УДК 681.518;51,330, 330.4,330.46

А В. ЖУРАВКА, В.М. МОСКОВКИН, В.В. БРУК

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ЭКОНОМИКЕ: ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Описывается известная двумерная модель конкурентных взаимодействий в популяционной экологии, которая интерпретирована в рамках конкурентных взаимодействий двух экономических объектов Проделан качественный анализ всех особых точек динамической системы второго порядка, приводятся результаты численных экспериментов.

Запишем двумерную модель конкурентных взаимодействий в обозначениях работы [1].

$$\frac{dX_1}{dt} = (a - bX_1 - \delta X_2)X_1, \quad \frac{dX_2}{dt} = (c - \gamma X_1 - dX_2)X_2 . \tag{1}$$

Данная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка описывала конкурентное взаимодействие двух экологических популяций, в которой численности этих популяций обозначены как X_1 и X_2 Другие обозначения системы уравнений (1): a, b, δ, c, γ, d – положительные коэффициенты модели, $t > 0$ – время.

Аналогичная система уравнений использовалась в работе [2] при моделировании конкурентного взаимодействия двух инноваций. На наш взгляд, данная модель может описывать конкурентные взаимодействия для широкого класса экономических объектов· от конкурирующих предприятий, выпускающих сходный товар (X_i – объемы производства), или фирм, продающих этот товар (X_i – объемы продаж), до конкурирующих приграничных регионов (X_i – региональный внутренний продукт) или даже стран (X_i – ВВП).

Система уравнений (1) имеет четыре особые (неподвижные, равновесные) точки 1. (0, 0); 2. $\left(0, \ \frac{c}{d}\right)$; 3. $\left(\frac{a}{b}, \ 0\right)$; 4. $\left(\frac{ad - \delta c}{bd - \gamma\delta}, \ \frac{bc - a\gamma}{bd - \gamma\delta}\right)$. Условия положительности координат четвертой особой точки имеют вид·

1) $bd > \gamma\delta$, $ad < \delta c$, $bc < a\gamma$;

2) $bd > \gamma\delta$, $ad < \delta c$, $bc < a\gamma$.

Условие 1 рассмотрено в работах [1, 3]. В этом случае четвертая особая точка является неустойчивой седловой точкой. Наши численные эксперименты для этого случая:

$$a = 0.01, \quad b = \frac{0.01}{1500}, \quad \delta = 10^{-5}, \qquad c = 0.02; \ \gamma = 2 \cdot 10^{-5}, \ d = 2 \cdot 10^{-5}$$

позволили получить следующий фазовый портрет (рис. 1). Как видим, фазовые траектории могут подходить очень близко к седловой точке, а затем резко уходят к одной из устойчивых точек, лежащих на осях координат. Покажем, что эти точки являются устойчивыми узлами. Запишем матрицу линеаризованной системы (матрицу Якоби) в произвольной особой точке $\left(X_1^*, X_2^*\right)$.

$$A = \begin{bmatrix} a - 2bX_1^* - \delta X_2^* & -\delta X_1^* \\ -\gamma X_2^* & c - \gamma X_1^* - 2dX_2^* \end{bmatrix}. \tag{2}$$

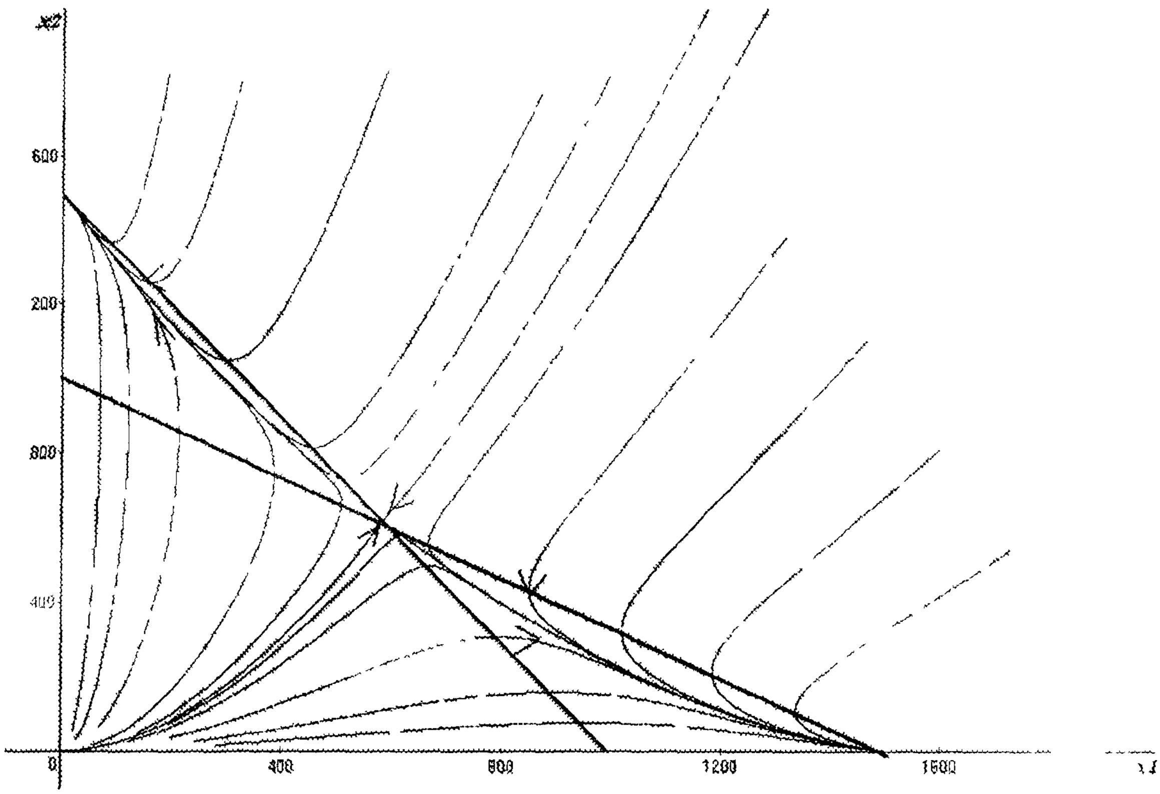

Рис 1. Фазовый портрет динамической системы (1), в случае когда четвертая особая точка является седлом. Тонкие линии – фазовые траектории, жирные прямые линии – изоклины Обозначения в тексте

Тогда характеристическое уравнение $|A - \lambda I| = 0$, где I – единичная матрица, для точки $\left(0, \ \frac{c}{d}\right)$ примет вид $\left(a - \frac{\delta c}{d} - \lambda\right) \ (-c - \lambda) = 0$, откуда $\lambda_1 = a - \frac{\delta c}{в} < 0$, $\lambda_2 = -c < 0$. Следовательно, эта точка является устойчивым узлом. На рис. 1 она имеет вид $(0, 1500)$.

Аналогично показывается, что третья особая точка $\left(\frac{a}{b}, \ 0\right)$ также является устойчивым узлом (на рис 1 она имеет вид (1500, 0))

Из рис. 1 мы видим, что положительный квадрант разбивается кривой, проходящей через четвертую особую точку, которая является пересечением двух прямых (изоклин), на две области притяжения к двум указанным выше особым гочкам. Эта разделяющая кривая называется сепаратрисой. Можно показать, что она является устойчивой, т.е. движения по ней происходят в сторону четвертой особой точки. Отметим, что первая (нулевая) особая точка является неустойчивым узлом, т.е. траектории из нее уходят по экспоненциальному временному закону. Таким образом, для условия 1 происходит подавление одного экономического объекта другим, за исключением очень редких ситуаций, когда фазовые состояния этих объектов находятся на сепаратрисе

Совершенно другая ситуация будет наблюдаться для условия 2. В самом общем случае эта ситуация рассмотрена в работе [3]. Здесь четвертая точка является устойчивым узлом, вторая и третья – седлами, а первая – неустойчивым узлом, как и для предыдущего условия.

Фазовый портрет в этом случае показан на рис. 2. Он был построен в результате численного решения системы уравнений (1) при следующих значениях коэффициентов:

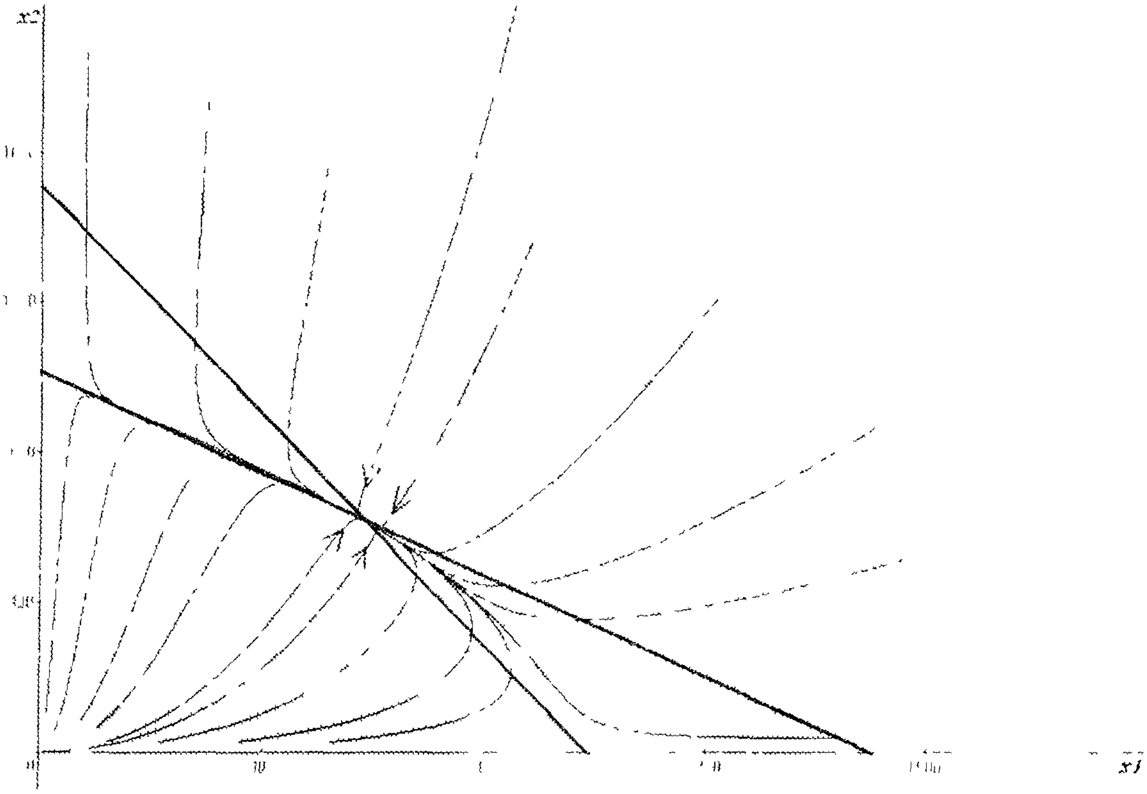

Рис 2 Фазовый портрет динамической системы (1) в случае, когда четвертая особая точка является устойчивым узлом

$$a = 0.01,\quad b = 10^{-5},\quad \delta = \frac{0.01 \cdot 0.67}{1000},\quad c = 0.02,\quad \gamma = \frac{0.02 \cdot 0.67}{1000},\quad d = 2 \cdot 10^{-5}$$

Найдем сепаратрисы для седловых точек. Главные направления сепаратрисы в седловой точке находятся из уравнений $A\overline{u_i} = \lambda_i \overline{u_i}$, $i = 1,2$, $\lambda_1 > \lambda_2$ [1]. Для седла $\left(\frac{a}{b},\ 0\right)$ эти уравнения примут вид

$$\begin{pmatrix} -a & \dfrac{-\delta a}{b} \\ 0 & c - \dfrac{\gamma a}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} -a & \dfrac{-\delta a}{b} \\ 0 & c - \dfrac{\gamma a}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где λ_i определяется из характеристического уравнения

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \lambda_1 = c - \frac{\gamma a}{b} > 0,\quad \lambda_2 = -a < 0$$

Из этих уравнений следует, что для $\lambda_1 - \overline{u_1} = (u_{11}, u_{12}) = (0,0)$ – сепаратриса отсутствует, а для $\lambda_{12} - \overline{u_2} = (u_{21}, u_{22}) = (1,0)$. Можно показать, что эта сепаратриса устойчива. Это следует из уравнения $\frac{dX_1}{dt} = (a - bX_1)X_1$ при $X_2 = 0$. Следовательно, ось X_1 является устойчивой сепаратрисой для особой точки $\left(\frac{a}{b},\ 0\right)$ и на этой сепаратрисе данная седловая точка является устойчивым узлом Аналогичная ситуация имеет место для особои точки $\left(0,\ \dfrac{c}{d}\right)$ Таким образом, для условия 2 не происходит подавления одного экономического объекта другим при ненулевых начальных состояниях этих объектов

Переход от условия 1 к условию 2 происходит через совпадение изоклин В этом случае четвертая особая точка вырождается во множество особых точек, лежащих на отрезке прямои первого квадранта Их называют непростыми особыми точками [1] Численные эксперименты для этого случая при

$$a = 0\ 01,\quad b = 10^{-5}\quad \delta = 10^{-5},\quad c = 0\ 02,\quad \gamma = 2\ 10^{-5}\quad d = 2\ 10^{-5}$$

показаны на рис 3 Здесь все точки, лежащие на отрезке прямой $X_2 = 1000 - X_1$, расположенном в первом квадранте фазовой плоскости (X_1, X_2), являются устоичивыми особыми точками Итак, в этом случае существует бесконечное множество устоичивых равновесных состояний

Возможны также случаи отсутствия четвертои особой точки в первом квадранте Расчетная ситуация для такого случая при

$$a = 0\ 01\quad b = 10^{-5}\quad \delta = 2\ 10^{-5},\quad c = 0\ 02,\quad \gamma = 10^{-5}\quad d = 10^{-5}$$

показана на рис 4 Все траектории, расположенные в первом квадранте, стягиваются в точку (0, 2000), которая является устойчивым узлом Здесь второй экономический объект со временем полностью подавляет первый

Случаи, когда первыи экономический объект со временем полностью подавляет второй, соответствует ситуации, показанной на рис 5 Все траектории, расположенные в первом квадранте, стягиваются в точку (2000, 0), которая является устойчивым узлом Эта расчетная ситуация соответствует следующим параметрам системы уравнении (1)

$$a = 0{,}01\quad b = 2\ 10^{-5}\quad \delta = \frac{0{,}01\ 1{,}5}{2000}\quad c = 0{,}02\quad \gamma = 2\ 10^{-5}\quad d = 2\ 10^{-5}$$

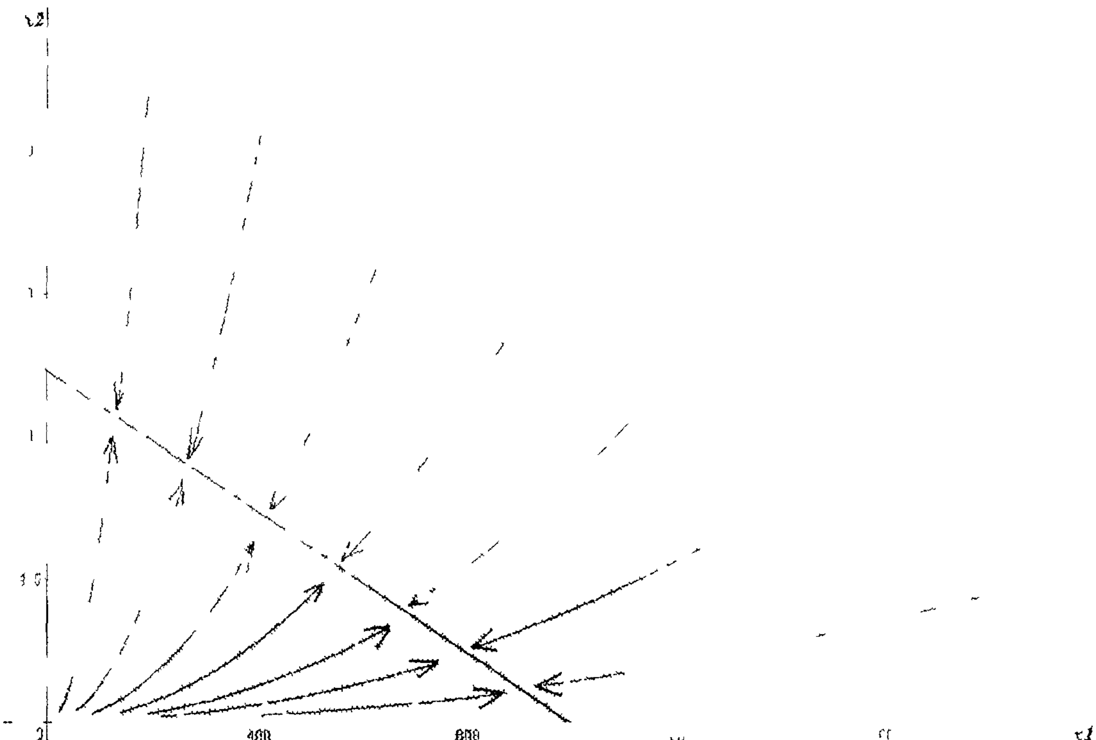

Рис 3 Фазовый портрет динамической системы (1) в случае совпадения двух изоклин

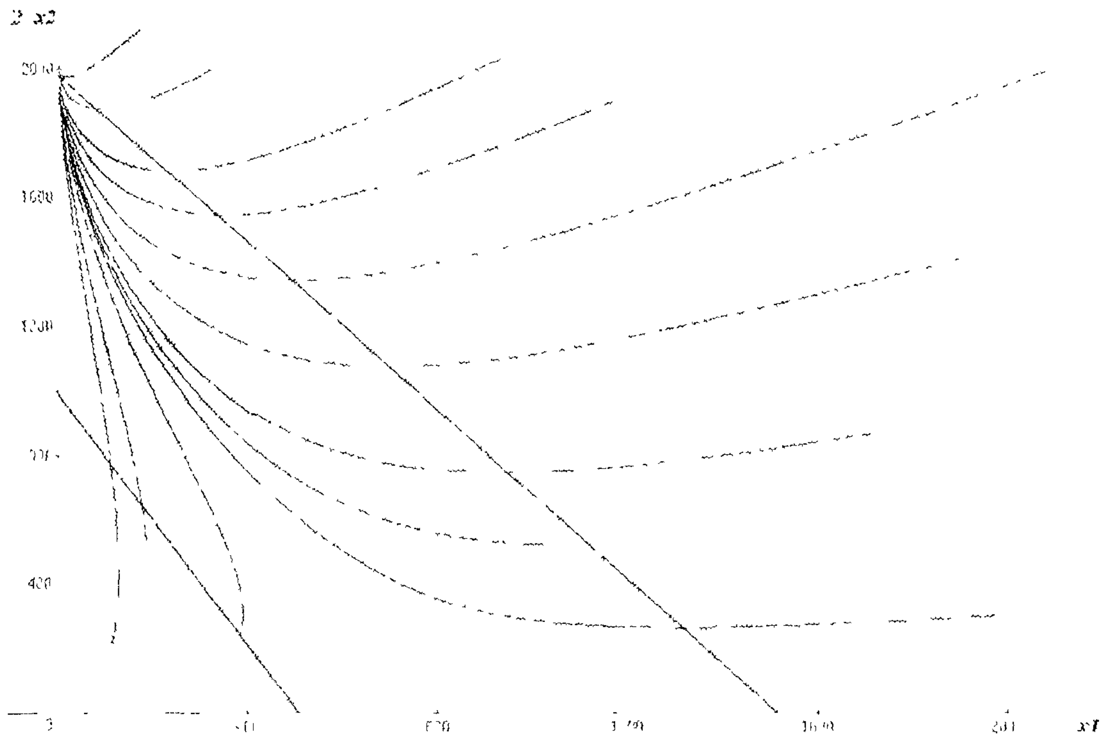

Рис. 4. Фазовый портрет динамической системы (1) в случае отсутствия четвертой особой точки в первом квадранте фазовой плоскости и притяжения к точке $\left(\dfrac{a}{b},0\right)$

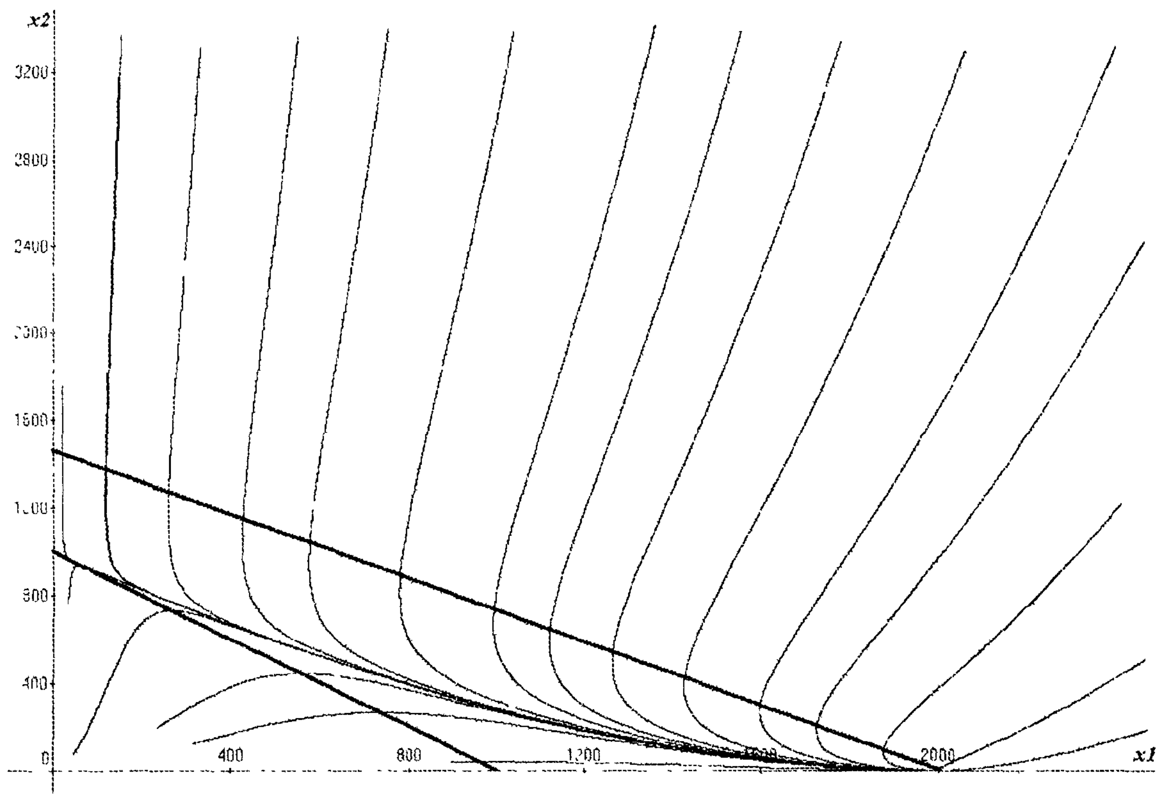

Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы (1) в случае отсутствия четвертой особой точки в первом квадранте фазовой плоскости и притяжения к точке $\left(0,\dfrac{c}{d}\right)$

В заключение отметим, что записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую конкурентное взаимодействие n экономических объектов [2], нетрудно, но теоретический анализ таких систем представляет большие трудности. Примеры такого анализа для трехмерных моделей конкурентных взаимодействий в социологии приведены в работах [4,5].

Список литературы: 1. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями· Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 243 с. 2. *Московкин В. М.* Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес Информ. 1998 №17-18. С. 41-48. 3. *Федоров В.Д., Гильманов Т.Г.* Экология. М.: Изд-во МГУ. 1980. 464 с 4. *Московкин В. М.* Конкурентные взаимодействия в стратифицированном обществе (Математическое моделирование) // Бизнес Информ. 2000. №2. С.36-39. 5. *Московкин В. М.* Математическое моделирование межэтнических конкурентных взаимодействий // Бизнес Информ. 2000. №4. С. 11-13.

Поступила в редколлегию 21.05 01

Журавка Андрей Викторович, аспирант кафедры информатики ХГТУСА, ведущий инженер кафедры страхового, биржевого и банковского дела. Научные интересы: информатика, проблемы защиты информации, математическое моделирование. Увлечения и хобби· компьютерная техника, иностранные языки, туризм. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Сумская, 40, 40-29-46.

Московкин Владимир Михайлович, д-р наук, профессор ХНУ им. В.Н. Каразина. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес· Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4.

Брук Владимир Викторович, канд. техн. наук, старший научный сотрудник УкрНИИЭП. Научные интересы: цифровая обработка изображения. Адрес· Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4

УДК 519.95:612.018

С.И. ЛАПТА, С.С. ЛАПТА, Т.В. ЖЕМЧУЖКИНА

ОДНОКОМПАРТМЕНТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРИВЕННОГО ТЕСТА ТОЛЕРАНТНОСТИ К ГЛЮКОЗЕ

Предлагается новая оригинальная однокомпартментная математическая модель внутривенного теста толерантности к глюкозе. Она представляет собой дифференциально-разностное уравнение 1-го порядка относительно концентрации глюкозы в капиллярной крови. Модель эффективно полностью воспроизводит всю кривую теста и является самой минимальной из физиологически адекватных моделей динамики уровня гликемии в крови

Внутривенный тест толерантности к глюкозе (ВТТГ) уже давно применяется в клинической диагностике сахарного диабета при отягощающих нарушениях в абсорбции глюкозы в кровь из желудочно-кишечного тракта пациента [1,2]. При стандартном ВТТГ пациенту вводят внутривенно в течение 1-2 или 2-4 минут глюкозу из расчета 0,33 (0,5) г на 1 кг веса тела в виде 25%, либо 33%, либо 50% раствора. Известно, что при этом уровень глюкозы в крови резко повышается от базального значения, в норме равного в среднем 80 мг% (80 мг глюкозы на 100 мл плазмы крови), до максимального – 250-300 мг% – сразу после проведения инъекции, затем плавно снижается. В норме концентрация глюкозы в крови достигает базального уровня, как правило, на 40-90 минуте, затем совершает характерную гипогликемическую осцилляцию и окончательно возвращается к нему на 180 минуте от начала теста [1] (рис.1, на котором приведена типичная нормальная кривая ВТТГ).

Для здорового человека проведение ВТТГ не имеет клинического смысла, а при явных проявлениях сахарного диабета оно противопоказано. Его целесообразно использовать в целях ранней диагностики сахарного диабета лишь в