

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

(Н И У « Б е л Г У »)

**ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ И ВНУТРЕННИХ
ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА НА ТЕРМОФОРЕЗ КРУПНОЙ
ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ
МАЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Магистерская диссертация

обучающегося по направлению подготовки 03.04.02 Физика

очной формы обучения, группы 12001737

Скопца Николая Александровича

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Малай Н.В.

Рецензент:

к.ф.-м.н. доцент кафедры

естественнонаучных

дисциплин, БУКЭП

Москаленко Н.И.

БЕЛГОРОД 2019

РЕФЕРАТ

В квазистационарном приближении для ламинарного течения решена задача о термофоретическом движении крупной твердой частицы сферической формы в вязкой газообразной среде. В ходе решения уравнений газовой динамики учитывалось влияние на термофорез движения среды (конвективного члена в уравнении теплопроводности) и внутренних источников тепла, неоднородно распределенных внутри частицы.

Основные результаты опубликованы в работах:

1. Малай Н.В., Скопец Н.А., Шулиманова З.Л., Щукин Е.Р. "Влияние движения среды и внутренних источников тепла на термофорез большой аэрозольной частицы сферической формы во внешнем поле градиента температуры" // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно - математические и технические науки. 2018. № 4 (231). С. 52-57.

2. Малай Н.В., Скопец Н.А. Решение стационарной краевой задачи для уравнения конвективного переноса, описывающего влияние движения среды на термофорез аэрозольной частицы // тезисы докладов XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2019). - Беларусь. г. Могилев. 14-19 мая 2019. - С. 86-88.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия	9
Глава II. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления вне и внутри крупной испаряющейся капли	15
Глава III. Распределение температуры концентрации в окрестности испаряющейся капли	21
Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости диффузиофореза крупной испаряющейся капли сферической формы. Анализ полученных результатов	29
Заключение	33
Литература	34

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. На частицы, входящие в состав аэродисперсных систем, действуют силы различной природы, вызывающие их упорядоченное движение [1,2]. В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды [1,2,3,4,5,6,7].

При этом движение частиц, обусловленное, например, внешним заданным градиентом температуры, называют термофорезом. Термофоретическая сила перемещает частицы из областей с более высокой температурой в области с более низкой температурой. Термофорез может оказывать значительное влияние на протекание физических процессов, например, на осаждения частиц в каналах тепло-и массообменников, на движение частиц в зонах просветления аэродисперсных систем и т.д. Это явление широко используется при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, нанесения, заданной толщины, специальных покрытий из аэрозольных частиц, отборе аэрозольных проб, получение высококачественных оптических волокон и т.д. Таким образом, термофорез не только встречается в природе, но и широко используется в технике и промышленности [1,2,3,4,5,6,7]. Поэтому изучение этого явления представляет интерес с точки зрения науки, так и на практике.

Рассмотрение термофореза в газообразной среде является комплексной задачей. Это связано с тем, что в газе движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями (обусловленными непосредственным взаимодействием молекул газообразной среды с поверхностью частицы), так и с объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей.

В исследованиях по теории термофореза частиц, опубликованных до настоящего времени, не учитывалось влияние движения среды при движении

сферической частицы в вязкой газообразной среде, причем рассматривалось движение как при малых, так при значительных относительных перепадах температуры в окрестности частиц [4,5,6,7].

В газовой динамике и в физике аэродисперсных систем в термин "относительный перепад температуры" вносят следующий физический смысл [4,5,6,7]:

$$\frac{T_{iS} - T_{\infty}}{T_{\infty}}, \quad (1)$$

из выражения (1) видно, что под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы, равной T_{iS} и температурой вдали от нее, равной T_{∞} к температуре T_{∞} . При этом имеют место две различные ситуации:

– если справедливо неравенство $\frac{T_{iS} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \ll 1$, то в этом случае говорят, что относительный перепад температуры мал. Саму газообразную среду тогда называют изотермической и коэффициенты переноса (вязкость, теплопроводность, диффузия) и плотность считают постоянными величинами, т.е. не зависящими от температуры;

– если же $\frac{T_{iS} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \sim 0(1)$, то в этом случае говорят, что относительный перепад температуры значительный. Саму газообразную среду называют неизотермической и нужно уже учитывать зависимость коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) и плотности от температуры.

В физике аэродисперсных систем классификацию частиц по размерам проводят из сравнения характерных размеров частицы (R) со средней длиной свободного пробега молекул газообразной среды (λ). Для отражения этого факта в физике аэродисперсных систем применяют так называемый критерий Кнудсена [1,2], который определяется следующим образом:

$$Kn = \frac{\lambda}{R}. \quad (2)$$

Если критерий Кнудсена меньше либо равен 0,01, то частицы, находящиеся во взвешенном состоянии в газообразной среде, называются крупными, а если критерий Кнудсена лежит в пределах от 0,01 до 0,3, то такие частицы называются умеренно крупными.

В дипломной работе рассматривается влияние движения среды (учета конвективных членов в уравнении теплопроводности) на термофорез крупной твердой частицы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, то есть имеет место следующее неравенство $\frac{T_{iS} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \ll 1$. При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды будем считать постоянными величинами и газ, соответственно, рассматривать как несжимаемую среду.

Тема исследования. Влияние на термофорез крупной твердой частицы сферической формы движения среды и внутренних источников тепла при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности в вязкой газообразной среде.

Объект исследования: изучение явления термофореза в вязкой газообразной среде.

Предмет исследования: влияние на термофорез крупных твердой частицы конвективного члена в уравнении теплопроводности при малых относительных перепадах температуры в вязкой газообразной среде.

Цель исследования – получить аналитические выражения, которые учитывают влияние на скорость и силу термофореза крупной твердой частицы сферической формы конвективного члена в уравнении теплопроводности и внутренних источников тепла.

Задачи исследования:

- изучить математические методы (метод малого параметра, метод теории возмущения) решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в декартовой и в сферической системе координат;
- решить конвективное уравнение теплопроводности и линеаризованную по скорости систему уравнений Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями;
- получить аналитические выражения для термофоретической силы, действующей на крупную твердую частицу сферической формы и скорости ее термофореза, с учетом движения среды и нагрева ее поверхности внутренними источниками тепла при малых относительных перепадах температуры;
- провести качественный анализ влияния конвективного члена в уравнении теплопроводности (движения газообразной среды) и внутренних источников тепла на силу и скорость термофореза.

Научная новизна исследования. В дипломной работе изучается влияние движения вязкой среды и внутренних источников тепла на термофорез крупной твердой частицы сферической формы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его выводы и материалы углубляют и дополняют исследования по термофоретическому движению крупных твердых аэрозольных частиц сферической формы (по данной проблеме) и могут быть использованы также при разработке факультативов и общих курсов по экологическим вопросам для различных учебных заведений.

Апробация исследования. Основные результаты опубликованы в работах:

1. Малай Н.В., Скопец Н.А., Шулиманова З.Л., Щукин Е.Р. "Влияние движения среды и внутренних источников тепла на термофорез большой аэрозольной частицы сферической формы во внешнем поле градиента температуры" // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно - математические и технические науки. 2018. № 4 (231). С. 52-57.

2. Малай Н.В., Скопец Н.А. Решение стационарной краевой задачи для уравнения конвективного переноса, описывающего влияние движения среды на термофорез аэрозольной частицы //тезисы докладов XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2019). - Беларусь. г. Могилев. 14-19 мая 2019. - С. 86-88.

Структура работы. Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Глава I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

Рассматривается крупная аэрозольная частица сферической формы радиуса R , однородная по своему составу. Частица находится во взвешенном состоянии в газе с плотностью ρ_e , теплопроводностью λ_e и вязкостью μ_e , внутри которой действуют тепловые источники плотностью q_i . С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T , направленный вдоль оси Oz (ось Oz направлена горизонтально). Градиент температуры приводит к возникновению термофоретической силы. Термофоретическая сила перемещает частицы в области с более низкой температурой. Когда сила вязкого сопротивления газовой смеси уравнивается термофоретической силой, частица начинает двигаться равномерно. В научной литературе скорость этого равномерного движения называется термофоретической скоростью [1,2]. Здесь и далее индексы e и i относятся к газу и частице соответственно, индексом S обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, индекс ∞ обозначает физические величины, характеризующие газообразную среду в невозмущенном потоке.

Процесс теплопереноса в системе частица–газообразная среда протекает квазистационарно в связи с малым временем тепловой релаксации, движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса.

Начало системы отсчета свяжем с центром масс движущейся аэрозольной частицы, и задачу решаем в сферической системе координат. Задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ . Распределения скоростей, давлений и температур обладают аксиальной симметрией относительно Oz .

Общая система газодинамических уравнений, с помощью которой описывается явление термофореза нелинейна и при ее решении мы сталкиваемся с большими математическими трудностями. В этом случае в задаче опреде-

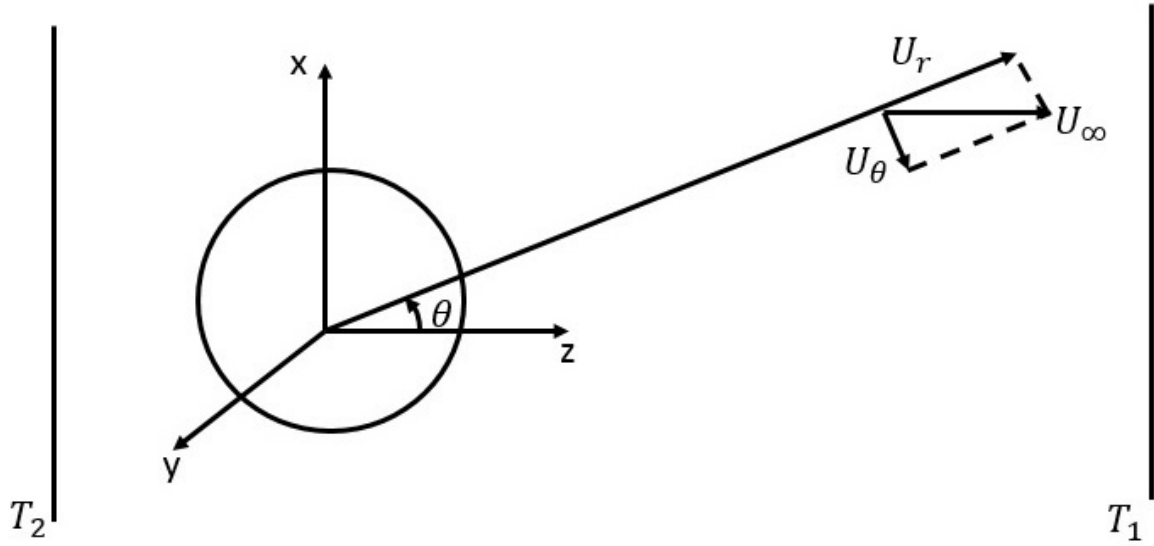


Рис. 1: Постановка задачи

ляются малые параметры (безразмерные комбинации) и по ним производят линеаризацию соответствующей системы уравнений. В результате получается линеаризованная система уравнений, которую уже можно решить.

Определяющими параметрами в нашей задаче являются материальные постоянные μ_e , ρ_e , λ_e и сохраняющиеся в процессе движения частицы R , $|\nabla \mathbf{T}|$, T_∞ и U_∞ . Из этих параметров, кроме числа Рейнольдса ($Re = R\rho_e U_\infty / \mu_e$), можно составить безразмерную комбинацию $\varepsilon = R|\nabla T| / T_\infty$, характеризующую перепад температуры на размере частицы. При описании термофореза ε играет роль малого параметра и по которому производится линеаризация системы газодинамических уравнений.

В дипломной работе решалась следующая система газодинамических уравнений, которая описывает поля давления P_e , массовой скорости \mathbf{U}_e , температур T_e и T_i [8,9]:

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla P_e, \quad \text{div} \mathbf{U}_e = 0, \quad (3)$$

$$\rho_e c_{pe} (U_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \quad (4)$$

$$\lambda_i \Delta T_i = -q_i, \quad (5)$$

Здесь выражение (3) – линейризованное по скорости система уравнений Навье-Стокса, описывающие поля скорости и давления вне частицы; выражение (4) – конвективное уравнение теплопроводности, описывающие поля температуры вне и уравнение (5) – описывает поле температуры внутри частицы.

Для решения системы уравнений (3)-(5) в сферической системе координат будем учитывать следующие граничные условия. На поверхности крупной твердой аэрозольной частицы ($r = R$) учитываются:

— непроницаемость поверхности частицы для радиальной компоненты массовой скорости газообразной среды:

$$U_r^{(e)} = 0, \quad (6)$$

— тепловое скольжение для касательной компоненты массовой скорости, пропорциональной газокинетическому коэффициенту K_{TS} :

$$U_\theta^{(e)} = K_{TS} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}, \quad (7)$$

— непрерывность температуры и радиального потока тепла с учетом тепла, переходящего в излучение:

$$T_e = T_i, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_\infty^4), \quad (8)$$

Рассмотрим граничные условия на большом расстоянии от крупной твердой частицы, т.е. при $r \rightarrow \infty$:

— из рис. 1. видно, что в качестве граничных условий для радиальной $U_r^{(e)}$ и касательной $U_\theta^{(e)}$ компонент массовой скорости \mathbf{U}_e можем записать:

$$U_r^{(e)} = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin \theta, \quad (9)$$

– и, соответственно, для температуры T_e и давления P_e :

$$P_e = P_\infty, \quad T_e = T_\infty + |\nabla T| r \cos \theta, \quad (10)$$

И последние граничные условия, которые нам необходимы для определения всех постоянных интегрирования, после решения системы уравнений (3)–(5) – учтем конечность физических величин, характеризующих саму твердую частицу, а, именно, температура в центре аэрозольной частицы при $r \rightarrow 0$, должна удовлетворять условию:

$$T_i \neq \infty. \quad (11)$$

В приведенных выше уравнениях газовой динамики и граничных условиях для крупной частицы введены следующие обозначения: σ_0 , - постоянная Стефана-Больцмана, σ_1 - интегральная степень черноты; $U_\infty = -|\mathbf{U}_\infty|$ - величина скорости набегающего потока; λ_e, λ_i - коэффициенты теплопроводности газообразной среды и капли. Выражение для газокинетического коэффициента K_{TS} , приведено в [10], где они получены по ходу решения уравнения Больцмана. При коэффициентах аккомодации тангенциальной проекции импульса и энергии газовых молекул равных единице, значение газокинетического коэффициента $K_{TS} \approx 1.161$ [10].

Термофоретическая сила определяется из выражения для полной силы, действующей на частицу. Эта полная сила, действующая на крупную частицу во внешнем заданном поле градиента температуры определяется интегрированием компонент тензора напряжений по поверхности частицы и имеет

следующий вид [8,9]:

$$F = 2\pi \int_0^\pi \left(-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta. \quad (12)$$

Здесь компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ в сферической системе координат равны:

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^\theta}{\partial r},$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right).$$

Как выше мы отмечали, что роль малого параметра в нашей задаче играет $\varepsilon = R|\nabla T|/T_\infty$. Поскольку ε много меньше единицы, то набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние. С учетом этого факта, при решении уравнений газовой динамики мы можем воспользоваться хорошо апробированным методом решения дифференциальных уравнений в частных производных – методом теории возмущения, т.е.

$$t_e = t_e^{(0)} + \varepsilon t_e^{(1)} + \dots, \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots, \quad (14)$$

$$p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, \quad (15)$$

$$t_i = t_i^{(0)} + \varepsilon t_i^{(1)} + \dots, \quad (16)$$

Из приведенных выше выражений следует, что при описании термофореза

крупной твердой частицы достаточно ограничиться при нахождении скорости и силы термофореза до первого порядка малости включительно.

Вид граничных условий для компонент массовой скорости U_r и U_θ вдали от частицы ($r \rightarrow \infty$) указывают на то, что их можно искать в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [8,9,11,12]. Известно [4,5], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. Учитывая это, выражения для компонент массовой скорости будем искать в следующем виде:

$$U_r(y, \theta) = U_\infty \cos\theta G(y), \quad U_\theta(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta g(y) \quad (17)$$

Здесь $G(y = r/R)$ и $g(y = r/R)$ - произвольные функции, которые определяются из решения системы уравнений Навье-Стокса и должны удовлетворять краевым условиям.

В безразмерном виде уравнения, описывающие распределения температуры вне и внутри частицы, имеют следующий вид:

$$\varepsilon P_r (\mathbf{V}_e \nabla) t_e = \Delta t_e, \quad (18)$$

$$\Delta t_i = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} q_i, \quad (19)$$

Здесь $P_r = c_p \mu_e / \lambda_e$ - число Прандтля [8,9].

Чтобы найти выражения для общей силы, действующей со стороны вязкой газообразной среды на нашу частицу и выражений для силы и скорости термофореза необходимо решить систему газодинамических уравнений (3)-(5) с краевыми условиями (6) - (11).

Глава II. Решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса. Нахождение полей скорости и давления в окрестности крупной твердой частицы сферической формы

В этой главе получим выражения для компонент массовой скорости и давления. Для этого необходимо решить уравнения гидродинамики. Стационарная система уравнений гидродинамики (состоящая из уравнения Навье-Стокса и непрерывности) и, описывающая течение газа в окрестности крупной частицы, имеют вид [8,9]:

$$\rho_e(\mathbf{U}_e \nabla) \mathbf{U}_e = -\nabla P_e + \mu_e \Delta \mathbf{U}_e, \operatorname{div} \mathbf{U}_e = 0, \quad (20)$$

и представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных. Как это отмечается в научных источниках – нелинейность этой системы уравнений обусловлена наличием в уравнении Навье-Стокса (первого уравнения) нелинейного (конвективного) члена $(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U}$. Что представляет большие математические трудности при решении этих уравнений.

В тоже время, в связи с большой практической востребованностью такой системы, в важных частных, конкретных случаях развивались приближенные математические методы. Они позволили в той или иной мере упростить и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач.

Существует обширный класс гидродинамических течений, в которых можно пренебречь этим нелинейным слагаемым. Сюда относят, например, стационарные течения с малыми скоростями. В научной литературе такие уравнения получили название "линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса", изучение решений которых представляет большой научный, практический, а также методологический интерес и позволяет развить математический аппарат, необходимый для исследования уже самой полной системы уравнений

гидро- и газовой динамики.

В дипломной работе предполагается, что конвективным членом в уравнении (20) можно пренебречь (с учетом выше сказанного) и рассматривается следующая система гидродинамических уравнений, описывающая стационарные поля давления и скорости в окрестности крупной твердой аэрозольной частицы:

$$\nabla P_e = \mu_e \Delta \mathbf{U}_e, \operatorname{div} \mathbf{U}_e = 0. \quad (21)$$

В сферической системе координат (используя связь между декартовыми координатами и сферическими) системы уравнений (21) принимает вид [8,9]:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r} \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (22)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial r} + \frac{2}{r} U_r^{(e)} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r} U_\theta^{(e)} = 0. \quad (24)$$

Здесь, входящие в уравнения (22) - (24), компоненты тензора напряжений в сферической системе координат равны [8,9]:

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{r} \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial \theta} + U_r^{(e)} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2}{r} \mu_e \left(U_r^{(e)} + ctg\theta U_\theta^{(e)} \right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r} \right).$$

Перейдем к поиску выражений для компонент массовой скорости. Для этого воспользуемся краевыми условиями вдали от нашей частицы при $r \rightarrow \infty$. Исходя из этих краевых условий видим, что будем искать решения системы уравнений (22)–(24) в виде (17), т.е.

$$U_r^{(e)}(y, \theta) = U_\infty \cos\theta G(y), \quad U_\theta^{(e)}(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta g(y). \quad (25)$$

Здесь $G(y)$, $g(y)$ – произвольные аналитические функции, которые ограничены и четырежды дифференцируемы по радиальной координате $y = r/R$.

Поскольку с видом поиска выражений для компонент массовой скорости мы определились, то для дальнейшего решения нашей системы уравнений необходимо найти связь между функциями $G(y)$, $g(y)$. Связь между функциями $G(y)$, $g(y)$ легко находится, если воспользоваться уравнением непрерывности. Подставляя (25) в (24), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 G(y) \right) - \frac{1}{y \sin\theta} g(y) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2\theta \right) &= 0, \\ g(y) &= \frac{1}{2} y \frac{dG}{dy} + G(y). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (25), (26) в уравнения (22)–(23), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{dy} &= \mu_e U_\infty \cos\theta \left(\frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{4}{y} \frac{dG}{dy} \right), \\ \frac{dP_e}{d\theta} &= -\mu_e U_\infty \sin\theta \left(\frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} + 3y \frac{d^2 G}{dy^2} + 2 \frac{dG}{dy} \right). \end{aligned}$$

Из полученных выше выражений видно: если первое уравнение продифференцировать по θ , а, соответственно, второе уравнение по y и затем вычесть

из первого второе, то в конечном итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для нахождения функции $G(y)$:

$$y^3 \frac{d^4 G}{dy^4} + 8y^2 \frac{d^3 G}{dy^3} + 8y \frac{d^2 G}{dy^2} - 8 \frac{dG}{dy} = 0 \quad (27)$$

Полученное нами уравнение для нахождения функции $G(y)$ относится к уравнениям типа Эйлера [12,13]. Его решение ищется стандартным способом. т.е. находится определяющее уравнение и т.д. В конечном итоге имеем:

$$G(y) = \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \quad (28)$$

а, учитывая связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находим выражение и для функции $g(y)$:

$$g(y) = \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right). \quad (29)$$

Таким образом, в общем случае мы получили следующее выражение для массовой скорости \mathbf{V} в сферической системе координат:

$$\mathbf{U} = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (30)$$

Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы сферической системы координат, а компо-

ненты массовой скорости U_r и U_θ имеют вид:

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos\theta \left(A_0 + A_1 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{y^3} \right), \quad (31)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta \left(A_0 + 2A_1 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_3}{2y^3} \right). \quad (32)$$

Далее найдем выражение для поля давления. Оно определяется следующим образом. Подставим (28) в

$$\frac{dP_e}{d\theta} = -\mu_e U_\infty \sin\theta \left(\frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} + 3y \frac{d^2 G}{dy^2} + 2 \frac{dG}{dy} \right),$$

и проинтегрируем его. В результате получаем следующее выражение для поля давления:

$$P_e = P_0 + \mu_e \cos\theta \frac{U_\infty}{Ry^2} \left(10yA_1 + \frac{A_2}{y^2} \right). \quad (33)$$

В итоге мы получили общее решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса. При плоско-параллельном обтекании крупной частицы сферической формы вся наша область от 0 до ∞ разбивается на две — вне и внутри. Нас интересует область вне частицы и поэтому имеем следующие выражения для компонентов массовой скорости и давления ($R \leq r < \infty$):

$$U_r^{(e)} = U_\infty \cos\theta \left(1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right),$$

$$U_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right),$$

$$P_e = P_\infty + \frac{U_\infty}{R^2} \frac{\mu_e \cos\theta}{y^2} A_2.$$

Входящие в полученные выше выражения постоянные интегрирования, определяются из соответствующих граничных условий на поверхности частицы.

Глава III. Распределение полей температур вне и внутри частицы

Найдем решение конвективного уравнения теплопроводности, описывающего распределение температуры в окрестности частицы. Удобно рассматривать термофорез в системе координат в мгновенном положении центра масс частицы. В этом случае газ на бесконечности покоится, а сама частица движется с характерной скоростью $\mathbf{U} = -\mathbf{U}_\infty$, где $|\mathbf{U}| = |\mathbf{U}_\infty|$. С учетом этого, выражения для безразмерных компонент массовой скорости $\mathbf{V}_e = \frac{\mathbf{U}_e}{U}$, где $U = |\mathbf{U}|$ имеют вид:

$$V_r^{(e)}(y, \theta) = \cos\theta \left(\frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), \quad V_\theta^{(e)}(y, \theta) = -\sin\theta \left(-\frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right).$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2 определяются из граничных условий на поверхности частицы.

Таким образом, нам необходимо решить следующие безразмерное уравнение, описывающее процесс переноса тепла [8,9]:

$$\varepsilon P_r (\mathbf{V}_e \nabla) t_e = \Delta t_e. \quad (34)$$

Решать это уравнение мы будем с помощью теории возмущения, т.е. в виде:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta). \quad (35)$$

Далее процедура следующая. Подставим выражение (35) в уравнение (34) и, поскольку при нахождении силы и скорости термофореза мы ограничиваемся поправками до первого порядка малости по ε , оставляя члены $\sim \varepsilon$, получаем следующие два уравнения для нахождения функций

$$\Delta t_{e0}(y) = 0, \quad (36)$$

$$P_r \left(V_r^{(e)}(y, \theta) \cdot \nabla \right) t_{e0}(y) = \Delta t_{e1}(y, \theta). \quad (37)$$

Найдем сначала решение уравнения (36). Чтобы решить это уравнение, необходимо перейти в сферическую систему координат и оно имеет вид:

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{dy} \left(y^2 \frac{dt_{e0}(y)}{dy} \right) = 0. \quad (38)$$

Для нахождения функции $t_{e0}(y)$ его необходимо проинтегрировать два раза, получаем:

$$t_{e0}(y) = N_0 + \frac{\Gamma_0}{y}. \quad (39)$$

В результате интегрирования нами получены две постоянные интегрирования, которые определяются из краевых условий. В частности, постоянная интегрирования N_0 определяется из краевого условия вдали от твердой частицы (см. (10)): $N_0 = 1$. Таким образом,

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}. \quad (40)$$

Теперь найдем выражение для функции $t_{e1}(y, \theta)$, которая определяется из решения уравнения (37). Подставляя выражение (40) в уравнение (37), имеем:

$$\Delta t_{e1}(y, \theta) = -\omega_0 \cos \theta \left(\frac{A_1}{y^5} + \frac{A_2}{y^3} \right), \quad (41)$$

где $\omega_0 = P_r \Gamma_0$.

Видим, что в правой части уравнения (41) стоит функция $\cos \theta$. Это указывает на то, что решение этого уравнения (41) будем искать методом разделения переменных, т.е. в виде:

$$t_{e1}(y, \theta) = \tau_e(y) \cos \theta. \quad (42)$$

После подстановки выражения (42) в уравнение (41), имеем уравнение для нахождения функции $\tau_e(y)$ (заметим, что $\cos\theta$ уходит):

$$\frac{d^2\tau_e}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d\tau_e}{dy} - \frac{2}{y^2} \tau_e = -\omega_0 \left(\frac{A_1}{y^5} + \frac{A_2}{y^3} \right). \quad (43)$$

Таким образом, мы получили нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции $\tau_e(y)$.

Для дальнейшего решения этого уравнения воспользуемся общей теорией решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [11,12]. Из этой теории известно, что если нам дано неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = h(x),$$

где $p(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[a, b]$ и x_0 — любая точка из этого отрезка.

Тогда общее решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка строится следующим образом. Пусть $W(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)$ — определитель Вронского и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения и общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \varphi_2(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1(x)h(x)}{W(x)} dx - \varphi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_2(x)h(x)}{W(x)} dx,$$

Перейдем теперь к нашему уравнению. Видим, что в нашем случае фундаментальная система решений и определитель Вронского равны: $\varphi_1(y) = y$, $\varphi_2(y) = 1/y^2$, $W(y) = -3/y^2$, имеем:

$$\tau_e(y) = N_1y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3} \right). \quad (44)$$

Из краевого условия вдали от твердой частицы определяется постоянная интегрирования N_1 : $N_1 = 1$.

И окончательно, имеем следующее выражение, которое описывает распределение температуры в газообразной среде в окрестности крупной твердой частицы сферической формы:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad (45)$$

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_{e1}(y, \theta) = \tau_e(y) \cos \theta, \quad \tau_e(y) = y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3} \right).$$

Найдем распределение температуры внутри крупной твердой частицы сферической формы, которая определяется из решения следующего конвективного уравнения:

$$\Delta t_i = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} q_i, \quad (46)$$

Решение этого уравнения будем искать в аналогичном виде:

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta). \quad (47)$$

Будем его решать аналогичным способом. т.е. применим метод теории возмущения и метод разделения переменных. Поскольку поле температуры внутри частицы будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра, то и правую часть необходимо представить в виде разложения по полиномам Лежандра, т.е. функцию $q_i(r, \theta)$ представим как:

$$-\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y) P_n(x), \quad (48)$$

$$q_{in}(y) = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i P_n(x) dx,$$

где функция $q_{in}(y)$ легко определяется, если воспользоваться свойством полиномов Лежандра ($P_n(x), x = \cos \theta$) [12,13]. В дальнейшем нам потребуются следующие их свойства:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right],$$

которое называется формулой Родрига [12,13]. В частности: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$. В дальнейшем нам потребуются следующие свойства полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем записать следующие выражения для функций q_{i0} и q_{i1} :

$$q_{i0}(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_\infty} \int_{-1}^{+1} q_i dx, \quad q_{i1}(y) = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_\infty} \int_{-1}^{+1} q_i x dx.$$

Подставляя полученные выше выражения в (46) и, оставляя члены $\sim \varepsilon$, получаем следующие два уравнения для нахождения функций q_{i0}, q_{i1} :

$$\Delta t_{i0}(y) = q_{i0}(y), \tag{49}$$

$$q_{i1} \cos \theta = \Delta t_{i1}(y, \theta). \tag{50}$$

Найдем сначала решение уравнения (49). Для этого запишем его в сферической системе координат:

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{dy} \left(y^2 \frac{dt_{i0}}{dy} \right) = q_{i0}. \quad (51)$$

Видим, что уравнение (51) – неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение ищем методом описанным выше. Определитель Вронского и фундаментальная система решений однородного уравнения, которая соответствует нашему неоднородному уравнению в нашем случае равны соответственно: $\varphi_1(y) = 1$, $\varphi_2(y) = 1/y$, $W(y) = -1/y^2$. Тогда мы можем записать явный вид функции $t_{i0}(y)$:

$$t_{i0}(y) = B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy, \quad \psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx. \quad (52)$$

Входящая в функцию $t_{i0}(y)$ постоянная интегрирования H_0 определяется из краевого условия на поверхности крупной твердой частицы и равна:

$$H_0 = \int_1^0 \psi_0 dy = \frac{1}{4\pi R \lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_i dV. \quad (53)$$

Здесь следует иметь в виду, что интегрирование ведется по всему объему крупной твердой частицы.

Найдем выражение для функции $t_{i1}(y, \theta)$, т.е. получим решение следующего уравнения

$$q_{i1} \cos \theta = \Delta t_{i1}(y, \theta). \quad (54)$$

Левая часть этого уравнения указывает на то, что поиск решения уравнения (54) следует искать в виде:

$$t_{i1}(y, \theta) = \tau_i(y) \cos \theta. \quad (55)$$

Подставляя (55), получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции τ_i и его частными решениями его являются функции: $\varphi_1(y) = y$, $\varphi_2(y) = 1/y^2$.

Следовательно, функция $t_{i1}(y, \theta)$ равна:

$$t_{i1}(y, \theta) = \cos\theta \left[B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left(y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \right], \quad (56)$$

Здесь

$$\psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) x dx, \quad H_1 = \frac{1}{3} \int_1^0 y \psi_1 dy,$$

$z = r \cos \theta$, $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$, $x = \cos \theta$, в научной литературе интеграл $\int_V q_i z dV$ называют дипольным моментом плотности тепловых источников [6,13]. Физический смысл, которого, как мы отмечали выше, заключается в распределении тепла внутри частицы.

Таким образом, в третьей главе методом разделения переменных, мы получили для полей t_e и t_i следующие выражения ($t_k = \frac{T_k}{T_{e\infty}}$, $k = e, i$):

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta),$$

где

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_{i0}(y) = B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy, \quad \omega_0 = Pr\Gamma_0,$$

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr, \quad \psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) x dx, \quad z = r \cos \theta,$$

$$t_{e1}(y, \theta) = \cos\theta \left[y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3} \right) \right], \quad \psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx,$$

$$t_{i1}(y, \theta) = \cos\theta \left[B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left(y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \right],$$

$$H_0 = \frac{1}{4\pi R\lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_i dV, \quad H_1 = \frac{1}{3} \int_1^0 y\psi_1 dy, \quad x = \cos\theta,$$

$$\int_1^0 y\psi_1 dy = \frac{3}{4\pi R^2 \lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_i z dV,$$

Pr - число Прандтля [8].

Входящие в выражения для полей t_e, t_i постоянные интегрирования определяются из краевых условий на поверхности частицы. Учитывая, что для определения силы и скорости термофореза, нам потребуются коэффициенты Γ_0, Γ_1 , которые имеют следующий вид:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} - \omega_1 \right) + \frac{3C_1}{\delta} - \frac{\omega_0}{2\delta} \left[A_2 \left(\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1 \right) - \frac{A_1}{2} \left(3 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1 \right) \right], \quad (57)$$

$$\Gamma_0 = t_{eS} - 1. \quad (58)$$

Здесь $\delta = 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1$, $\omega_1 = 1 + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{iS}} T_{e\infty}^3 t_{eS}^3$, $t_{iS} = t_{i0}(y=1)$, $t_{eS} = t_{e0}(y=1)$.

Здесь индексом "S" обозначены значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_{iS} . Она находится из решения следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{iS}, \\ \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} (t_{eS} - 1) = \frac{1}{4\pi R \lambda_{iS} T_{e\infty}} \int_V q_i dV - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (59)$$

в которой $T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}$, $T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty}$, $\lambda_{iS} = \lambda_i(T_{iS})$, $\lambda_{eS} = \lambda_e(T_{iS})$.

Глава IV. Вывод выражения для силы и скорости термофореза крупной твердой частицы сферической формы. Анализ полученных результатов

В предыдущих главах нами получены выражения для компонент массовой скорости, давлений и температур как вне, так и внутри крупной твердой частицы, то мы можем найти выражения и для общей силы, которая действует на частицу и скорости и силы термофореза. Она находится интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и имеет вид [8,9]:

$$F_z = \int_{(S)} \left(-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Big|_{r=R}, \quad (60)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $U_r^{(e)}$ и $U_\theta^{(e)}$ – компоненты тензора напряжений, радиальная и касательная компоненты массовой скорости:

$$\sigma_{rr} = \mu_e \left(2 \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{y} \right).$$

Производя интегрирование по поверхности крупной твердой частицы сферической формы, получаем следующее выражение для общей силы, действующей на частицу:

$$F_z = -4\pi R \mu_e U_\infty A_2. \quad (61)$$

Из выражения (61) видим, что после нахождения коэффициента A_2 из краевых условий и, подставляя его в выражение (61) имеем, что общая сила, действующая на частицу, складывается из силы вязкого сопротивления среды \mathbf{F}_μ , термофоретической силы \mathbf{F}_{th} и \mathbf{F}_{tmh} , обусловленных движением среды (т.е.

учета конвективного члена в уравнениях теплопроводности):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{th} + \mathbf{F}_{thm}, \quad (62)$$

где $\mathbf{F}_\mu = -6\pi R\mu_e \mathbf{U}$, $\mathbf{F}_{th} = -6\pi R\mu_e f_{th} \nabla T$, $\mathbf{F}_{thm} = -6\pi R\mu_e f_{thm} \nabla T$.

Значение коэффициентов f_{th} и f_{thm} могут быть оценены из следующих выражений:

$$f_{th} = 2K_{TS} \frac{\nu_{eS}}{t_{eS} T_{e\infty} \delta} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}}, \quad f_{thm} = -2K_{TS} \frac{\nu_{eS}}{t_{eS} T_{e\infty} \delta} \frac{5}{24} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \omega_0.$$

Так как частица движется равномерно, то полную силу можно приравнять к нулю. В результате получаем общее выражение для скорости упорядоченного движения частицы, которая будет складываться из термофоретической скорости \mathbf{U}_{th} и скорости \mathbf{U}_{thm} , обусловленной движением среды:

$$\mathbf{U}_p = -(\mathbf{U}_{th} + \mathbf{U}_{thm}), \quad (63)$$

где $\mathbf{U}_{th} = 2K_{th} \frac{\nu_{eS}}{t_{eS} T_{e\infty} \delta} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \nabla T$, $\mathbf{U}_{thm} = 2K_{th} \frac{\nu_{eS}}{t_{eS} T_{e\infty} \delta} \frac{5}{24} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \omega \nabla T$.

Полученные формулы (62)-(63) позволяют оценивать влияние конвективного члена в уравнении теплопроводности (движения среды) и нагрева поверхности частицы на величину скорости и силы термофореза. При $\omega_0 = 0$ получаем выражения для чистого термофореза крупной аэрозольной частицы сферической формы [1,2].

Из полученных формул, описывающих явление термофореза, также видно, что вклад движения среды отрицательный и он пропорционален коэффициенту $\omega_0 = \text{Pr}\Gamma_0$. Учитывая, что для большинства газов число Прандтля соответствует порядку единицы, то вклад определяется коэффициентом $\Gamma_0 = t_{eS} - 1$. Как мы указывали выше, что этот коэффициент Γ_0 определяется из решения трансцендентной системы уравнений.

Чтобы решить такую систему необходимо задать или конкретизировать явный вид распределения плотности тепловых источников внутри частицы. Отсюда следует, что на величину силы и скорости термофореза крупной твердой частицы влияет движение среды через нагрев поверхности частицы. Это позволяет использовать полученные выше формулы в практической плоскости, например, при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц и т.д.

Полученные в дипломной работе выражения для силы и скорости термофореза крупной твердой частицы можно использовать и для численных оценок (построение графиков). Для этого необходимо конкретизировать природу и плотность тепловых источников, которые неоднородно распределены в объеме частицы [13].

В случае, например, электромагнитного нагрева поверхности капли, степень неоднородности распределения энергии излучения в частице зависит от оптических констант материала частицы (m_s) и параметра дифракции (x_a). В этом случае выражение для плотности излучения в частице, трансформируемой в тепло, можно записать в виде $q_i = 4\pi \frac{n_s a_s}{n_0 \lambda_0} I_0 B_s$, где $m_s = n_s + ia_s$, $x_a = \frac{2\pi R}{\lambda_0}$, n_s - показатель преломления, a_s - показатель поглощения, n_0 - показатель преломления среды, I_0, λ_0 - интенсивность и длина волны излучения, B_s - функция координат, рассчитываемая по теории Ми [13,14].

Для оценки вклада движения среды рассмотрим наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающим к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos\theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad R - \delta R \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (64)$$

где I_0 - интенсивность падающего излучения. В этом случае интегралы, входящие в распределения полей температур легко вычисляются, в частности:

$$\frac{1}{4\pi R\lambda_i T_{e\infty}} \int_V q_i dV = \pi R^2 I_0. \quad (65)$$

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{iS} с учетом заданного в (64) распределения источников тепла определяется из решения следующей системы уравнений ($T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}$, $T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty}$):

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{iS}, \\ t_{eS} = 1 + \frac{R}{4\lambda_e T_{e\infty}} I_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_e} [t_{iS}^4 - 1]. \end{cases} \quad (66)$$

Качественные оценки, проведенные с помощью формул (62)-(63) для крупных частиц ($R = 25\text{мкм}$) меди и железа, взвешенных в воздухе при $P_{e\infty} = 10^5\text{Па}$, $T_{e\infty} = 273\text{К}$, и изменении температуры поверхности частицы в интервале от $T_{iS} = 273\text{К}$ до $T_{iS} = 303\text{К}$, показало, что вклад движения среды в общую картину термофореза составляет не более 10-12%.

Заключение

В квазистационарном приближении при малых числах Пекле и Рейнольдса получены аналитические выражения, которые позволяют оценивать термодинамическую силу и скорость крупной твердой частицы сферической формы, внутри которой действуют неоднородно распределенные внутренние источники тепла, когда средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуры вдали от нее с учетом движения среды (учтены конвективные члены в уравнении теплопроводности). Проведенный качественный анализ показал, что случае малых относительных перепадов температуры движения среды к чисто диффузиофорезу составляет не более 10-12 %.

Список литературы:

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. 1985. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван., Луйс, 205 с.
2. Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н. Два метода построения теории термофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоидный журнал. 1976. Т. 38. № 6. С. 1149-1155.
3. Малай Н.В., Скопец Н.А., Шулиманова З.Л., Щукин Е.Р. Влияние движения среды и внутренних источников тепла на термофорез большой аэрозольной частицы сферической формы во внешнем поле градиента температуры // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно - математические и технические науки. 2018. № 4 (231). С. 52-57
4. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. 2008. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде. 2008. Прикладная механика и техническая физика. Т. 81 (5). С. 74-80.
5. Малай Н.В., Рязанов К.С., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. 2011. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущейся в газообразной среде. Прикладная механика и техническая физика. Т. 52(4). С. 63-71.
6. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. 2012. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы. Журнал технической физики. Т. 82(10). С. 42-49.
7. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р. 2016. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы. Прикладная механика и техническая физика. Т. 57(2). С. 164-171.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 1988. Теоретическая физика: учебное пособие. Т.6. Гидродинамика. М., Наука. 736 с.

9. Хаппель Дж., Бреннер Г. 1976. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир. 630 с.
10. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. 1982. Теория термофореза умерен-но крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики. Т.52(11). С. 2253-2661.
11. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 409 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
13. Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е. 203. Фотофорез аэрозолей в атмосфере Земли. Теплофизика и аэромеханика. №2. С.297-311.
14. Борен К., Хафмен Д. 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир, 660 с.