

УДК 621.397

DOI

**Жиляков Е.Г.
Черноморец А. А.
Болгова Е.В.
Голощাপова В.А.**

О МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СУБПОЛОСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

- 1) заведующий кафедрой информационно-телекоммуникационных систем и технологий, доктор технических наук, профессор. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru*
- 2) профессор кафедры прикладной информатики и информационных технологий, кандидат технических наук, доцент Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru*
- 3) аспирант кафедры прикладной информатики и информационных технологий. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: Bolgova_e@bsu.edu.ru*
- 4) старший преподаватель кафедры информационно-телекоммуникационных систем и технологий Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: vgososchapova@bsu.edu.ru*

Аннотация

В данной работе изложены результаты экспериментальных исследований эффективности применения метода оптимальной субполосной фильтрации, обеспечивающего минимальный уровень просачивания энергии за пределы выбранной для фильтрации подобласти пространственных частот.

В ходе экспериментов показано, что энергия входного изображения, сосредоточенная вне выбранной подобласти пространственных частот, влияет на выходную частотных фильтров, основанных на применении ДПФ, в значительно большей степени, чем на результат, полученный на основании метода оптимальной фильтрации. Данное влияние проявляется как на графиках значений соответствующих трансформант Фурье, так и на изображениях, полученных в результате фильтрации.

Ключевые слова: изображение; оптимальная фильтрация; трансформанта Фурье; подобласть пространственных частот.

**Zhilyakov E.G.
Chernomorets A.A.
Bolgova E.V.
Goloschapova V.A.**

ON THE METHOD OF OPTIMAL SUBBAND FILTRATION

- 1) Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru
- 2) Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. Department of Applied Informatics and Information Technologies, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru
- 3) Postgraduate Student. Department of Applied Informatics and Information Technologies. Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia. *e-mail: Bolgova_e@bsu.edu.ru*
- 4) Senior Lecturer. Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia. *e-mail: vgososchapova@bsu.edu.ru*

Abstract

The paper presents the results of experimental studies of the effectiveness of the optimal subband method. This method allows to achieve the minimal level of energy leakage out of the subdomain of spatial frequencies selected for filtration.

The experiments show that the energy of the input image, being out of the selected subdomain of spatial frequencies, affects in a greater degree the output sequence of frequency filters based on DFT than the results based on the optimal filtration method. This influence is evident both on the graphs of corresponding Fourier transforms, and on the images obtained as a result of filtering.

Keywords: image; optimal filtration; Furie transform; subdomain of spatial frequencies.

Введение

Одно из направлений интенсивного развития современных информационно-телекоммуникационных систем определяется тенденцией использования наиболее естественных для человека форм информационного обмена, и, прежде всего, в виде визуальных данных. Обработка изображений является важной задачей. Существующие в настоящее время методы выделения (фильтрации) значимых характеристик отдельных компонент изображения, некоторых периодических структур изображений не являются оптимальными с точки зрения аппроксимации трансформант Фурье в заданной подобласти пространственных частот (ППЧ), в которых осуществляется фильтрации. Поэтому актуальной проблемой является создание математических моделей и методов фильтрации, позволяющих адекватно учитывать энергетические характеристики изображений в выбранной подобласти пространственных частот. В работе [1] разработан и теоретически обоснован новый метод оптимальной линейной фильтрации изображений на основе частотных представлений, который является оптимальным в том смысле, что спектр получаемого в результате фильтрации изображения имеет наименьшее среднеквадратическое отклонение от спектра фильтруемого изображения в заданной двумерной подобласти пространственных частот, а вне этой подобласти пространственных частот имеет наименьшее отклонение от нуля. В работе представлены результаты экспериментальных исследований эффективности метода оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений в заданной подобласти пространственных частот на примере модельных изображений.

Теоретические основы метода оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений

О частотных представлениях при обработке изображений [2] можно говорить, поскольку изображение, как функция с конечной или

неограниченной областью определения, может быть представлено в виде суммы синусов и косинусов различных частот, умноженных на некоторые весовые коэффициенты

$$f_{ik} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N F(u, v) e^{ju(i-1)} e^{jv(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\ k = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где $F(u, v)$ – значение трансформанты Фурье функции

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N f_{ik} e^{-ju(i-1)} e^{-jv(k-1)}, \quad u = 1, 2, \dots, M, \\ v = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Метод оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений [1,3] позволяет для нахождения результатов Y_Ω фильтрации изображения $\Phi=(f_{ik}), i=1,2,\dots,M, k=1,2,\dots,N$, в частотной двумерной области Ω построить вычислительную процедуру, не вычисляя при этом трансформанту Фурье. Для фильтрации изображений предложено использовать следующий вариационный принцип: трансформанта Фурье $Z(u,v)$ результата фильтрации Y_Ω , является оптимальной в смысле евклидовой нормы ее отклонения в заданной подобласти пространственных частот Ω от трансформанты Фурье $F(u,v)$ исходного изображения Φ и от нуля – вне данной ППЧ, т.е.

$$\iint_{(u,v) \in \Omega} |F(u, v) - Z(u, v)|^2 dudv + \\ + \iint_{(u,v) \notin \Omega} |Z(u, v)|^2 dudv \Rightarrow \min. \quad (3)$$

Указанному вариационному принципу соответствует следующее изображение Y_Ω

$$Y_\Omega = A^T \cdot \Phi \cdot B, \quad (4)$$

где матрицы $A=(a_{i_1 i_2}), i_1, i_2=1, 2, \dots, M$, и $B=(b_{k_1 k_2}), k_1, k_2=1, 2, \dots, N$ (субполосные матрицы [2]), определяются соотношениями

$$a_{i_1 i_2} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_2(i_1 - i_2)) - \sin(\alpha_1(i_1 - i_2))}{\pi(i_1 - i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases} \quad b_{k_1 k_2} = \begin{cases} \frac{\sin(\beta_2(k_1 - k_2)) - \sin(\beta_1(k_1 - k_2))}{\pi(k_1 - k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases} \quad (5)$$

Значения

$$0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq \pi \quad (6)$$

задают границы подобласти пространственных частот Ω .

Важным свойством определенного таким образом результата фильтрации является то, что указанный метод не допускает растекания энергии двумерного сигнала за пределы заданной частотной области.

Концептуальные основы экспериментальных исследований

В ходе вычислительных экспериментов проводился сравнительный анализ оценки доли энергии изображения Y_{Opt} , полученного в результате оптимальной фильтрации,

$$\delta_{\Omega Opt} = \frac{\|Y_{Opt}\|^2 - P_{\Omega}(Y_{Opt})}{\|Y_{Opt}\|^2} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Opt})}{\|Y_{Opt}\|^2}, \quad (7)$$

где $\|Y_{Opt}\|^2$ – энергия изображения Y_{Opt} в области определения трансформанты Фурье, $P_{\Omega}(Y_{Opt})$ – доля энергии изображения Y_{Opt} в подобласти пространственных частот Ω , определяемая на основании соотношения

$$P_{\Omega}(Y_{Opt}) = \text{tr}(A_{\Omega}^T Y_{Opt} B_{\Omega} Y_{Opt}^T). \quad (8)$$

с соответствующими характеристиками изображений, полученных при реализации известных частотных фильтров [4]:

– идеальный фильтр (результат фильтрации Y_{Ideal}),

$$H_{Ideal}(u, v) = \begin{cases} 1, & u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\beta_2, -\beta_1] \cup [\beta_1, \beta_2], \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (9)$$

– фильтр Баттерворта порядка $n=2$ (результат фильтрации $Y_{Butterw}$),

$$H_{Butterw}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_1(u, v)}{D_0}\right)^{2n} + \left(\frac{D_2(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}, \quad (10)$$

где D_0 – частота среза, $D_1(u, v)$, $D_2(u, v)$ – расстояние между точкой (u, v) и осями симметрии l_1, l_2 фильтра,

– Гауссов фильтр (результат фильтрации $Y_{Gaussian}$),

$$H_{Gaussian}(u, v) = \exp\left(-\frac{D_1^2(u, v)}{2D_0^2}\right) + \exp\left(-\frac{D_2^2(u, v)}{2D_0^2}\right), \quad (11)$$

где D_0 – частота среза, $D_1(u, v)$, $D_2(u, v)$ – расстояния между точкой (u, v) и осями симметрии l_1, l_2 фильтра.

Построение фильтров осуществлено на основании параметров подобласти пространственных частот, в которой выполнялась оптимальная фильтрация [5,6].

Соответствующие оценки доли энергии результатов фильтрации (изображения Y_{Ideal} , $Y_{Butterw}$, $Y_{Gaussian}$), которая сосредоточена вне выбранной подобласти пространственных частот Ω , имеют следующий вид

$$\delta_{\Omega Ideal} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Ideal})}{\|Y_{Ideal}\|^2}, \quad (12)$$

$$\delta_{\Omega Butterw} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Butterw})}{\|Y_{Butterw}\|^2}, \quad (13)$$

$$\delta_{\Omega Gaussian} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Gaussian})}{\|Y_{Gaussian}\|^2}. \quad (14)$$

Отметим, что вычисления как относительной доли «просачивания» энергии за пределы подобласти пространственных частот оказались доступными, благодаря разработанному в [1] методу вычисления долей энергии (8).

Для получения большей наглядности при оценивании различий оптимальной фильтрации и фильтрации с помощью известных фильтров представляется естественным построить графики соответствующих характеристик выходных последовательностей фильтров.

Сравнительный анализ в работе выполнен, исследуя параметры фильтров и результаты их применения в различных подобластях двумерной области (подобласти получены при фиксированных значениях одной из независимых переменных частотного пространства). Однако, данный факт не снижает важности полученных результатов в виду известного свойства преобразования Фурье (преобразование Фурье

можно записать так, что переменные в нем оказываются разделенными).

Результаты вычислительных экспериментов

Экспериментальные исследования целесообразно осуществлять на основе обработки

модельных сигналов. Генерирование значений модельного изображения (рис. 1) $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, 512$, $k = 1, 2, \dots, 512$, размерностью 512x512 пикселей, осуществляется на основе соотношения

$$f_{ik} = a_1 \sin(2\pi f_1 k) + a_2 \sin(2\pi f_2 k) + a_3 \sin(2\pi f_3 k) + a_4 \sin(2\pi f_4 k) + a_5 \sin(2\pi f_5 k), \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, 512, \quad k = 1, 2, \dots, 512,$$

где

$$f_1 = 0.0193; \quad f_2 = 0.0208; \quad f_3 = 0.0279, \quad f_4 = 0.0295, \quad f_5 = 0.0311,$$

$$a_1 = 3.2; \quad a_2 = 2.9; \quad a_3 = 3.5, \quad a_4 = 2.1, \quad a_5 = 2.2.$$

Такие значения частот позволяют осуществить исследование различных аспектов фильтрации и, прежде всего, влияния энергии исходного сигнала за пределами подобласти пространственных частот на ее результаты.

Фильтрация модельного сигнала (15) на основании метода оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений

осуществлялась в следующей подобласти пространственных частот:

$$\Omega_f: \{\alpha_1=0, \quad \alpha_2=\pi, \quad \beta_1=\beta_0+\Delta\beta(i-1), \quad \beta_2=\beta_0+\Delta\beta(i-1)\}, \quad (16)$$

$$i=1, 2, \dots, 15,$$

где $\Delta\beta$ – величина смещения границ очередной ППЧ.

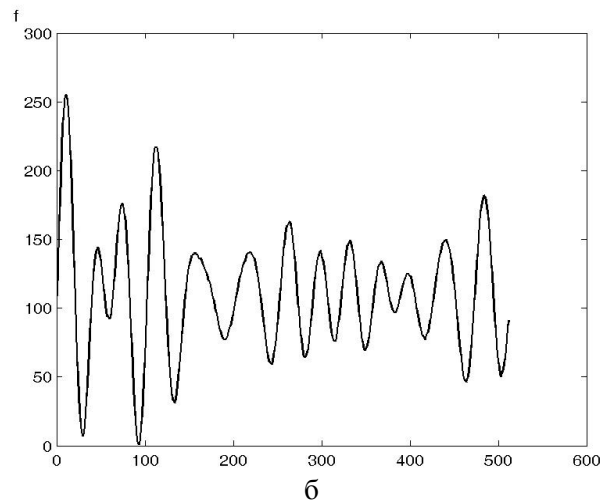
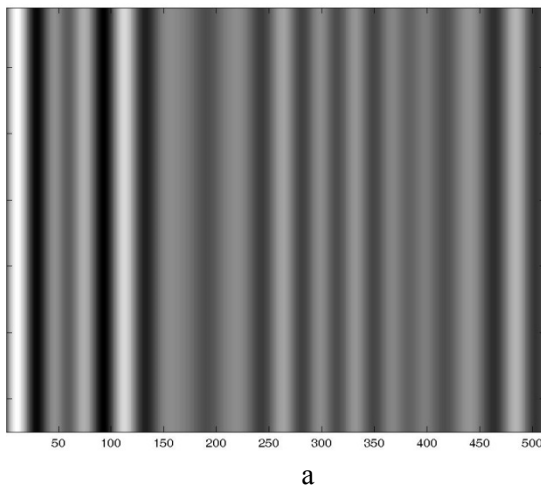


Рис. 1. Модельное изображение: а – в виде изображения, б – профиль

Fig. 1. Model image: a – in the form of images, b – profile

В ходе экспериментов были использованы следующие значения границ подобласти пространственных частот

$$\beta_{01} = 0.035\pi, \quad \beta_{02} = 0.04\pi, \quad \Delta\beta = 0.0025\pi. \quad (17)$$

В таблице представлены значения долей энергии выходных последовательностей оптимального и других анализируемых фильтров, находящихся вне заданной подобласти пространственных частот, вычисленные согласно (7), (12)-(14).

Как показано в ходе экспериментов выходная последовательность оптимального фильтра

определяется только трансформантой Фурье в выбранной подобласти пространственных частот. В отличие от этого, на выходную последовательность идеального, Гауссова фильтров и фильтра Баттерворта влияет энергия входного изображения, сосредоточенная вне выбранной подобласти пространственных частот. Это различие легко обнаружить на рис. 2, на котором представлены абсолютные значения трансформант Фурье выходных последовательностей оптимального и других фильтров.

Таблица 1

Оценка долей энергии результатов фильтрации вне подобласти пространственных частот Ω

Table 1

Estimation of the energy share of filtered results outside the subdomain of spatial frequencies Ω

№	Границы ППЧ Ω		$\delta_{\Omega Opt}$	$\delta_{\Omega Ideal}$	$\delta_{\Omega Butterw}$	$\delta_{\Omega Gaussian}$
	β_1	β_2				
1	0.035π	0.04π	0.13211	0.28323	0.27313	0.27189
2	0.0375π	0.0425π	0.3492	0.30822	0.31119	0.31036
3	0.04π	0.045π	0.13101	0.55406	0.55503	0.55472
4	0.0425π	0.0475π	0.34099	0.72638	0.55996	0.60419
5	0.045π	0.05π	0.41356	0.86981	0.87022	0.87001
6	0.0475π	0.0525π	0.23196	0.56816	0.57263	0.57082
7	0.05π	0.055π	0.34246	0.58755	0.6305	0.62484
8	0.0525π	0.0575π	0.12423	0.22294	0.22436	0.22396
9	0.055π	0.06π	0.33214	0.63152	0.6312	0.63129
10	0.0575π	0.0625π	0.40426	0.85964	0.7762	0.8095
11	0.06π	0.065π	0.1968	0.41986	0.4204	0.42016
12	0.0625π	0.0675π	0.24863	0.57319	0.57095	0.57158
13	0.065π	0.07π	0.4328	0.92163	0.92157	0.92155
14	0.0675π	0.0725π	0.47163	0.69156	0.69313	0.69208
15	0.07π	0.075π	0.20767	0.7969	0.68474	0.7815

Далее представлены результаты фильтрации модельного изображения (рис. 1) в подобласти пространственных частот

$$\Omega: \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi, \beta_1 = 0.04\pi, \beta_2 = 0.045\pi\}.$$

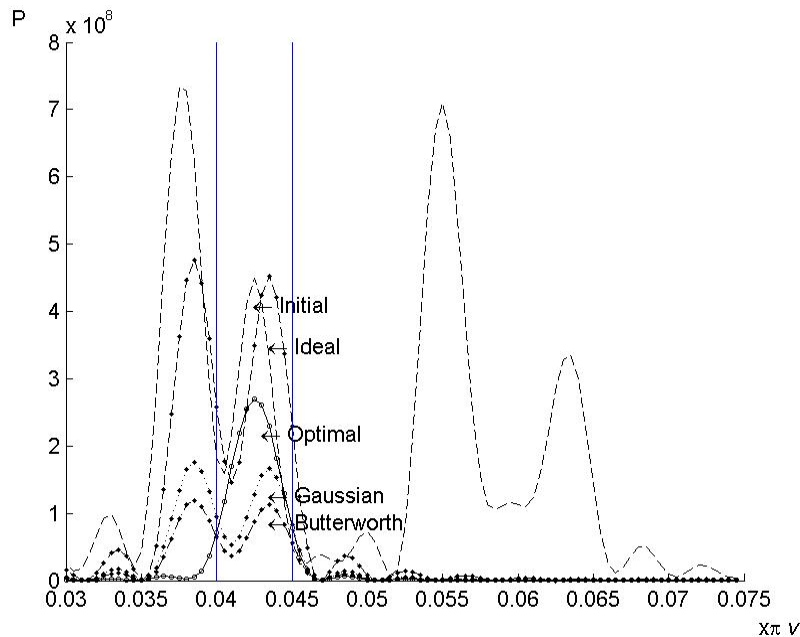


Рис. 2. Трансформанты Фурье (абсолютные значения) в подобласти пространственных частот $\alpha_1=0, \alpha_2=\pi, \beta_1 = 0.04\pi, \beta_2 = 0.045\pi$ при $u=0.22\pi$: ----- – исходного изображения; выходных последовательностей фильтров: $\blacklozenge\text{---}\blacklozenge$ – оптимальный, $\text{---}\blacklozenge\text{---}\blacklozenge$ – идеальный, $\cdots\blacklozenge\cdots\blacklozenge$ – Баттерворта, $\text{---}\blacklozenge\cdots\blacklozenge$ – Гауссов

Fig. 2. Fourier transforms (absolute values) in a subdomain of spatial frequencies $\alpha_1=0, \alpha_2=\pi, \beta_1 = 0.04\pi, \beta_2 = 0.045\pi$ at $u=0.22\pi$: ----- – original image; output sequences of filters: $\blacklozenge\text{---}\blacklozenge$ – optimal, $\text{---}\blacklozenge\text{---}\blacklozenge$ – ideal, $\cdots\blacklozenge\cdots\blacklozenge$ – Butterworth, $\text{---}\blacklozenge\cdots\blacklozenge$ – Gaussian

На рис. 2 приведены абсолютные значения трансформант Фурье при $u=0.22\pi$, $v \in [0.03\pi, 0.075\pi]$ исходного изображения и результатов фильтрации, полученных при применении оптимального и других фильтров в заданной подобласти пространственных частот Ω .

На рис. 3 влияние дополнительной энергии исходного изображения, сосредоточенной вне

выбранной подобласти пространственных частот у ее левой границы (рис. 2), проявляется в наличии существенных изменений яркости пикселей изображений (рис. 3в, 3д, 3ж), являющихся результатами фильтрации с помощью фильтров, отличных от оптимального фильтра, и в наличии биений на графиках соответствующих профилей изображений.

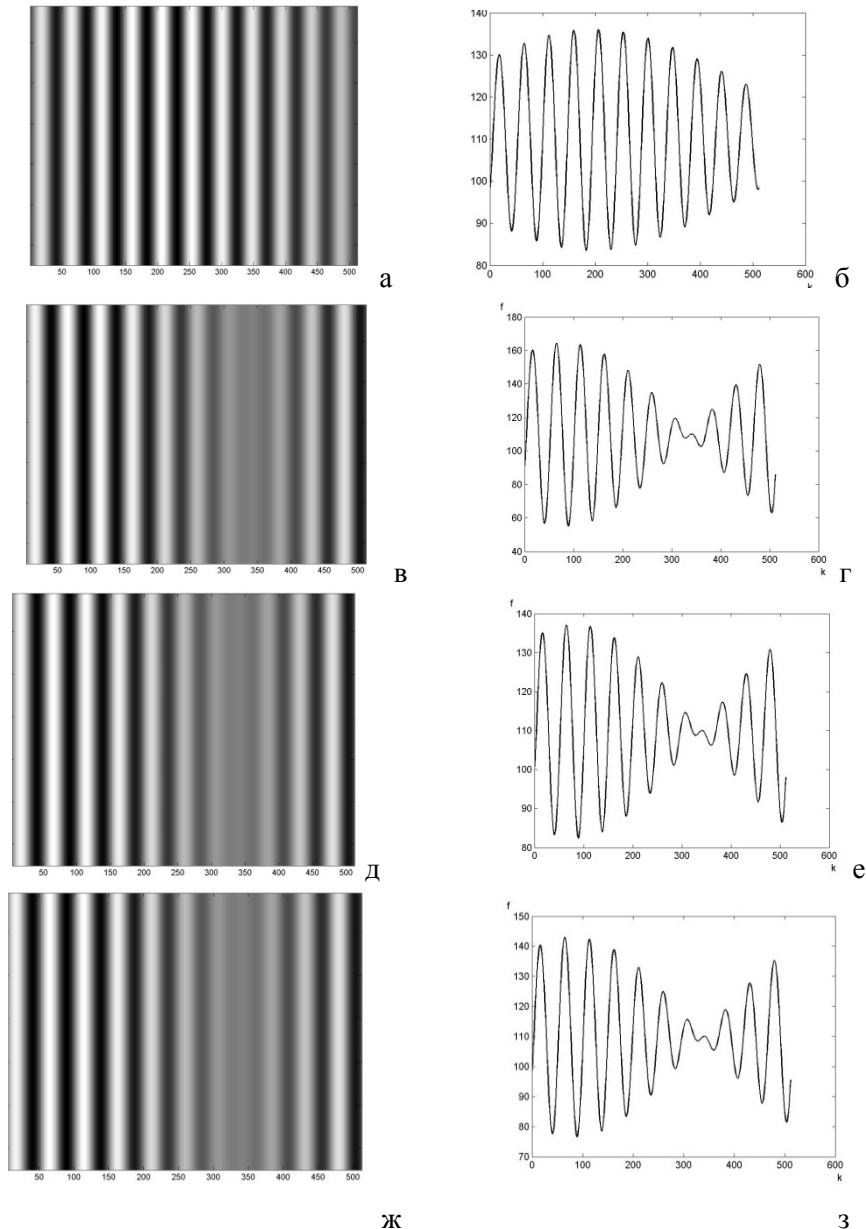


Рис. 3. Результаты фильтрации (изображение и профиль) на основании фильтров: а, б – оптимальный; в, г – идеальный; д, е – Баттерворта, ж, з – Гауссов

Fig. 3. The filter results (image and profile) based on the filters: a, b – optimal; c, d – ideal; e, f Butterworth; g, h – Gaussian

Выводы

Результаты вычислительных экспериментов как с модельными изображениями, так и с реальными фотоснимками в цифровом виде показывают, что относительные доли «просачивания» энергии за пределы указанной подобласти пространственных частот у выходных последовательностей частотных фильтров, основанных на применении ДПФ, существенно больше, чем у разработанного метода.

В ходе экспериментов показано, что энергия входного изображения, сосредоточенная вне выбранной подобласти пространственных частот, влияет на выходную частотных фильтров, основанных на применении ДПФ, в значительно большей степени, чем на результат, полученный на основании метода оптимальной фильтрации. Данное влияние проявляется как на графиках значений соответствующих трансформант Фурье, так и на изображениях, полученных в результате фильтрации.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-07-01570 (Субполосная скрытная интеграция/извлечение дополнительной информации в аудио или видео контенте).

Список литературы

1. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А. Вариационные алгоритмы анализа и обработки изображений на основе частотных представлений. Белгород: Издательство БелГУ, 2008. 146 с.
2. Жилияков Е.Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений. Белгород: Издательство БелГУ, 2007. 160 с.
3. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А. Optimal filtering images based on frequency representations // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ, 2008. Вып. 1. С. 118-131.
4. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006. 1072 с.

5. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В. О субполосной фильтрации изображений с применением компенсирующих коэффициентов // Техника и технологии – 2014: сборник статей Международной научно-технической конференции. 2014. С. 30-34.

6. Черноморец А.А., Лысенко И.В., Болгова Е.В. Компьютерная реализация алгоритма взвешенной оптимальной фильтрации изображений. Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ, 2012. Вып. 1. С. 103-111.

References

1. Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A. Variation Analysis Algorithms and Image Processing Based on the Frequency Representations. Belgorod: BSU publishing house, 2008. 146 p.
2. Zhilyakov E.G. Methods of Analysis and Construction of Functions from the Empirical data Based on Frequency Representations. Belgorod: BSU Publishing House, 2007. 160 p.
3. Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A. Optimal Filtering Images Based on Frequency Representations. Electronic Engineering. 2008. Part 1. Pp. 118-131.
4. Gonzalez R., Woods R. Digital Image Processing. Moscow: Tekhnosfera, 2006. 1072 p.
5. Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V. About Subband Filtering Images Based on the Use of Compensating Coefficients. Engineering and Technologies – 2014: collected works of the International Scientific and Technical Conference. 2014. Pp. 30-34.
6. Chernomorets A.A., Lysenko I.V., Bolgova E.V. Computer Implementation of Algorithm of the Weighed Optimal Image Filtration. Electronic Engineering. 2012. Part 1. Pp. 103-111.