ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДВОЙНЫХ СУММ ГАУССА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
01.04.01 Математика
магистерская программа Теория чисел
очной формы обучения, группы 12001732
Васильевой Надежды Владимировны

Научный руководитель
к. ф.-м. н.
Куртова Л.Н.

Рецензент
доцент кафедры программного
обеспечения вычислительной техники и
автоматизированных систем
БГТУ им. В.Г. Шухова,
к. ф.-м. н.
Шевцова М.В.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

c — положительная постоянная, в различных формулах, вообще говоря, различная;

ε — произвольно малое положительное постоянное число, $\varepsilon < 1$;

$p,\ p_0,\ p_1,\ p_2$ – простые числа;

$exp\ x = e^x$;

запись $d|n$ означает, что n кратно d;

запись $p^\alpha \| n$ означает, что α – наивысшая степень p, которая делит n;

запись $a \equiv b\ (mod\ m)$ означает, что $m|(a-b)$;

$$\chi(a; m, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv b\ (mod\ m), \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \equiv 1\ (mod\ 4), \\ i, & \text{если } p \equiv 3\ (mod\ 4). \end{cases}$$

(a, b) – наибольший общий делитель чисел $a,\ b$;

записи $A = O(B)$ и $A \ll B$ означают, что $|A| \leq cB$;

$S(q, u, v) = \sum_{l=1}^{q} e^{2\pi i(ul^2+vl)/q}$ – сумма Гаусса;

$K(q, u, v) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i(ul+vl^*)/q}$ – сумма Клостермана, $ll^* \equiv 1(mod\ q)$.

$K_q(q, u, v) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} \left(\frac{l}{q}\right) e^{2\pi i(ul+vl^*)/q}$ – обобщенная сумма Клостермана, $ll^* \equiv 1(mod\ q)$.

$\left(\frac{l}{q}\right)$ – символ Якоби, который определяется равенством $\left(\frac{l}{q}\right) = \left(\frac{l}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{l}{p_n}\right)$, где $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ и $\left(\frac{l}{p_i}\right) \equiv l^{\frac{p_i-1}{2}} (mod\ p_i)$.

ВВЕДЕНИЕ

В аналитической теории чисел при доказательстве различных утверждений часто используются тригонометрические суммы.

Пусть $\varphi(x) = a_0 + a_q x + \ldots + a_n x^n$ – многочлен с целыми коэффициентами, $(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ q) = 1$, тогда сумма

$$S_\varphi(q) = \sum_{x=1}^{q} \left(\cos\left(2\pi \frac{\varphi(x)}{q}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{\varphi(x)}{q}\right)\right) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{\varphi(x)}{q}}$$

называется тригонометрической суммой, соответствующей функции $\varphi(x)$.

Простейшими примерами таких функций являются:

1. Сумма геометрической прогрессии $S_{ax}(q) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax}{q}}$ со знаменателем $e^{2\pi i \frac{a}{q}}$, соответствующая линейной функции $\varphi(x) = ax$.

$$S_{ax}(q) = \begin{cases} 0, & a \not\equiv 0 (mod\ q), \\ q, & a \equiv 0 (mod\ q). \end{cases}$$

2. Сумма Гаусса $S_{ux^2+vx} = S(q, u, v) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ux^2+vx}{q}}$, соответствующая квадратичной функции $\varphi(x) = ux^2 + vx$.

Впервые тригонометрические суммы, соответствующие квадратичной функции $\varphi(x) = ax^2$, рассмотрел Карл Гаусс [1] в 1795 году для доказательства квадратичного закона взаимности. Им были получены следующие точные формулы:

$$S_{ax^2}(p) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^2}{p}} = \begin{cases} \sqrt{p}, & p \equiv 1 (mod\ 2), \\ \sqrt{2p}, & p \equiv 0 (mod\ 4), \\ 0, & p \equiv 2 (mod\ 4), \end{cases}$$

где p – простое число.

Основной задачей, касающейся тригонометрических сумм, является получение оценок модуля этих сумм, напрямую связанных с точными формулами для них.

Первым получить оценку для тригонометрической суммы удалось Г. Вейлю. В своей работе [2] он доказал, что

$$S_{\varphi}(p) \ll n\sqrt{p}.$$

Тригонометрические суммы $S_{\varphi}(q)$ являются частным случаем сумм вида $\sum_{a<x\le b} e^{2\pi i \frac{\varphi(x)}{q}}$, оценками которых занимались такие математики, как Хуа Ло-Кен [3], Г. Вейль [4], ван дер Корпут [5], И.М. Виноградов [6].

Пусть p – простое число, тогда для каждого x, не кратного p существует число x^{*}, обратное к x, т.е. $x^{*} \cdot x \equiv 1 (mod\, p)$ и $x^{*} \equiv x^{p-2} (mod\, p)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = ux + vx^{p-2}$. Ей соответствует тригонометрическая сумма, которую можем записать в виде

$$S_{ux+vx^{p-2}}(q) = K(q,u,v) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{ux+vx^{*}}{q}},$$

в математической литературе известная как сумма Клостермана.

Наилучшей для отдельного q оценкой суммы Клоостермана является оценка А. Вейля [4], [7]:

$$K(q,u,v) \ll q^{1/2+\varepsilon}(u,v,q)^{1/2},$$

где ε – малое положительное число.

В 1962 году А.В. Малышев [8] получил точные формулы для суммы Клостермана от степени простого числа, т.е. для суммы вида $K(p^{\alpha},u,v)$.

В своих работах Г.Ф. Харди [9] и С. Рамануджан [10] изучали разложение мультипликативных функций в ряды по тригонометрической сумме

$$c_q(u) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{ux}{q}} = \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q} cos\frac{2\pi ux}{q},$$

которая является частым случаем суммы Клостермана при $v = 0$. В математической литературе данная тригонометрическая сумма носит название «суммы Рамануджана». Для нее справедлива оценка:

$$\left|c_q(u)\right| \leq (q, u).$$

Дальнейшее развитие теории тригонометрических сумм связано с рассмотрением многомерных случаев, когда функция, входящая в тригонометрическую сумму, зависит от нескольких переменных.

В 1966–1980 годах А.А. Карацуба [11], [12], [13] при участии своих учеников Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова создал теорию кратных тригонометрических сумм Г. Вейля:

$$S = \sum_{x_1=1}^{P_1} \dots \sum_{x_n=1}^{P_n} e^{2\pi i F(x_1,\dots,x_n)},$$

где $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t_1=1}^{Y_1} \dots \sum_{t_n=1}^{Y_n} \alpha(t_1, \dots, t_n) {x_1}^{t_1} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{t_n}$ с вещественными коэффициентами $\alpha(t_1, \dots, t_n)$.

Пусть $\bar{k} = (k_1; k_2)$ – вектор с положительными целочисленными координатами. Функция $Q(\bar{k}) = a{k_1}^2 + bk_1k_2 + c{k_2}^2$ называется бинарной квадратичной формой, которую можно представить в виде $Q(\bar{k}) = \frac{1}{2}\bar{k}^t A\bar{k}$, где матрица $A = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ является матрицей квадратичной формы.

Среди всех квадратичных форм выберем те, которые принимают только положительные значения, т.е. являются положительно определенными. Тогда определитель матрицы A: $det\, A = 4ac - b^2 = D > 0$.

Кроме того, будем рассматривать примитивные квадратичные формы, т.е. такие формы, для которых выполнены условия: $a \leq b \leq c$, $(a, b, c) = 1$. Для любой квадратичной формы можно с помощью элементарных действий получить эквивалентную ей примитивную квадратичную форму.

Множеству всех бинарных положительно определенных квадратичных форм с дискриминантом $-D$ можно поставить в соответствие множество классов идеалов мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d – свободное от квадратов число.

Каждый элемент $x \in F$ должен удовлетворять некоторому квадратному уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен $d = b^2 - 4ac < 0$. Любой элемент поля F имеет вид $x = x_1 + x_2\sqrt{d}$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$.

Число δ_F называется дискриминантом мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и определяется равенством: $\delta_F = d$, если $d \equiv 1 (mod\ 4)$; $\delta_F = 4d$, если $d \equiv 2, 3 (mod\ 4)$.

В работах С.А. Гриценко [14] и У.М. Пачева, Р.А. Дохова [15] рассматривается тригонометрическая сумма

$$G(q, l, \bar{m}) = \sum_{k_1=1}^{q} \sum_{k_2=1}^{q} exp\left(2\pi i \frac{l\left(a{k_1}^2 + bk_1k_2 + c{k_2}^2\right) + m_1k_1 + m_2k_2}{q}\right) =$$

$$= \sum_{\bar{k}\ mod\ q} exp\left(2\pi i \frac{lQ(\bar{k}) + \bar{m}^t \cdot \bar{k}}{q}\right),$$

которая называется двойной суммой Гаусса, соответствующей бинарной положительно определенной примитивной квадратичной форме $Q(\bar{k})$, дискриминант которой равен дискриминанту δ_F мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

В настоящей работе рассматриваются точные формулы для двойных сумм Гаусса.

Объектом исследования являются двойные суммы Гаусса.

Предмет исследования – точные формулы для двойных сумм Гаусса.

Цель работы заключается в изучении точных формул для двойных сумм Гаусса и их применение при решении задач аналитической теории чисел.

Задачи работы:

– ознакомиться с точными формулами для двойных сумм Гаусса, которые были получены в работах [14] и [15];

– провести сравнительный анализ полученных формул;

– применить точные формулы для двойных сумм Гаусса для представления особого ряда одной задачи с квадратичными формами.

В работе применяются различные методы математического анализа, а также методы из элементарной и аналитической теории чисел.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в последующих исследованиях, связанных с применением точных формул для двойных сумм Гаусса, а также при чтении специальных курсов по теории чисел.

Апробация результатов. Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик, 2018 год.
2. Международная научно-практическая и научно-методическая конференция «Математика и механика: вопросы и тенденции развития», Белгород, 2019 год.

По материалам работы опубликованы 3 статьи, тезисы доклада.

Работа состоит из 3 глав. В первой приводятся формы для одномерных и двойных суммах Гаусса и суммах Клостермана, необходимые для дальнейших исследований. Результаты работы сформулированы во 2 и 3 главах.

Во второй главе приводятся точные формулы для сумм Гаусса, обобщающие результаты [14] и проводится сравнительный анализ полученных формул с аналогичными формулами в статье [15].

В третьей главе рассматривается одна задача с квадратичными формами разных дискриминантов.

Пусть d_1, d_2 – отрицательные бесквадратные числа; $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ – мнимые квадратичные поля с дискриминантами δ_{F_1}, δ_{F_2}; $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формулы с определителями $D_1 = -\delta_{F_1}$, $D_2 = -\delta_{F_2}$.

В [16] получена асимптотическая формула для суммы:

$$I_{D_1,D_2}(n,h) = \sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}}.$$

Главный член асимптотической формулы

$$\frac{2\pi^2 n}{\sqrt{D_1D_2}}\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi i h l}{q}} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})$$

содержит двойные суммы Гаусса, соответствующие квадратичным формам $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$.

С использованием точных формул для сумм Гаусса было получено разложение главного члена асимптотической формулы на произведения по простым числам и показана положительность особого ряда асимптотической формулы.

Результатом исследования является следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$\Phi(q) = q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi i h l}{q}} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}).$$

Справедливы следующие утверждения:

1. Функция $\Phi(q)$ является мультипликативной.

2. Сумма особого ряда

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Phi(q)$$

является положительным числом.

Доказательство теоремы основано на равенствах для двойных сумм Гаусса от степени простого числа $G_1(p^\alpha, l, \bar{0})$ и $G_2(p^\alpha, -l, \bar{0})$ и равенств для суммы Клостермана $K(p^\alpha, -h, 0)$ и обобщенной суммы Клостермана $K_p(p^\alpha, -h, 0)$, полученных А.В. Малышевым [8].

ГЛАВА 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

В леммах 1-5 представлены точные формулы для сумм Гаусса

$$G(r,u,\bar{n}) = \sum_{\bar{k} \bmod r} exp\left(2\pi i \frac{uQ(\bar{k}) + \bar{n}^t \cdot \bar{k}}{r}\right),$$

где $Q(\bar{k}) = ak_1{}^2 + bk_1k_2 + ck_2{}^2$ – бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма, $D = 4ac - b^2 = -\delta_F$, δ_F – дискриминант мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, от степени простого числа, полученные Гриценко С.А. в работе [14].

Пусть $r = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, p_j – простые числа, $r_j = r/p_j^{\alpha_j}$, $(j = 1, \ldots, s)$.

Тогда справедливо равенство

$$G(r,u,\bar{n}) = \prod_{j=1}^{s} G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{n}\right).$$

Теперь достаточно вычислить суммы $G(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{n})$ при всех $j = 1, \ldots, s$.

В лемме 1 получена точная формула для двойной суммы Гаусса от степени простого числа, не являющегося делителей дискриминанта квадратичной формы, входящей в сумму Гаусса.

ЛЕММА 1.

Пусть $p_j\,|r$, $p_j \nmid D$, $u^*u \equiv 1\ (mod\ r)$, $r_j^*r_j \equiv 1\ \left(mod\ p_j^{\alpha_j}\right)$, $D_j^*D \equiv 1\left(mod\ p_j^{\alpha_j}\right)$.

Тогда справедливо равенство

$$G(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{n}) = exp\left(-\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha_j}} u^*\, r_j^* D_j^* Q_1(\bar{n})\right) G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{0}\right),$$

причем

$$G(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \overline{0}) = \begin{cases} 2^{\alpha_j}(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha_j}{4}}, & \text{если } p_j = 2 \\ p_j^{\alpha_j}\left(\dfrac{\delta_F}{p_j^{\alpha_j}}\right), & \text{если } p_j > 2, \end{cases}$$

где $\left(\frac{\delta_F}{p_j^{\alpha_j}}\right)$ – символ Якоби от числа δ_F по модулю $p_j^{\alpha_j}$.

В лемме 2 получена точная формула для двойной суммы Гаусса от степени простого числа $p > 2$, которое является делителем дискриминанта квадратичной формы.

ЛЕММА 2.

Пусть $p_j\,|r$, $p_j > 2$, $p_j|D$, $p_j \nmid a$, $u^*u \equiv 1(mod\, p_j^{\alpha_j})$, $a_j^* a \equiv 1(mod\, p_j^{\alpha_j})$, $r_j^* r_j \equiv 1\ (mod\, p_j^{\alpha_j})$, $(D/p_j)_j^*(D/p_j) \equiv 1\ (mod\, p_j^{\alpha_j})$.

Тогда справедливо равенство

$$G(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \overline{n}) = \varepsilon(p_j) p_j^{\alpha_j}\sqrt{p_j}\,\chi(Q_1(\overline{n});\ p_j, 0)\left(\frac{aur_j}{p_j}\right)\left(\frac{D/p_j}{p_j^{\alpha_j-1}}\right)\cdot$$

$$\cdot\, exp\left(-\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha_j}} u^* r_j^* (D/p_j)_j^* \frac{Q_1(\overline{n})}{p_j}\right),$$

где

$$\varepsilon(p_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_j \equiv 1\ (mod\ 4), \\ i, & \text{если } p_j \equiv 3\ (mod\ 4). \end{cases}$$

В лемме 3 приводятся формулы для суммы Гаусса от двойки в случае, когда дискриминант квадратичной формы будет четным, а $\frac{D}{4}$ – нечетным числами.

ЛЕММА 3.

Пусть $2|D$, $(B, 2) = 1$. Тогда

$$G(2, B, \overline{0}) = 0, \qquad G(2, B, \overline{n}) = G(2,1,\overline{n}).$$

В лемме 4 приводятся формулы для суммы Гаусса от степени двойки в случае, когда дискриминант квадратичной формы D – четным, а $\frac{D}{4}$ – нечетное число.

ЛЕММА 4.

Пусть $2^{\alpha}||r,\ \ \alpha \geq 2,\ \ 2|D, 2\nmid \frac{D}{4}\ \ ,\ \ r_2 = r/2^{\alpha},\ \ 2\nmid a,\ \ r_2^* r_2 \equiv\ 1\ (mod\ 2^{\alpha}),$ $u^* u \equiv 1\ (mod\ r), \left(\frac{D}{4}\right)^* \left(\frac{D}{4}\right) \equiv 1 (mod\ 2^{\alpha}),\ a^* a \equiv 1\ (mod\ 2^{\alpha}).$

Тогда справедливо равенство

$$G(2^{\alpha}, ur_2, \overline{n}) =\ 2^{\alpha}\ \chi(Q_1\ (\overline{n}); 4{,}0) \left(\frac{S(2^{\alpha}, aur_2, 0)}{2^{\alpha/2}}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{S(2^{\alpha}, aur_2 D/4{,}0)}{2^{\alpha/2}}\right) exp\left(-\frac{2\pi i}{2^{\alpha}} u^* r_2^* \left(\frac{D}{4}\right)^* \frac{Q_1(\overline{n})}{4}\right).$$

В лемме 5 приводятся формулы для суммы Гаусса от степени двойки в случае, когда и дискриминант квадратичной формы D, и $\frac{D}{4}$ – четные числа.

ЛЕММА 5.

Пусть $\ \ 2^{\alpha}||r,\ \ \ \alpha \geq 2,\ \ \ 2|\frac{D}{4},\ \ \ r_2 = r/2^{\alpha},\ \ \ 2\nmid a,\ \ \ a^* a \equiv 1\ (mod\ 2^{\alpha}),$ $r_2^* r_2 \equiv\ 1\ (mod\ 2^{\alpha}), \left(\frac{D}{8}\right)^* \left(\frac{D}{8}\right) \equiv 1 (mod\ 2^{\alpha}).$

Тогда, если$\alpha = 2,$ то

$$G(4, ur_2, \overline{n}) = 8\chi(n_1; 2{,}0)\chi(2an_2 - bn_1; 8{,}4)(1 + i^{aur_2})\ exp\left(\frac{-2\pi i}{16}\ a^* u^* r_2^* {n_1}^2\right).$$

Если $\alpha \geq 3$, то

$$G(2^{\alpha}, ur_2, \overline{n}) =\ 2^{\alpha+1}\chi(Q_1(\overline{n}); 8{,}0) \left(\frac{S(2^{\alpha}, aur_2, 0) S(2^{\alpha-1}, aur_2 D/8{,}0)}{2^{\alpha}}\right) \cdot$$

$$\cdot\ exp\left(-\frac{2\pi i}{2^{\alpha}} u^* r_2^* \left(\frac{D}{8}\right)^* \frac{Q_1(\overline{n})}{8}\right).$$

В леммах 6-12 приведены точные формулы для сумм Гаусса

$$G_A(q,l) = \sum_{m_1=1}^{q} \sum_{m_2=1}^{q} exp\left(2\pi i \frac{lQ_A(\overline{m})}{q}\right),$$

соответствующих классам идеалов A мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, полученные в работе [15] У.М. Пачевым и Р.А. Доховым.

В лемме 6 приводятся точные формулы для суммы Гаусса $G_A(q,l)$, когда дискриминант мнимого квадратичного поля взаимно прост с q.

ЛЕММА 6.

Пусть q – нечетное положительное число; l, a – целые числа, взаимно простые с q. Тогда, если $(\delta_F, q) = 1$, то

$$G_A(q,l) = \left(\frac{-\delta_F}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q,$$

где A – класс идеалов поля F дискриминанта δ_F.

В лемме 7 приводятся точные формулы для суммы Гаусса от степени двойки, когда дискриминант мнимого квадратичного поля является нечетным числом.

ЛЕММА 7.

Если a, b, c, l – целые числа, из которых b и l нечетные, то

$$G_A(2^\alpha; l) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^\alpha,$$

$D = b^2 - 4ac$ при любом $\alpha \geq 1$.

В лемме 8 приводятся точные формулы для суммы Гаусса $G_A(q,l)$, когда дискриминант мнимого квадратичного поля делится на q, или имеет с ним общий делитель d.

ЛЕММА 8.

Пусть q − нечетное положительное число; $l,\ a$ − целые числа, взаимно простые с q и δ_F – дискриминант квадратичного поля $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Тогда

1) Если $q \nmid \delta_F$, то

$$G_A(q,l)=\left(\frac{la}{d}\right)\cdot\left(\frac{-D'}{q'}\right)i^s\sqrt{d}\cdot q,$$

где $d=(\delta_F,q)$,

$$s=\begin{cases}0, & q,\ q'\equiv 1\ (mod\ 4),\\ 1, & q\cdot q'\equiv -1\ (mod\ 4),\\ 2, & q,\ q'\equiv -1\ (mod\ 4),\end{cases}$$

$$D'=\frac{D}{d},\quad q'=\frac{q}{d};$$

$\left(\frac{\cdot}{d}\right),\ \left(\frac{\cdot}{q'}\right)$ – символ Якоби.

2) Если $q|\delta_F$, то

$$G_A(q,l)=\left(\frac{la}{d}\right)\cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}q\sqrt{q}.$$

В лемме 9 приводятся точные формулы для сумм Гаусса от степени двойки, когда дискриминант мнимого квадратичного поля D является четным, а $\frac{D}{4}$ – нечетным числами.

ЛЕММА 9.

Пусть$(\delta_F,2^\alpha)=4$ и $l,\ a$ – нечетные числа.

Тогда

$$G_A(2^\alpha;l)=\begin{cases}(-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha}\cdot i^{la}\cdot 2^{\alpha+1}, & \text{при}\ \ |D|/4\equiv 1\ (mod\ 4),\\ (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha}\cdot 2^{\alpha+1}, & \text{при}\ \ |D|/4\equiv -1\ (mod\ 4),\end{cases}$$

где $D=-\delta_F$, a – первый коэффициент бинарной квадратичной формы, соответствующей идеалу A.

В лемме 10 приводятся точные формулы для сумм Гаусса от степени двойки, когда дискриминант мнимого квадратичного поля D и $\frac{D}{4}$ – четные числа.

ЛЕММА 10.

Пусть $(\delta_F, 2^\alpha) = 8$ и l, a – нечетные числа.

Тогда

$$G_A(2^\alpha; l) = \begin{cases} i^{la} \cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2}, & \text{при } |D|/8 \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ 2^{\alpha+1}\sqrt{2}\,, & \text{при } |D|/8 \equiv -1 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

В лемме 11 рассматриваются точные формулы для сумм Гаусса от числа $q = 2^a \cdot q_1$, когда дискриминант мнимого квадратичного поля D является четным, а $\frac{D}{4}$ – нечетным числами.

ЛЕММА 11.

Пусть $q = 2^a \cdot q_1$ – целое положительное число; q_1 – нечетно; D – дискриминант примитивной бинарной квадратичной формы $Q_A(\overline{m})$, соответствующей идеалу A квадратичного поля F дискриминанта $\delta_F = D$, причем $\frac{|D|}{4} \equiv \pm 1 \ (mod\ 4)$.

Тогда

$$G_A(q, l) = \begin{cases} \gamma_d(q, l, D) i^{q_1 la} \left(\frac{a}{d}\right), & \text{при } |D|/4 \equiv 1 (mod\ 4), \\ \gamma_d(q, l, D) \left(\frac{a}{d}\right), & \text{при } |D|/4 \equiv -1 (mod\ 4), \end{cases}$$

где

$$\gamma_d(q, l, D) = \left(\frac{2^\alpha}{d}\right) \cdot \left(\frac{|D|: d}{q_1}\right) i^S \cdot (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha+1} \cdot \sqrt{d},$$

$d = (q_1, D)$, a – первый коэффициент формы $Q_A(\overline{m})$.

В лемме 12 рассматриваются точные формулы для сумм Гаусса от числа $q = 2^a \cdot q_1$, когда дискриминант мнимого квадратичного поля D и $\frac{D}{4}$ – четные числа.

ЛЕММА 12.

Пусть $q = 2^a \cdot q_1$ – целое положительное число; q_1 – нечетно; D – дискриминант примитивной бинарной квадратичной формы $Q_A(\overline{m})$, соответствующей идеалу A квадратичного поля F дискриминанта $\delta_F = D$, причем $\frac{|D|}{8} \equiv \pm 1 \ (mod\ 4)$.

Тогда

$$G_A(q,l) = \begin{cases} \gamma_d(q,l,D) i^{q_1 la} \left(\frac{a}{d}\right), & \text{при } |D|/8 \equiv 1 (mod\ 4), \\ \gamma_d(q,l,D) \left(\frac{a}{d}\right), & \text{при } |D|/8 \equiv -1 (mod\ 4), \end{cases}$$

где

$$\gamma_d(q,l,D) = \left(\frac{2^\alpha}{d}\right) \cdot \left(\frac{|D|: d}{q_1 : d}\right) i^S \cdot \sqrt{d} \cdot q_1 \cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2},$$

$$d_1 = (D, q_1).$$

В лемме 13 приводятся точные формулы для одномерной суммы Гаусса.

ЛЕММА 13.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если $(q, 2l) = 1$, то

$$S(q,l,m) = \exp\left(-\frac{2\pi i (4l)^* m^2}{q}\right) \left(\frac{l}{q}\right) S(q, 1,0),$$

где $4l(4l)^* \equiv 1\ mod(q)$, $\left(\frac{l}{q}\right)$ – символ Якоби.

2. Если $(q, 2) = 1$, то

$$S(q, 1,0) = \begin{cases} \sqrt{q}\ , \text{если } q \equiv 1\ (mod\ 4) \\ i\sqrt{q}, \quad \text{если } q \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases} = i^{\frac{(q-1)^2}{4}} \sqrt{q}.$$

3. Если $(l,2)=1$, то

$$S(2^\alpha,l,0)=\begin{cases}0\,, & \text{если } \alpha=1,\\ \left(\dfrac{2}{l}\right)^\alpha 2^{\alpha/2}(1+i^l), & \text{если } \alpha>1.\end{cases}$$

В лемме 14 приводятся точные формулы для сумм Клостермана от степени простого числа.

ЛЕММА 14.

Пусть

$$K(q,u,v)=\sum_{\substack{x=1\\(x,q)=1}}^{q} e^{2\pi i\frac{ux+vx^*}{q}}$$

– сумма Клостермана, $x^*\cdot x\equiv 1(mod\ q)$. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(u,p)=1$, $\alpha>1$.

Тогда

$$K(p,u,0)=-1, \qquad K(p^\alpha,u,0)=0.$$

2. Пусть $u=p^{\alpha_1}u_1$, $(u_1,p)=1$, $1<\alpha\le\alpha_1$, $s>1$.

Тогда

$$K(p^\alpha,u,0)=p^{\alpha-1}(p-1), \qquad K(p^{\alpha_1+1},u,0)=-p^{\alpha_1},$$
$$K(p^{\alpha_1+s},u,0)=0.$$

В лемме 15 приводятся равенства для обобщенной суммы Клостермана.

ЛЕММА 15.

Пусть p – нечетное простое число и

$$K_p(p^\alpha,-h,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-\frac{2\pi ihl}{p^\alpha}},$$

– обобщенная сумма Клостермана.

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(u,p)=1$, $\alpha>1$.

Тогда

$$K_p(p,u,0)=S(p,u,0),\qquad K_p(p^{\alpha},u,0)=0.$$

2. Пусть $u=p^{\alpha_1}u_1$, $(u_1,p)=1$, $1<\alpha\le\alpha_1$, $s>1$.

Тогда

$$K_p(p^{\alpha},u,0)=0,\qquad K_p(p^{\alpha_1+1},u,0)=p^{\alpha_1}S(p,u_1,0),$$
$$K_p(p^{\alpha_1+s},u,0)=0.$$

ГЛАВА 2. ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДВОЙНЫХ СУММ ГАУССА

В данной главе проводится сравнительный анализ точных формул для двойных сумм Гаусса, полученных в работах С.А. Гриценко [14] и Р.А. Дохова, У.М. Пачева [15].

В [14] рассматривается двойная сумма Гаусса

$$G(r,u,\bar{n}) = \sum_{\bar{k}\ mod\ r} exp\left(2\pi i \frac{uQ(\bar{k}) + \bar{n}^t \cdot \bar{k}}{r}\right),$$

где $Q(\bar{k}) = ak_1{}^2 + bk_1k_2 + ck_2{}^2$ – бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма, $D = 4ac - b^2 = -\delta_F$, δ_F – дискриминант мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

В [15] изучается частный случай данной суммы

$$G_A(q,l) = \sum_{m_1=1}^{q} \sum_{m_2=1}^{q} exp\left(2\pi i \frac{lQ_A(\bar{m})}{q}\right) = G(q,l,\bar{0}),$$

соответствующих классам идеалов A мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

В леммах 1–5 предыдущей главы приводятся равенства для $G(p_j^{a_j}, ur_j, \bar{n})$ в случаях, когда дискриминант поля не делится на p_j, делится на p_j и для сумм Гаусса по степеням двойки.

В леммах 6–12 предыдущей главы представлены точные формулы для суммы$G_A(q,l)$. В дальнейшем, будем использовать следующее обозначение:

$$G_A(q,l) = G(q,l,\bar{0}).$$

Заметим, что, в леммах 6–12 представлены конечные равенства для двойной суммы Гаусса, в отличие от лемм 1–5, в которых для получения точных равенств, необходимо найти произведение по степеням простых чисел.

Проведем сравнения формул, описанных в леммах 6–12, с аналогичными формулами, которые можно получить из лемм 1–5.

1 случай.

Пусть q – нечетное положительное число; l – целое число, взаимно простое с q; $(\delta_F, q) = 1$.

Согласно лемме 6, получаем, что

$$G(q, l, \overline{0}) = \left(\frac{-\delta_F}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q.$$

Чтобы сравнить данный результат с результатом из [14], необходимо представить q в виде $q = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, p_j – простые числа, $q_j = q/p_j^{\alpha_j}$, $(j = 1, \ldots, s)$.

Тогда справедливо равенство

$$G(q, l, \overline{0}) = \prod_{j=1}^{s} G\left(p_j^{\alpha_j}, lq_j, \overline{0}\right),$$

и для каждой суммы Гаусса $G\left(p_j^{\alpha_j}, lq_j, \overline{0}\right)$ от степени простого числа можем записать точную формулу, используя лемму 1.

Получаем, что

$$G(q, l, \overline{0}) = \prod_{j=1}^{s} p_j^{\alpha_j}\left(\frac{\delta_F}{p_j^{\alpha_j}}\right) = q\left(\frac{\delta_F}{q}\right).$$

Сравниваем полученное равенство с равенством из леммы 6:

$$q\left(\frac{\delta_F}{q}\right) = \left(\frac{-\delta_F}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q.$$

Эти формулы совпадают, так как $\left(\frac{\delta_F}{q}\right) = \left(\frac{-\delta_F}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}}$.

Следовательно, точные формулы в [14] и [15] для случая, когда q – нечетное число, взаимно простое с дискриминантом мнимого квадратичного поля, совпадают.

2 случай.

Пусть $q = 2^{\alpha}$, a, b, c, l – целые числа, из которых b и l нечетные. Тогда из леммы 7 имеем

$$G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Так как b – нечетное число, то $D = b^2 - 4ac$ будет нечетным. Тогда $D = \delta_F$ и $\delta_F \equiv 1\ (mod\ 4)$.

Для суммы Гаусса можем записать еще одно равенство, используя лемму 1:

$$G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right) = 2^{\alpha}(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha}{4}}.$$

Чтобы формулы совпадали, нужно проверить выполнение равенства

$$(-1)^{\frac{D^2-1}{8}\alpha} = (-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha}{4}}.$$

Так как $D = \delta_F$ и $\delta_F \equiv 1\ (mod\ 4)$, то будем иметь

$$(-1)^{\frac{D^2-1}{8}\alpha} = (-1)^{\frac{(-\delta_F)^2-1}{8}\alpha} = (-1)^{\frac{(-\delta_F-1)(-\delta_F+1)}{8}\alpha} =$$
$$= (-1)^{\frac{-(\delta_F+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha}{4}} = (-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha}{4}}.$$

Следовательно, точные формулы в [14] и [15] для случая, когда q – степень двойки и дискриминант мнимого квадратичного поля является нечетным числом, совпадают.

3 случай.

Пусть q – нечетное положительное число; a, l – целые числа, взаимно простые с q; $q|\delta_F$.

Согласно лемме 8, получаем, что

$$G(q, l, \overline{0}) = \left(\frac{la}{d}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q\sqrt{q},$$

где $d = (\delta_F, q) = q$.

Чтобы сравнить данный результат с результатом из [14], необходимо представить q в виде $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$, p_j – простые числа, $q_j = q/p_j$,

$(j = 1, \dots, s)$. Так как δ_F – свободное от квадратов число и $q|\delta_F$, то в разложение q на простые множители входят только простые числа и не входят степени простых чисел.

Тогда справедливо равенство

$$G(q, l, \overline{0}) = \prod_{j=1}^{s} G(p_j, lq_j, \overline{0}),$$

и для каждой суммы Гаусса $G(p_j, lq_j, \overline{0})$ можем записать точную формулу, используя лемму 2:

$$G(p_j, lq_j, \overline{0}) = \varepsilon(p_j) p_j \sqrt{p_j} \left(\frac{alq_j}{p_j}\right),$$

где

$$\varepsilon(p_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ i, & \text{если } p_j \equiv 3 \ (mod\ 4) \end{cases} = i^{\frac{(p_j-1)^2}{4}}.$$

Получаем, что

$$G(q, l, \overline{0}) = \prod_{j=1}^{s} \varepsilon(p_j) p_j \sqrt{p_j} \left(\frac{alq_j}{p_j}\right) = \left(\frac{al}{q}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q\sqrt{q}.$$

Следовательно, точные формулы в [14] и [15] для случая, когда q – нечетное число, делящее дискриминант мнимого квадратичного поля, совпадают.

4 случай.

Пусть $q = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2}$, $\delta_F = -p_1$. Тогда согласно лемме 8, получаем, что

$$G({p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2}, l, \overline{0}) = \left(\frac{la}{p_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{{p_1}^{\alpha_1 - 1} \cdot {p_2}^{\alpha_2}}\right) i^S \sqrt{p_1} \cdot {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2},$$

где

$$s = \begin{cases} 0, & q, {p_1}^{\alpha_1-1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ 1, & q \cdot {p_1}^{\alpha_1-1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \equiv -1 \ (mod\ 4), \\ 2, & q, {p_1}^{\alpha_1-1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \equiv -1 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

С другой стороны

$$G({p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2}, l, \overline{0}) = G({p_1}^{\alpha_1}, l{p_2}^{\alpha_2}, \overline{0}) G({p_2}^{\alpha_2}, l{p_1}^{\alpha_1}, \overline{0}),$$

и можем использовать равенства из лемм 1 для суммы $G\left(p_2{}^{\alpha_2}, lp_1{}^{\alpha_1}, \overline{0}\right)$ и равенства из леммы 2 для суммы $G\left(p_1{}^{\alpha_1}, lp_2{}^{\alpha_2}, \overline{0}\right)$. Получаем, что

$$G\left(p_1{}^{\alpha_1} \cdot p_2{}^{\alpha_2}, l, \overline{0}\right) = \varepsilon(p_1) p_1^{\alpha_1} \sqrt{p_1} \left(\frac{alp_2{}^{\alpha_2}}{p_1}\right) \left(\frac{-1}{p_1{}^{\alpha_1 - 1}}\right) \cdot p_2{}^{\alpha_2} \left(\frac{-p_1}{p_2{}^{\alpha_2}}\right).$$

Чтобы формулы совпадали, нужно проверить выполнение равенства:

$$\left(\frac{1}{p_1{}^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2{}^{\alpha_2}}\right) i^S = \varepsilon(p_1) \left(\frac{p_2{}^{\alpha_2}}{p_1}\right) \left(\frac{-1}{p_1{}^{\alpha_1 - 1}}\right) \cdot \left(\frac{-p_1}{p_2{}^{\alpha_2}}\right).$$

После преобразований получим

$$i^S = \varepsilon(p_1)(-1)^{\frac{p_1 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 - 1}{2} \alpha_2 + \frac{p_1{}^{\alpha_1 - 1} p_2{}^{\alpha_2} - 1}{2}}.$$

Рассмотрим следующие случаи. Пусть $p_1, p_2 \equiv 1 \ (mod\ 4)$. Тогда $\varepsilon(p_1) = 1$, $\frac{p_1 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 - 1}{2} \alpha_2$ и $\frac{p_1{}^{\alpha_1 - 1} p_2{}^{\alpha_2} - 1}{2}$ – четные числа. Следовательно, выражение справа равно 1. В выражении слева при тех же условиях $s = 0$, и равенство выполняется.

Пусть $p_1, p_2 \equiv -1 \ (mod\ 4)$. Тогда $\varepsilon(p_1) = i$, $\frac{p_1 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 - 1}{2} \alpha_2$ и $\frac{p_1{}^{\alpha_1 - 1} p_2{}^{\alpha_2} - 1}{2}$ – четные числа, если α_2 – четное, и нечетные, если α_2 – нечетное. Следовательно, выражение справа равно i. В выражении слева при тех же условиях $s = 1$, и равенство выполняется.

Пусть $p_1 \equiv 1 \ (mod\ 4)$, $p_2 \equiv -1 \ (mod\ 4)$. Тогда $\varepsilon(p_1) = 1$, $\frac{p_1 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 - 1}{2} \alpha_2$ – четное число, а $\frac{p_1{}^{\alpha_1 - 1} p_2{}^{\alpha_2} - 1}{2}$ – четное, если α_2 – четное и нечетное, если α_2 – нечетное. В выражении слева при тех же условиях на α_2 получаем, что $s = 0$, или $s = 2$ и равенство выполняется.

Пусть $p_1 \equiv -1 \ (mod\ 4)$, $p_2 \equiv 1 \ (mod\ 4)$. Тогда $\varepsilon(p_1) = i$, $\frac{p_1 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 - 1}{2} \alpha_2$ – четное число, а $\frac{p_1{}^{\alpha_1 - 1} p_2{}^{\alpha_2} - 1}{2}$ – четное, если α_1 – нечетное и нечетное, если α_1 – четное. Тогда в выражении справа получим $\pm i$ в зависимости от чётности α_1. В выражении слева при тех же условиях на α_1 получаем, что $s = 1$ и равенство не выполняется.

5 случай.

Пусть $q = 2$, дискриминант мнимого квадратичного поля является четным числом. Тогда из леммы 3 получаем, что

$$G(2, l, \overline{0}) = 0.$$

В леммах 9-12, соответствующих данному условию полученное равенство отсутствует.

6 случай.

Пусть $q = 2^{\alpha}$, $\alpha \geq 2$, $(\delta_F, 2^{\alpha}) = 4$. Тогда из леммы 9 имеем

$$G(2^{\alpha}, l, \overline{0}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot i^{la} \cdot 2^{\alpha+1}, & \text{при } \ |D|/4 \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha+1}, & \text{при } \ |D|/4 \equiv -1 \ (mod\ 4), \end{cases}$$

где $D = -\delta_F$, a – первый коэффициент бинарной квадратичной формы.

При этих условиях можем также воспользоваться леммой 4, т.е.

$$G(2^{\alpha}, l, \overline{0}) = \ 2^{\alpha} \left(\frac{S(2^{\alpha}, al, 0)}{2^{\alpha/2}}\right)\left(\frac{S(2^{\alpha}, al|D|/4, 0)}{2^{\alpha/2}}\right).$$

Подставляя в данное равенство точные формулы для одномерных сумм Гаусса из леммы 13, получим, что

$$G(2^{\alpha}, l, \overline{0}) = \ 2^{\alpha} \left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha} \left(\frac{2}{al|D|/4}\right)^{\alpha} (1 + i^{al})\left(1 + i^{al|D|/4}\right).$$

Пусть $|D|/4 \equiv 1 \ (mod\ 4)$, тогда

$$\left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha} \left(\frac{2}{al|D|/4}\right)^{\alpha} = \left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha} \left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha} = 1,$$

$$(1 + i^{al})\left(1 + i^{al|D|/4}\right) = (1 + i^{al})(1 + i^{al}) = (1 + i^{al})^2 =$$

$$= 1 + 2i^{al} + (-1)^{al} = 2i^{al},$$

так как a, l – нечетные числа. Тогда

$$G(2^{\alpha}, l, \overline{0}) = \ i^{al} \cdot 2^{\alpha+1}.$$

Кроме того, при тех же условиях на D выражение

$$(-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} = 1.$$

Следовательно, при $|D|/4 \equiv 1 \ (mod\ 4)$ формулы совпадают.

Пусть теперь $|D|/4 \equiv -1 \ (mod\ 4)$, тогда

$$\left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{al|D|/4}\right)^{\alpha} = \left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{|D|/4}\right)^{\alpha} = (-1)^{\frac{(|D|/4)^2-1}{8}\alpha},$$

$$(1+i^{al})\left(1+i^{al|D|/4}\right) = (1+i^{al})(1+i^{-al}) =$$

$$= 1 + i^{al} + 1 + i^{-al} = 2.$$

Получили точную формулу для суммы Гаусса из леммы 4:

$$G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right) = (-1)^{\frac{(|D|/4)^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha+1},$$

которая соответствует формуле из леммы 9.

Следовательно, точные формулы в [14] и [15] для случая, когда q – степень двойки и $(\delta_F, 2^{\alpha}) = 4$, совпадают.

7 случай.

Пусть $q = 2^{\alpha}$, $\alpha \geq 2$, $(\delta_F, 2^{\alpha}) = 8$. Тогда из леммы 10 имеем

$$G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right) = \begin{cases} i^{la} \cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2}, & \text{при } \ |D|/8 \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ 2^{\alpha+1}\sqrt{2}\,, & \text{при } \ |D|/8 \equiv -1 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

При этих условиях можем также воспользоваться леммой 5. Тогда

$$G\left(4, l, \overline{0}\right) = 0,$$

$$G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right) = 2^{\alpha+1}\left(\frac{S(2^{\alpha}, al, 0)S(2^{\alpha-1}, al|D|/8{,}0)}{2^{\alpha}}\right),$$

где $\alpha \geq 3$.

Можем сразу заметить, что точные формулы для $G\left(4, l, \overline{0}\right)$ не совпадают.

Подставляя в $G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right)$ точные формулы для одномерных сумм Гаусса из леммы 13, получим, что

$$G\left(2^{\alpha}, l, \overline{0}\right) = 2^{\alpha}\sqrt{2}\left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{al|D|/8}\right)^{\alpha-1}(1+i^{al})\left(1+i^{al|D|/8}\right).$$

Пусть $|D|/8 \equiv 1 \ (mod\ 4)$, тогда

$$\left(\frac{2}{al}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{al|D|/8}\right)^{\alpha-1} = 1,$$

$$(1+i^{al})\left(1+i^{al|D|/8}\right)=(1+i^{al})(1+i^{al})=(1+i^{al})^2=$$
$$=1+2i^{al}+(-1)^{al}=2i^{al},$$

так как a, l – нечетные числа. Тогда

$$G\left(2^\alpha, l, \overline{0}\right)= \ i^{al}\cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2}.$$

Следовательно, при $|D|/8 \equiv 1\ (mod\ 4)$ формулы совпадают.

Пусть теперь $|D|/8 \equiv -1\ (mod\ 4)$, тогда

$$\left(\frac{2}{al}\right)^\alpha \left(\frac{2}{al|D|/8}\right)^{\alpha-1}=1,$$

$$(1+i^{al})\left(1+i^{al|D|/8}\right)=(1+i^{al})(1+i^{-al})=$$
$$=1+i^{al}+1+i^{-al}=2.$$

Получили точную формулу для суммы Гаусса из леммы 5:

$$G\left(2^\alpha, l, \overline{0}\right)= \ 2^{\alpha+1}\sqrt{2},$$

которая соответствует формуле из леммы 10.

Следовательно, точные формулы в [14] и [15] для случая, когда q – степень двойки и $(\delta_F, 2^\alpha)=8$, совпадают, кроме формул для $G\left(4, l, \overline{0}\right)$.

Выводы по второй главе.

1. В работе [14] С.А. Гриценко представлен более общий случай точных формул для двойных сумм Гаусса, а именно рассматриваются точные формулы для $G(q, l, \overline{m})$. В работе [15] Р.А. Дохова и У.М. Пачева представлен частный случай формул для $G\left(q, l, \overline{0}\right)$.

2. Точные формулы для $G\left(q, l, \overline{0}\right)$, полученные в [15] более удобны для использования, чем формулы в [14], так как в [14] даются формулы для степеней простых чисел, входящих в разложение числа q, и формулы по степеням двойки содержат одномерные суммы Гаусса.

3. Присутствуют следующие несоответствия в полученных точных формулах:

1) формулы для суммы Гаусса $G\left(q, l, \overline{0}\right)$, если $q = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2}$, $\delta_F = -p_1$ отличаются знаком при $p_1 \equiv -1\ (mod\ 4)$, $p_2 \equiv 1\ (mod\ 4)$.

2) Не совпадают точные формулы для суммы Гаусса $G\left(4, l, \overline{0}\right)$, когда $(\delta_F, 2^\alpha) = 8$.

4. В работе [15] отсутствует случай для суммы Гаусса $G\left(2, l, \overline{0}\right)$, когда $(\delta_F, 2) = 2$.

ГЛАВА 3. СУММА ОСОБОГО РЯДА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

В данной главе приводится одна задача из аналитической теории чисел, в которой применяются точные формулы для двойных сумм Гаусса.

Пусть d_1, d_2 – отрицательные бесквадратные числа; $F_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}\right)$, $F_2 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_2}\right)$ – мнимые квадратичные поля с дискриминантами δ_{F_1}, δ_{F_2}; $Q_1(\overline{m})$, $Q_2\left(\overline{k}\right)$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формулы с определителями $D_1 = -\,\delta_{F_1}$, $D_2 = -\delta_{F_2}$.

Для суммы

$$I_{D_1,D_2}(n,h) = \sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}}$$

в работе [16] получена асимптотическая формула.

Справедлива следующая теорема.

Теорема.

Пусть ε – произвольное положительное число, δ_{F_1} и δ_{F_2} – дискриминанты мнимых квадратичных полей F_1 и F_2, $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$, $h \leq n^{\varepsilon}$.

Тогда

$$I_{D_1,D_2}(n,h) = \frac{2\pi^2 n}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi i h l}{q}} G_1\left(q,l,\overline{0}\right) G_2\left(q,-l,\overline{0}\right) + $$

$$+O\left(n^{3/4+\varepsilon}\right),$$

где $G_i(q,l,\overline{0}) = \sum_{\overline{m} \bmod q} exp\left(\frac{2\pi i l Q_i(\overline{m})}{q}\right)$ – двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме $Q_i(\overline{m})$, $i = 1{,}2$.

В данной главе приводится подробное доказательство положительности особого ряда асимптотической формулы.

Сначала докажем, что функция

$$\Phi(q) = q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi ihl}{q}} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0})$$

является мультипликативной.

Для этого нужно доказать, что $\Phi(q_1 \cdot q_2) = \Phi(q_1) \cdot \Phi(q_2)$.

Пусть $q = q_1 \cdot q_2$, тогда векторы $\overline{m}(m_1; m_2)$ и $\overline{k}(k_1; k_2)$, где $m_1, m_2, k_1, k_2 = 1, \dots, q$, можем переписать в виде

$$\overline{m} = \overline{u_m} \cdot q_2 + \overline{v_m} \cdot q_1 \text{ и } \overline{k} = \overline{u_k} \cdot q_2 + \overline{v_k} \cdot q_1,$$

где $\overline{u_m}, \overline{u_k} \, mod \, q_1$ и $\overline{v_m}, \overline{v_k} \, mod \, q_2$, т.е. $u_{m_1}, u_{m_2}, u_{k_1}, u_{k_2} = 1, \dots, q_1$ и $v_{m_1}, v_{m_2}, v_{k_1}, v_{k_2} = 1, \dots, q_2$.

Подставим равенство для вектора $\overline{m}(m_1; m_2)$ в квадратичную форму, которой соответствует двойная сумма Гаусса $G_1(q, l, \overline{0})$. Получаем

$$Q_1(\overline{m}) = Q_1(\overline{u_m} \cdot q_2 + \overline{v_m} \cdot q_1) = a_1\left(u_{m_1} \cdot q_2 + v_{m_1} \cdot q_1\right)^2 +$$

$$+b_1\left(u_{m_1} \cdot q_2 + v_{m_1} \cdot q_1\right)\left(u_{m_2} \cdot q_2 + v_{m_2} \cdot q_1\right) + c_1\left(u_{m_2} \cdot q_2 + v_{m_2} \cdot q_1\right)^2 =$$

$$= {q_2}^2\left(a_1 {u_{m_1}}^2 + b_1 u_{m_1} u_{m_2} + c_1 {u_{m_2}}^2\right) + {q_1}^2\left(a_1 {v_{m_1}}^2 + b_1 v_{m_1} v_{m_2} + c_1 {v_{m_2}}^2\right) +$$

$$+q_1 q_2 T = {q_2}^2 Q_1(\overline{u_m}) + {q_1}^2 Q_1(\overline{v_m}) + q_1 q_2 T.$$

Тогда

$$G_1(q_1 q_2, l, \overline{0}) = \sum_{\overline{m} \, mod \, q_1 q_2} exp\left(\frac{2\pi i l Q_1(\overline{m})}{q_1 q_2}\right) =$$

$$= \sum_{\overline{u_m} \cdot q_2 + \overline{v_m} \cdot q_1 \, mod \, q_1 q_2} exp\left(2\pi i l \frac{{q_2}^2 Q_1(\overline{u_m}) + {q_1}^2 Q_1(\overline{v_m}) + q_1 q_2 T}{q_1 q_2}\right) =$$

$$= \sum_{\overline{u_m} \, mod \, q_1} exp\left(\frac{2\pi i l q_2 Q_1(\overline{u_m})}{q_1}\right) \sum_{\overline{v_m} \, mod \, q_2} exp\left(\frac{2\pi i l q_1 Q_1(\overline{v_m})}{q_2}\right) =$$

$$= G_1(q_1, l q_2, \overline{0}) G_1(q_2, l q_1, \overline{0}).$$

Пусть теперь $l = l_1 \cdot q_2 + l_2 \cdot q_1$, где $1 \le l_1 \le q_1$ и $1 \le l_2 \le q_2$. Тогда

$$G_1(q_1, l q_2, \overline{0}) = \sum_{\overline{u_m} \, mod \, q_1} exp\left(\frac{2\pi i l q_2 Q_1(\overline{u_m})}{q_1}\right) =$$

$$= \sum_{\overline{u_m} \bmod q_1} exp\left(\frac{2\pi i(l_1q_2 + l_2q_1)q_2Q_1(\overline{u_m})}{q_1}\right) = G_1(q_1, l_1{q_2}^2, \bar{0}).$$

Аналогично, можно доказать, что $G_1(q_2, lq_1, \bar{0}) = G_1(q_2, l_2{q_1}^2, \bar{0})$.

Так как

$$ {q_2}^2Q_1(\overline{u_m}) = {q_2}^2\left(a_1{u_{m_1}}^2 + b_1u_{m_1}u_{m_2} + \mathrm{c}_1{u_{m_2}}^2\right) =$$
$$= a_1(q_2u_{m_1})^2 + b_1\left(q_2u_{m_1}\right)\left(q_2u_{m_2}\right) + \mathrm{c}_1\left(u_{m_2}q_2\right),$$

то можем вести новые переменные суммирования $q_2\overline{u_m}$, где $q_2 \leq q_2u_{m_1} \leq q_1q_2$, $q_2 \leq q_2u_{m_2} \leq q_1q_2$, и произвести сдвиг переменных суммирования. Тогда $G_1(q_1, l_1{q_2}^2, \bar{0}) = G_1(q_1, l_1, \bar{0})$.

Аналогичные рассуждения для ${q_1}^2Q_1(\overline{v_m})$ позволяют получить равенство $G_1(q_2, l_2{q_1}^2, \bar{0}) = G_1(q_2, l_2, \bar{0})$.

Таким образом, показали, что

$$G_1(q_1q_2, l, \bar{0}) = G_1(q_1q_2, l_1q_2 + l_2q_1, \bar{0}) = G_1(q_1, l_1, \bar{0})G_1(q_2, l_2, \bar{0}).$$

Для двойной суммы Гаусса, отвечающей квадратичной форме $Q_2(\bar{k})$, также справедливы равенства:

$$G_2(q_1q_2, -l, \bar{0}) = G_2(q_1q_2, -l_1q_2 - l_2q_1, \bar{0}) = G_2(q_1, -l_1, \bar{0})G_2(q_2, -l_2, \bar{0}).$$

Теперь перейдем к доказательству мультипликативности:

$$\varPhi(q_1 \cdot q_2) = \varPhi(q_1) \cdot \varPhi(q_2).$$

Получаем, что

$$\varPhi(q_1q_2) = q_1^{-4}q_2^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q_1q_2)=1}}^{q_1q_2} e^{-2\pi i\frac{hl}{q_1q_2}}G_1(q_1q_2, l, \bar{0})G_2(q_1q_2, -l, \bar{0}) =$$

$$= q_1^{-4}q_2^{-4} \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i\frac{h(l_1q_2+l_2q_1)}{q_1q_2}} \cdot$$

$$\cdot G_1(q_1, l_1, \bar{0})G_1(q_2, l_2, \bar{0})G_2(q_1, -l_1, \bar{0})G_2(q_2, -l_2, \bar{0}) =$$

$$= q_1^{-4} \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i\frac{hl_1}{q_1}}G_1(q_1, l_1, \bar{0})\, G_2(q_1, -l_1, \bar{0}) \cdot$$

$$\cdot\, q_2^{-4} \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i \frac{hl_2}{q_2}} G_1(q_2, l_2, \bar{0}) G_2(q_2, -l_2, \bar{0}) =$$

$$= \Phi(q_1) \cdot \Phi(q_2).$$

Доказано, что функция $\Phi(q)$ будет мультипликативной.

Следовательно, сумму особого ряда как сумму от мультипликативной функции можно представить в виде произведения по простым делителям числа q:

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Phi(q) = \prod_{p \backslash q} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \ldots).$$

Перейдем к доказательству положительности суммы особого ряда. Для этого достаточно показать, что каждое из произведений по простым делителям числа q принимает только положительные значения.

Функция $\Phi(p^\alpha)$, где $\alpha \geq 1$, содержит произведения двойных сумм Гаусса. Поэтому для доказательства положительности произведений, входящих в разложение суммы особого ряда, необходимо использовать точные формулы для сумм $G_1(p^\alpha, l, \bar{0})$ и $G_2(p^\alpha, -l, \bar{0})$.

Так как данные формулы различаются в зависимости от того, будет ли дисктриминант мнимого квадратичного поля делится на простое число, то необходимо отдельно рассмотреть случаи, когда простое число не делит дискриминанты мнимых квадратичных полей, которым соотвествуют квадратичные формы $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$, делит один из них или делит оба дискриминанта.

Кроме того, после применения точных формул для сумм Гаусса, возникают следующие суммы:

$$K(p^{\alpha}, -h, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\alpha})=1}}^{p^{\alpha}} e^{-\frac{2\pi i h l}{p^{\alpha}}},$$

$$K_p(p^{\alpha}, -h, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\alpha})=1}}^{p^{\alpha}} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-\frac{2\pi i h l}{p^{\alpha}}},$$

которые называются суммой Клостермана и обощенной суммой Клостермана соответственно.

В леммах 14, 15 приводятся точные формулы для этих сумм, которые различны в зависимости от того, делится ли коэффициент h на простое число или нет.

В соотвествие с изложенными выше рассуждениями при доказательстве положительности произведений, входящих в разложение суммы особого ряда, необходимо выделить следующие случаи.

1 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые не делят дискриминанты мнимых квадратичных полей и коэффициент h.

Пусть $p \nmid \delta_{F_1},\ p \nmid \delta_{F_2},\ (h, p) = 1.$

Вычислим значения сумм Гаусса от p, используя равенства из леммы 1. Получаем, что

$$G_1(p, l, \overline{0}) = p\left(\frac{\delta_{F_1}}{p}\right),$$

$$G_2(p, -l, \overline{0}) = p\left(\frac{\delta_{F_2}}{p}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4} \cdot p^2 \left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i \frac{hl}{p}}.$$

Так как $(h, p) = 1$, то входящая в $\Phi(p)$ сумма Клостермана с учетом равенства из леммы 14 равна

$$K(p,-h,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}=-1.$$

Тогда

$$\Phi(p)=-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)p^{-2}.$$

Вычислим значения сумм Гаусса от p^2, используя равенства из леммы 1. Получаем, что

$$G_1(p^2,l,\overline{0})=p^2\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^2}\right),$$

$$G_2(p^2,-l,\overline{0})=p^2\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^2}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p^2)$ примет вид:

$$\Phi(p^2)=p^{-8}\cdot p^4\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^2}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2} e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}.$$

Так как $(h,p)=1$, то входящая в $\Phi(p^2)$ сумма Клостермана с учетом равенства из леммы 14 равна

$$K(p^2,-h,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2} e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}=0.$$

Тогда

$$\Phi(p^2)=0.$$

В общем случае, если $\alpha\geq 2$, то

$$G_1(p^\alpha,l,\overline{0})=p^\alpha\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^\alpha}\right),$$

$$G_2(p^\alpha,-l,\overline{0})=p^\alpha\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать сумму Клостермана $K(p^\alpha,-h,0)$, которая равна 0 для всех $\alpha\geq 2$. Следовательно, $\Phi(p^\alpha)=0$.

Таким образом, получаем следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p\nmid\delta_{F_1}\\ p\nmid\delta_{F_2}\\ (h,p)=1}} (1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\dots) = \prod_{\substack{p\nmid\delta_{F_1}\\ p\nmid\delta_{F_2}\\ (h,p)=1}} \left(1-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)p^{-2}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Если $\delta_{F_1}\delta_{F_2}$ – квадратичный вычет по модулю p, то $\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)=1$. Получаем скобку $(1-p^{-2})$, которая принимает наименьшее значение, равное $3/4$, если $p=2$. Следовательно,

$$1-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)p^{-2} > 3/4.$$

Если $\delta_{F_1}\delta_{F_2}$ – квадратичный невычет по модулю p, то $\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)=-1$. Получаем скобку $(1+p^{-2})$, которая больше 1 при любом простом числе p. Следовательно,

$$1-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)p^{-2} > 1.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

2 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые не делят дискриминанты мнимых квадратичных полей, а коэффициент h делится на данное простое число.

Пусть $p\nmid\delta_{F_1},\ p\nmid\delta_{F_2},\ \ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1,\ (h_1,p)=1$.

Вычислим значения сумм Гаусса от p, используя равенства из леммы 1. Получаем, что

$$G_1(p,l,\overline{0}) = p\left(\frac{\delta_{F_1}}{p}\right),$$

$$G_2(p,-l,\overline{0}) = p\left(\frac{\delta_{F_2}}{p}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4}\cdot p^2\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\ (l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

Так как $h = p^{\alpha_1} \cdot h_1$, $(h_1, p) = 1$ то входящая в $\Phi(p)$ сумма Клостермана с учетом равенства из леммы 14 равна

$$K(p, -h, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i \frac{hl}{p}} = p - 1.$$

Тогда

$$\Phi(p) = \left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)\frac{p-1}{p^2}.$$

Пусть теперь $2 \le \alpha \le \alpha_1$, тогда из леммы 1 имеем

$$G_1(p^\alpha, l, \overline{0}) = p^\alpha \left(\frac{\delta_{F_1}}{p^\alpha}\right),$$

$$G_2(p^\alpha, -l, \overline{0}) = p^\alpha \left(\frac{\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать сумму Клостермана

$$K(p^\alpha, -h, 0) = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} \cdot p^{2\alpha}\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right)p^{\alpha-1}(p-1).$$

Следовательно,

$$\Phi(p^\alpha) = \left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha+1}}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$, тогда в функцию $\Phi(p^{\alpha_1+1})$ будет входить сумма Клостермана

$$K(p^{\alpha_1+1}, -h, 0) = -p^{\alpha_1},$$

а функция $\Phi(p^{\alpha_1+1})$ будет равна

$$\Phi(p^{\alpha_1+1}) = -p^{-4(\alpha_1+1)} \cdot p^{2(\alpha_1+1)}\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{\alpha_1} =$$

$$= -\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 + s$, $s > 1$, тогда функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать сумму Клостермана $K(p^{\alpha_1+s}, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $s > 1$. В итоге, получаем, что $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Таким образом, можем записать следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p\nmid\delta_{F_1}\\ p\nmid\delta_{F_2}\\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1\\ (h_1,p)=1}} (1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots)=$$

$$=\prod_{\substack{p\nmid\delta_{F_1}\\ p\nmid\delta_{F_2}\\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1\\ (h_1,p)=1}} \left(1+\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)\frac{p-1}{p^2}+\ldots+\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1}}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha_1+1}}-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Если $\delta_{F_1}\delta_{F_2}$ – квадратичный вычет по модулю p, то все символы Якоби $\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^s}\right)$, $1\le s\le\alpha_1+1$ равны 1. Тогда получаем скобку

$$1+\frac{p-1}{p^2}+\cdots+\frac{p-1}{p^{\alpha_1+1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}=$$

$$=1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}\ldots+\frac{1}{p^{\alpha_1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}=$$

$$=1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}.$$

В данной скобке происходит взаимное уничтожение слагаемых. В результате получим выражение

$$1+\frac{p^{\alpha_1+1}-p-1}{p^{\alpha_1+2}}>1.$$

Следовательно,

$$1+\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)\frac{p-1}{p^2}+\ldots+\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1}}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha_1+1}}-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}>1.$$

Если $\delta_{F_1}\delta_{F_2}$ – квадратичный невычет по модулю p, то $\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right)=-1$, если α – нечетное число и $\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right)=1$, если α – четное число. Получаем скобку

$$1-\frac{p-1}{p^2}+\frac{p-1}{p^3}\dots+\frac{(-1)^{\alpha_1}(p-1)}{p^{\alpha_1+1}}-\frac{(-1)^{\alpha_1+1}}{p^{\alpha_1+2}}=$$

$$=1-\frac{p-1}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}+\cdots+\frac{(-1)^{\alpha_1-1}}{p^{\alpha_1-1}}\right)-\frac{(-1)^{\alpha_1+1}}{p^{\alpha_1+2}}.$$

Выражение, стоящее в скобках, является суммой α_1 членов геометрической прогрессии со знаменателем $-\frac{1}{p}$. Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$1-\frac{p-1}{p^2}\cdot\frac{1-(-1)^{\alpha_1}p^{-\alpha_1}}{1+\frac{1}{p}}-\frac{(-1)^{\alpha_1+1}}{p^{\alpha_1+2}}=$$

$$=1+\frac{p^{\alpha_1+1}-p^{\alpha_1+2}+(-1)^{\alpha_1}(p^2+1)}{p^{\alpha_1+2}(p+1)}.$$

Данное выражение принимает наименьшее значение, равное $\frac{5}{8}$, если $\alpha_1=1$ и $p=2$.

Следовательно,

$$1+\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p}\right)\frac{p-1}{p^2}+\ldots+\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1}}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha_1+1}}-\left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha_1+2}}>\frac{5}{8}.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

3 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые делят дискриминант только первого мнимого квадратичного поля и взаимно просто с коэффициентом h.

Пусть $p|\delta_{F_1},\ p\nmid\delta_{F_2},\ (h,p)=1$.

Для того, чтобы вычислить значения для суммы Гаусса $G_1(p,l,\overline{0})$ необходимо воспользоваться леммой 2. Получаем, что

$$G_1(p,l,\overline{0})=\varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{a_1l}{p}\right),$$

где a_1 – первый коэффициент квдратичной формы $Q_1(\overline{m})$.

Для суммы Гаусса $G_2(p,-l,\overline{0})$ воспользуемся равенством из леммы 1:

$$G_2(p,-l,\overline{0}) = p\left(\frac{\delta_{F_2}}{p}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4}\cdot\varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{a_1\delta_{F_2}}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

В функцию $\Phi(p)$ входит обобщенная сумма Клостермана, для которой применим равенство из леммы 15 при условии, что $(h,p)=1$. Тогда

$$K_p(p,-h,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p}} = S(p,-h,0).$$

Для вычисления одномерной суммы Гаусса воспользуемся леммой 13. Получаем, что

$$S(p,-h,0) = \left(\frac{-h}{p}\right)S(p,1,0) = \varepsilon(p)\left(\frac{-h}{p}\right)\sqrt{p}.$$

Тогда

$$K_p(p,-h,0) = \varepsilon(p)\left(\frac{-h}{p}\right)\sqrt{p}$$

и

$$\Phi(p) = \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1h\delta_{F_2}}{p}\right)p^{-1}.$$

Вычислим значения сумм Гаусса от p^2, также используя равенства из леммы 2 для первой суммы и леммы 1 для второй. Получаем, что

$$G_1(p^2,l,\overline{0}) = \varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{a_1l}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p}\right),$$

$$G_2(p^2,-l,\overline{0}) = p^2\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^2}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p^2)$ примет вид:

$$\Phi(p^2) = p^{-8}\cdot\varepsilon(p)p^4\sqrt{p}\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^2}\right)\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}.$$

Для вычисления обобщенной суммы Клостермана воспользуемся равенством из леммы 15 и учтем, что $(h, p) = 1$. Тогда

$$K_P(p^2, -h, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^2)=1}}^{p^2} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{hl}{p^2}} = 0.$$

Следовательно,

$$\Phi(p^2) = 0.$$

В общем случае, если $\alpha \geq 2$, то

$$G_1\left(p^\alpha, l, \overline{0}\right) = \varepsilon(p) p^\alpha \sqrt{p} \left(\frac{a_1 l}{p}\right) \left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha-1}}\right),$$

$$G_2\left(p^\alpha, -l, \overline{0}\right) = p^\alpha \left(\frac{\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать обобщенную сумму Клостермана $K_p(p^\alpha, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $\alpha \geq 2$. Следовательно, $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Таким образом, получаем следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p | \delta_{F_1} \\ p \nmid \delta_{F_2} \\ (h,p)=1}} \left(1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots\right) =$$

$$= \prod_{\substack{p | \delta_{F_1} \\ p \nmid \delta_{F_2} \\ (h,p)=1}} \left(1 + \varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 h \delta_{F_2}}{p}\right) p^{-1}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Выражение $\varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 h \delta_{F_2}}{p}\right)$ может принимать только два значения: 1 и -1.

Если $\varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 h \delta_{F_2}}{p}\right) = 1$, то получаем скобку $(1 + p^{-1})$, которая больше 1 при любом простом числе p. Следовательно,

$$1 + \varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 h \delta_{F_2}}{p}\right) p^{-1} > 1.$$

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h\delta_{F_2}}{p}\right) = -1$, то получаем скобку $(1-p^{-1})$, которая принимает наименьшее значение, равное $1/2$, если $p = 2$. Следовательно,

$$1+\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h\delta_{F_2}}{p}\right)p^{-1} > 1/2.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

4 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые делят дискриминант только второго мнимого квадратичного поля и взаимно просто с коэффициентом h.

Пусть $p \nmid \delta_{F_1},\ p|\delta_{F_2},\ (h,p) = 1$.

Для того, чтобы вычислить значения для суммы Гаусса $G_1(p,l,\overline{0})$ необходимо воспользоваться леммой 1. Получаем, что

$$G_1(p,l,\overline{0}) = p\left(\frac{\delta_{F_1}}{p}\right),$$

а для суммы $G_2(p,-l,\overline{0})$ теперь необходимо использовать равенство из леммы 2. Тогда

$$G_2(p,-l,\overline{0}) = \varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{-a_2 l}{p}\right),$$

где a_2 – первый коэффициент квдратичной формы $Q_2(\overline{k})$.

Тогда исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4}\cdot\varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{-a_2\delta_{F_1}}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

В функцию $\Phi(p)$ входит обобщенная сумма Клостермана, для которой применим равенство из леммы 15 при условии, что $(h,p) = 1$. Тогда

$$K_p(p,-h,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p}} = S(p,-h,0).$$

Для вычисления одномерной суммы Гаусса воспользуемся леммой 13. Получаем, что

$$S(p,-h,0)=\left(\frac{-h}{p}\right)S(p,1{,}0)=\varepsilon(p)\left(\frac{-h}{p}\right)\sqrt{p}.$$

Тогда

$$K_p(p,-h,0)=\varepsilon(p)\left(\frac{-h}{p}\right)\sqrt{p}$$

и

$$\Phi(p)=\varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h\delta_{F_1}}{p}\right)p^{-1}.$$

Вычислим значения сумм Гаусса от p^2, также используя равенства из леммы 1 для первой суммы и леммы 2 для второй. Получаем, что

$$G_1\left(p^2,l,\overline{0}\right)=p^2\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^2}\right)$$

$$G_2\left(p^2,-l,\overline{0}\right)=\varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{-a_2l}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p^2)$ примет вид:

$$\Phi(p^2)=p^{-8}\cdot\varepsilon(p)p^4\sqrt{p}\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^2}\right)\left(\frac{-a_2}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}.$$

Для вычисления обобщенной суммы Клостермана воспользуемся равенством из леммы 15 и учтем, что $(h,p)=1$. Тогда

$$K_P(p^2,-h,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}=0.$$

Следовательно,

$$\Phi(p^2)=0.$$

В общем случае, если $\alpha\geq 2$, то

$$G_1\left(p^\alpha,l,\overline{0}\right)=p^\alpha\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^\alpha}\right),$$

$$G_2\left(p^\alpha,-l,\overline{0}\right)=\varepsilon(p)p^\alpha\sqrt{p}\left(\frac{-a_2l}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right).$$

.

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать обобщенную сумму Клостермана $K_p(p^\alpha, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $\alpha \geq 2$. Следовательно, $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Таким образом, получаем следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p \nmid \delta_{F_1} \\ p | \delta_{F_2} \\ (h,p)=1}} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots) =$$

$$= \prod_{\substack{p \nmid \delta_{F_1} \\ p | \delta_{F_2} \\ (h,p)=1}} \left(1 + \varepsilon^2(p) \left(\frac{a_2 h \delta_{F_1}}{p}\right) p^{-1}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Выражение $\varepsilon^2(p) \left(\frac{a_2 h \delta_{F_1}}{p}\right)$ может принимать только два значения: 1 и -1.

Если $\varepsilon^2(p) \left(\frac{a_2 h \delta_{F_1}}{p}\right) = 1$, то получаем скобку $(1 + p^{-1})$, которая больше 1 при любом простом числе p. Следовательно,

$$1 + \varepsilon^2(p) \left(\frac{a_2 h \delta_{F_1}}{p}\right) p^{-1} > 1.$$

Если $\varepsilon^2(p) \left(\frac{a_2 h \delta_{F_1}}{p}\right) = -1$, то получаем скобку $(1 - p^{-1})$, которая принимает наименьшее значение, равное $1/2$, если $p = 2$. Следовательно,

$$1 + \varepsilon^2(p) \left(\frac{a_2 h \delta_{F_1}}{p}\right) p^{-1} > 1/2.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

5 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые делят оба дискриминанта мнимых квадратичных полей и взаимно просто с коэффициентом h.

Пусть $p | \delta_{F_1},\ p | \delta_{F_2},\ (h, p) = 1$.

Для того, чтобы вычислить значения для сумм Гаусса от простого числа необходимо воспользоваться леммой 2. Получаем, что

$$G_1(p,l,\overline{0}) = \varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{a_1 l}{p}\right),$$

$$G_2(p,-l,\overline{0}) = \varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{-a_2 l}{p}\right),$$

где a_1, a_2 – первые коэффициенты квдратичных форм $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$.

Тогда

$$G_1(p,l,\overline{0})G_2(p,-l,\overline{0}) = \varepsilon^2(p)p^2 p\left(\frac{a_1 l}{p}\right)\left(\frac{-a_2 l}{p}\right) =$$

$$= \varepsilon^2(p)p^3\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

так как $\left(\frac{l}{p}\right)^2 = 1$, и исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4}\cdot\varepsilon^2(p)p^3\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

В функцию $\Phi(p)$ входит сумма Клостермана, для которой применим равенство из леммы 14 при условии, что $(h,p)=1$. Тогда

$$K(p,-h,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i\frac{hl}{p}} = -1.$$

Следовательно,

$$\Phi(p) = -\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)p^{-1}.$$

Вычислим значения сумм Гаусса от p^2, также используя равенства из леммы 2 для каждой из сумм. Получаем, что

$$G_1(p^2,l,\overline{0}) = \varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{a_1 l}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p}\right),$$

$$G_2(p^2,-l,\overline{0}) = \varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{-a_2 l}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p^2)$ примет вид:

$$\Phi(p^2)=p^{-8}\cdot\varepsilon^2(p)p^5\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2}e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}.$$

Для вычисления суммы Клостермана воспользуемся равенством из леммы 14 и учтем, что $(h,p)=1$. Тогда

$$K(p^2,-h,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p^2)=1}}^{p^2}e^{-2\pi i\frac{hl}{p^2}}=0.$$

Следовательно,

$$\Phi(p^2)=0.$$

В общем случае, если $\alpha\geq 2$, то

$$G_1(p^\alpha,l,\overline{0})=\varepsilon(p)p^\alpha\sqrt{p}\left(\frac{a_1l}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha-1}}\right),$$

$$G_2(p^\alpha,-l,\overline{0})=\varepsilon(p)p^\alpha\sqrt{p}\left(\frac{-a_2l}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать сумму Клостермана $K(p^\alpha,-h,0)$, которая равна 0 для всех $\alpha\geq 2$. Следовательно, $\Phi(p^\alpha)=0$.

Таким образом, получаем следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p|\delta_{F_1}\\p|\delta_{F_2}\\(h,p)=1}}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots)=$$

$$=\prod_{\substack{p|\delta_{F_1}\\p|\delta_{F_2}\\(h,p)=1}}\left(1-\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-1}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Выражение $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)$ может принимать только два значения: 1 и -1.

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right) = 1$, то получаем скобку $(1 - p^{-1})$, которая принимает наименьшее значение, равное $1/2$, если $p = 2$. Следовательно,

$$1 - \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-1} > 1/2.$$

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right) = -1$, то получаем скобку $(1 + p^{-1})$, которая больше 1 при любом простом числе p. Следовательно,

$$1 - \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-1} > 1.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

6 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые делят дискриминант только первого мнимого квадратичного поля, и коэффициент h делится на данное простое число.

Пусть $p|\delta_{F_1}$, $p \nmid \delta_{F_2}$, $h = p^{\alpha_1} \cdot h_1$, $(h_1, p) = 1$.

Для того, чтобы вычислить значения для суммы Гаусса $G_1\left(p, l, \overline{0}\right)$ необходимо воспользоваться леммой 2. Получаем, что

$$G_1\left(p, l, \overline{0}\right) = \varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{a_1 l}{p}\right),$$

где a_1 – первый коэффициент квдратичной формы $Q_1(\overline{m})$.

Для суммы Гаусса $G_2\left(p, -l, \overline{0}\right)$ воспользуемся равенством из леммы 1:

$$G_2\left(p, -l, \overline{0}\right) = p\left(\frac{\delta_{F_2}}{p}\right).$$

Тогда исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4} \cdot \varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{a_1\delta_{F_2}}{p}\right) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

В функцию $\Phi(p)$ входит обобщенная сумма Клостермана, для которой применим равенство из леммы 15 при условии, что $h = p^{\alpha_1} \cdot h_1$, $(h_1, p) = 1$. Тогда

$$K_p(p,-h,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i\frac{hl}{p}} = 0.$$

Тогда

$$\Phi(p) = 0.$$

Пусть теперь $2 \leq \alpha \leq \alpha_1$, тогдя для суммы Гаусса $G_1\left(p^\alpha, l, \overline{0}\right)$ воспользуемся равенством из леммы 2, а для суммы Гаусса $G_2\left(p^\alpha, -l, \overline{0}\right)$ применим формулу из леммы 1. Имеем

$$G_1\left(p^\alpha, l, \overline{0}\right) = \varepsilon(p) p^\alpha \sqrt{p} \left(\frac{a_1 l}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha-1}}\right),$$

$$G_2\left(p^\alpha, -l, \overline{0}\right) = p^\alpha \left(\frac{\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет равна

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} \cdot \varepsilon(p) p^{2\alpha} \sqrt{p} \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha-1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^\alpha}\right) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i\frac{hl}{p^\alpha}}$$

и содержит обобщенную сумму Клостермана $K_p(p^\alpha, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $2 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Следовательно, $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$, тогда в функцию

$$\Phi(p^{\alpha_1+1}) = p^{-4\alpha_1-4} \cdot \varepsilon(p) p^{2\alpha_1+2} \sqrt{p} \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,p^{\alpha_1+1})=1}}^{p^{\alpha_1+1}} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i\frac{hl}{p^{\alpha_1+1}}}$$

будет входить сумма Клостермана

$$K_p(p^{\alpha_1+1}, -h, 0) = p^{\alpha_1} S(p, -h_1, 0).$$

Для вычисления одномерной суммы Гаусса воспользуемся леммой 13. Получаем, что

$$S(p, -h_1, 0) = \left(\frac{-h_1}{p}\right) S(p, 1{,}0) = \varepsilon(p)\left(\frac{-h_1}{p}\right)\sqrt{p}.$$

Тогда

$$K_p(p^{\alpha_1+1}, -h, 0) = \varepsilon(p)\left(\frac{-h_1}{p}\right)p^{\alpha_1}\sqrt{p}$$

и

$$\Phi(p^{\alpha_1+1}) = \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 + s,\ \ s > 1$, тогда функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать обобщенную сумму Клостермана $K_p(p^{\alpha_1+s}, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $s > 1$. Тогда $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Таким образом, получаем следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p|\delta_{F_1} \\ p\nmid\delta_{F_2} \\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1 \\ (h_1,p)=1}} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots) =$$

$$= \prod_{\substack{p|\delta_{F_1} \\ p\nmid\delta_{F_2} \\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1 \\ (h_1,p)=1}} \left(1 + \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Выражение$\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)$ может принимать только два значения: 1 и -1.

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right) = 1$, то получаем скобку $(1 + p^{-\alpha_1-1})$, которая больше 1 при любом простом числе p. Следовательно,

$$1 + \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1} > 1.$$

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right) = -1$, то получаем скобку $\left(1 - \ p^{-\alpha_1-1}\right)$, которая принимает наименьшее значение, равное $3/4$, если $p = 2$. Следовательно,

$$1+\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1h_1}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_2}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1}>3/4.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

7 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые делят дискриминант только второго мнимого квадратичного поля, и коэффициент h делится на данное простое число.

Пусть $p\nmid\delta_{F_1},\ p|\delta_{F_2}\ ,\ \ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1,\ (h_1,p)=1.$

Для того, чтобы вычислить значения для суммы Гаусса $G_1\left(p,l,\overline{0}\right)$ необходимо воспользоваться леммой 1. Получаем, что

$$G_1\left(p,l,\overline{0}\right)=p\left(\frac{\delta_{F_1}}{p}\right)$$

Для суммы Гаусса $G_2\left(p,-l,\overline{0}\right)$ воспользуемся равенством из леммы 2:

$$G_2\left(p,-l,\overline{0}\right)=\varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{-a_2l}{p}\right),$$

где a_2 – первый коэффициент квдратичной формы $Q_2\left(\overline{k}\right)$.

Тогда исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p)=p^{-4}\cdot\varepsilon(p)p^2\sqrt{p}\left(\frac{-a_2\delta_{F_1}}{p}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

В функцию $\Phi(p)$ входит обобщенная сумма Клостермана, для которой применим равенство из леммы 15 при условии, что $h=p^{\alpha_1}\cdot h_1,\ (h_1,p)=1.$ Тогда

$$K_p(p,-h,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}=0.$$

Тогда

$$\Phi(p)=0.$$

Пусть теперь $2 \leq \alpha \leq \alpha_1$, тогдя для суммы Гаусса $G_1(p^\alpha, l, \overline{0})$ воспользуемся равенством из леммы 1, а для суммы Гаусса $G_2(p^\alpha, -l, \overline{0})$ применим формулу из леммы 2. Имеем

$$G_1(p^\alpha, l, \overline{0}) = p^\alpha \left(\frac{\delta_{F_1}}{p^\alpha}\right),$$

$$G_2(p^\alpha, -l, \overline{0}) = \varepsilon(p) p^\alpha \sqrt{p} \left(\frac{-a_2 l}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет равна

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} \cdot \varepsilon(p) p^{2\alpha} \sqrt{p} \left(\frac{-a_2}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^\alpha}\right) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{hl}{p^\alpha}}$$

и содержит обобщенную сумму Клостермана $K_p(p^\alpha, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $2 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Следовательно, $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$, тогда в функцию

$$\Phi(p^{\alpha_1+1}) = p^{-4\alpha_1-4} \cdot \varepsilon(p) p^{2\alpha_1+2} \sqrt{p} \left(\frac{-a_2}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\alpha_1+1})=1}}^{p^{\alpha_1+1}} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{hl}{p^{\alpha_1+1}}}$$

будет входить сумма Клостермана

$$K_p(p^{\alpha_1+1}, -h, 0) = p^{\alpha_1} S(p, -h_1, 0).$$

Для вычисления одномерной суммы Гаусса воспользуемся леммой 13. Получаем, что

$$S(p, -h_1, 0) = \left(\frac{-h_1}{p}\right) S(p, 1{,}0) = \varepsilon(p) \left(\frac{-h_1}{p}\right) \sqrt{p}.$$

Тогда

$$K_p(p^{\alpha_1+1}, -h, 0) = \varepsilon(p) \left(\frac{-h_1}{p}\right) p^{\alpha_1} \sqrt{p}$$

и

$$\Phi(p^{\alpha_1+1}) = \varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 + s,\ \ s > 1$, тогда функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать обобщенную сумму Клостермана $K_p(p^{\alpha_1+s}, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $s > 1$. Тогда $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Таким образом, получаем следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p\nmid\delta_{F_1}\\ p|\delta_{F_2}\\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1\\ (h_1,p)=1}} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots) =$$

$$= \prod_{\substack{p\nmid\delta_{F_1}\\ p|\delta_{F_2}\\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1\\ (h_1,p)=1}} \left(1 + \varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Выражение $\varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right)$ может принимать только два значения: 1 и -1.

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right) = 1$, то получаем скобку $(1 + p^{-\alpha_1-1})$, которая больше 1 при любом простом числе p. Следовательно,

$$1 + \varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1} > 1.$$

Если $\varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right) = -1$, то получаем скобку $\left(1 - p^{-\alpha_1-1}\right)$, которая принимает наименьшее значение, равное $3/4$, если $p = 2$. Следовательно,

$$1 + \varepsilon^2(p)\left(\frac{a_2h_1}{p}\right)\left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\delta_{F_1}}{p^{\alpha_1+1}}\right)p^{-\alpha_1-1} > 3/4.$$

В обоих случаях выражение будет строго положительным.

8 случай. Рассмотрим произведения по простым числам, которые делят оба дискриминанта мнимых квадратичных полей, и коэффициент h делится на данное простое число.

Пусть $p|\delta_{F_1}$, $p|\delta_{F_2}$, $h = p^{\alpha_1} \cdot h_1$, $(h_1, p) = 1$.

Для того, чтобы вычислить значения для суммы Гаусса $G_1(p, l, \overline{0})$ и $G_2(p, -l, \overline{0})$ воспользуемся леммой 2. Получаем, что

$$G_1(p, l, \overline{0}) = \varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{a_1 l}{p}\right),$$

$$G_2(p, -l, \overline{0}) = \varepsilon(p)p\sqrt{p}\left(\frac{-a_2 l}{p}\right),$$

где a_1, a_2 – первые коэффициенты квдратичных форм $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$.

Тогда

$$G_1(p, l, \overline{0})G_2(p, -l, \overline{0}) = \varepsilon^2(p)p^2 p\left(\frac{a_1 l}{p}\right)\left(\frac{-a_2 l}{p}\right) =$$

$$= \varepsilon^2(p)p^3\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

так как $\left(\frac{l}{p}\right)^2 = 1$, и исследуемая функция $\Phi(p)$ примет вид:

$$\Phi(p) = p^{-4} \cdot \varepsilon^2(p)p^3\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i\frac{hl}{p}}.$$

В функцию $\Phi(p)$ входит сумма Клостермана, для которой применим равенство из леммы 14 при условии, что $h = p^{\alpha_1} \cdot h_1$, $(h_1, p) = 1$. Тогда

$$K(p, -h, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi i\frac{hl}{p}} = p - 1.$$

Тогда

$$\Phi(p) = \varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\frac{p-1}{p}.$$

Пусть теперь $2 \leq \alpha \leq \alpha_1$, тогда из леммы 2 имеем

$$G_1(p^\alpha, l, \overline{0}) = \varepsilon(p)p^\alpha\sqrt{p}\left(\frac{a_1 l}{p}\right)\left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha-1}}\right),$$

$$G_2\left(p^\alpha, -l, \overline{0}\right) = \varepsilon(p) p^\alpha \sqrt{p} \left(\frac{-a_2 l}{p}\right) \left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right).$$

Функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать сумму Клостермана

$$K(p^\alpha, -h, 0) = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-4\alpha} \cdot \varepsilon^2(p) p^{2\alpha+1} \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) \left(\frac{D_1/p \cdot D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right) p^{\alpha-1}(p-1).$$

Следовательно,

$$\Phi(p^\alpha) = \varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) \left(\frac{D_1/p \cdot D_2/p}{p^{\alpha-1}}\right) \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$, тогда в функцию $\Phi(p^{\alpha_1+1})$ будет входить сумма Клостермана

$$K(p^{\alpha_1+1}, -h, 0) = -p^{\alpha_1},$$

а функция $\Phi(p^{\alpha_1+1})$ будет равна

$$\Phi(p^{\alpha_1+1}) = -p^{-4(\alpha_1+1)} \cdot p^{2(\alpha_1+1)+1} \varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) \left(\frac{D_1/p}{p^{\alpha_1}}\right) \left(\frac{D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right) p^{\alpha_1} =$$

$$= -\varepsilon^2(p) \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) \left(\frac{D_1/p \cdot D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right) \frac{1}{p^{\alpha_1+1}}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 + s$, $s > 1$, тогда функция $\Phi(p^\alpha)$ будет содержать сумму Клостермана $K(p^{\alpha_1+s}, -h, 0)$, которая равна 0 для всех $s > 1$. В итоге, получаем, что $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Таким образом, можем записать следующее произведение, входящее в разложение суммы особого ряда

$$\prod_{\substack{p | \delta_{F_1} \\ p | \delta_{F_2} \\ h = p^{\alpha_1} \cdot h_1 \\ (h_1, p) = 1}} \left(1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots\right) =$$

$$\prod_{\substack{p|\delta_{F_1}\\ p|\delta_{F_2}\\ h=p^{\alpha_1}\cdot h_1\\ (h_1,p)=1}} \left(1+\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)\frac{p-1}{p}+\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)\left(\frac{D_1/p\cdot D_2/p}{p}\right)\frac{p-1}{p^2}+\cdots\right.$$

$$+$$

$$\left.+\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)\left(\frac{D_1/p\cdot D_2/p}{p^{\alpha_1-1}}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha_1}}-\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)\left(\frac{D_1/p\cdot D_2/p}{p^{\alpha_1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}\right).$$

Проведём оценку выражения, стоящего в скобках.

Если $\left(\frac{D_1/p\cdot D_2/p}{p}\right)=1$, то все символы Якоби $\left(\frac{D_1/p\cdot D_2/p}{p^s}\right)$, $1\le s\le \alpha_1+1$ равны 1. Пусть $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)=1$, тогда получаем скобку:

$$1+\frac{p-1}{p}+\frac{p-1}{p^2}\ldots+\frac{p-1}{p^{\alpha_1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}=$$

$$=1+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha_1-1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}=$$

$$=2-\frac{1}{p^{\alpha_1}}-\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}=2-\frac{p+1}{p^{\alpha_1+1}}.$$

В данной скобке происходит взаимное уничтожение слагаемых. В результате получим выражение

$$2-\frac{p+1}{p^{\alpha_1+1}}>1.$$

Следовательно, скобка будет положительной.

Пусть теперь в тех же ограничениях на $\left(\frac{D_1/p\cdot D_2/p}{p}\right)$ выражение $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)=-1$, тогда получаем скобку:

$$1-\frac{p-1}{p}-\frac{p-1}{p^2}\ldots-\frac{p-1}{p^{\alpha_1}}+\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}=$$

$$=1-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots-\frac{1}{p^{\alpha_1-1}}+\frac{1}{p^{\alpha_1}}+\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}=$$

$$=\frac{1}{p^{\alpha_1}}+\frac{1}{p^{\alpha_1+1}}=\frac{p+1}{p^{\alpha_1+1}}.$$

В данной скобке происходит взаимное уничтожение слагаемых. В результате получим выражение

$$\frac{p+1}{p^{\alpha_1+1}} > 0.$$

Следовательно, скобка будет положительной.

Если $\left(\frac{D_1/p \cdot D_2/p}{p}\right) = -1$, то символы Якоби $\left(\frac{D_1/p \cdot D_2/p}{p^s}\right)$ для четных степеней s равны 1, а для нечетных степеней s равны -1. Пусть также $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) = 1$, тогда получаем скобку:

$$1 + \frac{p-1}{p} - \frac{p-1}{p^2} \ldots + (-1)^{\alpha_1-1}\frac{p-1}{p^{\alpha_1}} - (-1)^{\alpha_1}\frac{1}{p^{\alpha_1+1}} =$$

$$= 1 + \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{1}{p} + \cdots + \frac{(-1)^{\alpha_1-1}}{p^{\alpha_1-1}}\right) - \frac{(-1)^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+1}}.$$

Выражение, стоящее в скобках, является суммой α_1 членов геометрической прогрессии со знаменателем $-\frac{1}{p}$. Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$1 + \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1-(-1)^{\alpha_1} p^{-\alpha_1}}{1+\frac{1}{p}} - \frac{(-1)^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+1}} =$$

$$= 1 + \frac{p^{\alpha_1+2} - p^{\alpha_1+1} - (-1)^{\alpha_1}(p^2+1)}{p^{\alpha_1+1}(p+1)} > 1.$$

Следовательно, скобка будет положительной.

Пусть $\left(\frac{D_1/p \cdot D_2/p}{p}\right) = -1$ и $\varepsilon^2(p)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) = -1$, тогда получаем скобку:

$$1 - \frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} \ldots + (-1)^{\alpha_1}\frac{p-1}{p^{\alpha_1}} + (-1)^{\alpha_1}\frac{1}{p^{\alpha_1+1}} =$$

$$= 1 - \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{1}{p} + \cdots + \frac{(-1)^{\alpha_1-1}}{p^{\alpha_1-1}}\right) + \frac{(-1)^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+1}}.$$

Выражение, стоящее в скобках, является суммой α_1 членов геометрической прогрессии со знаменателем $-\frac{1}{p}$. Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$1-\frac{p-1}{p}\cdot\frac{1-(-1)^{\alpha_1}p^{-\alpha_1}}{1+\frac{1}{p}}+\frac{(-1)^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+1}}=$$

$$=1-\frac{p^{\alpha_1+1}(p-1)-(-1)^{\alpha_1}(p^2+1)}{p^{\alpha_1+1}(p+1)}=$$

$$=\frac{2p^{\alpha_1+1}+(-1)^{\alpha_1}(p^2+1)}{p^{\alpha_1+1}(p+1)}>0.$$

Следовательно, скобка будет положительной.

Так как равенства для сумм Гаусса от степеней двойки отличаются от равенств от степени простого числа, то случай, когда $p=2$ является сложной задачей, решение которой представляет собой отдельное большое исследование.

В результате проведенных выше рассуждений, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$\Phi(q)=q^{-4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-\frac{2\pi ihl}{q}}G_1\left(q,l,\overline{0}\right)G_2\left(q,-l,\overline{0}\right).$$

Справедливы следующие утверждения:

1. Функция $\Phi(q)$ является мультипликативной.
2. Сумма особого ряда

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\Phi(q)$$

является положительным числом.

Выводы по третьей главе.

1. Рассмотрена одна задача аналитической теории чисел, для решения которой необходимо использовать точные формулы для двойных сумм Гаусса.

2. Доказано, что сумму особого ряда асимптотической формулы для задачи с квадратичными формами разных дискриминантов можно представить в виде произведения по простым числам.

3. Вычислены выражения для произведений, входящих в разложение суммы особого ряда, по всем простым $p > 2$ и показана их положительность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате изучения точных формул для двойных сумм Гаусса были получены следующие результаты:

1. Проведен анализ точных формул для двойных сумм Гаусса, полученных в работах [14] и [15].

2. Приведены недостатки и достоинства исследуемых формул для сумм Гаусса.

3. Выявлены некоторые несоответствия в представленных формулах.

4. Рассмотрена одна задача аналитической теории чисел, при решении которой используются точные формулы для сумм Гаусса.

5. Проведено доказательство положительности суммы особого ряда асимптотической формулы для числа решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований, касающихся тригонометрических сумм и их приложений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гаусс Карл. Труды по теории чисел. Сборник научных трудов. – Пер. с нем. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 979 с.

2. Герман Вейль. Алгебраическая теория чисел. Пер. с англ. Копейкиной Л.И. – М.: Изд-во иностран. лит-ры, 1947. – 224 с.

3. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел. – М.: Тр.Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, том 22. – С. 3–179.

4. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Of Sci. – 1948. – 34. – P. 204–207.

5. Лекционные курсы НОЦ/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2009. Вып. 13: Метод тригонометрических сумм / Чанга М. Е. – 48 с.

6. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – М: Наука, 1971. – 160 с.

7. Estermann T. On Klostermann's sum // Mathematika. – 1961. – 8. – P. 83–86.

8. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1962. – Т. 65. – С. 3–212.

9. Hardy G.H. Ramanujan's trigonometrical function $c_q(n)$ // Proc. Cambr. Soc. – 1920. – 20. – P. 263–271.

10. Ramanujan S. On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers // Trans. Cambr. Phil. Soc. – 1918. – 22. – P. 259-276.

11. Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, том 30, выпуск 1. – С. 183—206.

12. Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем. // Матем. заметки, 1967, том 1, выпуск 1. – С. 99-110.

13. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 368 с.

14.Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 53–67.

15.Пачев У.М., Дохов Р.А. О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – № 19(162). – Вып. 32. – С. 108-119.

16.Куртова Л.Н., Васильева Н.В. О числе решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов: Материалы IV Международной научной конференции. – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. –С. 150.

17.Estermann, T. A new application of Hardy-Littlewood-Kloostermanmethod / T. Estermann // Proc. London Math. Soc. – 1962. – 12. – P. 425–444.

18.Iwaniec H., Kovalski E. Analitic number theory. – Providence, Rhode Island: American Math. Soc., 2004. – 615 p.

19.Hua, L. K. Introduction to number theory / L. K. Hua. – Springer, 1982. – 572 p.

20.Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 416 с.

21.Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука. Глав. Ред. физ-мат. лит. – 1985. – 504 с.

22.Виноградов И.М. Основы теории чисел. – СПб-М: Лань, 2004. – 167 с.

23.Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 240 с.

24.Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1989. – 240 с.

25.Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1953. – 409 с.

26.Хассе Г. Лекции по теории чисел. – М.: Иностранная литература, 1953. – 519 с.