УДК 517.95

О.В. ЧЕРНОВА
O.V. CHERNOVA

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

LINEAR CONNECTION PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEMS ON A PLANE

На комплексной плоскости рассматривается ляпуновский контур. Множество, которое является дополнением к контуру, разбивается на два открытых множества, причем одно из них является окрестностью бесконечно удаленной точки, а их границы совпадают с самим контуром. Далее вводится пространство Гёльдера, которое состоит из функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на любой конечной подобласти дополнения к контуру. Аналогичным образом вводится соответствующее пространство дифференцируемых функций. Рассматриваются две эллиптические системы с комплексными и вещественными коэффициентами. Для них ставится задача линейного сопряжения. Предполагая, что кусочно-непрерывные матричные коэффициенты систем принадлежат специальному пространству Гёльдера, в работе сформулированы теоремы о фредгольмовости этих систем и получены формулы индекса для поставленных задач.

Ключевые слова: весовое пространство Гёльдера, задача линейного сопряжения, индекс, эллиптическая система.

A Lyapunov contour is considered on the complex plane. The set, which is the complement to the contour, is divided into two open sets, and one of them is a neighborhood of the point at infinity, and their boundaries coincide with the contour itself. Further, the Holder space is introduced, which consists of functions that satisfy the Holder condition on any finite subdomain of the complement to the contour. The corresponding space of differentiable functions is introduced in a similar way. Two elliptic systems with complex and real coefficients are considered. For them, a linear conjugation problem is posed. Assuming that the piecewise continuous matrix coefficients of the systems belong to a special Holder space, theorems on the Fredholm property of these systems are formulated in this paper and the index formulas for the problems posed are obtained.

Keywords: weighted Holder space linear conjugation problem, index, elliptic system.

Пусть *E* - некоторое множество комплексной плоскости. По определению [8] функция *(р* удовлетворяет условию Гёльдера с показателем О < д < 1 на Е, если существует такая постоянная *С,* что выполнено равенство:

I P *(.z-i) - p (Z2)* I < C I Zi -Z2 I ,

где наименьшая постоянная C в последнем неравенстве есть полунорма

[p] = ^ ^ p

здесь верхняя грань берется по точкам Zy множества E.

Класс ограниченных функций, которые удовлетворяют этому условию, будем обозначать

Пусть *Г* - контур на комплексной плоскости, наложим на него дополнительное условие гладкости: через обозначим единичный касательный вектор к *Г* в точке , причем его направление согласовано с ориентацией контура.

Определение. *Пусть e(t) - непрерывная функция на контуре г. Тогда последний назовем ляпуновским контуром, если e (t) удовлетворяет условию Гёльдера. Более точно Г £* C *если e(t) eC^(Г),* O < v < 1 .

Далее рассмотрим составной ляпуновский контур *г* *г* , где *Г* есть простые равноправные контуры. Последнее означает, что ни один из контуров *г* j не охватывает другие контуры. Пусть открытое множество $D = C\setminus \Gamma$ представляет собой

объединение областей $D_\wedge$ и D , где $D_\wedge$ в свою очередь состоит из конечных связных компонент D_j, $j = l. .,n$, которые не имеют общей границы, а D содержит бесконечную компоненту D^j и возможна такая ориентация контура, что по отношению к

ней область D^ ориентирована положительно, а D - отрицательно. Если ввести обозначение $D=D'^ Ф D~$, то под $C(D)$ естественно понимать класс кусочно-непрерывных функций, т.е. этот класс состоит из функций $<p$, сужения которых на области D- принадлежат С $(D$ $^-$) . Кроме того, для этих функций определены односторонние предельные значения

(р- - 1 i ^ t < P (Ю , 2 G D-,

где границей $D=D'^ Ф D ~$ служит объединение $г Ф Г$.

Обозначим через (D,x) совокупность всех функций $(p$ из класса C (D) со степенным поведением на бесконечности: р (z) = O(| 2 | ^), где . Для дальнейших рассуждений потребуется соответствующее пространство Гёльдера С $^л(^D$, ^), состоящее из функций р $C л$ (D, ^), и аналогичное пространство дифференцируемых функций $C^'^л(D, oc)$, которое определяется следующими условиями

$$pr^{C}Ч^{D})n^{C}Л'(^{D,}co)_, \qquad (^{D,}=o) \qquad (^{1})$$

и является банаховым относительно соответствующей нормы.

Рассмотрим в D эллиптическую систему первого порядка

$$- A \qquad + b(z^) \; U(z) - F(z). z \in D, \qquad (2)$$

где A G - постоянная матрица, не имеющая вещественных собственных значений, и IXI - матричные коэффициенты, $a(z).b(z)$ g $C(D)$ комплексны и заданные вне $Г$. Условие эллиптичности означает, что матрица не имеет вещественных собственных значений.

Предполагается, что коэффициенты системы удовлетворяют условиям

$$a(z)Mz) \text{ е } C'\_/Дсо; = |JC:“\_.. \qquad (3)$$

Само решение $U = (u^,... Ui)$ рассматривается в классе $a6)^$ где $Л$ произвольно. Из условий (3) совместно с (1) следует ограниченность оператора системы (2): С $^_л$ -> С $^_{л}$_]_, поэтому правая часть системы $F(z)$ задается в классе С $^_{л\_}$ $^(E)$, Оо) .

Определим задачу линейного сопряжения для системы (2) следующим краевым условием:

$$U_{^}(t)-G(t)U_{-}(t)-f(t), t_{G}Г , \qquad (4)$$

где IXI - матрица-функция $G(t)$ g $C^’_v$ $(Г)$ и комплексная I - вектор-функция $f(t)$ G $C'^(F)$ заданы.

Фредгольмовость и индекс задачи (2), (4) понимаются по отношению к ее R-линейному оператору $U-(f,F)$, который действует из пространства С ^{л} $(^D$, о) в прямое произведение

Г)х С»'л_ 1 (S,со) .

Для аналитических вектор-функций эта задача является классической и тесно связана с теорией сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, подробное изложение которой можно найти в широко известных монографиях Ф.Д. Гахова [4] и Н.И. Мусхелишвили [6]. Для обобщенных аналитических функций эта задача рассматривалась также в [3], для случая произвольной кусочно-гладкой линии - в [5]. Решение задачи линейного сопряжения для решений различных классов эллиптических систем с постоянными коэффициентами можно найти в [1, 2, 7, 8].

Основной результат о фредгольмовой разрешимости задачи (2), (4) заключен в нижеследующей теореме, но, прежде чем его сформулировать, введем специальную матрицу ^ определяемую равенством

$$=-[_{2ni} J \quad \wedge dtj\wedge$$

где T есть единичная окружность, ориентируемая против часовой стрелки, а комплексный матричный дифференциал $t_j\wedge$ определяется равенством $t_j\wedge = 1 \; d+ \; A_{t2}$, где здесь и ниже 1 означает единичную матрицу, порядок которой ясен из контекста.

Теорема 1. *Если G(t) е C^' ^ (Г) и матрицы-функции* 2 С $-=E + 1 + G(E — 1)$ *обратимы, то задача (2), (4) фредголъмова в простанстве* где $Л$ *нецелое, а ее индекс дается формулой*

$$<; = \frac{}{n} \; агд- \frac{\det C}{\det C+Jj} + 2/71,$$

где целое число n выбирается из условия n — 1 < Ж n.

Эллиптическая система с вещественными коэффициентами аналогично (2) может быть записана в виде

$$\frac{dU(z)}{dy} - A \frac{dU(z)}{dx} + a(z)U(z) = F(z), \; ze \; D, \qquad (5)$$

где 2 I— вектор-функции U GC $(D,$ оо) , а матричный коэффициент $a(z)e\ C(D)$, как и выше, удовлетворяет условию (3). Для системы (5) задача линейного сопряжения ставится тем же краевым условием (4), с той лишь разницей, что матрица вещественна.

Теорема 2. *Теорема 1 сохраняет свою силу и для задачи (5), (4) с той лишь разницей, что слагаемое In в формуле индекса следует удвоить.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gilbert R.P., Buchanan J.L. First order elliptic systems: A function theoretic approach. Academic Press, New York, 1983. - 280 p.
2. Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора. Annales Polon. Math. - 1966. - V. 17, № 3 - P. 281-320.
3. Векуа И.Н. Обобщенн^хе аналитические функции. 2-е изд., М.: Наука, 1988. - 512 с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3 изд. М.: Наука, 1977. - 641 с.
5. Ковалева Л.А., Солдатов А.П. Об одной нелокальной задаче теории функций // Дифференциальные уравнения. - 2010. - Т. 46, № 3. - С. 396-409.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 513 с.
7. Солдатов А.П., Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР Сер. матем. - 1991. - Т. 55, № 5. - С. 1070-1100.
8. Чернова О.В. Фредгольмова разрешимость задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами // Динамические системы. - 2018. - Т. 8(36), № 4. - С. 357-371.

Чернова Ольга Викторовна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
Тел.: +7(4722) 30-13-56
E-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru