

Широкое привлечение интернет-ресурсов, рекомендуемых Белгородским институтом развития образования (БелИРО) [42] и ФГБНУ ФИПИ [40], сделает каждое занятие насыщенным, ярким, запоминающимся.

Для информационно-компьютерной поддержки учебного процесса могут использоваться различные программно-педагогические средства, реализуемые с помощью интерактивного обучения:

- лицензионное программное обеспечение для обучения математике и подготовки учащихся к олимпиадам и научно-исследовательской деятельности;

- тематические презентации PowerPoint, выполненные учителем или учащимися.

Технические средства обучения: ученические компьютеры, компьютер учителя, интерактивная доска, проектор.

Предложенная нами рабочая программа внеурочной деятельности «Секреты дифференциального исчисления» направлена на расширение и углубление математических знаний старшеклассников и отработку практических навыков в решении задач из разных областей знаний с помощью замечательного инструмента математического анализа: производной.

Программа имеет большой образовательный и воспитательный потенциал, создает условия для проведения анализа изученного материала. При составлении данной программы учтены требования ФГОС СОО: реализация поставленных целей наряду с достижением предметных результатов и помощи в подготовке выпускников к ЕГЭ по математике будет способствовать овладению учащимися основами математической культуры, становлению способности к саморазвитию.

Практические занятия в разрезе курса должны быть направлены на формирование у обучающихся универсальных учебных действий, таких, как работа с информацией и учебными моделями, конструирование математических моделей для анализа реальных ситуаций, развитие логического и абстрактного мышления, коммуникативных умений; помогут самоопределению в выборе профессии. Пример такого занятия приведен в следующем разделе данной главы.

2.2. Методическая разработка занятия по теме «Применение производной к исследованию функций и построению их графиков»

Тип занятия: урок обобщения и систематизации знаний и умений.

Учебно-методические пособия:

- учебник «Алгебра и начала анализа для 11 класса общеобразовательных учреждений» авторского коллектива: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин (М.: Просвещение, 2002. - 448 с.);

- «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)» А.Г. Мордкович.- М: Мнемозина, 2012 г.

Цели:

- образовательная: закрепление, расширение и углубление практических навыков применения производной к исследованию функции и отработка навыков построения графиков этих функций.

- **развивающая:** развитие творческого мышления и навыков аналитической работы при выполнении проектной работы, формирование навыков оформления результатов умственного труда, развитие навыка самоконтроля и самооценки, формирование опыта в самостоятельности принятия решений и формулирования выводов.

- **воспитательная:** воспитание умения работать в группе и индивидуальной ответственности за достижение результата, воспитание коммуникативной культуры

Планируемые результаты

- **предметные:** овладение алгоритмами применения производной к исследованию функций;

- **метапредметные**:

познавательные - умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; обобщать полученные знания, использовать знаково-символическое моделирование;

регулятивные - ставить цели деятельности на уроке и сохранять заданную учебную цель, обеспечивать самоконтроль, учитывать выделенные учителем ориентиры действия в учебном материале, адекватно понимать оценку взрослого;

коммуникативные - адекватно использовать речь для планирования и регуляции своей деятельности, формулировать собственное мнение, взаимодействовать со взрослыми и со сверстниками в учебной деятельности.

- **личностные:** включение учащихся в деятельность на личностно-значимом уровне, умение аргументировать свою точку зрения, умение контролировать процесс и результат математической деятельности, развитие навыков сотрудничества с учителем и сверстниками в разных учебных ситуациях.

Оборудование: интерактивная доска, проектор, компьютер учителя, раздаточный материал. Урок проводится в компьютерном классе.

Ход урока

1 этап (организационный). Формулирование темы, целей и задач занятия.

Учитель должен завладеть вниманием – озвучить проблему, которую надо решить. Пример эвристической беседы:

Вопрос учителя: Ребята, ни для кого не секрет, что каждая наука оперирует своей лексикой. Увлекшись изучением с вами последней темы по алгебре, я в беседе с учителем литературы сказала: «Неважно, сколько ученик знает, но важно, чтобы у него была положительная производная». Коллега не поняла меня. А вы можете прояснить мою фразу?

Ожидаемый ответ учащихся: Важно, чтобы скорость приращения знаний у ученика была положительна - это залог того, что его знания возрастут!

Вопрос учителя: Подумайте, как бы вы могли охарактеризовать три разные кривые роста знаний, изображённые на рисунке 2.2.1

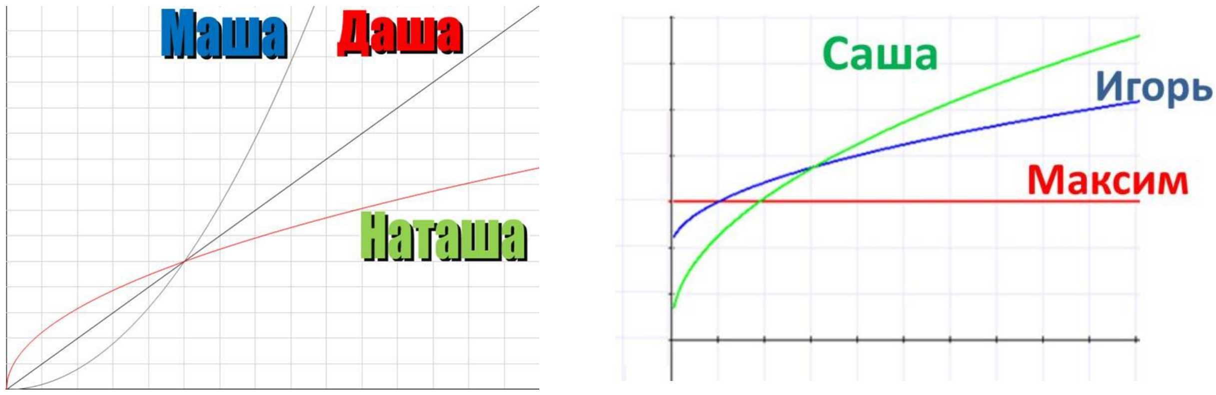


Рис. 2.2.1. Динамические процессы. Кривые роста знаний

Вопрос: Какую аналитическую деятельность вы сейчас осуществляли относительно функций?

Предполагаемый ответ: Исследование.

Вопрос: Для чего нужно исследование функций?

Предполагаемый ответ: Для построения графиков.

Вопрос учителя: Так какова тема нашего урока?

Предполагаемый ответ: Тема нашего занятия - исследование функции и построение графиков с помощью производной.

Вопрос: Как вы думаете, какова цель нашего урока? (Дети формулируют цель.).

Цель урока – углубить и расширить умения строить график функции, применяя производную для исследования функции.

2 этап. Актуализация знаний. Представление мини-проектов в виде опорных схем и конспектов.

На предыдущем занятии учащимся были предложены для выполнения мини-проекты, в каждом из которых старшеклассники сталкиваются с определенной проблемой и пытаются самостоятельно её решить.

Учитель: ранее мы уже рассматривали вопросы об исследовании функций, основным объектом исследования для нас был график, по нему мы определяли свойства функции. Одними из важных элементов являлась область определения. На прошлом занятии были определены 3 группы учащихся, каждая группа получила задание для мини-проекта. Предлагаю заслушать эти группы.

Мини-проект 1. «Трудно найти черную кошку в тёмной комнате, особенно если ее там нет».

Учащимся было предложено построить график определённой функции в виртуальной лаборатории «Живая математика 5.0» и по графику найти область её определения. Учащиеся должны были выяснить, что у данной функции область определения является пустым множеством и должны были сделать вывод о том, что прежде чем строить график любой функции, нужно найти область её определения. Учащиеся могут предложить опорный конспект, в котором будут указаны элементарные функции с ограниченной областью определения. [Приложение 3. Таблица 3. Рисунок 9].

Мини-проект 2. «Точность - вежливость королей».

Старшеклассникам было предложено составить алгоритм нахождения точек экстремума по построенным графикам в виртуальной лаборатории «Живая математика 5.0» двух функций, у одной из которых экстремумы определяются точно, а у другой – приблизительно. Учащиеся должны были сделать вывод, что графический метод нахождения экстремумов функций не всегда даёт точный ответ, поэтому удобнее пользоваться аналитическими методами. [Приложение 3. Таблица 4].

Мини-проект 3. «Если в конце исследования не видно следующего - значит, исследование не доведено до конца».

Учащимся было предложено провести исследование определенной функции, имеющей точки перегиба, на наличие экстремумов, и построить её график самостоятельно. При этом у учащихся должно было возникнуть затруднение в соединении точек экстремума. Здесь должна была возникнуть необходимость использования второй производной для исследования функции на вогнутость-выпуклость. [Приложение 3. Таблица 5].

Итог: на основе представленных проектов учащиеся должны были самостоятельно сделать вывод: когда исследуем функцию с помощью производной для построения её графика, необходимо использовать не только координаты точек экстремума, но и всю аналитически найденную информацию.

3 этап. Углубление изучаемой темы.

Если у учащихся возникли трудности с применением второй производной для построения графиков функций, то учитель предлагает вспомнить тему «Применение второй производной для построения графиков функции и изучить опорную схему для нахождения второй производной и ее использования в исследовании (рис. 2.2.2):

- Если вторая производная равна 0, то это точка перегиба.

- Если вторая производная больше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вниз.

- Если вторая производная меньше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вверх.

Возможно, что учащиеся самостоятельно предложат продолжить схему исследования с применением второй производной. Всё зависит от уровня подготовленности обучающихся.

В любом случае полезно предложить составить опорную схему по данной проблеме или использовать подготовленную учителем (рисунок 2.2.2).

Рис. 2.2.2. Опорная схема. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

4 этап. Закрепление полученных знаний.

Всем раздаются карточки с аналитическим заданием: отыщите функцию, среди предложенных в таблице 2.2.1, исходя из её «автобиографии».

Автобиография функции

Я - функция сложная, это известно,
Ещё расскажу, если Вам интересно,
Что точку разрыва и корень имею,
И есть интервал, где расти не посмею.
Во всём остальном положительна, право.
И это конечно не ради забавы.
Для чисел больших я стремлюсь к единице.
Найдите меня среди прочих в таблице.

Таблица 2.2.1. Отыщите функцию по ее биографии

$f(x)=\frac{1}{4}x^4$	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$	$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-x}}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$	$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$
$f(x)=(x^2-1)^2$	$f(x)=x(1-x)$	$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

Ответ: рассказана автобиография функции

$$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$$

5 этап. Подведение итогов. Рефлексия.

Учитель: какие выводы мы можем сделать по итогам занятия? Мы сегодня поняли, что … (учащиеся должны продолжить предложение).

Предполагаемый ответ учеников: для уточнения вида графика, важно использовать все этапы исследования функции.

Учитель: нам сегодня удалось узнать...

Предполагаемый ответ учеников: что аналитический способ нахождения точек экстремума более совершенный по сравнению с графическим.

Учитель: мы сегодня убедились в том, что…

Предполагаемый ответ учеников: при построении графика при помощи исследования функции с помощью производной нужно использовать всю аналитически найденную информацию.

Учитель: как вы оценили бы свою работу на уроке?

Учащиеся сами ставят себе оценку.

Учитель подводит итоги, выводя на экран шутливый ответ на первый вопрос, который прозвучал вначале занятия:

Чтобы приращение ваших знаний по теме было положительным, работая и на уроке, и дома, постарайтесь выполнить максимально посильную для себя работу.

6 этап. Распределение задания для мини-проекта на следующее занятие.

Задание для **мини-проекта 4:** найдите решение задачи 17 из ЕГЭ по математике профильного уровня с сайта ФИПИ с помощью производной.

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить на 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности? [Приложение 3. Таблица 6].

Таблица 2.2.2. Технологическая карта урока №63

Тема: Применение производной к исследованию и построению графиков функций

Организационная структура урока

<table>
<tr><th>Этапы урока</th><th>Деятельность учителя</th><th>Деятельность учеников</th><th>Формируемые УУД</th></tr>
<tr><td>1этап. Организационный. Формулирование темы, целей и задач занятия.</td><td>Психологически-организационный момент - эвристическая беседа учителя с учениками, учитель моделирует проблему и настраивает обучающихся на самостоятельное конструирование формулировок целей и задач по теме урока.</td><td>Учащиеся принимают активное участие в формулировании целей и задач урока.</td><td rowspan="2">Коммуникативные: планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками.
Регулятивные: самоорганизация, умение формулировать цели и задачи, создавать математические модели ситуаций
Личностные: активность каждого, умение аргументировать и отстаивать свою точку зрения, контролировать процесс, мотивация учения.</td></tr>
<tr><td>2. Актуализация знаний. Представление мини-проектов в виде опорных схем и конспектов</td><td>1)Предлагает вспомнить опорную схему в виде алгоритма исследования функций, как обобщение ранее изученного материала.
2)Заслушивает мини-проекты учащихся по заранее выданным направлениям:
1. Исследование поведения функции в отношении области определения.
2. Нахождение точек экстремума по графику функции»
3.Построение графика функции на основании ее исследования.
-</td><td>Заслушивают и обсуждают мини-проекты. Составляют собственные схемы решения заданий по теме занятия. Определяют границу знания и незнания.</td></tr>
</table>

3. Углубление изученной темы.	*Ставит проблему: если мы без интернет-ресурса сами строим график, то как соединить две полученные точки -* *по прямой, выпуклостью вниз или вверх? Дополнительно вводит понятие второй производной и предлагает опорную схему для ее нахождения и алгоритм ее использования в исследовании:* *-Если вторая производная равна 0, то это точка перегиба.* *-Если вторая производная больше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вниз.* *-Если вторая производная меньше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вверх.*	Учащиеся получают карточки с опорной схемой, формируют группу для разработки мини-проектов для построения графиков функции или решения экономической задачи.	**Познавательные:** Поиск и выделение необходимой информации. **Коммуникативные:** Умение организовывать и планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками. **Регулятивные:** Выделение и осознание того, что уже пройдено. **Личностные:** Проявлять внимание, удивление, желание больше узнать.
4. Закрепление полученных знаний	Раздает карточки с аналитическим эвристическим заданием: отыскать функцию по её биографии.	Работают в группах. Какая группа быстрее решит задание.	**Познавательные:** Самостоятельный выбор наиболее эффективных способов решения задачи **Личностные:** мотивация к обучению; **Коммуникативные:** умение работать в команде.

5. Подведение итогов. Рефлексия.	Предлагает провести самооценку своей работы, сформулировать выводы . Я сегодня понял… Мне сегодня удалось узнать… Я убедился в том, что…	Передают друг другу тотем – фигурку мудрой совы, отвечают на вопросы учителя, анализируют свою работу, выражают вслух свои затруднения.	**Личностные:** Оценивать собственную учебную деятельность инициативу, ответственность, причины неудач **Познавательные:** Рефлексия способов и действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности **Регулятивные:** Оценивание качества и уровня усвоения.

В разработанном конспекте и технологической карте урока «Применение производной к исследованию и построению графиков функций» использованы активные формы и методы обучения: создание проблемных ситуаций, исследовательская деятельность обучающихся, создание ими опорных схем и конспектов, эвристическая беседа, работа в группах. На занятиях внеурочной деятельности перед школьниками ставятся жизненные задачи, требующие одновременного применения теоретических знаний и быстрого выполнения практических действий. Такой подход ведет к формированию неподдельного интереса к математике и является залогом ее успешного изучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечень понятий и определений, которые должны освоить выпускники старшей школы определяет методические особенности обучения элементам дифференциального исчисления в школе.

Введение в школьную программу элементов математического анализа продиктовано вызовами стремительного развития новых отраслевых и информационных технологий, повышенным спросом к профессиональным умениям современного специалиста математически исследовать явления реального мира. Однако все понятия элементов математического анализа носят сугубо абстрактный характер, что создает значительные трудности в обучении.

Так как в школьной программе согласно ФГОС происходит первое знакомство с дифференциальным исчислением, то для учителя очень важным является вопрос уровня строгости введения нового математического понятия.

При анализе учебно-методических пособий для 10-11 классов школы становится понятно, что авторы учебников по-разному подходят как ко времени введения самой темы «Производная», так и к подаче понятий по уровню строгости: с доказательством, на основе правдоподобных рассуждений или наглядно-интуитивным образом.

Недостатком изложения темы дифференциального исчисления в школьных учебниках является отсутствие единой учебно-методической линии средней и старшей школы, не хватает иллюстративно-наглядного материала в учебниках, теоретический материал описан научным языком, практические задания формализованы, оторваны от реальной жизни, что затрудняет развитие навыков применения методов математического анализа в реальных ситуациях. Учебная программа перегружена и сведена к перекосу в сторону формализма и схоластики. Учитель же обязан строго выполнять учебный план и не всегда имеет возможность реализовывать дифференцированный подход непосредственно на уроке.

Указанные проблемы приводят к снижению качества знаний по математике. Результаты ЕГЭ по математике профильного уровня показывают, что выпускники школ успешнее решают шаблонные задачи, чем те, которые требуют творческого подхода и глубокого логического анализа.

Введение образовательных стандартов второго поколения расширило возможности учителя для внедрения личностно-ориентированного, деятельностного подхода к процессу обучения и разнообразия видов и форм учебной деятельности.

На основании всего вышесказанного, нами предложена рабочая программа внеурочной деятельности «Секреты дифференциального исчисления», которая позволяет решать стоящие проблемы в части изучения элементов математического анализа, дает возможность углубить знания выпускников школы и отработать навыки применения инструментов исследования в дальнейшей профессиональной деятельности.

На занятиях внеурочной деятельности появляется возможность каждому учащемуся уделить больше времени для решения его учебных задач, увлечь каждого разнообразными формами обучения: деловыми играми, дискуссиями, выполнением групповых и индивидуальных проектов, реализацией творческого личностного потенциала.

Мы предлагаем активно использовать на занятиях эвристические беседы, которые способствуют сотрудничеству учителя и ученика, проблемный подход к формулировке целей и задач каждого занятия, метод мини-проектов и исследовательских работ.

ФГОС нового поколения требует от школы технического перевооружения, широкого использования ИКТ в обучении, обучение самостоятельности в постановке проблем, целей, задач и нахождении их решения и достижения. Для большей наглядности и развития абстрактно-логического мышления мы предлагаем вводить в ход занятия составление опорных схем и конспектов по методу Шаталова В.Ф.

На занятиях внеурочной деятельности не предусмотрены оценки и домашние задания, поэтому важно найти другие методы мотивации старшеклассников к учебной деятельности.

Мы считаем важным тот факт, что по итогам занятий каждый школьник научится самостоятельно оценивать свою работу и активно участвовать в проектно-исследовательской деятельности.

Практическое использование учителем приведенных методических разработок поможет повысить у обучающихся интерес к математике в целом, сформировать прочные и глубокие знания по теме «Элементы дифференциального исчисления», будет способствовать достижению предметных результатов при сдаче ЕГЭ по математике.

В данной работе решены все запланированные задачи, достигнута основная цель работы. Выявлены теоретические основы обучения темы «Элементы дифференциального исчисления» на основе ФГОС СОО и разработана рабочая программа курса внеурочной деятельности «Секреты дифференциального исчисления».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш. А. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень. – М.: Просвещение, 2012. – 464 с.

2. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М. : МЦНМО, 2004. – 32 с.

3. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1992. – 351 с.

4. Бабенко, А. С. Методика обучения математике. Изучение элементов математического анализа в школьном курсе математики : учебно-методическое пособие . – Кострома : Изд-во Костром. гос. ун-та, 2017. – 60 с. ISBN 978-5-8285-0852-5

5. Блох А.Я., Гусев В.А., Дорофеев Г.В. [и др.] ; сост. В. И. Мишин. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: Учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математическим специальностям– М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

6. Воронцов А.Б. Практика развивающего обучения по системе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова. – М.: ЦПРО «Развитие личности», 1998.

7. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике.- М.: «Издательский центр «Академия»», 2003.

8. Гусев, В.А., А.Г. Мордкович Справочник по математике.. - 3-е изд., перераб.- М.: Просвещение, 1995. - 448 с.

9. Иванов С.И., Экономика. Основы экономической теории: учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учрежд. Профильный уровень образования. – В 2-х книгах. – М.: ВИТА-ПРЕСС, 2012.

10. Иванова Т.А. Методология научного поиска – основа технологии развивающего обучения // Математика в школе. 1995. - №5. – С.25-28.

11. Изустная алгебра. Учебно-методическое пособие (опорный конспект) по основным темам алгебры 9-11 классов. — М.: Школа Шаталова, 2009. — 36 с.

12. Капкаева Л.С. Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 2: учеб. пособие для вузов (Серия: Университеты России). – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 191 с.

13. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М., Просвещение, 2006. – 384 с.

14. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1977.

15. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. - М.: Просвещение, 2010. – 336 с.

16. Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования.- М.: «Интеллект-центр», 2001.

17. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2002.

18. Мордкович А.Г., Беседы с учителями математики: Учебно-методическое пособие. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005.

19. Мордкович А.Г., Смирнова И.И., Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 класс. Методическое пособие для учителя. – М.: Мнемозина, 2015.

20. Мордкович А.Г., Денищева Л.О., Корешкова Т.А., Алгебра и начала анализа. 10 – 11 классы. Учебник и задачник. Профильный уровень в 2-х частях. – М.: Мнемозина, 2014.

21. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала анализа: Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2002. - 448 с.

22. Перевощикова Е.Н., Формирование диагностической деятельности у будущих учителей математики. – Н. Новгород, 2000.

23. Подласый И.П., Педагогика. – М.: Владос, 1996.

24. Полякова Т.С., История математического образования в России. М.: Изд-во МГУ, 2002.

25. Пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. Задания по экономике: от простых до олимпиадных./Д.В.Акимов, О.В.Дичева, Л.Б.Щукина.- М.: ВИТА-ПРЕСС, 2009. -320с.

26. Потапов М.К., Шевкин А.Н. Алгебра и начала анализа: дидактические материалы для 11 класса: базовый и профильный уровни. – М.: Просвещение, 2007.

27. Психолого-педагогические условия развития понятийного мышления: Хрестоматия, Сост. Э.Г. Гельфман, С.И. Цымбал.- Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003.

28. Рурукин А.Н., Бровкова Е.В., Лупенко Г.В. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа:10 класс. - М.: ВАКО, 2011.

29. Саранцев Г.И. Гуманитаризация математического образования в школе и вузе: Межвуз. сб.науч. тр. Вып.1. – Саранск, 2002. – С.3-13.

30. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам в школе: Кн.для учителя. – М.: Просвещение, 1999

31. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учеб. пособие. – М.: Народное образование, 1998.

32. Современный урок математики: Теория и практика: Материалы Всерос.науч.- практ. конф. / Отв. ред. Т.А. Иванова.- Н. Новгород: НГПУ, 2005.

33. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов. - М.: Дрофа, 2005

34. Утеева Р.А. Формы учебной деятельности учащихся на уроке // Математика в школе. – 1995. – №2. – С. 33-35.

35. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике:

Пособие для учителей, методистов и студентов педагогических высших учебных заведений. – М.: Флинта, 1998.

36. Черкасов Р.С. История отечественного школьного математического образования // Математика в школе. – 1997. – №2 – С. 83-92; №3. – С. 89-96; №4. – С.88-92.

37. Шарыгин И.Ф., Бузинер М.А., Гордин Р.К. и др. Информационно-поисковая система по учебным задачам // Математика в школе. – 1993. – №2. - С. 33-39.

38. Шаталов В.Ф. Эксперимент продолжается/ - М.: Педагогика, 1989.

39. Ященко И.В., Рослова Л.О, Высоцкий И.Р., Семенов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 года по математике. Сайт ФГБНУ «ФИПИ». [Электронный ресурс]// URL: http://www.fipi.ru/ (дата обращения: 06.04.2019).

40. Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ и ГВЭ. 11 класс. Сайт ФГБНУ «ФИПИ». [Электронный ресурс]// URL: http://www.fipi.ru/ (дата обращения: 12.03.2019).

41. Доступная математика [Электронный ресурс]// URL: http://www.cleverstudents.ru/ (дата обращения: 04.04.2019).

42. Инструктивно-методическое письмо «О преподавании предмета «Математика» в образовательных организациях Белгородской области в 2018-2019 учебном году». ОГАОУ ДПО «Белгородский институт развития образования» [Электронный ресурс]// URL: http://new.beliro.ru (дата обращения: 14.04.2019).

43. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. N 2506-р [Электронный ресурс]// URL: http://www.consultant.ru/ (дата обращения: 06.04.2019).

44. Методические рекомендации по уточнению понятия и содержания внеурочной деятельности./ Письмо Министерства образования и науки РФ от

18 августа 2017 г. N 09-1672./ Письмо Министерства просвещения РФ от 5 сентября 2018 г. N 03-ПГ-МП-42216 об обязательном посещении внеурочной деятельности./ Математика. Сайт в помощь учителям математики [Электронный ресурс]// URL: https://math.ru/ (дата обращения: 06.04.2019).

45. Сайт авторского коллектива УМК Мордковича [Электронный ресурс]// URL: http://www.ziimag.narod.ru/index.htm (дата обращения: 06.04.2019).

46. Реестр примерных основных общеобразовательных программ Министерства образования и науки Российской Федерации [Электронный ресурс]// URL: http://fgosreestr.ru/ (дата обращения: 06.03.2019).

47. Справочник учебных онлайн-калькуляторов, теории и примеров решения задач [Электронный ресурс]// URL: http://ru.solverbook.com/spravochnik/ (дата обращения: 31.03.2019).

48. СанПиН 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические нормы и правила к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях» [Электронный ресурс]// URL: http://www.consultant.ru/ (дата обращения: 30.04.2019).

49. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года № 413. [Электронный ресурс]// URL: http://www.edu.ru/ (дата обращения: 12.04.2019).

50. Федеральный перечень учебников на 2018-2019 уч.год. Приказ Министерства просвещения РФ №345 от 28.12.2018г. [Электронный ресурс]// URL: https://4ege.ru (дата обращения: 06.03.2019).

51. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 N 273-ФЗ [Электронный ресурс]// URL: http://www.consultant.ru/ (дата обращения: 06.03.2019).

52. Цифровой образовательный ресурс ЯКЛАСС [Электронный ресурс]// URL: https://www.yaklass.ru/p/algebra/10-klass/proizvodnaia-9147/ (дата обращения: 31.03.2019).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Анкета для старшеклассников

«Самые сложные задания ЕГЭ по математике профильного уровня»

1. Расставьте в таблице номера заданий ЕГЭ профильного уровня по степени сложности лично для вас: задание №17 делим на 2 вида: 17ф - финансовая задача для расчета сложного процента, 17п – задача на оптимизацию прибыли. В 1 строке проставлены номера заданий, вы заполняете 2-ю строку по степени сложности от 1 до 20, 1 - самая сложная, 20 - самая простая.

Таблица 1. Таблица для ответов на вопросы анкеты

1 часть ЕГЭ с кратким ответом

№№ заданий	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Степень сложности												

2 часть ЕГЭ с приведением полного решения

№№ заданий	**№13**	**№14**	**№15**	**№16**	**№17ф**	**№17п**	**№18**	**№19**
Степень сложности								

Таблица 2. Результаты анкетирования старшеклассников «Самые сложные задания ЕГЭ по математике профильного уровня.

Участники: 55 человек - учащиеся 11-х классов инженерно-юношеского лицея				Дата: 22.04.2019г.		
	Таблица	Распределение номеров заданий по степени сложности				
		с 1 по 5 место	с 6 по 10 место	с 11 по 15 место	с 16 по 19 место	итого
Задание 7. Физический и	кол-во отметивших	**2**	**12**	**26**	**15**	**55**
геометрический смысл	% от общего числа	**3,6**	**21,8**	**47,3**	**27,3**	
производной						
Задание 12. Нахождение	кол-во отметивших	**2**	**18**	**25**	**10**	**55**
точек максимума и	% от общего числа	**3,6**	**32,7**	**45,5**	**18,2**	
минимума функции						
Задание 17. Экономическая	кол-во отметивших	**39**	**10**	**4**	**2**	**55**
задача, решаемая	% от общего числа	**70,9**	**18,2**	**7,3**	**3,6**	
с помощь производной						

Приложение 2

Примеры опорных конспектов для занятий внеурочной деятельности по теме «Секреты дифференциального исчисления»

Рисунок 1. Опорная схема. Динамические процессы.

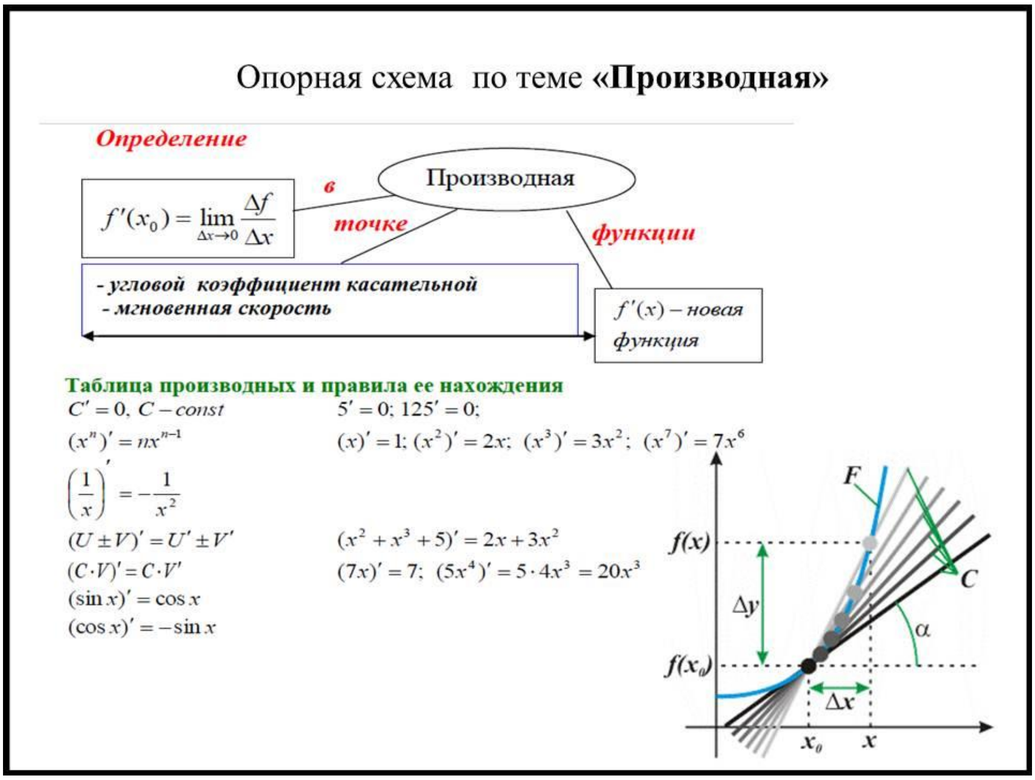


Рисунок 2. Опорная схема. Понятие «Производная»

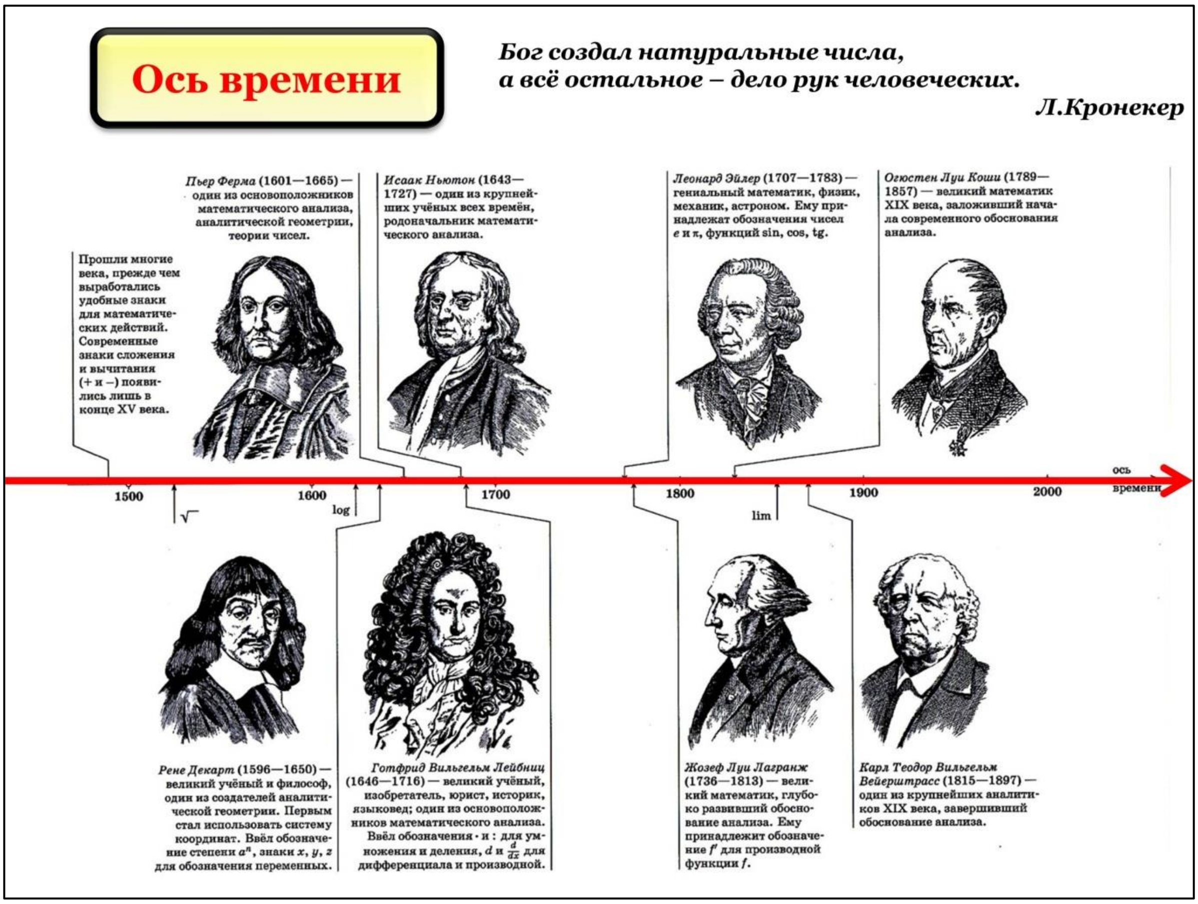


Рисунок 3. Опорный конспект по истории развития дифференциального исчисления «Ось времени».

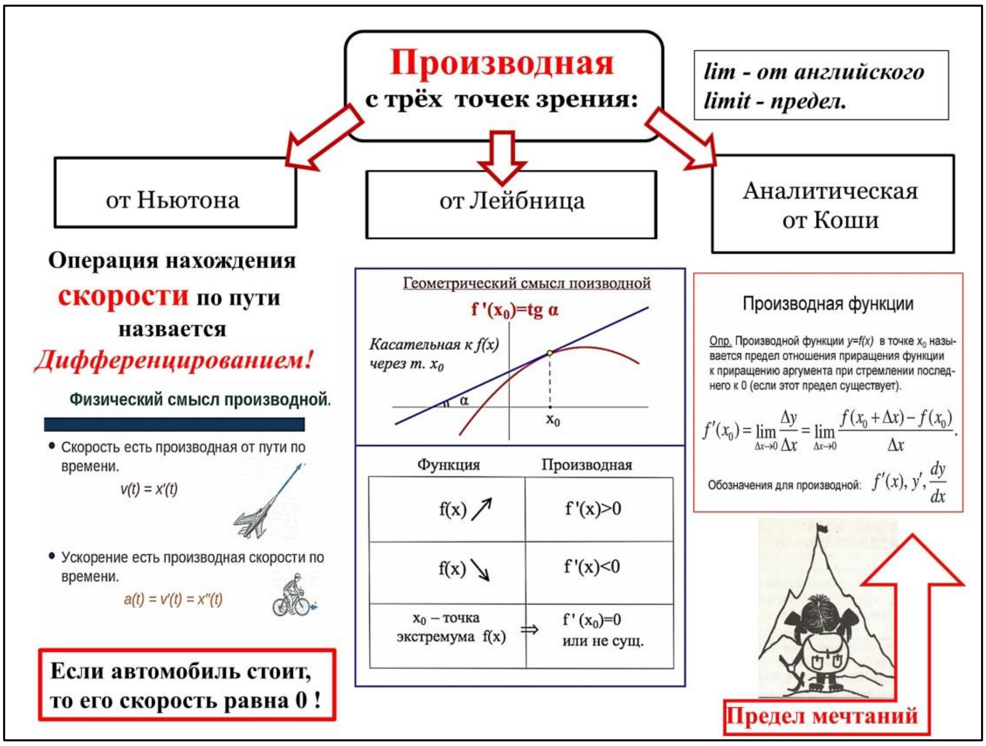


Рисунок 4. Опорный конспект по теме «Производная»

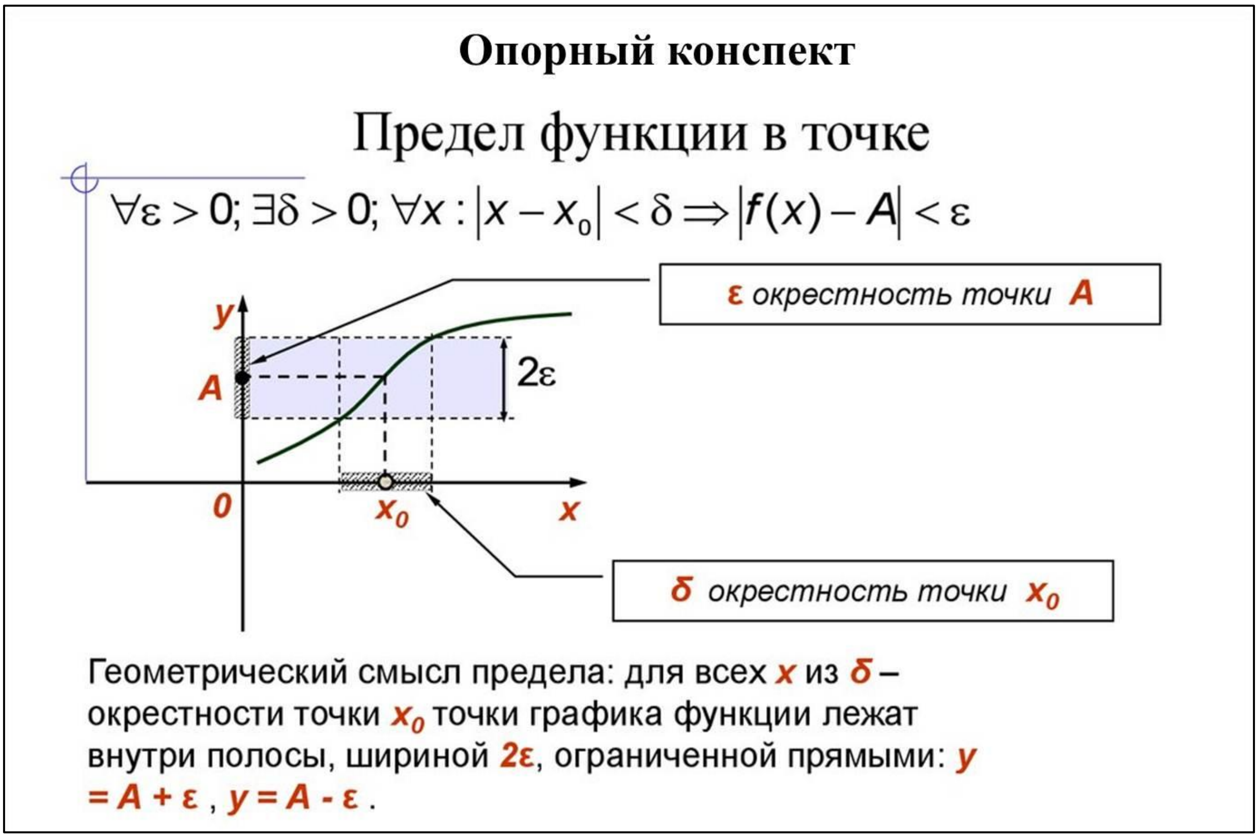


Рисунок 5. Опорный конспект по теме «Пределы»

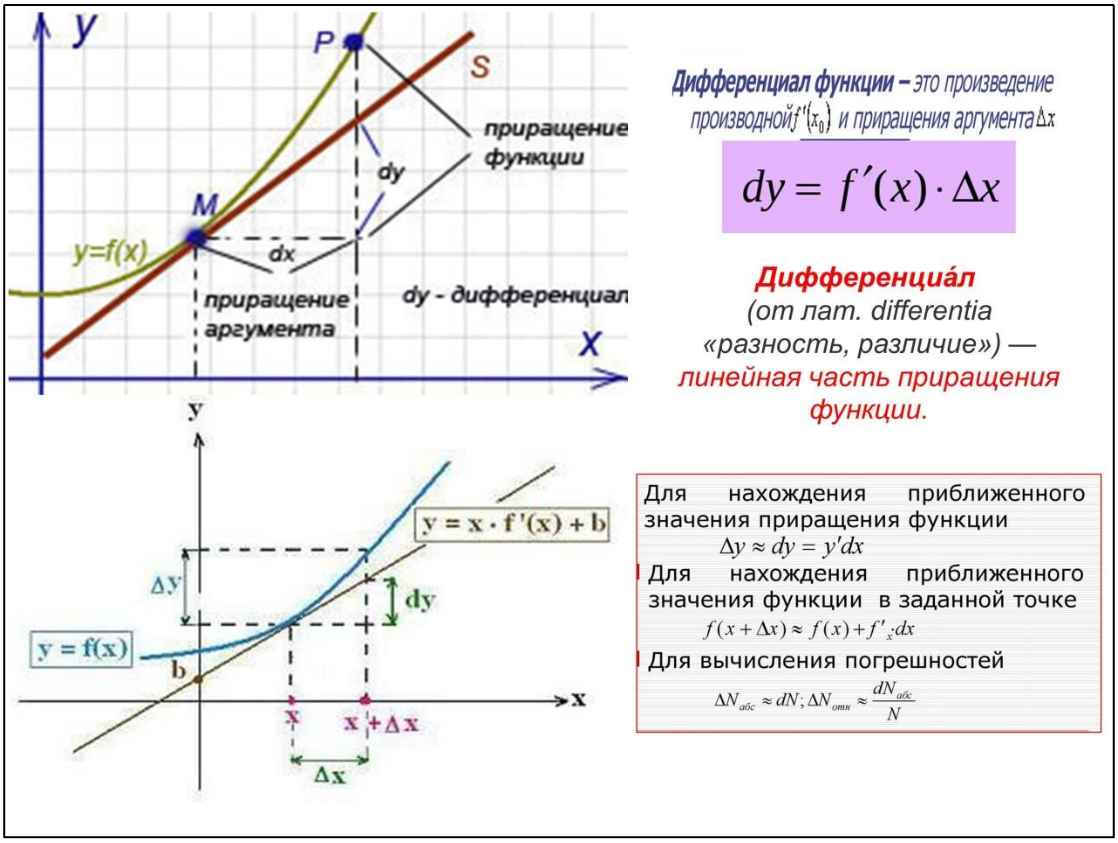


Рисунок 6. Опорный конспект по теме «Дифференциал»

Схема. График функции и график производной

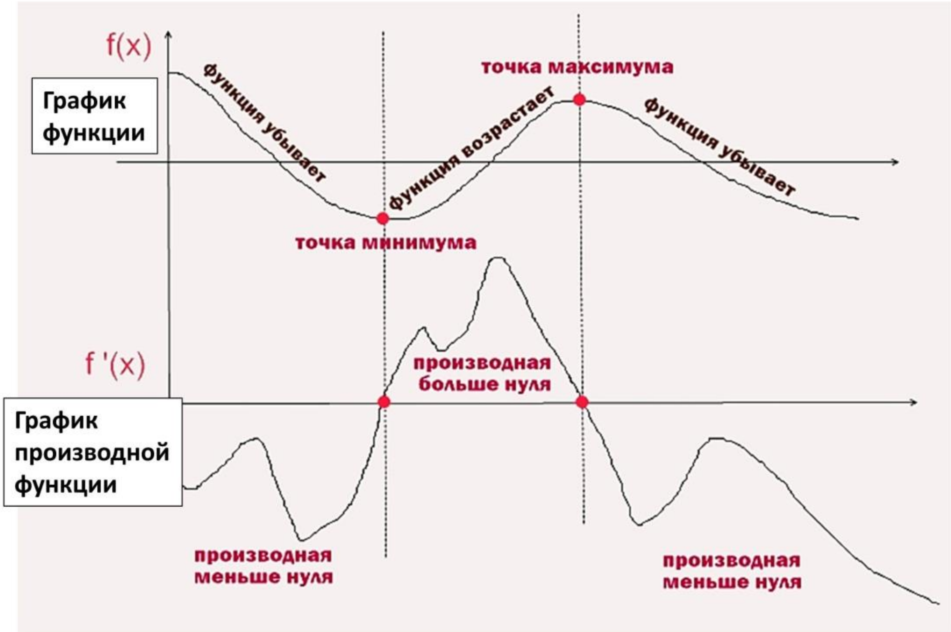


Рисунок 7. Опорная схема. График функции и график производной

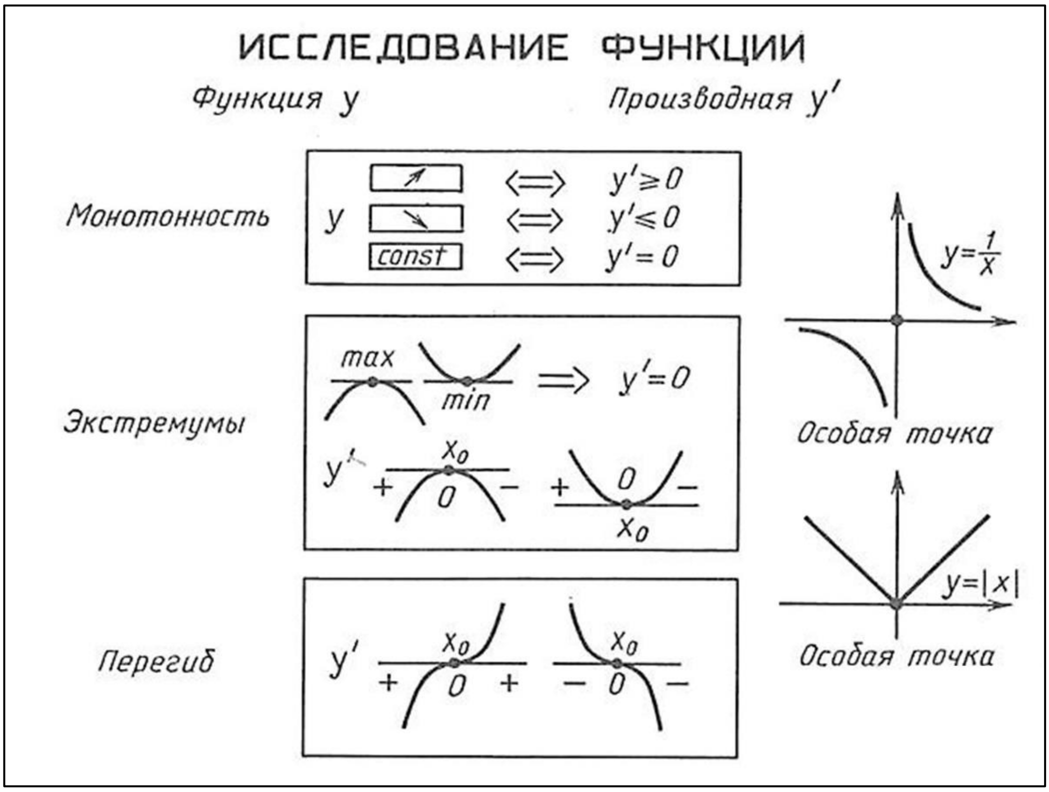


Рисунок 8. Опорная схема. Исследование графиков функции
с помощью производной

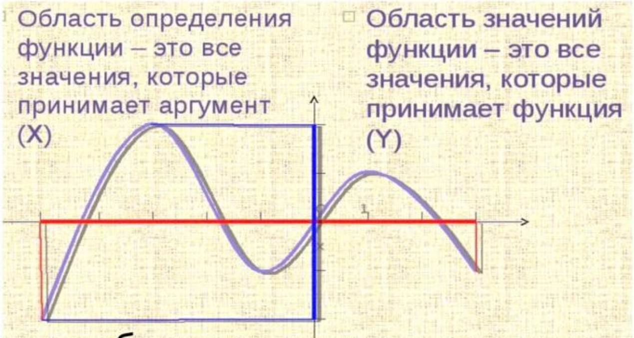
Приложение 3

Примеры мини-проектов учащихся для внеурочных занятий по теме «Применение производной к исследованию функции и построения их графиков"

Таблица 3. Образец мини-проекта 1

Тема	***Трудно найти черную кошку в тёмной комнате, особенно если ее там нет***
Цель	Научиться определять интервалы аргумента, на которых функция существует
Задание	1.Построить в виртуальной лаборатории «Живая математика 5.0» график функции : $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-2}$ и найти её область определения. 2. Составить опорную схему «Область определения функции»
Содержание	1.При выполнении задания возникла **проблема**: компьютер не показывал график. Изменение масштаба не помогало. При анализе выражения $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-2}$ мы получили следующий результат: подкоренное выражение $(-x^2+2x-2)<0$, то есть отрицательно при всех значениях аргумента *x*. Следовательно, график заданной функции не отображался из-за того, что ни при каком действительном значении ***x*** функция не определяется. 2. Мы выяснили, какие функции имеют ограничения области определения. Составлен опорный конспект темы «Область определения функции».
Вывод	1.Для уточнения графика первым этапом должно быть определение области определения и области значения функции. Нахождение области определения функции далеко не формальный этап исследования. Он поможет нам не оказываться в роли человека, ищущего черную кошку в тёмной комнате. 2.Имеется достаточно небольшое количество элементарных функций, область определения которых ограничена. Все остальные "сложные" функции - это всего лишь их комбинации. Опорный конспект темы «Область определения функции» поможет в решении задач исследованияфункций и построения их графиков.

D(f)



E(f)

Имеется достаточно небольшое количество элементарных функций, **область определения которых ограничена.**
Все остальные "сложные" функции - это всего лишь их комбинации

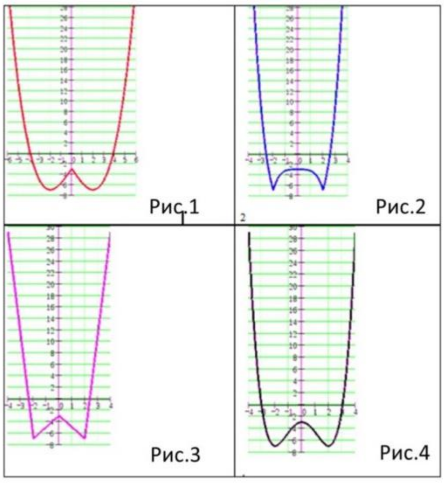
№ п/п	Вид функции	Ограничения ($f(x)$ и $g(x)$ существуют!)	Формулировка
1	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	Знаменатель дроби не равен нулю
2	$y=\sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x)\geqslant 0$	Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение
3	$y=\lg(f(x))$	$f(x)>0$	Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение
4	$y=\log_{f(x)} a\ (a>0)$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$	В основании логарифма может стоять только положительное выражение, не равное единице
5	$y=\mathrm{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$	Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное $\frac{\pi}{2}+\pi k$ (k — целое)
6	$y=\mathrm{ctg}(f(x))$	$f(x)\neq \pi k,\ k\in Z$	Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное πk (k — целое)
7	$y=\arcsin(f(x))$	$\lvert f(x)\rvert\leqslant 1$ $(-1\leqslant f(x)\leqslant 1)$	Под знаками арксинуса и арккосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице
8	$y=\arccos(f(x))$		
9	$y=x^{\alpha},\ \alpha\in R$		
	а) α — натуральное число	x — любое число	
	б) α — целое отрицательное число или нуль	$x\neq 0$	
	в) α — положительное нецелое число	$x\geqslant 0$	
	г) α — отрицательное нецелое число	$x>0$	

Рисунок 9. Опорный конспект к мини-проекту 1.
Область определения функции

Таблица 4. Образец мини-проекта 2

Тема	***Точность - вежливость королей***
Цель	Составить алгоритм нахождения точек экстремума функций
Задание	1.Построить графики в виртуальной математической лаборатории «Живая математика 5.0» и найти на этих графиках точки экстремумов функций: а) $f(x)=x^3-9x$ б) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ 2.Представить алгоритм решения задачи по нахождению точек экстремума
Содержание	При определении точек экстремума возникла *проблема*: для функции *б)* точки экстремума с помощью построенного на компьютере графика определены в целых числах точно $x_{\max}=1; x_{\min}=3$, а для функции *а)* - лишь приближённо $x_{\max}=-1{,}7; x_{\min}=1{,}7$. Для уточнения приближенных значений находим точки экстремума предложенных функций аналитически, с помощью производной. Результат определения: *а)* $x_{\max}=-\sqrt{3}; x_{\min}=\sqrt{3}$; *б)* $x_{\max}=1; x_{\min}=3$
Выводы	1.Графический метод нахождения точек экстремумов неточен, разрешается проблема применением аналитического метода – вычислением производной. 2. Алгоритм нахождения точек экстремумов функции: - найти область определения функции D(f); - найти производную $f'(x)$; - найти критические точки (т.е. внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует); - разбить область определения этими точками на промежутки и определить знак производной на каждом из них; - выяснить, имеет ли функция точки экстремума. Если функция непрерывна в критической точке и при переходе через нее знак производной меняется с «минуса» на «плюс», то это точка минимума, если с «плюса» на «минус», то это точка максимума; - вычислить значение функции в точках экстремума, если они существуют; - записать ответ.

Таблица 5. Образец мини- проекта 3

<table>
<tr><td>Тема</td><td>Если в конце исследования не видно следующего – значит, исследование не доведено до конца</td></tr>
<tr><td>Цель</td><td>Учимся строить график функции на основании ее исследования</td></tr>
<tr><td>Задание</td><td>Провести исследование на наличие экстремумов функцию $f(x) = \frac{1}{4} x^4 - 2x^2 - 3$ и построить эскиз её графика.</td></tr>
<tr><td>Содержание</td><td>Проводим исследование заданной функции по алгоритму:
1. $D(f) = R$.
2. $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$
3. $D(f') = R$
4. $f'(x) = 0$ при $x=0$, $x=2$, $x=-2$
<table>
<tr><td></td><td>$(-\infty;-2)$</td><td>-2</td><td>$(-2;0)$</td><td>0</td><td>$(0;2)$</td><td>2</td><td>$(2;+\infty)$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>_</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>_</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>f</td><td>↘</td><td>-7</td><td>↗</td><td>-3</td><td>↘</td><td>-7</td><td>ТМ ↗</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>min</td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table>
При построении графика возникла проблема: какой линией соединить имеющиеся точки графика, чтобы она более точно передавала свойства заданной функции?


Предлагаем 4 варианта соединения точек, где производная равна 0. Касательные к графику функции в этих точках должны быть параллельны оси OX. Это возможно только на рисунке 4. Значит, графиком нашей функции является рисунок 4.</td></tr>
<tr><td>Выводы</td><td>Вывод: при построении функции с помощью производной нужно использовать не только координаты точек экстремума, но и всю аналитически найденную информацию о данной зависимости</td></tr>
</table>

Таблица 6. Образец мини-проекта 4

<table>
<tr><td>Тема</td><td>Решение экономических задач с помощью производной</td></tr>
<tr><td>Задание</td><td>Решить задачу по экономике, используя метод нахождения экстремума функции с помощью производной:
В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко- часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?</td></tr>
<tr><td>Цель</td><td>Овладеть навыками решения задач практического содержания с помощью производной</td></tr>
<tr><td>Содержание</td><td>

Решение:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Алюминий</td><td colspan="2">Никель</td></tr>
<tr><td></td><td>$чел\cdot час$ труда</td><td>масса, кг.</td><td>$чел\cdot час$ труда</td><td>масса, кг.</td></tr>
<tr><td>1 область</td><td>$10t$</td><td>t</td><td>$800-10t$</td><td>$0,1\cdot(800-10t)$</td></tr>
<tr><td>2 область</td><td>x^2</td><td>x</td><td>$800-x^2$</td><td>$\sqrt{800-x^2}$</td></tr>
</table>

В первой области:

По условию задачи на добычу 0,1 кг алюминия затрачивается 1 $чел\cdot час$ труда.

На добычу 1 кг алюминия затрачивается 10 $чел\cdot час$ труда.

На добычу t кг алюминия затрачивается $10t$ $чел\cdot час$ труда.

Всего в первой области $160\,чел\cdot 5\,ч = 800\,чел\cdot ч$.

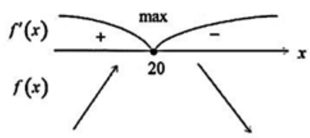
Так как 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля, то приравняем массы металлов, добываемых в двух областях.

$x+t=0,1\cdot(800-10t)+\sqrt{800-x^2}$. Выразим t. $t=40-0,5x+0,5\sqrt{800-x^2}$

Найдем массу металлов, которую добывают в двух областях суммарно для нужд промышленности.

Введем функцию $f(x;t)=80-t+\sqrt{800-x^2}+x+t;\quad f(x)=80+\sqrt{800-x^2}+x;$

$0\le x^2\le 800;\ 0\le x\le 20\sqrt{2};$



Найдем наибольшее значение функции:

$f(x)=80+\sqrt{800-x^2}+x.$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{800-x^2}}+1=0;\quad \frac{x}{\sqrt{800-x^2}}=1;\ x^2=400;\ x=20(кг).$

$f_{наиб}=f(20)=80+\sqrt{800-20^2}+20=120(кг)$. Ответ: 120 кг.

</td></tr>
<tr><td>Выводы</td><td>Дифференциальное исчисление – инструмент для решения задач экономического содержания</td></tr>
</table>