ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика,
заочной формы обучения, группы 02041451
Жуковой Натальи Дмитриевны

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
Есин В.А.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. На сегодняшний день роль образования меняется. Оно становится функцией, средством управления. Роль образования определяется динамикой развития, резким усложнением проблем. На основании этого, перед школой стоит задача, которая заключается в достижении двух главных целей образования: воспитание личности, которая способная адаптироваться в быстро меняющихся условиях, и личности, которая способна, в тоже время, менять эти самые условия. Именно поэтому, главные направления работы школы это создание условий для развития интеллекта и формирование творческих качеств личности обучающихся.

Одной из главных целей математического образования в области выделенных направлений является формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики. Школьная математика отражает в своем содержании современное состояние математической науки, что предопределяет выделение в ее содержании систем взаимосвязанных знаний, образующих единую определенную целостность.

В данной работе предпринята попытка осветить тему изучения логарифмических уравнений в школьном курсе математики. На наш взгляд, данная тема занимает большое место в школьной программе по математике, ей уделяется много времени. В процессе изучения этого раздела систематизируют, обобщают и углубляют знания о степени и корнях и их свойствах, усваивают понятие логарифмической функции, её свойствах и графиках, выполняют тождественные преобразования выражений, решают уравнения и неравенства и их системы.

Так же изучение логарифмических уравнений представляет собой самостоятельный познавательный интерес, т.к. различное количество видов и типов данных уравнений даёт многочисленные методы и способы нахождения корней уравнения.

Рассматривая тему «логарифмические уравнения», учащиеся получают представление о широте алгебраического спектра и многообразии математических моделей, применении уравнений в различных областях знаний; знакомятся с некоторыми фактами развития логарифмического исчисления, учатся проводить аналогии между иррациональными и показательными уравнениями.

Изучением темы «Логарифмы» в разные периоды времени занимались многие ученые математики (Д. Непер, Г. Бригс, В.М. Брадис, Н. Меркатор, И. Бюрги, Л. Эйлер).

Логарифмические уравнения предлагаются в заданиях типа 5, 10 (задачи с прикладным содержанием), С1 Единого государственного экзамена и в дальнейшем обучении в вузах. Результаты прошлых лет показывают, что учащиеся при выполнении заданий такого типа допускают ошибки. Причина этому - недостаточное количество часов для изучения и отработки данной темы. В школьном курсе математики отведено мало учебного времени - 4 часа, так как эта тема изучается практически в конце 11 класса. Именно поэтому учащиеся под руководством учителя самостоятельно дорабатывают материал.

Таким образом, выше сказанное определило актуальность проблемы нашей работы, которая состоит в его разрешении посредством обоснованной разработки методических рекомендаций по обучению учащихся решению логарифмических уравнений в школьном курсе математики средней школы.

Цель исследования: выявить теоретико-методические условия изучения логарифмических уравнений и разработать научно обоснованные методические рекомендации по обучению учащихся этой теме.

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: методическая система обучения учащихся решению логарифмических уравнений.

Для достижения поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы необходимо было решить следующие **задачи:**

1. Провести анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы по проблеме исследования с целью выявления условий успешного овладения школьниками методов решения уравнений;

2. Провести анализ программных документов, школьных учебников, пособий по подготовке к ЕГЭ по теме «Логарифмические уравнения»;

3. Провести разбор заданий ЕГЭ по математике по теме «Логарифмические уравнения»;

4. Разработать методические рекомендации для успешного овладения учащимися методов логарифмических уравнений;

5.Провести опытную работу.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**:

- изучения и анализ литературы по исследуемой проблеме;

-беседа с учителями математики в старших классах общеобразовательной школы;

- тестирование учащихся;

- опытная работа.

Методологической основой исследования послужили: концепция развивающего обучения (В.В. Давыдова, Д.Б. Эльконина); теория развивающего обучения И.С. Якиманской, основные положения деятельностного подхода.

База исследования: апробация основных положений и результатов исследования осуществлялась автором в личном опыте работы с учащимися 11 класса МБОУ «Вознесеновская средняя общеобразовательная школа» Ивнянского района Белгородской области в период прохождения преддипломной практики.

Практическая значимость исследования: данную работу можно использовать учителям математики как методическое пособие в работе с учащимися средней школы.

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. История возникновения понятия «логарифм». Различные подходы к определению понятия логарифма в математике

Своё начало история логарифмов берёт ещё с античных времён. Источник, ставший идейным толчком применения логарифмов, - давно известный факт, что при перемножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются: $b^a \cdot b^c = b^{a+c}$.

В VIII веке индийский математик Вирасена при исследовании степенных зависимостей, опубликовал таблицу целочисленных показателей для оснований 2, 3, 4. Эта работа в дальнейшем послужила первоисточником для создания таблицы логарифмов.

Главные работы и открытия в области изучения логарифмов были сделаны в средневековой Европе. В тот период времени быстро возросла потребность в сложных расчётах. ВXVI веке большая часть трудностей в вычислениях была связана с умножением и делением многозначных чисел, возведением в степень, а также извлечением корней. Идея упрощения вычислений появилась в конце века. Её суть состояла в замене трудоёмкого умножения на простое сложение. Идея основывалась на сопоставлении геометрической и арифметической прогрессий с помощью специальных таблиц, причём геометрическая прогрессия являлась исходной. Соответственно, и деление заменилось на более простое вычитание. Также упростилась работа со степенью и извлечением корня [10].

Такой метод вычислений впервые был опубликован в 1544 году в книге «Arithmetica integra» Михаэлем Штифелем. К сожалению, ему не удалось найти практической реализации своей идее, т.к. математика в те времена была не столь развита и идея логарифма не нашла своего развития. Да и сам

Штифель не приложил серьёзных усилий для этого. Главная заслуга математика - переход от целых показателей степени к произвольным рациональным.

В 1614 году шотландским математиком Джоном Непером было опубликовано сочинение на латинском языке под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов» (лат. Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio). В своей работе ему удалось раскрыть идею логарифма числа как показателя степени, в которую нужно возвести данное основание, чтобы получить это число. Он перенес знакомые свойства прогрессии с общим членом на любые действительные показатели. Это дало непрерывную логарифмическую функцию.

В сочинении Непера было дано краткое описание логарифмов и их свойств и опубликованы 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин логарифм, который был предложен Непером, утвердился в науке. В другой книге Непера «Построение удивительной таблицы логарифмов» (лат. Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio), более подробно описана теория логарифмов. Книга была издана в 1619 году его сыном Робертом уже после смерти учёного.

Анализ документов, изучение сочинений говорят о том, что техникой логарифмирования Непер владел уже к 1594 году. В связи с развитием изучения небесных тел, появилась необходимость в облегчении сложных астрономических расчётов. Именно поэтому в таблицы были включены только логарифмы тригонометрических функций.

В то время понятия функции ещё не существовало, и Непер кинематически определил логарифм, сопоставляя равномерное и логарифмически-замедленное движение. К примеру, логарифм синуса был определен так:

«Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать»[11].

В истории математики зародилось такое понятие как «Логарифм Непера» (обозначается LogNap). Основное его свойство звучит так: «Если величины образуют геометрическую прогрессию, то их логарифмы образуют прогрессию арифметическую».Но правила логарифмирования отличались от современных.

Одновременно с Непером изучением логарифмов занимался английский математик Генри Бригс. В 1617 году он опубликовал первыйсвой труд – таблицу, в которой содержались 14-значные десятичные логарифмы от 1 до 1000. – «Первую тысячу логарифмов» в год смерти Непера. Здесь даны были десятичные логарифмы чисел от 1 до 1000 с четырнадцатью знаками. Позднее, Бригсом была выпущена «Логарифмическая арифметика», в которой содержались 14-значные таблицы логарифмов целых чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000.

В 1703 году были изданы первые таблицы на русском языке при участии русского математика Леонтия Филипповича Магницкого. Активно теорию логарифмов развивал петербургский академик Леонард Эйлер. Именно он впервые стал рассматривать логарифмирование как действие, которое обратно возведению в степень. Также им введены в употребление в термины «основание логарифма» и «мантисса».

В истории математики описывается и другой подход к определению логарифма. Учёные-математики рассматривали его как площадь криволинейной трапеции. Данный подход основывается на рассмотрении связи натурального логарифма $\ln x$ с гиперболой. Григорий Сен Венсан во второй трети 17 века показал, что если абсциссы любых двух точек А и В на гиперболе $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ соответственно пропорциональны абсциссам точек A_1 и B_2 на той же кривой, то площади криволинейных четырехугольников, расположенных под отрезками гиперболы АВ и A_1B_1, равны [24]. Такое предложение определило развитие следующего равенства: $y = \frac{1}{x}$, где $x \geq 1$.

По этой формуле вычислялась площадь под данной гиперболой, и она равнялась $\ln x$, чему соответствует рисунок 1.1.

Такую связь выразил в форме бесконечного ряда и опубликовал около 1657г.в статье «Квадратура гиперболы с помощью бесконечного ряда рациональных чисел» Уильям Броункер. Ряд таких чисел выглядел следующим образом:

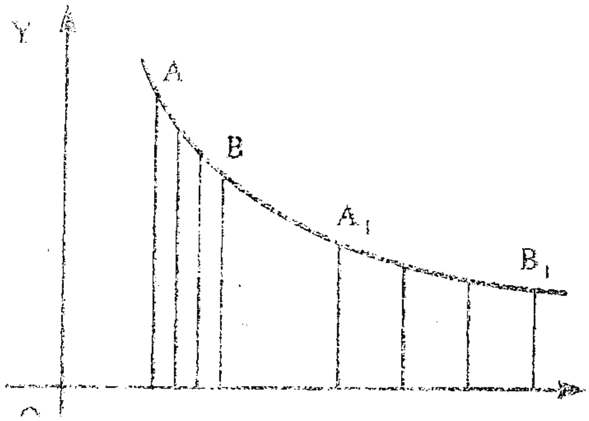

Рис.1.1. Связь гиперболы и площади криволинейной трапеции

$$\ln 2 = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{3*4} + \frac{1}{5*6} + \cdots$$

Ранее данное разложение опубликовал итальянский математик Пьетро Менголи. В «Новых арифметических квадратурах или о сложении дробей»учёным были просуммированы некоторые числовые ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k)} = 1 \ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Им же была доказана расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ путём применения неравенства:

$$\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} > \frac{1}{k}.$$

Эту работу он применил к изучению логарифмов [12, с. 160]. Но труды Менголи не привлекли должного внимания большинства современников. Отчасти, работы не получили широкого применения из-за трудности изложения материала.

Возникновение аналитического аппарата бесконечно малых в конце 17в. определило следующий подход к изучению логарифма. Путём представления логарифмической функции в форме бесконечного степенного ряда было получено её аналитическое представление:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots [23, с.44].$$

В 1711 году Исаак Ньютон в сочинении «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» применил методы неопределенных коэффициентов и последовательных приближений. Именно ему удалось получить аналитическое выражение показательной функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

и дать трактовку показательной функции как обратной к логарифмической.

Важный шаг в исследовании логарифмической функции сделал Николай Кауфман (более известный как Меркатор). Он представил логарифмическую функцию в форме бесконечного степенного ряда. Почти одновременно с появлением статьи Броункера был опубликован труд Меркатора в «Логарифмотехнике», посвященный изучению логарифмов. Перейдя от равносторонней гиперболы $y = \frac{1}{x}$, он применил к дроби $\frac{1}{1+x}$ деление по правилам алгебры, которое, в данном случае, продолжается без конца

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

и путём почленного интегрирования он нашёл связь натурального логарифма с данной дробью:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Меркатор не первый пришел к разложению логарифмической функции в степенной ряд. К такому же результату пришли Гудде в 1656г. и Ньютон в 1665г., но каждый из них хранил свой труд, не опубликовав его. Именно поэтому значение публикации «Логарифмотехника» оказалось очень велико[76].

История изучения логарифмов и логарифмической функции подчеркивает неразрывную связь отдельных областей математики - алгебры, геометрии, математического анализа. Логарифм стал великим открытием, значимым для математики и дал толчок развитию математического образования.

1.2 Методы решения логарифмических уравнений

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании, называется логарифмическим уравнением.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида:

$$\log_a x = b,$$

где x – неизвестная переменная, a и b – некоторые числа [31].

Решая логарифмические уравнения, необходимо вспомнить свойства логарифмов:

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{log_a b} = b$$

$$log_a 1 = 0$$

$$log_a a = 1$$

$$log_a(bc) = log_a b + log_a c$$

$$log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c$$

$$log_a \frac{1}{c} = log_a 1 - log_a c = -log_a c$$

$$log_a(b^c) = c log_a b$$

$$log_{(a)^c} b = (\frac{1}{c}) log_a b$$

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

$$log_a b = \frac{1}{log_b a}$$[30].

Помимо обыкновенных логарифмов существуют еще десятичные логарифмы – логарифмы с основанием 10 (обозначаются как lg$x$), и натуральные логарифмы – логарифмы, с основанием, равным экспоненте (ln$x$).

Для решения логарифмических уравнений необходимо знать свойства логарифмической функции и уметь ею пользоваться. Рассмотрим логарифмическую функцию более подробно.

Функцию, заданную формулой $y = log_a x$, называют логарифмической функцией с основанием a, где $a>0, a\neq 1$.

1. Область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел (D(f)=(0;+∞));

2. Множество значений логарифмической функции - множество R всех действительных чисел (E(f)=(−∞;+∞));

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при a>1 (рис 1.2) или убывает при 0<a<1 (рис 1.3)[16].

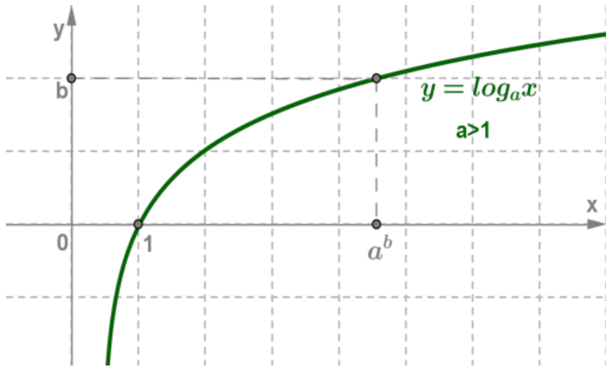

Рис. 1.2. Функция $\boldsymbol{y = log_a x}$ при a>1

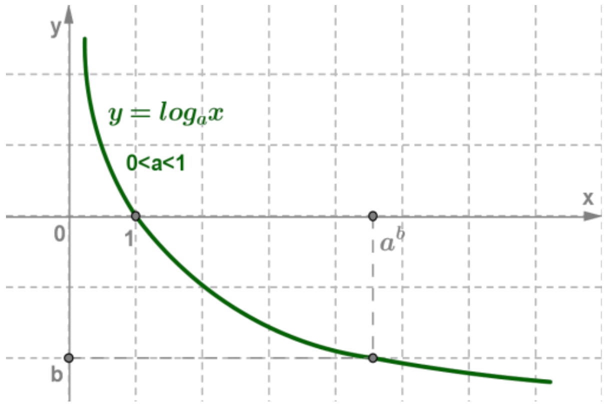

Рис. 1.3. Функция $\boldsymbol{y = log_a x}$ при a<1

Логарифмические уравнения – одна из ведущих тем в курсе математики старшей школы. Решая уравнения, можно выделить массу методов решения: разложение на множители, замена, работа с основаниями и т.д. Но все они сводятся к виду простейшего:

$loga(f(x)) = loga(g(x))$ и далее решаются без логарифмов:

$f(x)=g(x)$.

Пример 1.

$$log_2 x = 6.$$

Так как $2^6 = 64$, то сразу же получаем ответ, x=64.

Ответ: 64.

Пример 2.

$$\log 2(15+x)=log 23.$$

Здесь необходимо воспользоваться ранее описанным правилом: приравнять два аргумента, отбросив тем самым знак логарифма. Получим простое линейное уравнение:

$$15+x=3$$

$$x= -12.$$

При решении логарифмических уравнений необходимо делать проверку. Это делается для исключения лишних корней.

Пример 3.

$$\log 5(4+x)=2$$

В таком случае необходимо возвести основание в степень того числа, которое указано в правой части уравнения, прологарифмировав его. С учетом этого, перепишем уравнение:

$$log_5(4+x) = log_5 5^2; log_5(4+x) = log_5 25.$$

Теперь, зачеркнув логарифм, вновь получим линейное уравнение:

$$4+x=25;\ x=21.$$

Ответ: 21.

Пример 4.

$$log5(7-x)=log5(3-x)+1.$$

В данном случае необходимо прологарифмировать единицу. Как уже известно, что $log_a a = 1$.Поэтому:

$$log_5 5=1.$$

Вставим прологарифмированную единицу в исходное уравнение. Получим:

$$log5(7-x) = log5(3-x) + log_5 5.$$

Воспользуемся формулой суммы логарифмов с одним основанием и перепишем уравнение без знаков логарифма:

$$7\text{-}x=5(3\text{-}x)$$

$$7\text{-}x=15\text{-}5x$$

$$4x=8$$

$$x=2.$$

Ответ: 2.

Здесь стоит разобрать еще один вид логарифмических уравнений – уравнения, приводимые к квадратным при помощи замены.

Пример 5. $2log_4 x + 3log_x 4 = 5.$

Мы видим, что в одном из логарифмических выражений переменная служит как основание, а в другом – как аргумент. Значит, воспользуемся свойством логарифма:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \ \log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}.$$

Перепишем исходное уравнение:

$$2log_4x + 3(\frac{1}{log_4x}) = 5.$$

Сделаем замену: log_4x=t. Уравнение примет вид:

$$2t + \frac{3}{t} = 5.$$

Найдя общий знаменатель и перенеся все слагаемые в левую часть, получим:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1;\ t_2 = \frac{5+1}{4} = 1{,}5.$

Сделаем обратную замену:

log_4x=1, x_1=4

log_4x=1,5, $x_2 = 8.$

Ответ: 4;8.

Но в заданиях ЕГЭ второй части встречаются более сложные задания, содержащие логарифмические выражения. Они, как правило, содержат иррациональность и требуют в своем решении приведения к единому основанию.

Пример 6. $\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1.$

Сначала, необходимо упростить второй логарифм, избавившись от коэффициента перед ним. Тогда, воспользовавшись одним из свойств логарифма, получим:

$$2\log_{2^2}\left(\sqrt{lgx} + 1\right) = \frac{2}{2}\log_2\left(\sqrt{lgx} + 1\right) = \log_2(\sqrt{lgx} + 1).$$

Так оба логарифма сведены к одному основанию, то можем воспользоваться формулой вычитания логарифмов:

$$\log_2 \frac{lgx+2\sqrt{lgx}+1}{\sqrt{lgx}+1}=1.$$

Прологарифмируем правую часть, возведя основание 2 в первую степень:

$$\log_2 \frac{lgx+2\sqrt{lgx}+1}{\sqrt{lgx}+1} = \log_2 2, \text{ поэтому:}$$

$$\frac{lgx+2\sqrt{lgx}+1}{\sqrt{lgx}+1} = 2.$$

Найдем общий знаменатель. В данном уравнении это $\sqrt{lgx} + 1$. Уравнение примет вид:

$$lgx + 2\sqrt{lgx} + 1=2\sqrt{lgx} + 2;$$

$$lgx + 2\sqrt{lgx} - 2\sqrt{lgx} = 2 - 1$$

$$lgx = 1, x = 10.$$

Ответ: 10.

Также нередким случаем являются уравнения, содержащие и переменную в основании логарифма. Здесь, важным является найти область допустимых значений.

Пример 7. $\log_{x-4}(2x^2 - 13x + 10) = 2.$

Сначала найдем ОДЗ основания:

$$\begin{cases} x - 4 \neq 1; \\ x - 4 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 5; \\ x > 4. \end{cases}$$

Затем ОДЗ выражения, находящегося в скобках.

$$2x^2 - 13x + 10 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 10 = 0.$$

D=169-2*10*4=89

$x_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{89}}{4}$. x∈$(-\infty;\ \frac{13-\sqrt{89}}{4})\cup(\frac{13+\sqrt{89}}{4};+\infty)$

Отметим ответы на числовой прямой и найдем общее решение (рис. 1.4).

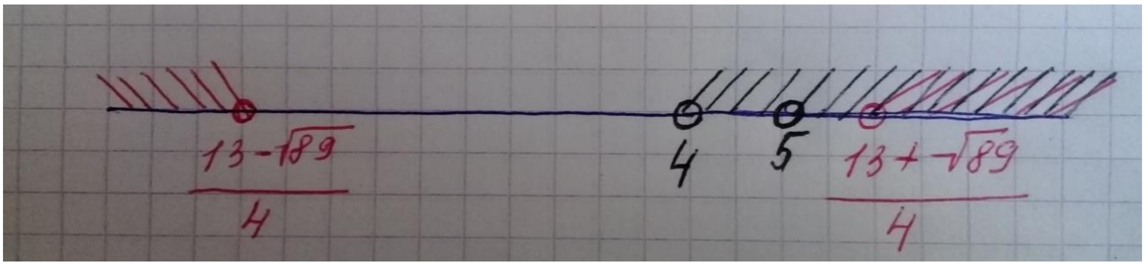

Рис. 1.4. Область допустимых значений уравнения

Значит, x∈$(\frac{13+\sqrt{89}}{4};+\infty)$.

Прологарифмируем правую часть, возведя основание (x-4) во вторую степень и избавимся от логарифмов:

$$2x^2 - 13x + 10 = (x-4)^2$$

$$2x^2 - 13x + 10 = x^2 - 8x + 16$$

$$2x^2 - 13x + 10 - x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

По теореме Виета найдем корни уравнения:

$x_1 = 6$; $x_2 = -1$ – не удовлетворяет условию ОДЗ.

Значит, получим одно решение – 6.

Ответ: 6.

Делая вывод, можно сказать, что решение логарифмических уравнений - необходимый компонент в обучении математике старшей школы. Главная задача учителя – грамотно подать материал обучающимся, начиная от простейших уравнений и заканчивая более сложными, учитывая различный уровень учеников и зону их ближайшего развития.

1.3. Обучение решению уравнений как психологическая и методическая проблема

В школьном курсе алгебры уравнения занимают важное место. Линия уравнений и неравенств основана на построении и изучении математических моделей, включает вырабатывание и совершенствование техники алгебраических преобразований для решения уравнений, неравенств и систем. Изучая данную тему, учащиеся формируют способности строить и исследовать математические модели при решении задач из смежных дисциплин, развивают межпредметные связи. Большинство задач о пространственных формах окружающей действительности, количественных отношениях решается с помощью уравнений. Уравнения - существенная часть математических средств, используемых в математическом моделировании. В образовательной практике установление междисциплинарных связей ведет к качественному развитию общекультурных компетенций.

В обучении математике уравнения играют большую роль. Эта роль определяется, с одной стороны, тем, что конечные цели этого обучения сводятся к овладению учащимися методами решения определенной системы математических уравнений. С другой стороны, она определяется и тем, что полноценное достижение целей обучения возможно лишь с помощью решения учащимися системы уравнений, которые являются важнейшим средством формирования у школьников системы основных математических знаний и способов деятельности.

Кроме того, от эффективного использования уравнений в обучении математике зависит не только качество обучения и развития учащихся школы, но и степень их практической подготовленности к последующей за обучением деятельности в любой сфере.

Чтобы раскрыть еще большую значимость уравнений в школьном обучении, попробуем выявить роль и место уравнений во всей системе школьного математического образования, в единстве реализуемых при этом целей обучения, воспитания и развития учащихся.

Изучая учебники и пособия различных авторов, а также различные разделы математики, можно выделить различные подходы к определению уравнения. Самое распространенное из них - определение, которое дано в учебнике 6 класса В.Я. Виленкина: «Уравнение – это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой». Такая трактовка дает наиболее понятное объяснение тому, в чем заключается суть решения. Это наиболее важно при введении уравнений в обучении математике [4].

В сборнике задач по алгебре 8-9 классов авторов Галицкого М.Л., Звавича Л.И. уравнение определено как «равенство с переменной». Здесь тождество - частный случай уравнения [6].

Раздел математического анализа даёт такое определение уравнению: «Уравнение - равенство двух функций, $g(x) = f(x)$, заданных на общей области их определения», а мат логика рассматривает уравнение как « высказывательная форма (предикат) вида $A(x) = B(x)$» [14].

Каждая трактовка несет свой определенный логический смысл. Применение их на практике основывается на педагогической целесообразности использования определений в данном классе.Родовое понятие для всех этих определений -равенство. Также известно ещё одно понятие, которое определяется как особый вид равенства - это тождество, школьное определение которого – равенство, верное при всех допустимых значениях переменной.

Выявление роли и места уравнений в современном обучении математике диктует целесообразность изучения дидактически направленной характеристики важнейших компонентов математического развития учащихся, которые должны формироваться в процессе школьного обучения, выявления основных функций уравнений в системе развивающего и воспитывающего обучения математике; характеристики самого понятия уравнения и психолого-дидактических особенностей процесса его решения.

Согласно программе математики среднего общего образования, в результате изучения данной дисциплины учащиеся должны научиться решать различные уравнения, а также использовать приобретенные знания, умения и навыки в практической деятельности. Для получения прочных знаний и умений по овладению навыками решения уравнений обучающийся в ходе освоения математики должен обладать определенными способностями. К ним относят:

- понимание терминов «уравнение», «система уравнений», «корень уравнения», «решение уравнения», «решение системы уравнений» в тексте задач; понимание того, что уравнения – это математическая модель решения различных задач из математики;
- знание определения различных видов уравнений; теоремы о равносильности уравнений; основные приемы решения уравнений;общие методы решения уравнений;
- умение решать линейные, квадратные, рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения;решать системы уравнений с двумя неизвестными, уравнения с параметрами, текстовые задачи с помощью составления уравнений; изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельностидля построения и изучения простейших математических моделей.

Обучение решению уравнений начинается с простейших их видов. Учебная программа создает условия для постепенного накопления как видов уравнений, так и «фонда» тождественных и равносильных преобразований, с помощью которых можно привести произвольное уравнение к простейшим[28].

Для формирования умения навыков решения уравнений, необходимо обучать их способам решения. Каждый способ решения уравнений состоит из отдельных действий, поэтому нужно формировать умения у школьников выполнять действия, адекватные поиску способа решения и решению уравнения. На основе анализа теоретико-методических основ изучения уравнений в школьном курсе сформировываются этапы обучения школьников решению уравнений.

Формирование общих умений решения уравнений осуществляется таким образом, что учащиеся не получают никаких особых знаний, лежащих в основе этих умений. Именно поэтому представления учащихся об уравнениях, их элементах и структуре, о сущности и механизмах их решения являются неясными, не имеющими конкретики. За счёт этого представления формируются часто стихийно, в результате случайной информации и редкой рефлексии на свои действия в процессе решения многочисленных задач [27].

Это происходит по причине того, что программы по математике, действительные на сегодняшний день, не предусматривают изучения каких-либо теоретических основуравнений и их решений. Необходимость в теоретических знаниях нужны обучающимся для того, чтобы они могли производить решение разнообразных заданий сознательно и целенаправленно, не основываясь лишь подражании по аналогии с ранее решенными упражнениями.

Для эффективного и грамотного обучения математике, и в частности, решению уравнений, необходимо учитывать психолого-педагогические аспекты преподавания. По мнению психологов, процесс решения уравнений тесно взаимосвязан с процессом мышления. Многие исследования показывают, что именно в ходе решения уравнений самым естественным образом можно формировать у школьников элементы творческого, логического и алгоритмического мышления.

Необходимо отметить, что умственное развитие учащихся является одной из основных задач обучения математике. Большинство авторов связывают его именно с развитием математического мышления. На основании этого возникает вопрос, что представляет собой математическое мышление, каковы его специфические черты. «Чаще всего математическое мышление рассматривается в соответствии со спецификой математики, которая состоит в особенностях ее абстракций (Ж. Адамар, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, А.И. Маркушевич и др.)» [29, с.82]. В работах этих авторов понятие«математическое мышление» ассоциируется с понятием математических способностей. Выделяется огромное число черт математических способностей: сила абстрагирования, оперирование абстракциями, геометрическая интуиция, четкое логичное рассуждение, гибкость мышления, математическая интуиция, анализ, синтез, стремление к рациональности решения, лаконизм, оригинальность мышления и др. Такие способности можно развивать в процессе решения уравнений. Поэтому необходимо выявить такие условия обучения решению уравнений, при которых максимально эффективно будут развиваться перечисленные нами математические способности.

«Эффективность обучения находится в прямой зависимости от уровня активности ученика в познавательной деятельности, степени его самостоятельности в этом процессе, что, в свою очередь определяется познавательными интересами школьников (Ю.К. Бабанский, М.А. Данилов, А.В. Усова, Г.И. Щукина и др.)» [26,с.11]. Источником их развития теория познания считает противоречия в самом процессе познания человеком действительности, фиксируемые посредством категории проблемы. Развитие познавательной самостоятельности и творческих мыслительных способностей учащихся невозможно вне проблемных ситуаций. Поэтому в обучении математике есть необходимость внедрения проблемно-развивающего обучения. При таком обучении уравнения являются одним из основных средств активизации знаний и способов действий. Они используются для раскрытия содержания понятий, теорем, способов умственной деятельности ученика и формирования умений и навыков.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что уровневый материал, совокупность приемов, методов организации обучения**,** позволяют грамотно осуществить процесс изучения уравнений. Опора на методические и психологические аспекты преподавания способны в полной мере раскрыть сущность математической науки, направляя учеников на приобретение умений и навыков.

ГЛАВА 2. ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «ЛОГРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

2.1 Логарифмические уравнения в заданиях ЕГЭ

В соответствие с Российской моделью образования, главной оценкой подготовленности выпускника является сдача Единого Государственного экзамена. Математика как обязательный предмет, который сдают обучающиеся, обеспечивает усвоение важнейших идей современной математики, овладение системой основных научных понятий, умение ориентироваться в научно-технической литературе, самостоятельностьпоиска нужных сведений, активизацию творческих способностей.Поэтому от одиннадцатиклассников требуется колоссальная подготовка по предмету и применение системы знаний для решения заданий [19].

По теме «Логарифмические уравнения» в работах ЕГЭ прошлых лет встречаютсязадачиразных типов, начиная с простейших и заканчивая наиболее сложными, в том числе и уравнениями с параметром (приложение 1). Все они направлены на применение основных свойств логарифма, основного логарифмического тождества и теоретических знаний по изучению темы.

Анализ заданий базового уровня Единого Государственного экзамена показал, что логарифмические уравнения встречаются в задании 7. Зачастую, это несложные простейшие уравнения, или же уравнения, в которых необходимо единожды применить одно из свойств логарифма, после чего оно сведётся к простейшему.

Приведем примеры логарифмических уравнений из различных пособий для подготовки к ЕГЭ по математике базового уровня.

«Математика. Базовый уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ» (под ред. И.В. Ященко) [8].

1.Найдите корень уравнения $\log_2(4x-20)=3$ (Вариант 11).

Прологарифмировав правую часть уравнения, получим:

$$\log_2(4x-20)=\log_2 8\,.$$

4x-20=8;

4x=28;

x=7.

2. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(2\mathrm{x}+5)-\log_{\frac{1}{2}}13=\log_{\frac{1}{2}}5$ (Вариант 21).

Перенесём вычитаемое в правую часть уравнения с противоположным знаком и применим одно из основных свойств логарифма $log_a(bc)=log_a b+log_a c$:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x + 5) = \log_{\frac{1}{2}}(5 * 13)$$

2x+5=65;

2x=60;

x=12.

«Математика. Базовый уровень. 36 вариантов» (А.В. Антропов, А. В. Забелин) [7].

1. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 2$ (Вариант 4).

Прологарифмировав число 2, получим:

$$\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = \log_{\frac{3}{4}}\frac{9}{16}.$$

$$\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = \frac{9}{16};$$

$$\frac{1}{4}x = \frac{25}{16};$$

x=6,25.

В работах профильного уровня Единого Государственного экзамена логарифмические уравнения встречаются в заданиях 5 (простейшие уравнения), 13 (С1) (уравнения), 18 (С6) (задача с параметром). Для решения таких уравнений требуется серьезная математическая подготовка, углубленное изучение теоретического материала и применение обширных знаний.

Рассмотрим несколько заданий 5 из пособия по подготовке к ЕГЭ «Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ» (под ред. И.В. Ященко) [9].

1. Найдите корень уравнения $\log_2(10 - 5x) = 3\log_2 5$ (Тренировочная работа 1).

Применим к правой части уравнения одно из основных свойств логарифма $log_a(b^c) = clog_a b$:

$$\log_2(10-5x) = \log_2 125;$$

10-5x=125;

-5x=115;

x = -23.

2. Найдите корень уравнения $3^{\log_{81}(8x+8)} = 4$ (Тренировочная работа 6).

Введем новую переменную. Пусть $\log_{81}(8x+8) = t$, тогда

$$3^t = 4, \longrightarrow t = \log_3 4.$$

Сделаем обратную замену $\log_{81}(8x+8) = \log_3 4$. Далее приведем уравнение к единому основанию, используя основные свойства логарифмов.

$$\log_{81}(8x+8) = 4\log_{81} 4;$$

$$\log_{81}(8x+8) = \log_{81} 256.$$

Так как основания одинаковы, применим метод потенцирования и решим линейное уравнение:

8x+8=256, ⟶ x=31.

В заданиях 13(С1) профильного уровня необходимо написать полное решение уравнения и дать ответ. Разберем такие задания из пособия «ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Задания с развернутым ответом» (Ю.В.Садовничий) [25].

1. Решите уравнение $\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$ (задание 4.2.1).

Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x+8 > 0, \\ x+3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -8, x\epsilon(0, +\infty). \\ x > 3; \end{cases}$$

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+8).$$

К левой части уравнения применим одно из свойств логарифма:

$$\log_3 x\,(x+3) = \log_3(x+8);$$

$$x(x+3) = x+8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

По теореме Виета находим решения:

$$x_1 = 2, x_2 = -4.$$

Условию ОДЗ удовлетворяет одно решение, 2.

Ответ: 2.

2. Решить уравнение $\frac{\log_2(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x-5)} = 1$(задание 4.2.6).

Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{\log_2(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x-5)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x-5)} = 1.$$

Перенесем единицу в правую часть и найдём общий знаменатель:

$$\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x-5)} + 1 = 0;\ \frac{\log_2(x+3) + \log_2(x-5)}{\log_2(x-5)} = 0.$$

Составим систему, содержащую ОДЗ логарифмических выражений изнаменателя, и уравнение, находящееся в числителе дроби:

$$\begin{cases} x-5>0, \\ \log_2(x-5) \neq 0, \\ \log_2(x+3) + \log_2(x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5; \\ x \neq 6; \\ \log_2(x+3)(x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>5; \\ x \neq 6; \\ (x+3)(x-5) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5; \\ x \neq 6; \\ x^2 - 2x - 16 = 0. \end{cases}$$

Найдя дискриминант последнего уравнения, получаем два решения квадратного уравнения: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17}$.

Оценив выражения, получим:

$$1 + \sqrt{17} \approx 5{,}12;\ 1 - \sqrt{17} \approx -3{,}12.$$

Последнее выражение не удовлетворяет условию ОДЗ, поэтому имеем одно решение $1 + \sqrt{17}$.

Ответ: $1 + \sqrt{17}$.

Логарифмические уравнения с параметром (задание 18 (С6)) рассмотрим из пособия Э.Н. Балаяна «Математика: задачи типа С5. Уравнения, неравенства и системы с параметром» [3].

1. Решить уравнение $\lg(ax) + \lg x = \lg(x-3)$(пример 8).

Найдем ОДЗ уравнения:

$$x > 3, a > 0.$$

Применяя свойство сложения логарифмов, получим:

$$\lg(ax * x) = \lg(x-3) \Leftrightarrow \ ax^2 - x + 3 = 0.$$

$$D = 1 - 12a, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{2a}.$$

Т.к. подкоренное выражение положительно, то имеем следующее:

$$\begin{cases} 1 - 12a \geq 0; \\ a > 0. \end{cases} \Rightarrow 0 < \text{a} \leq \frac{1}{12}.$$

Если $x > 3$, то

$$\begin{cases} 0 \ < \text{a} \leq \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{2a} > 3; \end{cases} ; \begin{cases} 0 \ < \text{a} \leq \dfrac{1}{12} \\ 1 - \sqrt{1-12a} > 6a. \end{cases}$$

Данная система имеет решение при любых $0 < \text{a} \leq \frac{1}{12}$.

Неравенство $\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} > 3$ также имеет смысл при любых $0 < \text{a} \leq \frac{1}{12}$.

Ответ: при a $= \frac{1}{12}, x = 6$;

при $0 < a < \frac{1}{12}, x_{1,2} = \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1-12a});$

при $a \leq 0$ или $a > \frac{1}{12}$, корней нет.

2. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a x + |a + \log_a x| \log_{\sqrt{x}} a = a \log_x a$имеет решения? Найти эти решения (пример 4).

Найдем все ОДЗ уравнения:

$$a > 0, a \neq 1, x > 0, x \neq 1.$$

Так как $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$, $\log_{\sqrt{x}} a = \frac{2}{\log_a x}$,то исходное уравнение примет следующий вид:

$$\log_a x + |a + \log_a x| * \frac{2}{\log_a x} = \frac{a}{\log_a x}, \text{или } {\log_a}^2 x + 2|a + \log_a x| - a = 0.$$

Отсюда имеем две возможности:

1)$a + \log_a x \geq 0,$ тогда ${\log_a}^2 x + 2\log_a x + a = 0.$

Пусть $\log_a x = t$, тогда

$$t^2 + 2t + a = 0.$$

Получаем корни уравнения:

$$t_1 = -1 + \sqrt{1-a}, t_2 = -1 - \sqrt{1-a}.$$

Поэтому

$$\log_a x_1 = -1 + \sqrt{1-a}, \log_a x_2 = -1 - \sqrt{1-a}.$$

Чтобы x_1 удовлетворяло исходному уравнению, должно выполняться условие:

$$-1 + \sqrt{1-a} + a \geq 0, \text{или } \sqrt{1-a} \geq 1 - a.$$

Но так как $1 - a > 0$ и учитывая, что $a > 0,$ то $0 < a < 1.$

Аналогично, чтобы x_2 удовлетворяло исходному уравнению, должно иметь место $-1 - \sqrt{1-a} + a \geq 0$,или $\sqrt{1-a} \leq a - 1$, что возможно лишь приa=1. Но так как $a \neq 1$, то не существует таких значений a, при которых x_2 удовлетворяло данному уравнению.

2) $a + \log_a x < 0$, тогда получим уравнение

${\log_a}^2 x + 2\log_a x - 3a = 0$, откуда находим

$$\log_a x_3 = 1 + \sqrt{1+3a}, \log_a x_4 = 1 - \sqrt{1+3a}.$$

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что нет такого значения a, при котором x_3 удовлетворяло бы данному уравнению, а x_4 является решением уравнения при $0 < a < 1$.

Ответ: $x = a^{-1+\sqrt{1-a}}, x = a^{1-\sqrt{1-a}}, 0 < a < 1.$

3. Решитьуравнение$\log_4(x-5) = -\log_{0,25}(|a-x|-3)$ (пример 5).

Найдём ОДЗ уравнения:

$$x - 5 > 0, |a - x| - 3 > 0.$$

Запишем уравнение в следующем виде:

$\log_4(x-5) = \log_4(|a-x|-3) \Leftrightarrow x-5 = |a-x|-3 \Leftrightarrow \ x-2 = |a-x|$.

Так как $x-5>0,$ т. е $x>5,$ то левая часть уравнения положительна и уравнение распадается на совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x-2=a-x; \\ x-2=x-a. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения находим $x=\frac{1}{2}(a+2)$.Так как $x>5$, то $\frac{1}{2}(a+2)>5, a+2>10$,откуда$a>8$.

Стоит отметить, что второе уравнение выполняется при любом $x>5$,если а=2; при других значениях решений нет.

Ответ: при $a \in (-\infty; 2) \cup (2; 8)$ решений нет;

при $a=2, x \in (5; +\infty)$;

при $a \in (8; +\infty), x=\frac{1}{2}(a+2)$.

Специфика математики такова, что при подготовке к ЕГЭ большое количество формул, определений, теорем, методов и алгоритмов решения математических задач вызывает трудности при запоминании. Помочь обучающимся научиться учиться, повысить мотивацию к учению, создать комфортную обстановку на уроке и, как следствие, повысить качество обучения возможно с помощью применения личностно ориентированных технологий, целью которых является эмоционально-положительное усвоение учебного материала.

2.2 Методика формирования умений, необходимых для решения логарифмических уравнений

Тема «Логарифмы», являющейся одной из ведущих тем в курсе математики средней школы, является укоренившейся, но очень непросто дающейся учащимся из-за подачи многообразия материала. «Овладеть методикой решения логарифмических уравнений очень важно, так как повышаются умственные и творческие способности обучающихся, приобретаются первые навыки исследовательской работы, обогащается математическая культура обучающихся, развиваются способности к логическому мышлению, происходит повторение, расширение и более глубокое усвоение учебного материала» [15].

Для успешного овладения математической системой знаний, на уроках необходимо уделять достаточное внимание решению логарифмических уравнений. При условии использования на уроках определенных приемов, комплекса упражнений и задач, которые направлены на пробуждение интереса к математике при обучении указанной теме,у школьников появляется заинтересованность к ее изучению.

Другая сложность, связанная с изучением данной темы, вызвана отведением малого количества часов на её изучение на основании ФГОС СОО, вступившего в силу 17 мая 2012г.

Требования ФГОС обусловлены тремя составляющими усвоения предмета «Математика»:

1. Обеспечение ценностной ориентации обучающихся, знание моральных норм иумение им следовать правдивость, ответственность, воспитание отношения к математике как к части общечеловеческой культуры, играющей особую роль в общественном развитии, формируют личностную составляющую ученика.

2. Обеспечение организации учебной деятельности: планирование, контроль,целеполагание, саморегуляция, отстаивание своей точки зрения, умение приводить аргументы, подтверждая их фактами, формируют метапредметную составляющую ученика.

3. Применение в различныхситуациях умений, освоенных в ходе изучения учебных предметов, формирование научноготипа мышления, владение математической терминологией, методами и приемами формируют предметную составляющую.

Сиситемно-деятельностный подход является методологической основой стандарта. Он обеспечиваетпроектирование развивающей образовательной среды образовательного учреждения и активную познавательную деятельность обучающихся.

Рассматривая ныне существующие программы по математике, на изучение логарифмов и логарифмической функции в средней школе отводится разное место в курсе алгебры и начал анализа 11-го класса:

- в учебнике А.Г. Мордковича тема «Логарифмы. Логарифмические уравнения» изучается в главе 7 «Показательная и логарифмическая функция» параграф 41 «Понятие логарифма» ипараграф 44 «Логарифмические уравнения». На изучение темы отводится 5 часов [21].

- вучебникеС.М. Никольского она изучается в главе 1 «Корни, степени, логарифмы» параграф 5 «Логарифмы»и параграф 6 «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» пункт 6.2 «Простейшие логарифмические уравнения». На изучение темы выделяется 2 часа [22].

- в учебнике А.Ш. Алимова тема представлена в главе 4 «Логарифмическая функция» параграфы 15 – 19 [2].

- в учебнике Н.Я.Виленкина в главе 8 «Показательная, логарифмическая и степенная функции» параграф 2 «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» пункты 3 – 4 [5].

- в учебнике А.Н. Колмогорова тема изучается в главе 4 «Показательная и логарифмическая функции» параграф 10 «Показательная и логарифмическая функции» пункты 37 – 39 [13].

На изучение темы в последних трёх учебниках отводится 6 часов.

Классификацию заданий по теме «Логарифмы. Логарифмические уравнения» можно произвести следующим образом:

- задачи на нахождение области определения;

- задачи на построение графика функции;

- задачи на обобщение знаний по нескольким темам [17].

Для решения задач школьного курса алгебры по данной теме достаточно знать определение и свойства логарифмов. Например,

$$\log_3(x+7) = 4.$$

Необходимо воспользоваться следующим свойством логарифмирования:

$$\log_a b = \log_a a^c$$

тогда получим:

$$\log_3(x+7) = \log_3 81.$$

Отбросив знак логарифма и решив линейное уравнение, находим искомый ответ x=74.

При изучении данной темы выделяются основные методы решения логарифмических уравнений:

-на основании определения логарифма;

- приведение к одному основанию;

- метод подстановки (обычно данный метод используется для приведения уравнения к квадратному);

- метод потенцирования (переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их);

- метод логарифмирования;

- графический метод (в основном применяется в том случае, когда уравнение содержит переменную не только под знаком логарифма, или в показателе степени) [18].

Объясняя тему «Логарифмические уравнения» и раскрывая методы их решения,можно воспользоваться мультимедийной программой "Математика. Решение уравнений и неравенств" [20]. Изучение темы курса построено на визуальном и фонематическом восприятии информации. Уравнение и его решение воспроизводится на экране проектора и сопровождается при помощи звукового объяснения. Отличным от основного шрифтом выделяются наиболее важные моменты решения.

"Алгебра и начала анализа. Итоговая аттестация выпускников" – учебно-методический комплекс, предназначенный для отработки умений решать различные типы уравнений [1]. В число таких заданий входят и логарифмические уравнения. УМК помогает обучающимся отработать навыки решения логарифмических уравнений. Несомненный плюс обеих программ - это подсказки и ссылки на теоретическую часть.

С методической точки зрения было бы правильно каждый пройденный тип логарифмических уравнений завершать задачами с использованием типа таких уравнений. Во-первых, обучающимся трудно привыкнуть к понятию «логарифм» за малое количество занятий, ведь это понятие для одиннадцатиклассников новое, ранее неизучаемое; во-вторых, использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала; в-третьих, решение уравнений способствует развитию математической и логической культуры школьников.

Начинать изучение темы лучше всегос лекций. Теоретический материалдолжен чётко отражать суть темы и способствовать формированию практических навыков. Лекция может быть следующего содержания:

«Простейшим логарифмическим уравнением, или же уравнением, содержащим неизвестное под знаком логарифма, является $\log_a x = b$, гдеx – неизвестная переменная, a и b – некоторые числа.

Логарифмическая функция $y = log_a x$возрастает на промежутке при a>1 и убывает при 0<a<1и принимает на этом промежутке все действительные значения.

Основной способ решения логарифмических уравнений - это потенцирование. Этот способ удобен, так как его результат - это алгебраическое линейное уравнение. При решении уравнения есть необходимость в проверке, потому, что возможны варианты появления посторонних корней.

Решая логарифмические уравнения, используйте свойства логарифмической функции. Здесь необходимо левую и правую части представлять в виде логарифмов с одинаковыми основаниями. Необходимым шагом в решении Учёт области определения логарифмической функциияявляется необходимым при решении.

Теорема:*Уравнение* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$,*где*$a > 0, a \neq 1$ *равносильно системе, состоящей из уравнения и двух неравенств:*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(В данной системе можно одно из неравенств опустить, т.к. если одно из них больше нуля, то и другое автоматически становится положительным).

Следовательно, для решения уравнения необходимо:

а) решить уравнение f (x) =g (x);

б) из полученных корней отобрать удовлетворяющиеодному из неравенств f (x) >0, или *g (x) >0*, а остальные корни отбросить (они являются посторонними для данного уравнения)».

На основании вышеизложенного можно разработать следующие методические рекомендации в обучении решению логарифмических уравнений:

1. На первоначальном этапе обучения важно дать содержательный, и в тоже время понятный теоретический материал обучающимся. Познать практические основы решения невозможно без знаний теории.

2.Обучая решению логарифмических уравнений, важно выработать у учащихся умение находить ОДЗ уравнений. Это нужно для того, чтобы в дальнейшем не делать проверку.

3.Практическую часть обучения следует начинать с простейших заданий, постепенно переходя к более сложным. Важно выработать систему навыков и умений по данной теме.

4. Тема «Логарифмические уравнения» - одна из самых сложных в курсе алгебры 11 класса. Поэтому ей нужно уделять больше внимания при изучении,

учитывая то, что работы ЕГЭ по математике строятся на заданиях данной темы.

2.3. Описание опытной работы

Для подтверждения выдвинутой гипотезы и выполнения поставленных соответствующих задач была проведена экспериментальная работа, которая проходила в три этапа:

1. Констатирующий
2. Формирующий
3. Контрольный.

Цель исследования: выявить формы и методы, в результате применения которых обучающиеся лучше усвоят материал по теме: «Логарифмические уравнения».

Исследование проходило в МБОУ «Вознесеновская СОШ» Ивнянского района Белгородской области с учениками 11 класса.

Характеристика экспериментального класса.

Изучив документацию, мы выявили, что в данном классе 4 человека: 1 девочка и 3 мальчика. Класс занимается по ФК ГОС. В классе есть учащиеся, которые отличаются высокой работоспособностью и активностью на уроках (Чернявская А.). Два человека средне активны на уроках, редко участвуют в обсуждении новой темы или решения задач (Жуков Р., Чуваков А.). Один обучающийся, который не участвует в коллективной работе, не поднимает руку, чтобы отвечать на вопросы (Кацай И.). Успеваемость класса очень низкая по таким предметам как: математика, русский язык, физика, химия, иностранный язык. Класс занимается по учебнику государственного стандартаА.Н. Колмогорова “Алгебра 10-11 класс»[13].Задания выполняются в тетрадях, которые систематически проверяются.

Констатирующий этап

Цель: выявить уровень успеваемости учащихся на уроках математики с использованием тестовых технологий при обучении решению логарифмических уравнений.

Задачи: подобрать исследовательские методы для экспериментального класса. Провести исследовательские методы и выявить результат по данным исследования.

На данном этапе были использованы следующие методы исследования:

1. Беседа с учащимися
2. Самостоятельная работа учащихся
3. Наблюдение за работой учащихся на уроках

С использованием метода «беседа собучающимися» были выдвинуты следующие цели: выявить заинтересованность предметом; форму проведения урока, наиболее интересную для учащихся.

Беседа включала устный вопрос учителя, устный ответ учащихся. Строилась примерно по такому плану:

1. Как вы считаете, знание математики вам нужны в повседневной жизни?
2. Чем интересны уроки математики?
3. Что бы вы хотели добавить в урок?
4. Какая форма проведения урока вам наиболее интересна (комбинированный урок, урок-лекция, урок-игра)? Чем нравится вам эта форма?

Ответы учащихся были разнообразны. Следует сделать вывод о том, что большинство учеников считают, что уроки алгебры нужны, но не показывают особой заинтересованности в изучении. Так же с развитием компьютеризации в школе учащимся было бы интересно проводить уроки с использованием современных компьютерных средств.

Самостоятельная работа по теме «Решение логарифмических уравнений» проходила в двух формах: первая – тестирование, вторая – письменная. При выполнении самостоятельной работы были поставлены следующие цели: проверить знания, умения и навыки при изучении темы «Решение логарифмических уравнений»; выявить степень усвоения учащимися пройденного материала.

Учащимся было предложено выполнить самостоятельную работу, состоящую из 8 заданий. Сначала, учащиеся выполняли задания в форме тестирования (приложение 2), где было предложено 5 вариантов ответа и требовалось написать только ответ. На следующем уроке учащимся были предложены аналогичные задания, но в форме самостоятельной письменной работы (приложение 3), где требовалось записать решение и ответ.

Самостоятельная работа включает следующие знания, умения, навыки:

- умение оперировать свойствами логарифмов;
- знание методов решения логарифмических уравнений;
- применение свойств логарифма к решению логарифмических уравнений;
- умение работать с графиком логарифмической функции.

Каждая работа оценивалась по следующим критериям:

За все выполненные задания оценка «5»

1-2 неверных задания – оценка «4»

3-4 неверных задания, оценка «3»

Более 4 неверных заданий, оценка «2».

Результаты выполнения самостоятельных работ изложены в таблице 2.1.

Таблица 2.1.Результаты выполнения самостоятельных работ

Ф.И.	Форма тестирования		Оценка	Письменная работа		Оценка
	Верный ответ	Неверный ответ		Верный ответ	Неверный ответ	
Жуков Р.	1,2,3,5	4,6,7,8	3	1,2,4	3,5,6,7,8	2
Кацай И.	2,3	1,4,5,6,7,8	2	2	1,3,4,5,6,7,8	2
Чернявская А.	1,2,3,5,7,8	4,6	4	1,2,4,5	3,6,7,8	3
Чуваков А.	2,3,7	1,4,5,6,8	2	2,3	1,4,5,6,7,8	2

Анализируя результаты проведения, можно сказать, что работа была выполнена на низком уровне. Задания, решенные в тестовой форме, были выполнены лучше, чем задания письменной работы. Самыми непосильными задачами для учеников оказались задачи на работу с графиком логарифмической функцией.

При наблюдении за работой учащихся были поставлены и достигнуты следующие цели: провести наблюдение и выявить, насколько ученики активно работают на уроке, стремятся быть полезными на занятиях и достичь положительных результатов. Данные были занесены в таблицу 2.2.

Таблица 2.2. Результаты активности на уроке

Ф.И.	Активен на уроке	Средне активен	Пассивен
Жуков Р.		+	
Кацай И.			+
Чернявская А.	+		
Чуваков А.		+	
Процентное соотношение активности	25%	50%	25%

Таким образом, данный этап показал, что для полного усвоения материала по теме «Логарифмические уравнения» учащимся необходимо научиться решать задания в различных формах проведения работы.

Формирующий этап

Цель данного этапа –повышение качества математической подготовки в изучении темы «Логарифмические уравнения».

На формирующем этапе были поставлены следующие задачи:

- провести различные типы уроков с применением современных образовательных технологий (тестовая технология, ИКТ);

- способствовать повышению успеваемости на уроках математики;

- провести данные виды уроков в экспериментальном классе при закреплении решений логарифмических уравнений.

На основе ранее перечисленных особенностей класса, с учетом содержания курса математики средней школы и возрастных особенностей, нами были проведены следующие уроки:

- обучающий урок с применением ИКТ;
- урок систематизации с применением тестовой технологии;
- урок-семинар как урок закрепления полученных знаний.

Рассмотрим фрагменты уроков по теме «Логарифмические уравнения».

Фрагмент урока 1.

Тема: Решение логарифмических уравнений.

Цели: повторить методы решения логарифмических уравнений, нахождение ОДЗ уравнения, отбор корней уравнения.

Тип урока: обучающий с применением ИКТ.

Средства обучения: учебник, обучающая презентация (приложение 4).

Ход урока.

I. Организационный момент

II. Обучение решению логарифмических уравнений

1. Устный опрос

Вспомним определение логарифмического уравнения, этапы его решения? Как верно определить, какие из корней действительные, а какие – посторонние для данного уравнения (слайды 4,5 презентации)?

2. А теперь мы с вами прорешаем уже нам известные простейшие логарифмические уравнения (слайд 6 презентации; ответы представлены на 7 слайде).

а)$\log_5 x = 2$; б) $\lg\ x = 3$; в)$\log_{0,3}(5\mathrm{x} + 2) = 1$;

г) $\log_3(x^2 + 2x + 3) = \log_3 6$; д) $\log_2 x = 2\log_2 3 + \log_2 5$.

3. А теперь решим более сложные задания по теме (слайд 8 презентации; ответы представлены на 9 слайде).

А) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$; б) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0$;

в) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

III. Итог урока

IV. Домашнее задание

Фрагмент урока 2.

Тема: Решение логарифмических уравнений.

Цель: проверка качества знаний по изученной теме при помощи тестовой технологии.

Средства обучения: карточки с заданиями.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Закрепление изученного материала

1. Устный опрос

Давате ещё раз повторим, какие методы применяются для решения логаримических уравнений? Как найти ОДЗ? Основные свойства логарифмов?

2. Самостоятельное решение тестовых заданий (приложение 5).

III. Итог урока

IV. Домашнее задание. Подготовиться к уроку-семинару по следующим вопросам:

1. Логарифмическая функция и ее график (Чуваков А.);

2. Основные свойства логарифмов (Кацай И.);

3. Методы решения логаримических уравнений (Жуков Р.);

4. Логарифмические уравнения в заданиях ЕГЭ (Чернявская А.).

Фрагмент урока 3.

Тема: Решение логарифмических уравнений

Цель: закрепить теоретические знания и практические навыки по теме «Логарифмические уравнения»

Тип урока: урок-семинар

Ход урока

I. Организационный момент

II. Обсуждение тем учащимися

III. Итог урока

IV. Домашнее задание.

Проводимые занятия вызвали интерес у учащихся – они более активно работали на уроках, с готовностью выполняли задания учителя, стремились прийти к верному результату. Особенный интерес вызвала работа на уроке-семинаре. Во-первых, учащимся было интересно выслушать доклады своих одноклассников. Во-вторых, на уроке ученики общались, бурно обсуждая вопросы семинара. В-третьих, урок-семинар не требует жёсткой дисциплины, что уменьшает нагрузку на учащихся.

Урок в тестовой форме также вызвал немалый интерес у детей, т.к. с данным видом заданий учащиеся сталкивались на экзаменах ОГЭ, и им было любопытно вспомнить работу по тестам.

В связи с компьютеризацией образования и личных интересов учеников, обучающий урок проходил с высокой работоспособностью. Применение ИКТ даёт наглядный материал, что способствует лучшему усвоению.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что разнообразие форм проведения и применение различных технологий повышает интерес к обучению, вследствие чего качественнее вырабатываются умения и навыки.

Контрольный этап

В качестве контрольного эксперимента мы использовали наблюдения и проверочную работу, которую проводили на первом этапе эксперимента.

Цели данного этапа: проследить динамику повышения уровня успеваемости при обучении решению логарифмических уравнений; выявить динамику эффективности комплексного применения различных форм обучения.

На контрольном этапе были использованы следующие методы:

- беседа с учащимися;

- самостоятельная работа учащихся;

- наблюдение за работой учащихся на уроках.

Цель беседы с учащимися была следующей: выяснить, улучшились ли результаты успеваемости, повысился ли у учащихся интерес к предмету.

После проведения трёхнедельного эксперимента была проведена беседа с детьми. В ходе беседы выяснилось, что количество человек, заинтересованных предметом, возросло. Учащимся понравились новые формы проведения уроков, особенно их разнообразие.

Самостоятельная работа учащихся выдвинула достижение следующих целей: выявить умения, навыки при закреплении темы «Логарифмические уравнения»; рассмотреть, сделать вывод о том, как положительно повлиял эксперимент на усвоение учебного материала, насколько повысилась степень усвоения обучающимися темы «Решение логарифмических уравнений»; сравнить полученные результаты на констатирующем этапе.

Самостоятельная работа включает следующие знания, умения, навыки:

- умение оперировать свойствами логарифмов;
- знание методов решения логарифмических уравнений;
- применение свойств логарифма к решению логарифмических уравнений;
- умение работать с графиком логарифмической функции.

Результаты тестирования и самостоятельной работы контрольного этапа представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Результаты самостоятельной работы контрольного эксперимента

Ф.И.	Форма тестирования		Оценка	Письменная работа		Оценка
	Верный ответ	Неверный ответ		Верный ответ	Неверный ответ	
Жуков Р.	1,2,3,4,5,6	7,8	4	1,2,3,4,5,7	6,8	4
Кацай И.	1,2,3,5	4,6,7,8	3	2,3,5	1,4,6,7,8	2
Чернявская А.	все верны	-	5	1,2,3,4,5,6,7	8	4
Чуваков А.	1,2,3,5,7,8	4,6	4	1,4,6,7,8	2,3,5	3

Проанализировав ответы учащихся по двум формам проведения, и сравнив полученные результаты с результатами на констатирующем этапе, следует сделать вывод, о том, что незначительно, но успеваемость класса улучшилась. Если на первом этапе эксперимента не было ни одной высокой оценки и при выполнении теста были неудовлетворительные оценки, то на последнем успеваемость – 100%, из них один обучающийся получил отметку «5». Применение различных, и даже новых форм уроков, даёт положительные результаты. Но стоит отметить, что разнообразие применимых технологий на уроках требует систематического вовлечения в процесс обучения.

Значительную часть в успеваемости учеников играет активность на уроке. Поэтому важно пронаблюдать за работой учеников и сравнить полученные сведения со сведениями, полученными на первом этапе.

Цель наблюдения: провести наблюдение и выяснить, насколько у учащихся повысился познавательный интерес и активность на уроке.

Результаты наблюдений отражены в таблице 2.4.

Таблица 2.4. Результаты активности на уроке

Ф.И.	Активенна уроке	Средне активен	Пассивен
Жуков Р.	+		
Кацай И.			+
Чернявская А.	+		
Чуваков А.	+		
Процентное соотношение активности	75%	0	25%

Таким образом, повышение познавательной активности выявлено у двух человек. После проведенных уроков учащиеся стали более заинтересованными уроками математики с использованиями тестовых технологий и компьютеризации, что обусловлено тем, что проводилась систематическая работа на повышение познавательного интереса.

Следовательно, разнообразие форм и методов позволяет обучающимся увидеть проблему изучаемой темы с различных сторон. Современное образование таково, что учащимся должен предоставляться выбор в построении процесса изучения предметов. Оперируя разнообразием образовательных методов, можно добиться максимального результата в обучении математике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Логарифмические уравнения – одна из основных тем курса математики средней школы. Её особенность заключается, во-первых, в том, что она не тянется на протяжении всего обучения, а изучается лишь в 11 классе. Во-вторых, этой теме стоит уделить большое внимание, ведь большинство заданий ЕГЭ по математике содержит логарифмические уравнения. Это относится как к работам профильного, так и базового уровня.

В ходе исследования над проблемой были решены поставленные нами задачи:

1. Провели анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы. Решение уравнений – это непростая задача, стоящая перед каждым школьником. Анализируя психолого-педагогическую литературу, были выявлены особенности изучения уравнений, а также методы грамотного введения в изучение математики данного вида математической модели.

2. Провели анализ программных документов, школьных учебников, пособий по подготовке к ЕГЭ по теме «Логарифмические уравнения». В их

числе учебники, входящие в Федеральный перечень учебников по алгебре 10-11 классов, примерная программа общеобразовательных учреждений по алгебре и началам анализа. На их основе в параграфе 2.2. был выполнен логико-дидактический анализ.

3. Провели разбор заданий ЕГЭ по математике по теме «Логарифмические уравнения». Было выявлено, что логарифмические уравнения встречаются в задании 7 базового уровня, и в заданиях 5,13(С1), 18(С6) профильного уровня.

4. Разработали методические рекомендации для успешного овладения учащимися методов логарифмических уравнений. Методические рекомендации были разработаны в параграфе 2.2. и носили следующий характер:

1)На первоначальном этапе обучения важно дать содержательный, и в тоже время понятный теоретический материал обучающимся. Познать практические основы решения невозможно без знаний теории.

2)Обучая решению логарифмических уравнений, важно выработать у учащихся умение находить ОДЗ уравнений. Это нужно для того, чтобы в дальнейшем не делать проверку.

3)Практическую часть обучения следует начинать с простейших заданий, постепенно переходя к более сложным. Важно выработать систему навыков и умений по данной теме.

4)Тема «Логарифмические уравнения» - одна из самых сложных в курсе алгебры 11 класса. Поэтому ей нужно уделять больше внимания при изучении, учитывая то, что работы ЕГЭ по математике строятся на заданиях данной темы.

5.Провели опытную работу. Экспериментальная часть работы проходила на базе МБОУ «Вознесеновская СОШ» Ивнянского района с учащимися 11 класса. Главной целью исследования было выяснение условий эффективного усвоения знаний по теме «Логарифмические уравнения». Опираясь на результаты эмпирического метода исследования можно заключить, что залог к активизации познавательной деятельности – разнообразие форм и методов обучения.

Делая опору на вышеизложенное, можно сказать, что цель работы выявить теоретико-методические условия изучения логарифмических уравнений и разработать научно обоснованные методические рекомендации по обучению учащихся этой теме была достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала анализа. Итоговая аттестация выпускников [Электронный ресурс]. – М., 2003. – Электрон. Опт. Диск (CD-Rom).

2. Алимов Ш.А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень/ Ш.А. Алимов, Ю.М.Колягин, М.В. Ткачева и др. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2012. – 464 с.: ил.

3.Балаян Э.Н. Математика: задачи типа С5: уравнения, неравенства и системы с параметрами/ Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д Феникс, 2014. – 223с.

4. Виленкин Н.Я. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин,В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С. И. Шварцбурд,- 30-е изд.,стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 288с.:ил.

5. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин,В.И. О.С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд,- 30-е изд.,стер. – М. : Мнемозина, 2014. – 288с.:ил.

6. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре: учеб.пособие для 8-9 кл. с углуб. изучением математики / М.Л.Галицкий, А. М.Гольдман, Л.И. Звавич. – 7-е изд. М.: Просвещение, 2001. – 271 с.

7. ЕГЭ 2019. Математика. Базовый уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ А.В. Антропов, А.В. Забелин, Е.А. Семенко, Н.А. Сопрунова, С.В. Станченко, И.А. Хованоская, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019. – 199, [1] с.

8. ЕГЭ 2019. Математика. Базовый уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ А.В. Антропов, А.В. Забелин, Е.А. Семенко, Н.А. Сопрунова, С.В. Станченко, И.А. Хованоская, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019. – 270, [2] с.

9. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ И.В. Ященко, М.А. Волокевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019. – 263, [1] с.

10. Жукова Н. Д. История логарифмов. Различные подходы к определению логарифма // Молодой ученый. — 2019. — №18. — С. 78-81. — Режим доступа:https://moluch.ru. Дата обращения: 14.05.2019.

11. История логарифмов [Электронный ресурс]/ Википедия – интернет-энциклопедия. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org – свободный. Дата обращения: 27.03.2019г.

12. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/ Под ред. А. П. Юшкевича М.: Наука, 1972. Т.II. 300 с.; Т. III. 495 с.

13. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 384с.: ил.

14. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа М.: Дрофа, 2004. Т.I.- 687 с.

15. ЛисаченкоО.А., Яковенко И.В. Особенности методики построения системы задач для изучения темы «Логарифмы. Логарифмические уравнения».Вестник Таганрогского государственного педагогического института. 2017 № 1 .С. 287-292.

16. Логарифмическая функция, её свойства и график [Электронный ресурс]/ Якласс – образовательный портал. Режим доступа: http://www.yaklass.ru – свободный. Дата обращения: 02.05.2019г.

17. Ляхова Н.Е. Использование ограниченности функций в школьном курсе математики / Н.Е. Ляхова, А.И. Гришина, И.В. Яковенко // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. 2015. № 1. – С. 3-10.

18. Ляхова, Н.Е., Яковенко, И.В. Методы решения уравнений и неравенств в задачах с параметрами: учеб. пособие/Н.Е.Ляхова, И.В. Яковенко; отв.ред. проф. А.А. Илюхин. –Таганрог: Изд-во Таганрог.ин-та имени А.П.Чехова,2014. – 92 с.

19. Математика. Методические указания по подготовке к вступительным экзаменам./СПбГИТМО. – СПб., 2000.

20. Математика. Решение уравнений и неравенств [Электронный ресурс]. – М., 2017. – Электрон. Опт. Диск (CD-Rom).

21. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, 11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций

(базовый и углублённый уровни)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.: ил.

22. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. Уровни/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.- 8-е изд. - М.: Просвещение, 2009. – 464 с.: ил.

23. Прокина-Игнатушина И. В. Об истории возникновения понятия логарифмической функции// Научные труды молодых ученых ОГПУ. Оренбург: ОГПУ, 2000. С. 43-49.

24. Различные подходы к определению логарифма и логарифмической функции [Электронный ресурс]/ Инфоурок – образовательный портал. Режим доступа:https://infourok.ru – свободный. Дата обращения: 25.03.2019г.

25. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Задания с развернутым ответом/ Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2019. – 654, [2] с.

26. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. – М.: Просвещение, 1995.

27. Севрюков П. Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. – 352 с.

28. Столяр А.А. Методы обучения математике: учеб.пособие. – Минск: ВШ, 1966. – 191 с.

29. Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие/Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. Проф. Т.А. Ивановой. – Н.Новгород:НГПУ, 2003.

30. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзаменам. – М.: Рольф, 1997.

31. Шахмейстер А.Х. Логарифмы: Учебное пособие по математике. – Спб: Петроглиф, Виктория плюс, МЦНМО, 2016. – 290 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Логарифмические уравнения в заданиях ЕГЭ

Простейшие логарифмические уравнения

1. Найдите корень уравнения$\log_2(4-x)=7$.
2. Найдите корень уравнения$\log_5(4+x)=2$.
3. Найдите корень уравнения$\log_2(4-x)=\log_2 11$.
4. Найдите корень уравнения$\log_2(15+x)=\log_2 3$.
5. Найдите корень уравнения$\log_8(x+5)=\log_8(2x-2)$.

6. Найдите корень уравнения$\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2$.
7. Найдите корень уравнения$\log_3(5 - x) = 2\log_3 2$.
8. Найдите корень уравнения$\log_7(x^2 + 5x) = \log_7(x^2 + 6)$.
9. Найдите корень уравнения$\log_3(3 - 4x) = \log_3(1 - 5x) + 1$.

Задания 13 (С1) профильного уровня

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни, принадлежащие промежутку

1В. а) $\log_2(x^2 - 14x) = 5$ б) $\left[\log_3 0{,}1; 5\sqrt{10}\right]$

2В. а)$6\log_8^2 x - 5\log_2 x + 1 = 0$ б) $[2; 2{,}5]$

3В. а)$1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$ б) $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$

4В. а) $\log_2^2(x^2) - 16\log_2(2x) + 31 = 0$; б) $[3; 6]$

5В. а) $\lg^2(10x) + \lg(10x) = 6 - 3\lg\frac{1}{x}$ б) $\left[\log_3 \frac{1}{2}; \log_3 2^{100}\right]$

6В. а) $\log_3 x + 5\log_x 2 = 6$; б) $\left[\sqrt{2}; \sqrt{1000}\right]$

7В. а) $\log_{0,5} x + 3\log_x 0{,}5 = 4$; б) $\left[\frac{1}{16}; \frac{1}{7}\right]$

8В. а) $\frac{1}{\lg(3x-2)} + \frac{2}{\lg(3x-2) + \lg 0{,}01} = -1$; б) $\left[\sqrt{0{,}5};\ \sqrt{17}\right]$

9В. а) $\frac{6}{\lg(x+7)+2} - \frac{6}{\lg(x+7)-3} = 5$; б) $\left[\log_2 \frac{1}{64}; \log_2 7\right]$

10В. а) $\lg^2 x^2 + \lg(10x) - 6 = 0$; б) $\left[\frac{1}{10}; \sqrt{101}\right]$

11В. а) $\log_2(x + 2)^2 + \log_2(x + 10^2) = 4\log_2 3$; б) $[-8; 0]$

12В. а) $\lg^2(8x - 9) = \ lg^2(6x - 4)$; б) $[1; 2]$

13В. а) $\lg(10x^2)\lg x = 1$; б) $[\log_5 2; \log_5 600]$

Логарифмические уравнения с параметром (С6)

1. При каких значениях параметра m уравнение $2\log^2_{\frac{1}{2}} x - |\log_3 x| + m = 0$ имеет три корня?

2. При каком значении параметра aуравнение $\log_{0,2}(\frac{1}{5})^{2x} + 4a = x$ имеет два корня?

3. При каком значении параметра m уравнение $\lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(m - 3x)$имеет единственное решение?

4. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $\log_a|x - 1| - \log_a x = 1$равна 34?

5. При каком значении параметра a уравнение $\log_{a^2+3}(2ax^2 + 1 - a) = 2$имеет один корень?

6. При каком значении параметра a уравнение $\log_{a+1}(x^2 + a(2x - 1) + a^2 + 7) = 2$имеет один корень?

Приложение 2

Тест по теме: «Логарифмические уравнения»

Задание	Варианты ответов
1. Упростите выражение $\log_6 9 + 2\log_6 2$	1) 36 2)1 3) 4 4) 2 5) 0

2. Произведение корней уравнения $3\log_3{}^2 x - 13\log_3 x + 4 = 0$ равно	1) 243 2)81 3) $81\sqrt[3]{3}$ 4) $\sqrt[3]{3}$ 5)$3\sqrt[3]{3}$
3. Если x_0 – корень уравнения $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{22}{3}$, то значение выражения $x_0(x_0 - \frac{128}{9})^{-1} + 1$равно	1) 12 2) 7 3)10 4)8 5)13
4. Постройте график функции $y = \log_2 x$ и определите приближенное значение y при x=6	1) 3 2) 2,4 3) 2,6 4) 12 5)2,85
5. Корень уравнения (или их сумма) $\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$ принадлежит промежутку	1) (3;3,3) 2) (-0,1; 0,6) 3) $[2; 2{,}3)$ 4) (3,9; 4,3) 5)другой промежуток
6. Произведение корней уравнения $\log_2 x - \log_x 2 = 1{,}5$ равно	1) $2\sqrt{2}+1$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{2}-1$ 4) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 5) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
7. Если x_0 – корень уравнения $\log_9\log_2\log_2 x = 0$, то значение выражения $x_0(x_0-8)$ равно	1) -19 2)-16 3) -14 4) -13 5) 16
8. Произведение корней уравнения $(3x^2-4x-7)\log_3(2-x) = 0$ принадлежит промежутку	1) $[1; 3)$ 2) $(-2; 0)$ 3) другой промежуток 4) (3;6) 5) $[0; 1)$

Приложение 3

Письменная работа по теме: «Логарифмические уравнения»

1. Упростите выражение $\log_9 121 + 2\log_9\frac{9}{11}$

2.Чему равно произведение корней уравнения $2\log_2^2 - 9\log_2 x + 4 = 0$?

3. Чему равно значение выражения $x_0(x_0 - 224)^{-1} + 1$, если x_0 – корень уравнения $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{22}{3}$?

4. Постройте график функции $y = \log_3 x$ и найдите приближенное значение при x=5?

5. Какому промежутку принадлежит корень уравнения (их сумма) $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1$?

6. Чему равно произведение корней уравнения $\log_5 x - \log_x 5 = 1{,}5$?

7. Чему равно значение выражения $x_0(x_0 - 2)$, если x_0 - корень уравнения $\log_8 \log_2 \log_2 x = 0$?

8. Какому промежутку принадлежит корень (или их сумма) уравнения $\log_3(1-x) = \log_3(17 - x - x^2)$?

Приложение 4 (электронное приложение)

Приложение 5

Самостоятельная работа в тестовой форме

1.Решите уравнение $\log_4(x+3) = \log_4(4x-15)$

а) 7 б) 6 в) 2,5 г)-3

2. Решите уравнение $\log_8 2^{6x-3} = 4$

а) 2,5 б)3,5 в) $\log_8 4$ г) 0

3. Укажите наименьший корень уравнения $2\log_4 x + 3(\frac{1}{\log_4 x}) = 5$

а) 2 б) 8 в)16 г)4

4. Найдите корень уравнения $3^{\log_{27}(3x-2)} = 7$

а) 67 б)115 в)89 г)128

5.На каком промежутке находится корень уравнения $lgx + 2\sqrt{lgx} - 2\sqrt{lgx} = 1$?

а) (0; 4) б) (-3; 1) в) (7;12) г) $[13; 21]$