ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙНАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ОБУЧЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01, Педагогическое образование, профиль математика
очной формы обучения, группы 02041502
Стребковой Алёны Игоревны

Научный руководитель
к.п.н., доцент
кафедры математики
Остапенко С.И

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в Российской Федерации безостановочно происходят глобальные изменения в различных сферах деятельности. Безусловно, в сфере образования так же появляются нововведения. Они рассчитаны на то, чтобы улучшить усвоение основной школьной программы обучающимися, развить их интерес к какой-либо сфере деятельности.

Одним из таких нововведений является внедрение различных информационных технологий в школьное образование. Огромное разнообразие этих технологий дает учителю преимущество в объяснении материала, выявлении интереса у учащихся к определенным школьным предметам.

Рассматривая и анализируя темы школьной программы, можно сделать вывод, что одной из основных тем в изучении математики является темы, относящиеся к решению уравнений и неравенств, поскольку они занимают значительное место в школьной программе.

Умение решать уравнения и неравенства различного рода и сложности показывает высокий уровень умения решать математические задачи. Графический метод решения уравнений и неравенств – один из способов решения данных заданий. Он является одним из основных тем старшей школы. Эта тема входит в основной курс алгебры и начал анализа в 10-11 классах. В профильных классах графический метод изучают более углубленно и подробно.

Таким образом, использование ИТК в обучении детей графическому методу решения уравнений и неравенств, безусловно, является одной и актуальных тем в школьном образовании.

Проблема исследования: обучение графическому методу решению уравнений и неравенств с использованием ИТ.

Цель данной выпускной квалификационной работы заключается в изучении теоретической базы графического метода решения уравнений и неравенств, использование информационных технологий для обучения графическому методу.

Объект исследования: графический метод решения уравнений и неравенств.

Предмет исследования: обучение школьников графическому методу решения уравнений и неравенств с использованием информационных технологий.

Для достижения цели исследования нужно решить следующие задачи:

1. Проанализировать учебно-методическую и научную литературу по проблеме исследования.

2. Рассмотреть характеристики графического метода решения уравнений и неравенств с использованием ИТК.

3. Аргументировать и рассмотреть методические особенности обучения решению уравнений и неравенств графическим методом.

4. Разработать контролирующий тест на тему: «Решение уравнений и неравенств графическим методом».

Теоретическая значимость. В выпускной квалификационной работе был проведен анализ учебно-методической и научной литературы, рассмотреть и изучить характеристику и математические основы решения уравнений и неравенств графическим методом с использованием ИТК.

Практическая значимость. Результаты, полученные в ходе исследования, могут быть использованы учителями математики в разработках своих индивидуальных программ, таких как эффективные курсы и др.

Работа состоит из введения, первой главы, состоящей из трех параграфов, второй главы, состоящей из трех параграфов, заключения и списка использованной литературы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТК

1.1 Анализ учебно-методической и научной литературы по проблеме исследования

Графическому методу решения уравнений и неравенств посвящен ряд учебно-методических и научных работ, которые раскрывают некоторые аспекты обучения учащихся данному методу. Основу данной литературы, конечно же, составляют школьные учебники различных авторов: А.Н.Колмогоров, С.М.Никольский, Ш.А.Алимов, А.Г.Мордкович и пр. Рассмотрим эту литературу подробней [1-5].

В учебниках по алгебре и началам анализа для 10-11 классов А.Н.Колмогорова, Ш.А.Алимова рассматриваются только стандартные алгебраические методы решения уравнений. Но в учебнике Ш.А.Алимова упоминается о графическом методе решений уравнений и неравенств, но без обоснований его применения [1].

Однако, стоит заметить, что попытка исправить ситуацию у вышеуказанных авторов предпринята в учебниках С.М.Никольского, А.Г.Мордковича [2;3].

Учебник С.М.Никольского «Алгебра и начала анализа» является новым учебником, который включает в себя как материал, предназначенный как для общеобразовательных школ, так и для школ с углубленным изучением математики. Данный учебник содержит главу «Уравнения. Неравенства. Системы», в которой содержится два параграфа: «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств», «Уравнения, неравенства и системы с параметром». Несомненно, эти параграфы были предназначены для углубленного изучения [2].

В этой главе рассмотрены основные приемы решения уравнений и неравенств, такие как:

- области определения и допустимых значений функции;
- не отрицательность функций;
- ограниченность функций;
- использование свойств синуса и косинуса;
- использование числовых неравенств;

Решение уравнений и неравенств с параметром проиллюстрировано на уравнениях и неравенствах, содержащих функции со свойствами квадратного трехчлена. Однако, стоит заметить, что при использовании свойств синуса и косинуса рассматриваются не все виды задач, решаемые с использованием ограниченности, монотонности тригонометрических функций.

Учебник А.Г.Мордковича по алгебре и началам анализа содержит главу «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств». В ней выделено четыре метода решения уравнений, среди которых находится графический метод. Он проиллюстрирован применением только свойств ограниченности и монотонности функции, чего не достаточно для полного изучения графического метода [4].

В учебнике Г.К. Муравина для 11 класса по алгебре и началам анализа отмечен метод подбора корней, как один из основных универсальных методов решения уравнений и неравенств. Так же ко всему приведено доказательство единственности этих корней с использованием монотонности функции. Ко всему этому, автор привел примеры решения достаточно сложных уравнений, но не объяснил формирование отдельных действий по решению уравнений с использованием графического метода [5].

Подводя итог из вышесказанного, можно сделать вывод, что школьные учебники недостаточно полно отражают теоретический материал о способах решения уравнений и неравенств графическим методом и дают возможность на применение ограниченного числа приемов для решений данных задач.

Проанализировав школьную литературу, перейдем к рассмотрению научных работ, в которых содержится в основном совокупности различных задач на применение свойств ограниченности функции, множества значений функций при решении уравнений и неравенств, области определения функций.

Наиболее тщательно рассмотрен вопрос обучения учащихся методам решения задач, в частности функциональные приемы решения уравнений в исследованиях таких авторов, как Л. С. Капкаева, С. И. Мещерякова, Л. К. Садыкова и др. [6;7;8].

Л. С. Капкаева относит графический метод решения задач к алгебраическим методам, который в свою очередь определяется ею как «способ познавательной деятельности учащихся, основанный на системе алгебраических знаний». Автор отмечает, что каждый из методов состоит из приемов, а одним из деятельностных компонентов метода является определенная система действий, реализация которой ведет к достижению результата, а так же средства достижения результата [6].

С.И. Мерещакова выделяет, что обучающиеся должны уметь пользоваться всеми приемами решения уравнений стандартными методами, то есть выполнять следующие действия:

- выполнять операции над функциями;
- определять структуру уравнения (выяснять, из каких функций и каким образом оно составлено);
- выделять свойства, присущие функциям, входящим в уравнение (монотонность, четность, нечетность, периодичность и т.д.);
- строить графики и эскизы графиков функций) [7].

Л.К. Садыкова в своей работе определила графический метод решения уравнений и неравенств, методом, который основан на использовании свойств функций и их графических иллюстраций (она назвала его функционально-графическим). По словам автора, усвоение обучающимися функционально-графического метода напрямую связана с решением двух задач. Первая задача - добиться понимания учащимися сути метода и овладения действиями по его применению. Вторая задача - обучение применению функционально-графического метода для решения уравнений.

Л. К. Садыкова выделила деятельностные и гносеологические компоненты графического метода решения уравнений и неравенств. Наиболее значимые действия для усвоения новых знаний сформированы в виде следующих приемов:

- частные приемы решения уравнений и неравенств с применением отдельных свойств элементарных функций;
- обобщенный прием решения уравнений и неравенств функционально-графическим методом;
- частные приемы решения уравнений и неравенств с параметром первого и второго типов различными методами (графический, аналитический);
- обобщенный прием решения уравнений и неравенств с параметром первого и второго типов [8].

Проанализировав учебно-методическую и научную литературу, можно сделать вывод, что исследователи выделяют и рассматривают различные приемы решения уравнений и неравенств с помощью графического метода, перечисляют действия, адекватные им, приводят примеры упражнений для их формирования. Но разработка совокупности задач для обучения каждому действию этого метода и использование информационных технологий для изучения данного материала остается одной из актуальных проблем в современном школьном образовании.

1.2 Математические основы решения уравнений и неравенств функционально-графическим методом

Данный параграф будет содержать в себе рассмотрение математических основ (теоремы, утверждения, определения), которые применяются при решении уравнений и неравенств графическим методом.

Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств (ФГ метод) — это метод, основанный на применении свойств функций и (или) их графических иллюстраций.

Понятия «функция», «график функции», «уравнения и неравенства» являются основными математическими понятиями. Они используются на протяжении всего курса изучения математики, именно поэтому сформированы в содержательные методические направления: функционально-графическое и направление уравнений и неравенств. Именно они составляют основу темы «Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств», и поэтому содержание данного обучения должно держаться на связи таких понятий, как «функция», «уравнение» и «неравенство».

Крупнейшее открытие физиологов XX века асимметрии головного мозга значительно повлияла на решение проблемы обучения математике. Все это привело к выводу о том, что сочетания графических и аналитических приемов решения уравнений и неравенств важны для изучения ФГ метода. П.М. Эрдниев в своей книге пишет: «Логическое рассуждение - хорошая вещь, но правильный чертеж, иллюстрация остается в памяти навсегда. Логическое доказательство, состоящее из последовательно написанных или произнесенных слов одномерно, линейно, а рисунок (схема, чертеж, график) разгружает аппарат логики, ибо, будучи двумерным носителем информации, он включает особые механизмы целостной переработки информации. В результате подключения тем самым парных механизмов мышление как бы обретает новое качество, а доказательства большую убедительность» [9].

В результате анализа научных и методических пособий были выявлены ситуации, в которых используются свойства функций при решении уравнений и неравенств:

- Учет областей определения функций применялся при решении уравнений вида $f(x) = g(x)$ [10].
- Использование свойства ограниченности функций, основанное на том, что если $f(x) < c,\ g(x) > c$ на множестве X, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе: $\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$. Такая идея довольно часто встречается у многих авторов, академиков и др. [11].
- Применение свойства монотонности функций.
- Свойство четности и нечетности функции.
- Использование свойства периодичности функции.
- Использование свойства непрерывности функции удобно использовать при доказательстве существования решения уравнения. Также оно лежит в основе решения неравенств методом интервалов.
- Решение задач с параметром чаще всего основано на использовании свойств функций, участвующих в условиях задач [12].

Рассмотрим применение отдельных свойств функций при решении уравнений и неравенств ФГ методом.

Вначале стоит начинать решать уравнения или неравенства с нахождения области допустимых значений (пересечения областей определения всех функций из данного уравнения).

Определение 1. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл его левая и правая части.

Возможны случаи:

- Область допустимых значений уравнения (неравенства) пустое множество, то при этом уравнение или неравенство решений не имеет;
- Область допустимых значений уравнения (неравенства)

конечное множество, то при этом достаточно подстановкой определить, удовлетворяют ли эти числа данному уравнению или неравенству;

- Область допустимых значений бесконечное множество, то при решении уравнения (неравенства) используется либо функционально-графический метод, либо алгебраические методы.

Рассмотрим алгебраические методы решения уравнений и неравенств:

- метод тождественных преобразованиях (раскрытии скобок, освобождении от знаменателя, приведении подобных членов, возведении в натуральную степень обеих частей и т.д.);
- метод разложения на множители;
- метод введения вспомогательных неизвестных [13].

Заметим, что при решении уравнений и неравенств можно вместо нахождения ОДЗ, перейти к равносильной системе, которой одно из уравнений или неравенств не имеет решений, либо решение одного упрощает решение другого.

Далее рассмотрим основные определения, теоремы и утверждения, которые используют свойства ограниченности функции.

Определение 2. Функция $f(x)$ - ограниченна сверху (снизу) на множестве X, если найдется такое вещественное число M (число m), что для всех значений аргумента x из множества X справедливо неравенство $f(x) < M (f(x) < m)$.

При этом число M (число m) - верхняя (нижняя) грань функции $f(x)$ на множестве X.

Ограниченность функции легко найти с помощью ее графика: если функция ограничена снизу (сверху), то ее график целиком расположен выше (ниже) некоторой горизонтальной прямой y $(y = M)$.

Теорема 1. Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$,то она ограничена на этом отрезке.

Определение 3. Число m (M) - наименьшее (наибольшее) значение функции $y = f(x)$ на множестве X если:

- существует такая точка x_0, что $f(x_0) = m$;
- для всех x из множества X выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение 4. Точка $\boldsymbol{x = x_0}$ - точка минимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $\boldsymbol{x = x_0}$) выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение 5. Точка $\boldsymbol{x = x_0}$ - точка максимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $\boldsymbol{x = x_0}$) выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки максимума и минимума функции называют одним общим термином — точки экстремума.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $\boldsymbol{x = x_0}$, то в этой точке производная функции либо равна 0, либо не существует.

Теорема 3 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка некоторую точку $\boldsymbol{x = x_0}$. Тогда:

- если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при $\boldsymbol{x < x_0}$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $\boldsymbol{x > x_0}$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то $\boldsymbol{x = x_0}$ - точка минимума функции $y = f(x)$.
- если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при $\boldsymbol{x < x_0}$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $\boldsymbol{x > x_0}$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то $\boldsymbol{x = x_0}$ - точка максимума функции $y = f(x)$.

Теорема 4. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значения.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную точку экстремума $\boldsymbol{x = x_0}$. Тогда:

- если $x = x_0$ - точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;

- если $x = x_0$ – точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$;

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке $[a; b]$, нужно знать следующее правило:

- найти все точки, подозрительные на экстремум, которые лежат внутри данного отрезка. Для этого найти производную $f'(x)$, найти точки из интервала $(a; b)$, где $f(x)$ обращается в 0, и точки, где $f(x)$ не существует (критические или подозрительными на экстремум);
- вычислить значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах сегмента $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, а потом выбрать из них наибольшее (наименьшее) значение.

Для наиболее простого нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, стоит выделить два случая:

- если функция возрастает (убывает) на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, то ее наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах отрезка.
- если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, возрастает на $[a; x_0]$ и убывает на $[x_0; b]$ (рис. 1), то $f(x_0)$ является наибольшим значением функции на данном отрезке. Аналогичное замечание и для наименьшего значения (рис. 2).

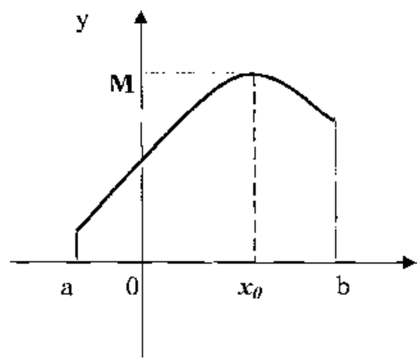


Рис.1 Нахождение наибольшего значения *f(x)*

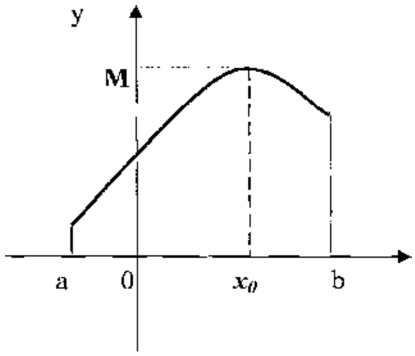


Рис.2 Нахождение наименьшего значения *f(x)*

Далее выделим ситуации, связывающие свойство ограниченности функции с числом решений уравнения (неравенства).

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$ (1), где $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные числовые функции, определенные на множествах X и Y.

Обозначим множество значений функций, входящих в уравнение (1) соответственно через $X(f)$ и $Y(g)$. Если X является решением уравнения (1), тогда справедливо числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$, где $f(x_0)$ - значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ и $g(x_0)$ - значение функции $g(x)$ при $x = x_0$.

Исходя из этого, делаем вывод, что если уравнение (1) имеет решения, то множество значений функций $f(x)$ и $g(x)$ должны иметь общие элементы. Но это только необходимое, но недостаточное условие.

Рассмотрим основные утверждения, которые можно использовать при решении уравнений и неравенств с применением свойства ограниченности функции.

- если в уравнении $f(x) = g(x) = 0$, то такое уравнение решений не имеет;
- если для любого x из множества X выполняются неравенства $f(x) \leq A, g(x) \geq A$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$. Иными словами, если $\max\limits_{x \epsilon X} f(x) = \min\limits_{x \epsilon X} g(x) = A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве X равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$;

- пусть требуется решить уравнение $f(x;y) = \varphi(x;y)$, где $(x;y)\epsilon X$. Если на множестве X выполняются неравенства $f(x;y) \leq A$, $\varphi(x;y) \geq A$, то на множестве X уравнение $f(x;y) = \varphi(x;y)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x;y) = A \\ \varphi(x;y) = A \end{cases}$.

Теперь обратимся к основам, касающимся к применению свойства монотонности функции для решения уравнений и неравенств.

Определение 6. Функция f - возрастающая (убывающая) на множестве X, если для любых x_1, x_2 из X, таких, что $x_1 > x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение 7. Функция f - нестрого возрастающая (нестрого убывающая) на множестве X, если для любых x_1, x_2 из X, таких, что $x_1 < x_2$ имеет место неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, $(f(x_1) > f(x_2))$.

Неубывающие и невозрастающие функции называют одним общим термином - монотонные функции, а возрастающие и убывающие функции - строго монотонные.

Теорема Лагранжа: Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Тогда сущесfтвует внутренняя точка C этого отрезка, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$.

Определение 8. Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ имеет область определения $\boldsymbol{X}$ и множество значений $\boldsymbol{Y}$. Пусть она обладает свойством: $\boldsymbol{f(x_1) \neq f(x_2)}$ для всех $\boldsymbol{x_1, x_2}$ из множества $\boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{(x_1 \neq x_2)}$. Тогда для любого $\boldsymbol{y}$ из множества $\boldsymbol{Y}$ можно поставить в соответствие только один элемент из множества $\boldsymbol{X}$, для которого $\boldsymbol{y = f(x)}$. Такая функция называется обратной функцией к $\boldsymbol{f(x)}$.

Область определения обратной функции совпадает с множеством значений изначальной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения изначальной функции.

Рассмотрим утверждения, используемые при решении уравнений и неравенств с применением свойства монотонности.

- пусть $f(x)$ - непрерывная и строго монотонная функция на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = C$, где C - данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке X;
- пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные на множестве X функции ($f(x)$ - строго возрастает, $g(x)$ - строго убывает на этом промежутке), тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке X.

Этот факт можно применить при решении неравенств: например, дано неравенство $f(x) < g(x)$, причем функция $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает. И пусть, при $x = a$, левая и правая части равны. Тогда данное неравенство справедливо для $x < a$, но при этом следует учесть область определения неравенства. Для наглядности можно построить графики функций $f(x)$ и $g(x)$;

- если функция $f(x)$строго возрастает (убывает) на R, то $f\big(h(x)\big) = F(g(x))$ равносильно уравнению $h(x) = g(x)$;
- если функция $f(x)$ определена и является возрастающей (убывающей) на своей области определении – промежутке M , то неравенство$f(h(x)) > f(g(x))$, $(f(h(x)) < f(g(x)))$ равносильно системе: $\begin{cases} h(x) > g(x) \\ e(h) \in M \\ e(g) \in M \end{cases}$ $\left(\begin{cases} h(x) < g(x) \\ e(h) \in M \\ e(g) \in M \end{cases}\right)$, где $e(h)$ и $e(g)$ – множество значений функции $h(x)$ и $g(x)$ соответственно;
- пусть на промежутке $(a; b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 - корень уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащей промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > g(x)$ - все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ - промежуток $(a; x_0)$;
- пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 - корень уравнения $f(x) = c$, принадлежащей промежутку $(a; b)$. Тогда

решение неравенства $f(x) > c$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < c$ - промежуток $(a; x_0)$.

В некоторых уравнениях и неравенствах легко подобрать корни, и при доказательстве того, что других корней уравнение или неравенство не имеет, применяют теорему Лагранжа.

Исходя из всего вышесказанного, можно сделать небольшой вывод, что во время обучения решению уравнений и неравенств ФГ методом стоит придерживаться конкретной схемы:

- разбор конкретного уравнения или неравенства, решаемого с помощью свойств функций;
- выделение четкого обоснованного приема решения данного уравнения или неравенства;
- изображение графика или эскиза графика функций из данного уравнения;
- определение корней уравнения или неравенства и доказательство того, что уравнение или неравенство не имеет решений.

Математические основы, включающие в себя теоретическую базу решения уравнений и неравенств ФГ методом, изучаются в курсах алгебры и начал математического анализа в 10-11 классах. Систематизация, обобщение, углубление и расширение знаний, умений и навыков обучающихся при решения уравнений и неравенств функционально-графическим методом, входящих в эти основы, происходит в процессе специальной методической подготовки.

Теоретическое исследование, посвященное обучению графическому методу решения уравнений и неравенств с использованием информационных технологий, позволило провести анализ учебной, методической и научной литературы, рассмотреть и проанализировать применение области определения функции, ограниченности и монотонности функции к решению уравнений и неравенств ФГ методом. Применение других свойств функции, а именно четности (нечетности) и периодичности способствует совершенствованию решений уравнений и неравенств. Также был охарактеризован сам графический метод решения уравнений и неравенств.

1.3 Характеристика графического метода решения уравнений и неравенств с использованием ИТК

Перед тем, как охарактеризовать функционально-графический метод, нужно обратиться к такому понятию, как «метод» и проанализировать некоторые замечания о функциях, которые используются в процессе обучения.

В дидактике средней школы метод интерпретируется как система поочередных действий, которые приводят к достижению результата, который соответствует намеченной цели. Данная последовательность действий может быть нацелена и теоретический результат, и на практическую реализацию. Отсюда следует, что метод является способом изучения новых знаний, так и способом практической деятельности. Оба способа всегда направлены на конкретный объект, поэтому его объект обязательно соответствует любому методу [14].

Л.С. Капкаева выделяет тот факт, что метод включает в себя две стороны: объективную и субъективную. Суть первой стороны заключается в приобретении общих знаний и закономерностей изучаемого объекта. Вторая сторона, в свою очередь, связана с применением метода, с целью деятельности над данным объектом [15].

Выделение в методе двух указанных сторон создает условия для решения вопроса о его компонентах. Здесь важно то, какая из сторон метода в противном случае является ведущей. Поэтому часть компонентов метода так или иначе связаны с объективной стороной (гносеологический компонент), а часть компонентов связана с субъективной стороной (деятельностный компонент). Сочетание этих компонентов и дает определение компонентов метода в широком смысле [16].

Объективная сторона метода связана с изучением сущности трансформированного объекта. Необходимое условие – определенные знания, без которых не может существовать изучаемый метод. Эти знания должны образовывать систему, включающую в себя:

- первоначальные знания об объекте, к которому применяется метод, его свойства (основные понятия, свойства понятий, связи между ними);
- приобретенные знания, полученные в ходе изучения объекта (изменение свойств объекта под влиянием действий над ним, установление неизвестных до этого свойств);
- знания о сфере, к которой относится данный метод (круг задач, решаемых с помощью данного метода, их виды и т.д.);
- знания об особенностях использования метода в зависимости от сферы приложения.

Все эти компоненты входят в гносеологическую сторону данного метода.

К деятельностным компонентам метода относятся:

- конкретная система действий, которая ведет к достижению результата, соответствующего поставленной цели;
- средства осуществления деятельности, основу которой составляет эта система действий (интеллектуальные, практические, предметные) [16].

Математические методы в процессе обучения, могут выступать как цель изучения, так и средство изучения нового материала. Не трудно догадаться, что конкретный метод может стать одним из средств изучения новых тем только тогда, когда обучающиеся умеют применять его для решения определенных практических задач. Следовательно, что во время формирования метода учитель и старшеклассники часто сталкиваются с необходимостью решения двух задач.

Решение первой задачи подразумевает усвоение обучающимися системы действий и тех гносеологических компонентов, без которых не могут выполняться деятельностные компоненты. Вторая задача может быть решена только тогда, когда у обучающиехся усвоятся гносеологические части метода, которые связаны с изучением новых свойств данного объекта, различных видов задач, их особенностей. Обучающиеся должны научиться выбирать метод, который целесообразно и удобней всего использовать во время решения конкретной задачи [17].

Решение, в общем, двух названных выше задач представляет собой долгий процесс, в котором нельзя четко выделить этапы решения конкретной задачи. Итогом всего процесса должно быть усвоение обучающимися математических методов на уровне применения, что предусмотрено программой для средней школы.

Г.И. Саранцев одним из первых предложил подход к решению первой из названных задач в методике обучения математике. Он рассматривал вопросы обучения решению задач разными методами, например, с помощью геометрических преобразований, векторным и координатным способами. Также он выделил в качестве основных компонентов методов - умения, которыми должны овладеть обучающийся [18]. Ими являются те действия, которые нужно выполнить в ходе осуществления метода.

Данная задача решается поэтапно. Выделяют пять этапов формирования метода решения задач.

- Подготовительный этап. На данном этапе происходит предварительное усвоение определенных знаний и умений, без которых нельзя овладеть конкретным методом.
- Мотивационный этап. Задачей данного этапа является убеждение обучающихся в необходимости овладения методом и добиться осознания ими того факта, что на последующих этапах целью их деятельности будет именно усвоение метода решения задач.
- Ориентировочный этап. На этом этапе следует разъяснить учащимся суть метода и выделить его основные термины, утверждения. Здесь целесообразно использовать задачи.
- Этап овладения отдельными компонентами метода. На данном этапе, учитель использует специальные упражнения для того, чтобы

организовать формирование конкретных компонентов метода через решение задач, требующих небольшого числа этих компонентов.

- Этап формирования метода в целом. Целью этого этапа является обобщение частных умений в единый метод, посредством использования задач, требующих, наоборот, применения большего количества компонентов метода [15].

Описанные выше этапы формирования метода в процессе обучения тесно связаны друг с другом, поэтому не желательно строго разделять задачи, используемые на каждом из этих этапов.

Исходя из вышесказанного, можно понять, что в нашем исследовании акцент полностью делается на этап овладения отдельными компонентами и на этап формирования метода.

Напомним, что под алгебраическими или стандартными методами решения уравнений и неравенств понимают:

- метод преобразований (раскрытие скобок, освобождение от знаменателя, приведение подобных членов, возведение в натуральную степень обеих частей и т.д.);
- метод разложения на множители;
- метод введения вспомогательных неизвестных [13].

В исследованиях таких авторов, как Г.В. Дорофеев, С.И. Мещерякова, А.Г. Мордкович, М.К. Потапов, нестандартный метод - это метод решения уравнений и неравенств, основанный на свойствах, входящих в них, функций. Следовательно, можем сделать небольшой вывод о том, что нестандартный метод является метод, основанная роль которого принадлежит свойствам функций (монотонность, четность, нечетность, периодичность и др.) при переходе к решению равносильным уравнениям и неравенствам.

С.И. Мещерякова, анализируя решения уравнений и неравенств нестандартными методами, выделила следующие требования. Обучающиеся должны уметь пользоваться всеми приемами решения уравнений и неравенств алгебраическими методами и уметь выполнять следующие действия:

- выполнять операции над функциями;
- определять структуру уравнения или неравенства, то есть выяснять, из каких функций и каким образом оно составлено;
- определять свойства, относящиеся к функциям из уравнения или неравенства (ограниченность, четность, монотонность, периодичность, выпуклость и т.д.), то есть исследовать функции;
- строить графики и эскизы графиков функций [20].

Дадим характеристику ФГ метода решения уравнений и неравенств и опишем возможности его использования в процессе обучения старшеклассников общеобразовательных учреждений. Для этого стоит выделить деятельностные и гносеологические компоненты указанного метода.

Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств — это метод, основанный на использовании свойств функций и их графических иллюстраций.

1. Гносеологический компонент ФГ метода включает в себя:

- знания о решении отдельных видов уравнений, неравенств и их конструкций алгебраическими методами;
- знания о выполнении операций над функциями;
- знания о построении графиков различных элементарных функций, в том числе с применением компьютерных технологий;
- знания о свойствах функций и их применении при решении уравнений и неравенств;
- знания о возможности решения уравнений и неравенств на базе использования свойств функций.

Деятельностный компонент ФГ метода подразумевает проведение следующих действий:

- выполнение операций, соответствующих приемам решения уравнений и неравенств, прибегая к алгебраическим методам.
- выполнение операций над функциями;
- построение графиков и эскизов графиков функций с применением компьютерных технологий;
- определение структуры уравнения и неравенства: выяснение, из каких функций и каким образом они составлены;
- исследование функции;
- решение уравнений и неравенств, применяя отдельные свойства элементарных функций;
- решение уравнений и неравенств повышенной сложности.

Целями обучения школьников ФГ методу решения уравнений и неравенств можно обозначить:

- усвоение обучающимися математических знаний;
- развитие логического, аналитического и творческого мышления;
- воспитание у обучающихся настойчивости в преодолении определенных трудностей, самостоятельности, достижения поставленных целей, умение находить пути выхода из нестандартных ситуаций;
- овладение компьютерными технологиями;
- обеспечение математического и профессионального развития личности выпускника школы.

Осуществление возможностей усвоения старшеклассниками ФГ метода связана с определением трех задач. Суть первой задачи заключается в том, чтобы добиться понимания сути метода и владения способами его применения. Вторая задача включает в себя обучение применения ФГ метода для решения уравнений и неравенств. Третья, и самая основная, задача говорит о том, что обучающиеся должны сами научиться пользоваться ФГ методом при решении уравнений и неравенств.

Эти задачи должны быть целью деятельности и учителя, и обучающихся. Решение вышеуказанных задач разбивает процесс формирования ФГ метода на следующие этапы:

- Подготовительный этап. На данном этапе формируются следующие действия, которые реализуют ФГ метод решения уравнений и неравенств: выполнение операций над функциями, построение графиков функций с применением компьютерных технологий.

Здесь же происходит обобщение, расширение и углубление знаний обучающихся по следующим темам: «Числовые функции и их свойства», «Построение графиков функций различными способами», «Решение уравнений и неравенств алгебраическим методом».

- Этап решения уравнений и неравенств с применением отдельных свойств функций. Этот этап подразумевает решение задач повышенной сложности, то есть применение отдельных свойств функций, таких как области определения, ограниченности, монотонности, четности и нечетности, периодичности, при решении уравнений и неравенств. На данном этапе формируются действия, входящие в состав ФГ метода решения уравнений и неравенств: определение структуры уравнения и неравенства; исследование функции; решение уравнений и неравенств, применяя отдельные свойства элементарных функций.

- Этап выбора метода решения уравнений и неравенств повышенной сложности. Целью данного этапа служит овладение обучающимися ФГ методом в процессе решения уравнений и неравенств повышенной сложности.

Подготовка обучающихся использует для изучения ФГ метода как традиционные (учебники, методические материалы, справочная литература), так и инновационные (мультимедийный проектор, интерактивная доска, презентации и специальные математические программы, например, математические пакеты MathCad, Maple, Graph Master и др.) средства.

Основными формами обучения старшеклассников ФГ методу являются как аудиторные (лекции, практические и лабораторные занятия в компьютерных классах), так и внеаудиторные (самостоятельная работа) занятия.

Применение инновационных форм и средств обучения способствует развитию интереса и повышению мотивации к учебной и профессиональной деятельности, дифференциации и индивидуализации обучения.

Таким образом, делаем вывод, что овладение функционально-графическим методом решения уравнений и неравенств выполняется через обучение школьников отдельным приемам и системе действий в целом, относящихся к данному методу. Так же для повышения мотивации обучающихся в систему обучения графическому методу решения задач стоит включать инновационные технологии, так как в настоящее время компьютерные технологии инрают важную роль не только в системе образования, но и в жизни любого человека в целом.

Итак, в данном параграфе характеризуется: функционально-графический метод решения уравнений и неравенств, его деятельностный и гносеологический компоненты.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТК

2.1 Методические особенности обучения решению уравнений и неравенств с использованием ИТК

В данном параграфе будут рассмотрены методические особенности подготовки к обучению и самого обучения учащихся решению уравнений и неравенств графическим методом, при этом прибегая к информационным технологиям.

Для начала выделим два этапа формирования функционально-графического метода решения уравнений и неравенств:

- Этап решения уравнений и неравенств, применeняя отдельные свойства функции;
- Этап выбора метода решения уравнений и неравенств повышенной сложности.

На первом этапе обучающиеся знакомятся с применением свойств функций при решении уравнений и неравенств ФГ методом. Обучение на этом этапе должно проходить по следующей схеме:

1. Раскрытие теоретической базы применения отдельных свойств функций при решении уравнений и неравенств;
2. Выделение частный прием применения отдельного свойства функции при решении уравнений и неравенств;
3. Разобрать совокупность задач для применения отдельного свойства функции при решении уравнений и неравенств;
4. Подбор упражнений для самостоятельной работы.

Теоретическую часть можно представить в виде лекций, разработанных специально для лучшего понимания ФГ метода. Эти лекции должны сопровождаться компьютерными презентациями с наглядными графиками, алгоритмомрешения уравнений или неравенств. Совокупность задач была разработана специально для работы как в классе, так и для самостоятельной работы обучающихся (приложение 1).

Что касается компьютерной поддержки, используются компьютерные презентации, описывающие максимально понятно и четко, теоретическую основу графического метода. Для изображения графиков или эскизов графиков мы обращаемся к помощи информационных технологий. Так, например, с возможностями математического пакета MathCad, можно без затруднений изобразить графики сложных функций (рис.1,2).

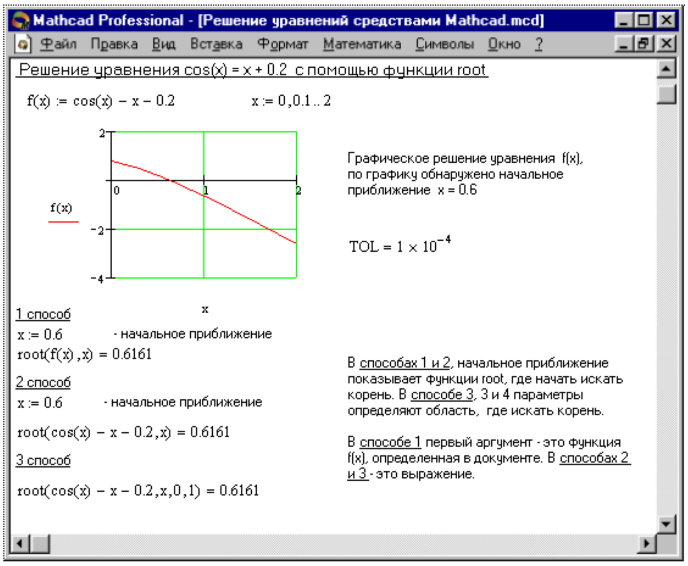


Рис.1 «Решение уравнения в программе MathCad»

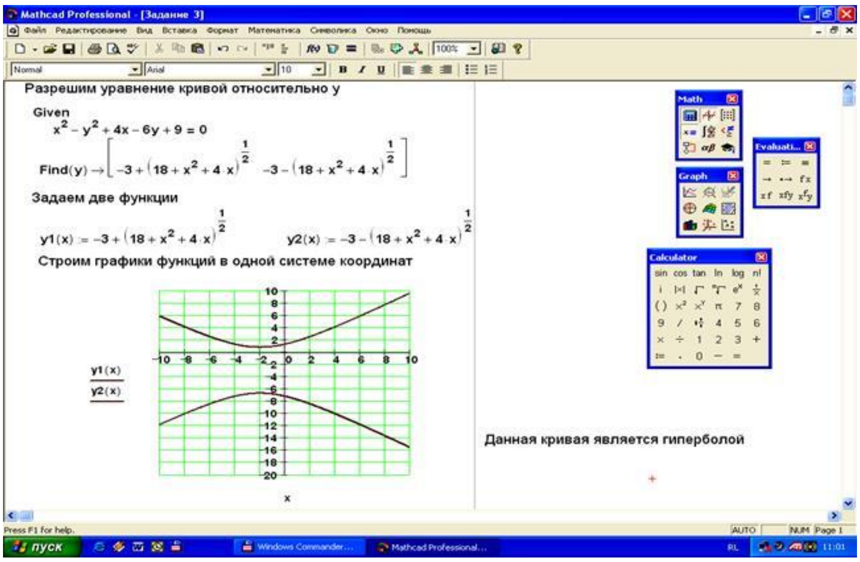


Рис.2 «Решение уравнения в MathCad»

Так же, в качестве компьютерных программ, помогающих изображать графики функций, можно использовать следующие программы: Maple, Graph Master.

Программное обеспечение Graph Master простое в применении, в отличие от программы MathCad, поэтому построение графиков не составит большого труда для обучающихся. Следовательно, можно сделать вывод, что для наглядного решения уравнений и неравенств можно использовать Graph Master.

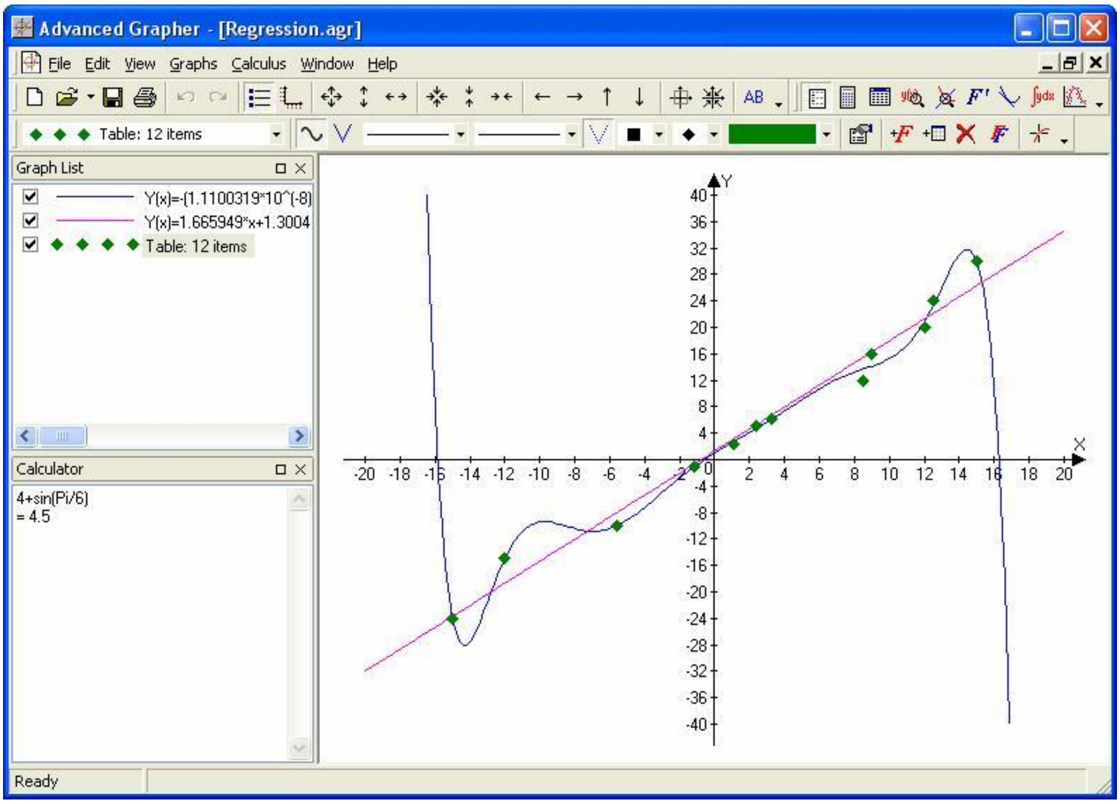


Рис.3 «Построение график функции в Graph Master»

На втором этапе формируется умение решать уравнения и неравенства повышенной сложности. В них входят уравнения и неравенства с параметром. Компьютерная помощь в таких заданиях заключается также в презентациях с теоретическими основами решения уравнений и неравенств

ФГ методом.

После изучения обучающимися применения отдельных свойств функций к решению уравнений и неравенств, анализа видов уравнений и неравенств, рассматриваемых в процессе учебной деятельности, обучающиеся, как правило, формулируют приемы решения уравнений и неравенств ФГ методом и другие виды и способы решения таких задач.

Система задач повышенной сложности (уравнения и неравенства с параметром) представлена в приложении 2.

2.2 Приемы решения уравнений неравенств графическим методом

В данном параграфе представляются приемы решения уравнений и неравенств с помощью графического метода. Первый прием, который подвергнется рассмотрению – использование областей существования функции, то есть области определения и области допустимых значений.

Наиболее часто в решении уравнений и неравенств используют область допустимых значений (ОДЗ). Этот прием помогает нам избавиться от так называемого лишнего (неверного) корня. Такие уравнения и неравенства часто сводятся к решению равносильным им системам.

Пример 1. Решить уравнение $(x-3)^{\frac{1}{3}}+6=\sqrt{15-2x-x^2}+2x$.

Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ 15-2x-x^2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ -(x-3)(x+5)\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ -5\leq x\leq 3 \end{cases}$$

ОДЗ состоит из одного числа 3. Далее проверим, является ли число 3 решением данного уравнения:

$$(3-3)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{15-2\cdot 3-3^2}+2\cdot 3$$

$$6=6\Longrightarrow x=3$$

Отсюда делаем вывод, что $x=3$ является корнем уравнения.

Ответ: $x=3$

Далее рассмотрим использование области определения функции при решении уравнений и неравенств. Это прием используют обычно при решении уравнений, состоящих из функций с ограниченной областью определения, такие как логарифмические, иррациональные и др.

Пример 2. Решить уравнение $arccosx=\sqrt{x-1}$

Уравнение является уравнением вида $f(x)=g(x)$; $f(x)=arccosx,$

$g(x) = \sqrt{x-1}$. Находим области определения каждой функции: $D(f) = [-1; 1], D(g) = [1; +\infty)$. Объединение областей определения составляет единственное число 1.

Поэтому проверим, является ли число 1 корнем уравнения:

$$arccos1 = \sqrt{1-1}$$

$$0 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Отсюда делаем вывод, что $x = 1$ является корнем уравнения.

Ответ: $x = 1$

Использование монотонности функции разберем в следующем примере.

Пример 3. Решить уравнение $2arcsin2x = 3arccosx$ (1).

Уравнение является уравнением вида $f(x) = g(x)$. Первая функция возрастает на своей области определения, а вторая – убывает. Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня.

Заметим, что $x = 0{,}5$ является корнем уравнения.

Ответ: $x = 0{,}5$

Свойство ограниченности функции также может помочь найти корни уравнения, а так же доказать, что корни не существуют. Обычно данный прием используют в том случае, когда в левой и правой частях уравнения находятся функции разной природы.

Пример 4. Решить уравнение $2^x + \frac{\pi}{2} = arctgx$

Уравнение является уравнением вида $f(x) = g(x)$. ОДЗ для первой функции равно $(\frac{\pi}{2}; +\infty)$, а для второй – $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Объединение областей допустимых значений составляет пустое множество. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Перейдем к рассмотрению решения уравнений и неравенств повышенной сложности, а именно уравнения и неравенства с параметром. Задания такого типа будем решать, использовав ФГ метод. Приведем пример.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2^{x^2-2x}\log_3(x^2-2x+3)+2^{x^2-2x}\log_3(2|x-a|+2)=0$ имеет ровно три корня.

Очевидно, будем использовать функционально-графический метод.

$$2^{x^2-2x}\log_3(x^2-2x+3)=2^{x^2-2x}\log_3(2|x-a|+2)$$

Сделаем замену: $t=x^2-2x, h=2|x-a|-1$

Получим уравнение: $2^t\log_3(t+3)=2^t\log_3(h+3)$ (1)

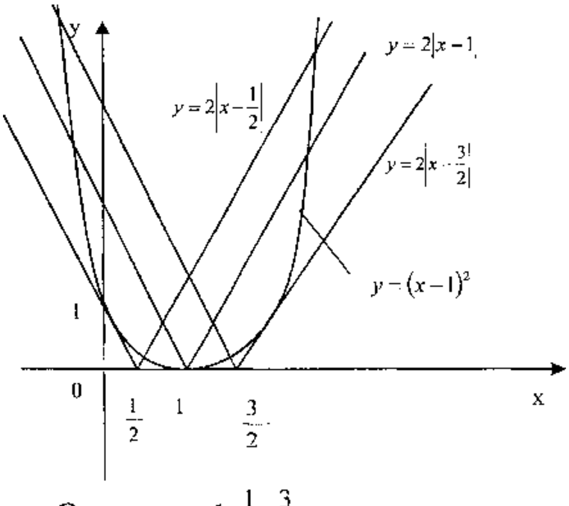
Функция $f\big(g(x,a)\big)=2^t\,log_3(t+3)$монотонно возрастает при $t>-3$, поэтому от уравнения (1) можно перейти к равносильному:

$$x^2-2x=2|x-a|-1$$

$$(x-1)^2=2|x-a|$$

Построим график функции $y=(x-1)^2$ и $y=2|x-a|$.

В соответствии с дополнительным условием, найдем те значения параметра, при которых уравнение имеет три корня (рис.4).



Ответ: $a=1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}$.

Рис. 4 «Корни уравнения»

Таким образом, можно сделать вывод, что приемы решения уравнений и неравенств с помощью графического метода позволяют осуществить переход от знаний к умениям, указывают на способы действий, которые, в свою очередь, раскрывают приемы мышления, такие как анализ, синтез, обобщение и др.

2.3 Контролирующий тест на тему «Решение уравнения и неравенств графическим методом»

Процесс обучения школьников решению уравнений и неравенств графическим методом можно анализировать с помощью контролирующих тестов по теме. Они являются средством наблюдения за знаниями, которые получают обучающиеся во время обучения. В качестве информационных ресурсов можно прибегнуть к программе Hot Potatoes, для составления тестовых заданий в виде нестандартной подачи, например, кроссворд. Такие задания развивают творческие способности обучающихся, вызывают интерес к данной работе, повышают мотивационную составляющую мышления школьников, способствует развитию логического мышления обучающихся.

Приведем в качестве примера один из вариантов теста, предлагаемый старшеклассникам в рамках их самостоятельной работы (приложение 4).

Вариант 1

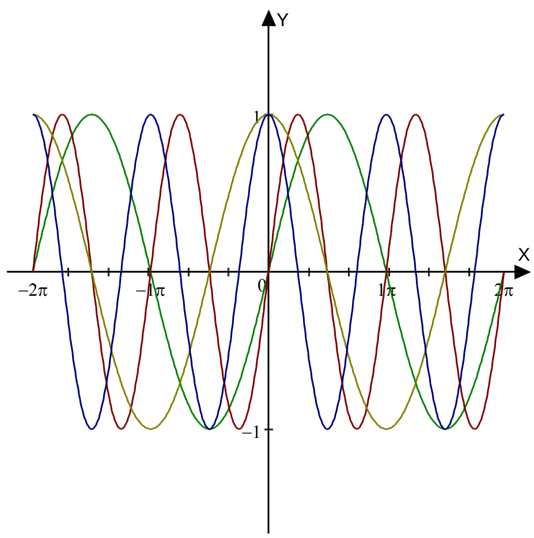
1. Определить цвет графика функции, заданной формулой:

- $y = sinx$,

  $y = cosx$,

  $y = sin2x$,

  $y = cos2x$.

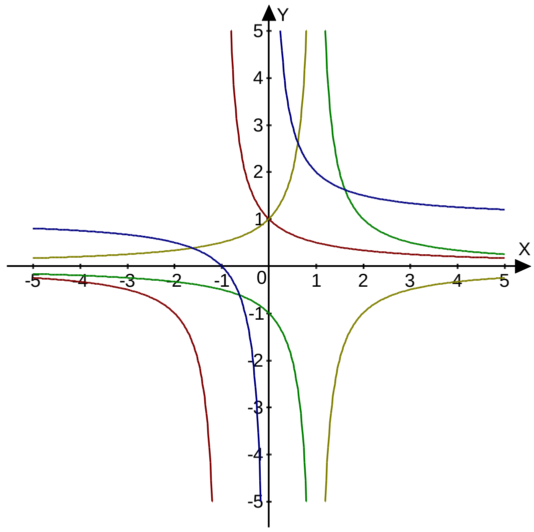


- $y = x^2+2x$,

  $y = x^2+2x+2$,

  $y = x^2+4x+3$

  $y = x^2-1$.



2. Кроссворд «Функции и их свойства»

- множество, на котором задаётся функция. В каждой точке этого множества значение функции должно быть определено - область <u>определения</u> функции.
- множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция – область <u>допустимых</u> значений функции.
- если все значения функции на множестве X больше (меньше) некоторого числа, то функцию называют <u>ограниченной</u> снизу (сверху).
- функция, которая всё время либо не убывает, либо не возрастает – <u>монотонная</u> функция.
- функция, симметричная оси ординат – <u>четная</u> функция.
- функция, повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал аргумента – <u>периодичная</u> функция.
- функция, симметричная началу координат – <u>нечетная</u> функция.

3. Решить уравнения и выбрать правильный ответ:

- $arccosx = \sqrt{x-1}$

Варианты ответов:

$\underline{x = 1}$, $x = 7$

решений нет, $x = -0{,}5$

- $2arcsin2x = 2arccosx$

Варианты ответов:

$x = 36$	$\underline{x = 0{,}5}$
решений нет	$x = -1$

Данный тест является одним из вариантов как контролирования, так и обобщения нового материала, получаемого школьниками по теме «Графический метод решения уравнений и неравенств». Результатом должно стать повышение знаний обучающихся по вышеуказанной теме, использование данного метода в решении заданий из Единого Государственного Экзамена, потому что для старшеклассников результаты данного экзамена являются важным аспектом для планирования своей будущего обучения или карьеры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно сделать вывод, что современное школьное образование в старших классах дает возможность обучающимся самостоятельно выбрать направление подготовки в различных областях наук. Это все основы и принципы дифференцированного обучения. Таким образом, старшеклассники сами выбирают интересующий их профиль, одним из которых является математический.

В ходе изучения проблематики обучения графическому методу решения уравнений и неравенств с использованием ИТК в рамках теоретического исследования был произведен анализ научной и школьной литературы по проблеме исследования, был охарактеризован функционально-графический метод решения уравнений и неравенств с использованием ИТК, рассмотрены математические основы графического метода.

В рамках практической части выпускной квалификационной работы, можно отметить, что поделанная работа была разделена на три части.

В первом параграфе были рассмотрены и аргументированы методические особенности обучения решению уравнений и неравенств с использованием ИТК, проанализирован и сформирован перечень типовых заданий по проблеме исследования.

Во втором параграфе были представлены приемы решения уравнений и неравенств графическим методом, приведены развернутые примеры решенных уравнений с помощью обобщенных приемов.

Третий параграф посвящен разработке контролирующего теста по теме исследования, прибегая к использованию программы Hot Potatoes.

Подводя общий итог, можно отметить, что поставленные перед началом работы задачи были успешно выполнены, а именно:

1. Проанализирована учебно-методическая и научная литература по проблеме исследования.

2. Рассмотрены характеристики графического метода решения уравнений и неравенств с использованием ИТК.

3. Аргументированы и рассмотрены методические особенности обучения решению уравнений и неравенств графическим методом.

4. Разработан контролирующий тест на тему: «Решение уравнений и неравенств графическим методом».

Посредством решения данных задач, была достигнута цель, поставленная перед началом исследования, а именно изучена теоретическая база графического метода решения уравнений и неравенств, применены информационные технологии для обучения графическому методу.

Материалы данной выпускной квалификационной работы могут быть использованы учителями математики для внедрения в практики школ, а так же студентами-практикантами для подготовки проведения занятий в рамках дополнительных занятий или элективных курсов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений [текст] / А.Н.Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю.П. Дудницын. – Москва: Просвещение, 2018. – 324 с.

2. Никольский, С.М. Алгебра и начала анализа: учебник для 11 кл. общеобразоват. учреждений [текст] / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2017. – 464 с.

3. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов средней школы [текст] / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – Москва: Просвещение, 2012. – 464 с.

4. Мордкович, А.Г. Математика 11 класс: учебник для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень) [текст] / А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова. – Москва: Мнемозина, 2013. − 416 с.

5. Муравин, Г. К. Алгебра и начала анализа. 11 кл.: учебник для общеобразоват. Учреждений [текст] / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2013. – 253 с.

6. Капкаева, Л. С. Алгебраический и геометрический методы в школьном курсе математики как способы познавательной деятельности учащихся [текст] / Л. С. Капкаева. - Гуманитарные науки и образование. – 2012. – 18-22 с.

7. Мещерякова, С. И. Нестандартные методы решения уравнений и других задач в углубленном курсе математики [текст] / С.И. Мещерякова. – Саранск, 1997. – 182 с.

8. Садыкова, Л. К. Свойства функций при решении нестандартных уравнений и неравенств: методическая разработка по курсам элементарной математики и методики преподавания математики [текст] / Л.К. Садыкова, Н.С. Новичкова. – Самара: Изд-во СГПУ, 2005. – 90 с.

9. Эрдниев, П.М. Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц: книга для учителя [текст] / П.М. Эрдниев, Б.П.

Эрдниев. — Москва: АО «Столетие», 2012. - 320 с.

10. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учебное пособие для 10 класса средней школы [текст] / И.Ф. Шарыгин. — Москва: Просвещение, 2010. - 252 с.

11. Чучаев, И.И. Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений: учебное пособие [текст] / И.И. Чучаев. - Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2001. - 168с.

12. Горнштейн, П.П. Задачи с параметрами [текст] / П.П. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. - Москва: Илекса, 2003. — 336 с.

13. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учебное пособие для средней школы [текст] / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. - Москва: Просвещение, 2010. — 384 с.

14. Скаткин, М.Н. Дидактика средней школы. Некоторые проблемы современной дидактики. Учебное пособие для слушателей ФПК,. директоров общеобразовательных школ и в качестве учебного пособия по спецкурсу для студентов пед.институтов: Сборник [текст] / М.Н. Скаткин. - Москва: Просвещение, 2011. – 319 с.

15. Капкаева, Л.С. Интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании: Монография [текст] / Л.С. Капкаева. - Саранск, 2004. - 287 с.

16. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [текст] / Е.И.Лященко. - Москва: Просвещение, 2011. – 223 с.

17. Саранцев, Г.И. Методическая подготовка учителя в педвузе [текст] / Г.И. Саранцев. – Москва: Педагогика. - 2006.- с. 61-68.

18. Саранцев, Г.И. О методике решения планиметрических задач. Преподавание геометрии в 6-8 классах / Г.И. Саранцев. — Москва: Просвещение, 2012. — с. 84-125.

19. Мещерякова, С.И. Нестандартные методы решения - уравнений и других задач в углубленном курсе математики [текст] / Мещерякова С. И.

- Саранск, 1997. - 182 с.
20. Шахмейстер, А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами [текст] / А.Х. Шахмейстер. – С.Петербург: Петроглиф, 2006. – 306 с.
21. Чирский, В.Г. Уравнения элементарной математики. Методы решения [текст] / В.Г. Чирский., В.Г. Шавгулидзе. – Москва: Наука, 1992. 176 с.
22. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические аспекты основы обучения математике в школе: учителю математики о психологии [текст] / Л.М.Фридман. – Москва: Просвещение, 1983. – 16 с.
23. Сергеев, И.Н. ЕГЭ 1000 задач с ответами и решениями, математика [текст] / И.Н.Сергеев, В.С. Панферов. – Москва: Экзамен, 2017. – 26 с.
24. Ященко, И.В. Математика ЕГЭ: типовые тестовые задания [текст] / И.В. Ященко. – Москва, 2019. – 33 с.
25. Столяр, А.А. Педагогика математики [текст] / А.А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1998. – 413 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

«Применение отдельных свойств элементарных функций при решении уравнений и неравенств функционально-графическим методом»

Свойства элементарных функций, применяемые при решении уравнений и неравенств функционально-графическим методом	Перечень задач для формирования умения решать уравнения и неравенства с применением отдельных свойств элементарных функций
Область определения функции	Задача №1: Решить уравнение (неравенство) с применением области определения всех входящих в них функций: 1. $arccos\ x = \sqrt{x-1}$ 2. $3\sqrt{x^2-81} = 27 + 3x - 5\sqrt{72 - x^2 - x}$ 3. $\arccos x = -\sqrt{\lvert x\rvert - 1} + \pi$ 4. $\sqrt{3-x} > \log_5(x-3)$ 5. $\sqrt{\sin x} < \sqrt{1 - \lvert x\rvert + \sin x}$ Задача №2: Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 2$ разными методами: 1. Возведением в квадрат; 2. Переходом к системе уравнений через введение новых переменных; 3. С применением свойства области определения функции, стоящей в левой части данного уравнения. Данное задание показывает изящность и красоту применения функционально-графического метода, что будет способствовать эстетическому воспитанию обучающихся.

Ограниченность функции	Задача №1: Решить уравнение (неравенство) с использованием свойства ограниченности: 1. $cosx > 1 + 2x$ 2. $\log_2(3 + 2x - x^2) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ 3. $cos^2(x \sin x) = 1 + \log_2 \sqrt{x^2 + x + 1}$ 4. $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 2x$ 5. $\log_2(x - x^2) = \sin x - 2$ Задача №2: Можно ли уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$ решить, применив свойство области определения и множество значений функции?
Монотонность функции	Задача №1. Решите уравнение (неравенство) с применением свойства монотонности функции, приводя уравнение к виду *f(x)* = *C* (неравенство к виду *f(x)* < *C*), где функция *f(x)* - строго монотонная функция в области определения. Или к виду *f(x)* = *g(x)*, где *f(x)* - строго возрастающая функция, а *g(x)* - строго убывающая в области определения. 1. $2^x + 3^x + 4^x < 3$ 2. $2^x > 11 - x$ 3. $\sqrt{2x} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{4-3x} + \sqrt{1-x}$ 4. $x^2 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$ Задача №2: Решите уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = 5$ разными методами: 1. Двукратным возведением в квадрат; 2. С применением свойства монотонности функции, стоящей в левой части уравнения. Задача №3: Решите уравнение $x^3 + 3x - 4 = 0$ разными методами: 1. Разложением на множители; 2. С применением свойства монотонности функции, стоящей в левой части уравнения. Задача №4: При каких положительных значениях *x* функция $f(x) = 54x - \|x - 19\|$ принимает значение 23?

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

«Система задач для формирования у старшеклассников умения решать уравнения и неравенства с параметром»

Примеры равнений и неравенств с параметром
1. Сколько корней имеет уравнение $\|x^2 - 2x - 3\| = a$ в зависимости от значений параметра a?   2. Сколько корней имеет уравнение $4x + a = \log_2(x - 2a)$ в зависимости от значений параметра a, при решении сделать замену $t = x - 2a$?   3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} \|x\| + \|y\| = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ в зависимости от параметра a?   4. При всех a решить уравнение $\|x - 2\| + a\|x + 3\| = 5$?   5. Для каждого действительного значения параметра a решить неравенство $\log_a x + \log_0(x - 2) > 1$.   6. Решить уравнение $\sqrt{3x - 2} = x + a$.   7. Решить уравнение $\|x - 1\| + \|x - 3\| = a$. Покажите графический метод решения данного уравнения.   8. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 + x + a = 0$ действительны и больше a?   9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 4x - 2\|x - a\| + 2 + a = 0$ имеет ровно два различных решения.   10. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $2sin^2 5x + (a^2 + 3)sin5x - a^2 = 0$ имеет ровно 3 корня.   11. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $3 - \|x - a\| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

12. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $-5+5a+sin^2x+a(3-cosx)^2>0$ выполняется при всех x?

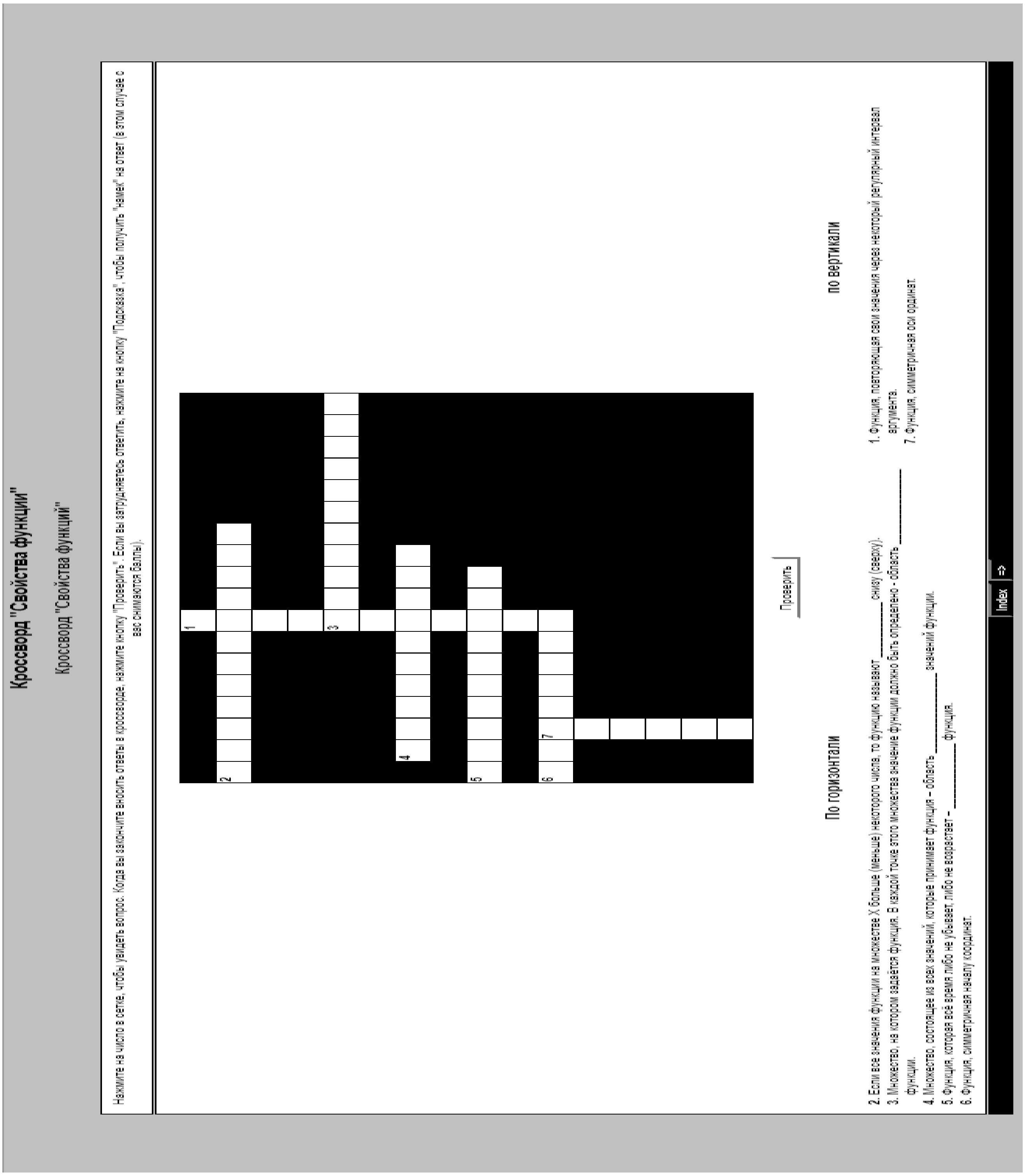
13. Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $|ax+3|x|-5|<1$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 10 и при этом содержится в некотором отрезке длиной 20.

14. При каких значениях параметра a неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет положительные решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

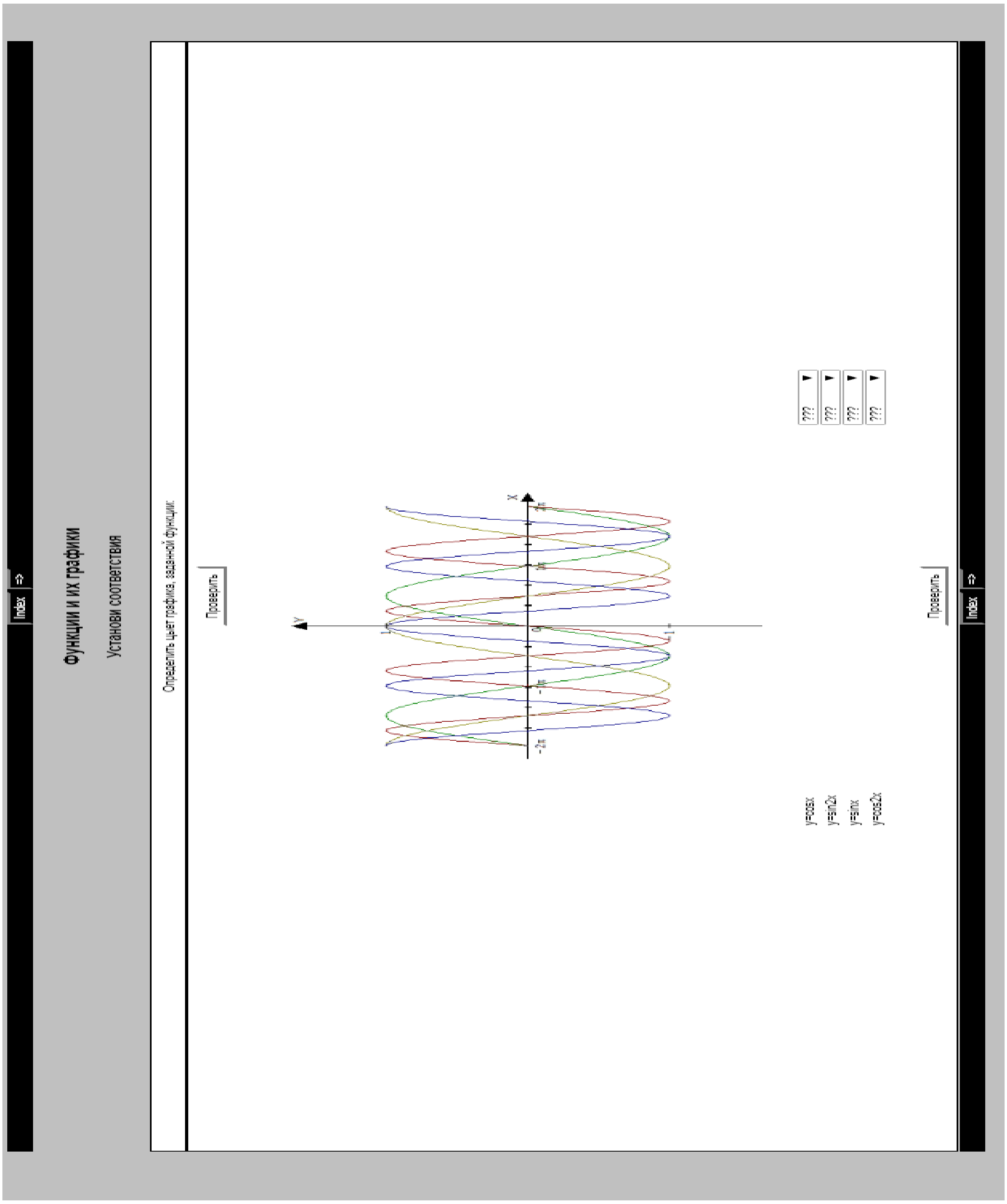
«Контролирующий тест в программе Hot Potatoes»

Задание 1: Кроссворд «Функции и их свойства»

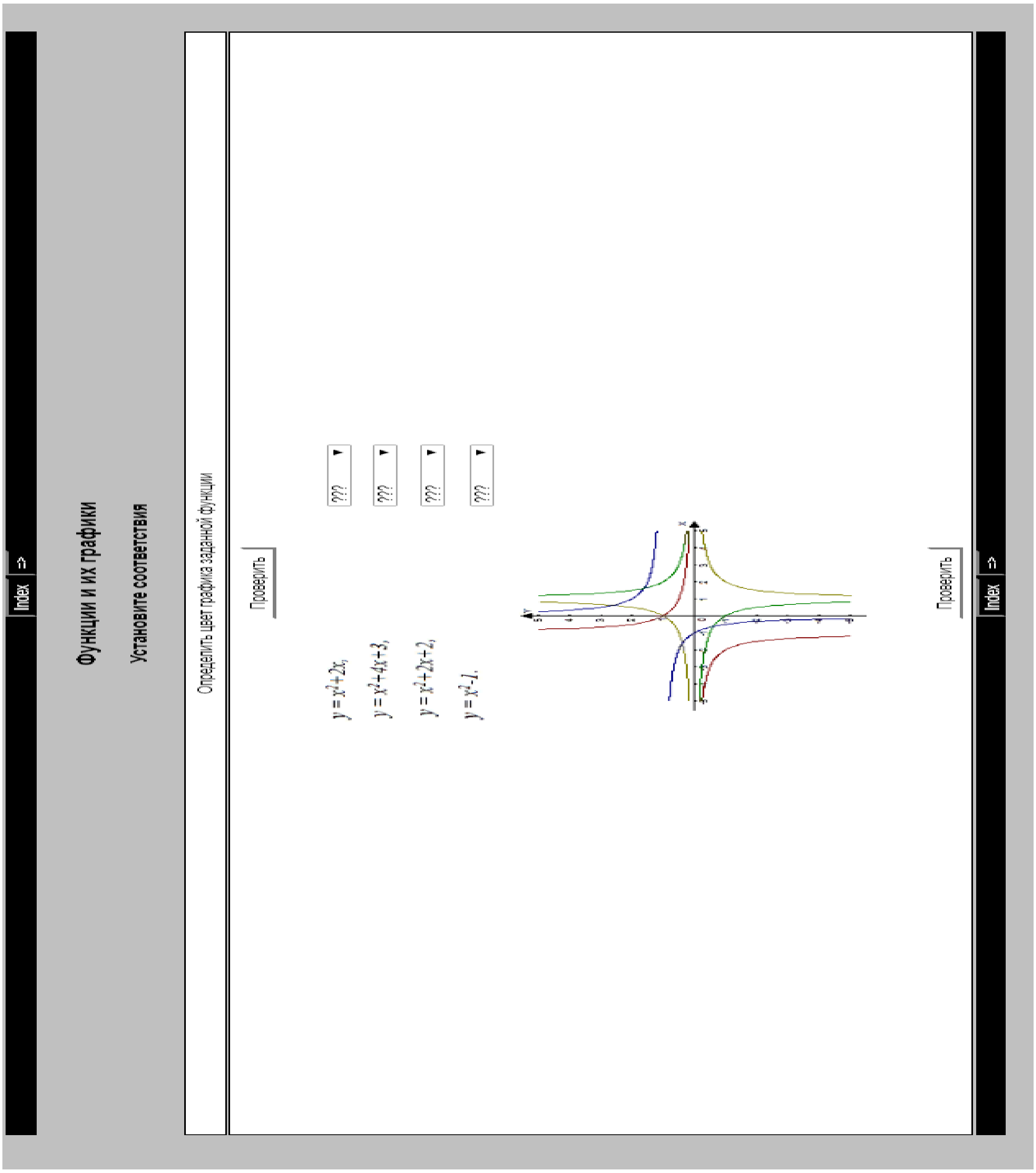


Задание 2: «Установи соответствие»

1.



2.


Index ⇒
Функции и их графики
Установите соответствия
Определить цвет графика заданной функции
Проверить
y = x2+2x,
y = x2+4x+3,
y = x2+2x+2,
y = x2-1.
???
???
???
???
Проверить
Index ⇒

Задание 3: «Решить уравнения и выбрать правильные ответы»